Examenul de corigență - proba scrisă

Varianta I

Clasa a XII-a Specializarea Matematică-Informatică

Subiectul I (45 puncte)

1. Pe mulțimea $M=(-10,10)$ se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\frac{100(x+y)}{xy+100}$.

a) Arătați că $3*0=3$.

b) Se consideră $f:M\to(0,+\infty)$, $f(x)=\frac{10-x}{10+x}$. Demonstrați că $f(x*y)=f(x)f(y)$, pentru orice $x, y\in M$.

c) Determinați $x\in M$ pentru care $\underbrace{x*x*...*x}_{\text{de 11 ori } x}=0$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=xy+m(x+y)$, unde m este număr real.

a) Arătați că $(-1)*1=-1$, pentru orice număr real m.

b) Demonstrați că $x*y=(x+m)(y+m)-m^2$, pentru orice numere reale x, y și m.

c) Pentru $m=-1$, determinați numerele reale x pentru care $5^x*5^{x+1}=-1$.

Subiectul II (45 puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x^2+4}$.

a) Arătați că $\int_0^2 f(x)dx=\frac{\pi}{8}$.

b) Pentru fiecare număr natural n, considerăm numărul $I_n=\int_0^1 f^n(x)dx$. Arătați că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=0$.

c) Determinați numărul real a, $a>0$, pentru care $\int_0^a xf(x)dx=\frac{1}{2}\ln\frac{5}{4}$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x(x+2)e^x$.

a) Arătați că $\int_0^3 \frac{f(x)}{e^x}dx=18$.

b) Calculați $\int_0^1 f(x)dx$.

c) Determinați numărul natural nenul n, știind că $\int_1^n \frac{(x+1)e^x}{f(x)}dx=\frac{3\ln 2}{2}$.

Fiecare subpunct valorează 0,75 puncte

Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru 90 minute.

Examenul de corigență - proba scrisă

Varianta II

Clasa a XII-a Specializarea Matematică-Informatică

Subiectul I (45 puncte)

1. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = xy - x - y + 2$.

a) Arătați că $x \circ y = (x-1)(y-1)+1$, pentru orice numere reale x și y.

b) Determinați numerele reale x pentru care $x \circ x \leq 5$.

c) Calculați $1^n \circ 2^n \circ 3^n \circ \ldots \circ 2020^n$, pentru orice număr natural nenul n.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = x\sqrt{y^2+1} + y\sqrt{x^2+1}$.

a) Arătați că $2 * (-2) = 0$.

b) Verificați dacă $e = 0$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

c) Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{e^{2x}-1}{2e^x}$. Arătați că $f(x) * f(y) = f(x+y)$, pentru orice numere reale x și y.

Subiectul II (45 puncte)

1. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2+2)e^{-x}$.

a) Arătați că $\int_1^4 e^x f(x)\,dx = 27$.

b) Calculați $\int_1^e f(\ln x)\,dx$.

c) Arătați că $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} \int_0^x f(t)\,dt = 2$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R}\setminus\{-1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$.

a) Arătați că $\int_1^2 f(x)(x+1)\,dx = \dfrac{1}{2}$.

b) Arătați că $\int_2^3 f(x)\,dx = 1 + \ln\dfrac{9}{16}$.

c) Determinați numărul real $a > 1$ astfel încât $\int_1^a f(x) f'(x)\,dx = \dfrac{1}{8}$.

Fiecare subpunct valorează 0,75 puncte

Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru 90 minute.

Examenul de corigență - proba scrisă

Varianta I

Clasa a XII-a Specializarea Științe ale Naturii

Subiectul I (45 puncte)

1. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = xy - 5x - 5y + 30$.

a) Arătați că $5 \circ 2021 = 5$.

b) Demonstrați că $x \circ y = (x-5)(y-5)+5$, pentru orice numere reale x și y.

c) Determinați numerele întregi m și n pentru care $m^2 \circ n = 16$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = 3xy - \frac{x+y}{3} + 1$.

a) Arătați că $1 * 5 = 14$.

b) Determinați numărul real x pentru care $3 * x = -52$.

c) Determinați numerele naturale n pentru care $n * (0 * (3n)) \geq \frac{2n}{3}$.

Subiectul II (45 puncte)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (2x-1)(x+1)$.

a) Arătați că $\int_1^5 \frac{f(x)}{x+1} dx = 20$.

b) Calculați $\int_1^2 \frac{f(x)}{x^2} dx$.

c) Determinați numărul real a, $a \in \left[\frac{1}{2}, 2\right)$, știind că $\int_a^2 f'(x)\sqrt{f(x)}dx = 18$.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2+2} + \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$.

a) Arătaţi că $\int_0^1 f(x)\sqrt{x^2+2}\, dx = \frac{17}{6}$.

b) Demonstrați că orice primitivă a funcției f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

c) Se consideră funcția $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$. Determinați $a \in (0, +\infty)$ pentru care $\int_0^1 g(x)dx = \frac{\sqrt{3}}{2} + \ln\frac{a+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.

Fiecare subpunct valorează 0,75 puncte

Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru 90 minute

Examenul de corigență - proba scrisă

Varianta II

Clasa a XII-a Specializarea Științe ale Naturii

Subiectul I (45 puncte)

1. Pe mulțimea $M=[-1,1]$ se definește legea de compoziție $x\circ y=x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}$.

a) Arătați că $0\circ 1=1$.

b) Determinați $x\in M$ pentru care $x\circ x=0$.

c) Demonstrați că $x\circ\sqrt{1-x^2}=1$, pentru orice $x\in[0,1]$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă şi cu element neutru $x\circ y=xy-\sqrt{2}(x+y-1)+2$.

a) Arătați că $\sqrt{2}\circ 0=\sqrt{2}$.

b) Determinați numerele reale x pentru care $\left(x-\sqrt{2}\right)\circ\left(x+\sqrt{2}\right)=x$.

c) Determinați numerele raționale al căror simetric în raport cu legea de compoziție „$\circ$” este număr rațional.

Subiectul II (45 puncte)

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\frac{1}{x}$.

a) Arătați că $\int_1^3\left(f(x)+\frac{1}{x}\right)dx=4$.

b) Arătați că $\int_1^2\left(f(x)+\frac{1}{x}\right)\ln x\,dx=2\ln 2-\frac{3}{4}$.

c) Determinați cel mai mare număr natural nenul n pentru care $\int_1^{\sqrt{2}}x^{n+1}f^n(x)\,dx\geq\frac{1}{2021}$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x\left(x^2-4x+5\right)$.

a) Arătaţi că $\int_0^1\frac{f(x)}{e^x}\,dx=\frac{10}{3}$.

b) Demonstrați că orice primitivă a funcției f este convexă.

c) Determinați numerele reale a, b și c astfel încât funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=e^x\left(ax^2+bx+c\right)$ este o primitivă a funcției f.

Fiecare subpunct valorează 0,75 puncte

Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru 90 minute