ADRIAN STAN

MATEMATICĂ PENTRU CLASA A XII- a

Matematică Tehnlogic - Lucrare ştiinţifică

Editura Editgraph, Buzău, 2021

Referenți științifici:

Prof. univ. dr. Emil C.Popa, Universitatea „ Lucian Blaga” Sibiu
Prof. univ. dr. Vasile Mircea Popa, Universitatea „ Lucian Blaga” Sibiu
Prof. univ. dr. Radu Diaconu, Universitatea „ Lucian Blaga” Sibiu

ISBN: 978-606-9743-28-7
Editor: Florin Comăniță
Corectură: Stanciu Neculai
Tehnoredactare: Adrian Stan
Coperta: Adrian Stan

Tipar: editgraph Buzău
www.editgraph.ro

ADRIAN STAN

MATEMATICĂ PENTRU CLASA A XII- a

Matematică Tehnlogic - Lucrare ştiinţifică

Editura Editgraph, Buzău, 2021

Referenți științifici:

Prof. univ. dr. Emil C.Popa, Universitatea „ Lucian Blaga” Sibiu
Prof. univ. dr. Vasile Mircea Popa, Universitatea „ Lucian Blaga” Sibiu
Prof. univ. dr. Radu Diaconu, Universitatea „ Lucian Blaga” Sibiu

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
STAN, ADRIAN
Matematică pentru clasa a XII-a : matematică tehnlogic : lucrare ştiinţifică / Adrian Stan. - Buzău : Editgraph, 2021
Conţine bibliografie
ISBN 978-606-9743-28-7

51

ISBN: 978-606-9743-28-7
Editor: Florin Comăniță
Corectură: Stanciu Neculai
Tehnoredactare: Adrian Stan
Coperta: Adrian Stan

Tipar: editgraph Buzău
www.editgraph.ro

CUPRINS

		Pagina
	RECAPITULARE clasa a XI-a	7
	Partea I. STRUCTURI ALGEBRICE	19
I.	**Legi de compoziție**	19
1	Legi de compoziție. Definiție	19
2	Parte stabilă	25
3	Asociativitatea și comutativitatea unei legi de compoziție	29
4	Element neutru. Elemente simetrizabile ale unei legi de compoziție	33
5	Exerciții recapitulative	37
II	**Grupuri**	41
1	Grupuri. Definiție	41
2	Morfisme și izomorfisme de grupuri	45
III	**Inele și corpuri**	49
1	Inele și corpuri. Definiție	49
2	Morfisme și izomorfisme de inele și corpuri	54
3	Inelul claselor de resturi modulo n	57
IV	**Inele de polinoame**	63
1	**Operații cu polinoame**	63
1.1	Forma algebrică a unui polinom	63
1.2	Valoarea numerică a unui polinom	68
1.3	Operații cu polinoame	74
1.4	Schema lui Horner	85
2	**Divizibilitatea polinoamelor**	90
2.1	Divizibilitatea polinoamelor. Definiție	90
2.2	Cel mai mare divizor comun. Cel mai mic multiplu comun a două polinoame	96
3	**Rădăcinile polinoamelor**	**100**
3.1	Ecuații polinomiale	100
3.2	Descompunerea polinoamelor. Polinoame ireductibile	106
3.3	Relațiile lui Viete	113
3.4	Polinoame cu coeficienți numere raționale, reale, complexe	122
3.5	Exerciții recapitulative	127
	Partea a II –a ANALIZĂ MATEMATICĂ	
I	**Primitive**	**133**
1	Primitive. Funcţii care admit primitive	133
2	Monotonia şi convexitatea funcţiilor care admit primitive	141
3	Integrala nedefinită	144
4	Integrarea funcţiilor raţionale	153

II	**Integrala definită**	**159**
1	Integrala definită. Formula Leibniz Newton	159
2	Proprietăţi ale integralei definite	166
III	**Metode de integrare**	**172**
1	Metoda de integrare prin părţi	172
2	Metoda schimbării de variabilă	176
3	Integrarea funcţiilor raţionale	181
IV	**Aplicaţii ale integralei definite**	**186**
1	Aria subgraficului unei funcţii	186
2	Volumul unui corp de rotaţie	189
3	Alte aplicaţii ale integralei definite	192
4	Aplicaţii practice ale integralei definite	199
V	**Exerciţii recapitulative**	**204**
VI	**Modele de teste pentru bacalaureat**	**208**
	Partea a III –a INDICATII ŞI RĂSPUNSURI	
	ALGEBRĂ	218
I.	Legi de compoziţie	218
II	Grupuri	221
III	Inele şi corpuri	221
IV	Inele de polinoame	222
	ANALIZA MATEMATICA	229
I	Primitive	229
II	Integrala definită	231
III	Metode de integrare	234
IV	Aplicaţii ale integralei definite	239
V	Exerciţii recapitulative	240
VI	Modele de teste pentru bacalaureat	243
	Breviar teoretic	256
	Bibliografie	285

RECAPITULARE clasa a XI-a

Următoarele exerciţii sunt selectate din exerciţiile propuse la testele de antrenament pentru bacalaureat 2020, 2021 şi în subiectele de bacalaureat date în ultimii ani.

ALGEBRĂ

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a+1 & 2a+1 \\ a & 2a \end{pmatrix},\ a\in\mathbb{R}.$

a) Arătaţi că $\det\left(A(10)\right)=10.$

b) Demonstraţi că $\left(A(a)-A(b)\right)\cdot\left(A(a)-A(b)\right)=3(a-b)\left(A(a)-A(b)\right),\ \forall a,b\in\mathbb{R}.$

c) Determinaţi numărul natural n pentru care
$\det\left(A(2)\right)+\det\left(A(3)\right)+.....+\det\left(A(n)\right)=35.$

2. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 1-10a & 8a \\ +5a & 1+4a \end{pmatrix},\ a\in\mathbb{R}.$

a) Arătaţi că $\det\left(A(1)\right)=-5.$

b) Demonstraţi că $A(a)\cdot A(b)=A(a+b-6ab)\ ,\ \forall a,b\in\mathbb{R}.$

c) Determinaţi numerele naturale m şi n, pentru care $A(m)\cdot A(n)=A(6-5mn)$.

3. Se consideră matricele $M=\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ şi $A(a)=\begin{pmatrix} 2+a & 2 \\ 2 & 1+a \end{pmatrix},\ a\in\mathbb{R}.$

a) Arătaţi că $\det M=4.$

b) Arătaţi că $A(a)\cdot A(-a)+a^2\cdot I_2=M,\ \forall a\in\mathbb{R},$ unde $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) Determinaţi matricea $X\in M_2(\mathbb{R})$, ştiind că $M\cdot X=A(0)$

4. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},\ I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $M(a)=I_2+aA,\ a\in\mathbb{R}.$

a) Arătaţi că $\det\left(M(1)\right)=-1.$

b) Demonstraţi că $M(a)\cdot M(b)-M(a+b)=2abM(0),\ \forall a,b\in\mathbb{R}.$

c) Determinaţi matricea $X\in M_2(\mathbb{R})$, ştiind că $X\cdot M(1)=M(0)$.

5. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $A(x)=\begin{pmatrix} x-3 & 1 \\ 1 & 3-x \end{pmatrix},\ x\in\mathbb{R}.$

a) Arătaţi că $\det\left(A(1)\right)=-5.$

b) Demonstraţi că $A(x)+A(-x)=2A(0),\ \forall x\in\mathbb{R}.$

c) Determinaţi numerele reale x pentru care $A(x)\cdot A(x)=10\cdot I_2.$

6. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$.

a) Arătaţi că $\det A=-1.$

b) Demonstraţi că $A\cdot A\cdot A=A$.
c) Determinaţi matricea $X\in M_2(\mathbb{R})$, astfel încât $A\cdot X=I_2+3A$.

7. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

a) Arătaţi că $\det(A-B)=1$.
b) Demonstraţi că matricea $C=A\cdot A+B\cdot B$ nu este inversabilă.
c) Determinaţi numerele reale x şi y pentru care $A\cdot X=X\cdot B$, unde $X=\begin{pmatrix}1 & 2\\ x & y\end{pmatrix}$.

8. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}3 & 6\\ -2 & -4\end{pmatrix}$, $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$şi $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

a) Arătaţi că $\det(A)=0$.
b) Arătaţi că $A\cdot A+A=O_2$.
c) Demonstraţi că există o infinitate de matrice $X\in M_2(\mathbb{R})$ astfel
încât $\det X=\det(X+I_2)$.

9. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ şi $I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

a) Să se arate că $\det(A+I_3)=4.$;
b) Demonstraţi că $A\cdot A\cdot A+A=2A\cdot A$;
c) Determinaţi mulţimea valorilor reale ale lui x pentru care matricea $B(x)=A+x\cdot I_3$ este inversabilă.

10. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 3\end{pmatrix}$.

a) Arătaţi că $\det(A+I_2)=5$.
b) Arătaţi că $A\cdot A=4A$;
c) Demonstraţi că există o infinitate de matrice $X\in M_2(\mathbb{R})$, pentru care $A\cdot X=X\cdot A$.

11. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -2\end{pmatrix}$ şi $B(x;y)=\begin{pmatrix}x & 1\\ y & -1\end{pmatrix}$ unde x şi y sunt numere reale.
a) Arătaţi că $\det A=-4$.
b) Arătaţi că $\det(A-2B(x;y))=0,\forall x,y\in\mathbb{R}$.
c) Determinaţi numerele reale x şi y pentru care $A\cdot B(x;y)=B(x;y)\cdot A$.

12. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}$, $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$şi $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ unde x şi y sunt numere reale.
a) Arătaţi că $\det A=1$.
b) Arătaţi că $2A-A\cdot A=I_2$.
c) Determinaţi numerele reale x, y şi z pentru care $A\cdot\begin{pmatrix}x-2 & y\\ z+1 & 1\end{pmatrix}-I_2=O_2$.

13. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ şi $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

a) Arătaţi că $\det A=1$.

b) Arătaţi că $B\cdot B+A=O_2$.

c) Determinaţi $x,y\in(0;\infty)$, pentru care $A\cdot B+B\cdot A-(A+B)=\begin{pmatrix}\log_2 x & 0\\ 0 & \log_3 y\end{pmatrix}$.

14. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ şi $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

a) Arătaţi că $\det A=0$.

b) Determinaţi numărul real x pentru care $A\cdot A=xA$.

c) Determinaţi matricea $\det(A+I_2)+\det(A-I_2)=\det(aI_2)$.

15. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & -3\\ 3 & 1\end{pmatrix}$ şi $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ unde x şi y sunt numere reale.

a) Arătaţi că $\det A=7$.

b) Arătaţi că $2B+I_2=3A$.

c) Determinaţi matricea $X\in M_2(\mathbb{R})$ pentru care $A\cdot X-B\cdot X=I_2-X$.

(Bac 2021-M tehnologic, iulie)

16. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}a+1 & 1\\ 1 & a-1\end{pmatrix}$, $a\in\mathbb{R}$. .

a) Arătaţi că $\det A(a)=-2$.

b) Arătaţi că $A(a)\cdot A(-a)=(2-a^2)I_2$, $\forall a\in\mathbb{R}$

c) Determinaţi matricea $X\in M_2(\mathbb{R})$ ştiind că $A(1)\cdot X=A(2)$

(Bac 2020-M tehnologic, august)

17. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ şi $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

a) Arătaţi că $\det A=2$.

b) Arătaţi că $3A-A\cdot A=2I_2$.

c) Determinaţi numărul real x pentru care $(xA-I_2)\cdot(xA-I_2)=5A-I_2$.

(Bac 2020-M tehnologic, iulie)

18. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ şi $M(a)=\begin{pmatrix}1+a & -a\\ a & 1-a\end{pmatrix}$.

a) Arătaţi că $\det A=-2$.

b) Demonstraţi că $M(a)\cdot M(b)=M(a+b)$, $\forall a,b\in\mathbb{R}$.

c) Determinaţi matricea $X\in M_2(\mathbb{R})$ pentru care $M(1)\cdot X\cdot M(2)=A$.

(Bac 2019-M tehnologic, august)

19. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}6 & -10\\ 3 & -5\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $M(a)=I_2+aA$ unde $a\in\mathbb{R}$.

a) Arătaţi că $\det A=0$.

b) Demonstraţi că $M(a)\cdot M(b)=M(a+b+ab),\ \forall a,b\in\mathbb{R}$.

c) Determinaţi numărul real a pentru care
$M(1)+M(2)+M(3)+.....+M(2019)=2019M(a)$.

(Bac 2019-M tehnologic, iulie)

20. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & -5\\ 2 & 6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6 & 5\\ -2 & 1\end{pmatrix}$ şi $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

a) Arătaţi că $\det A=16$.

b) Determinaţi numărul real a pentru care $A\cdot B=aI_2$.

c) Demonstraţi că $\det\left(xA+\frac{1}{x}B\right)\geq 49,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

(Bac 2018-M tehnologic, iulie)

ANALIZA MATEMATICĂ

1. Se consideră funcţia $f:(0;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2\sqrt{x}(\ln x-1)$.

a) Arătaţi că $f^{/}(x)=\frac{\sqrt{x}(\ln x+1)}{x},\ x\in(0;\infty)$.

b) Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abcisă $x=\frac{1}{e}$ situat pe graficul funcţiei f;

c) Demonstraţi că $\sqrt{e}f(x)+4\geq 0,\ \forall x\in(0;\infty)$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^5-5x+2020$.

a) Arătaţi că $f^{/}(x)=5(x-1)(x+1)(x^2+1),\ x\in\mathbb{R}$.

b) Demonstraţi că funcţia f(x) este concavă pe $(-\infty;0]$.

c) Demonstraţi că ecuaţia $f(x)=2025$ nu admite nicio soluţie în intervalul $[-1;1]$.

3 . Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^3-3x^2+1$.

a) Arătaţi că $f^{/}(x)=6x(x-1),\ x\in\mathbb{R}$..

b) Arătaţi că $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-x^3+2x^2+x-2}{x-1}=2$.

c) Determinaţi abcisele punctelor situate pe graficul funcţiei f în care tangenta la graficul funcţiei f(x) este paralelă cu dreapta de ecuaţie $y=12x+2020$.

4. Se consideră funcţia $f:(-1;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+4x+4}{x+1}$.

a) Arătaţi că $f^{/}(x)=\frac{x(x+2)}{(x+1)^2},\ x\in(-1;\infty)$.

b) Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcţiei f(x);

c) Demonstraţi că funcţia f(x) este convexă.

5. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^5+5x^4+5x^3$.

a) Arătaţi că $f^{/}(x)=5x^2(x-3)(x-1),\ x\in\mathbb{R}$.

b) Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f(x) în punctul de abcisă x=1, situat pe graficul funcţiei f(x).
c) Demonstraţi că $-27 \le f(x) \le 1,\ \forall x \in [0;3]$.

6. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2(x-1)e^x$.
a) Arătaţi că $f^{I}(x)=2xe^x,\ x\in\mathbb{R}$.
b) Calculaţi $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f^{I}(x)}{x}$;
c) Demonstraţi că $xe^x \ge e^x-1,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

7. Se consideră funcţia $f:(0;\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} x^{2020}+1, & x\in(0;1] \\ \dfrac{x+1}{x}, & x\in(1;\infty) \end{cases}$
a) Arătaţi că funcţia f este continuă în $x_0=1$.
b) Determinaţi ecuaţia asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
c) Demonstraţi că funcţia $f^{I}(x)$ este crescătoare pe $(1;\infty)$.

8. Se consideră funcţia $f:(2;\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{(x-1)^2}{x-2}$
a) Arătaţi că $f^{I}(x)=\dfrac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2},\ x\in(2;\infty)$.
b) Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul x=3, situat pe graficul funcţiei f.
c) Demonstraţi că funcţia $f^{I}(x)$ este crescătoare pe $(2;\infty)$.

9. Se consideră funcţia $f:(0;\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-2\ln x$.
a) Arătaţi că $f^{I}(x)=\dfrac{2(x-1)(x+1)}{x},\ x\in(0;\infty)$.
b) Determinaţi intervalele de monotonie a funcţiei f.
c) Demonstraţi că $\ln\dfrac{2}{3}\le-\dfrac{5}{18}$

10. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$.
a) Arătaţi că $f^{I}(x)=\dfrac{4x}{(x^2+1)^2},\ x\in\mathbb{R}$.
b) Calculaţi $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f\ (x)}{x-1}$.
c) Demonstraţi că funcţia f este convexă pe $\left[-\dfrac{\sqrt{3}}{3};\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]$.

11. Se consideră funcţia $f:(0;\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x^2-1}{x}$.
a) Arătaţi că $f^{I}(x)=1+\dfrac{1}{x^2},\ x\in(0;\infty)$.
b) Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice spre infinit la graficul funcţiei f;
c) Demonstraţi că funcţia f este concavă.

12. Se consideră funcţia $f:(0;\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{4}{x}+\ln x-5$.

a) Arătaţi că $f^{\prime}(x)=\frac{x-4}{x^2},\ x\in(0;\infty)$.

b) Determinaţi intervalele de monotonie.

c) Arătaţi că nu există asimptotă spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

(Bac 2021-M tehnologic, iulie)

13. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{x^2+2x+3}{x^2+2x+2}$.

a) Arătaţi că $f^{\prime}(x)=\frac{-2(x+1)}{(x^2+2x+2)^2},\ x\in\mathbb{R}.$.

b) Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

c) Determinaţi imaginea funcţiei. (Bac 2020-M tehnologic, august)

14. Se consideră funcţia $f:(0;\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=(x-1)\ln x$.

a) Arătaţi că $f^{\prime}(x)=1-\frac{1}{x}+\ln x,\ x\in(0;\infty)$.

b) Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcţiei f.

c) Demonstraţi că funcţia f este descrescătoare pe intervalul $(0;1]$.

(Bac 2020-M tehnologic, iulie)

15. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{x}{x^6+5}$.

a) Arătaţi că $f^{\prime}(x)=\frac{5(1-x^3)(1+x^3)}{(x^6+5)^2},\ x\in\mathbb{R}.$

b) Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcţiei f.

c) Determinaţi mulţimea valorilor funcţiei f. (Bac 2019-M tehnologic, august)

16 . Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3-3x+5$.

a) Arătaţi că $f^{\prime}(x)=3(x-1)(x+1),\ x\in\mathbb{R}.$

b) Demonstraţi că funcţia f este convexă pe $[0;\infty)$.

c) Demonstraţi că $f\ (x)\le 7,\ \forall x\in(-\infty;1]$ (Bac 2019-M tehnologic, iulie)

17. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=(x-2)\cdot e^x$.

a) Arătaţi că $f^{\prime}(x)=(x-1)\cdot e^x,\ x\in\mathbb{R}.$

b) Arătaţi că $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$.

c) Demonstraţi că $-e\le f(x)\le 0,\ \forall x\in(-\infty;2]$ (Bac 2018-M tehnologic, iulie)

18. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3-3x^2+3$.

a) Arătaţi că $f^{\prime}(x)=3x(x-2),\ x\in\mathbb{R}.$

b) Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcţiei f.

c) Demonstraţi că $f(x)\ge -1,\ \forall x\in[0;\infty)$. (Bac 2018-M tehnologic, august)

19 . Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3+6x+2$.

a) Arătaţi că $f^{I}(x)=3(x^2+2),\ x\in\mathbb{R}$.

b) Arătaţi că $\lim\limits_{x\to\ 0}\dfrac{f^{I}(x)}{x+2}=3$.

c) Demonstraţi că $-5\le f(x)\le 9,\ \forall x\in[-1;1]$ (Bac 2017-M tehnologic, iulie)

20 . Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x^3-6x+4$.

a) Arătaţi că $f^{I}(x)=6(x-1)(x+1),\ x\in\mathbb{R}$.

b) Arătaţi că $\lim\limits_{x\to\ 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=0$.

c) Demonstraţi că $0\le f(x)\le 8,\ \forall x\in[-1;1]$ (Bac 2017-M tehnologic, august)

Indicaţii şi răspunsuri:

1. a) $\det\big(A(10)\big)=11\cdot 20-21\cdot 10=10$; **b)** $A(a)-A(b)=(a-b)\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}$,

$\big(A(a)-A(b)\big)\cdot\big(A(a)-A(b)\big)=(a-b)\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}\cdot(a-b)\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}=3(a-b)\big(A(a)-A(b)\big),\ \forall a,b\in\mathbb{R}$.

c) $\det\big(A(a)\big)=a\Rightarrow\det\big(A(2)\big)+\det\big(A(3)\big)+.....+\det\big(A(n)\big)=35\Leftrightarrow$

$2+3+4+....+n+1-1=35\Rightarrow\ \dfrac{n(n+1)}{2}-1=35\Rightarrow n=8$.

2.

b) $A(a)\cdot A(b)=\big(I_2+aA\big)\cdot\big(I_2+bA\big)=I_2{}^2+(a+b)A+abA^2=I_2+(a+b-6ab)A=A(a+b-6ab)$

c) Din b) rezultă $A(m)\cdot A(n)=A(6-5mn)\Rightarrow A(m+n-6mn)=A(6-5mn)$ de unde

$m+n+6mn=6-5mn\Rightarrow(m-1)(n-1)=-5\Rightarrow\ (m,n)\in\big\{(0;6),(4;0)\big\}$.

3. b)

$A(a)\cdot A(-a)+a^2\cdot I_2=\begin{pmatrix}2+a&2\\2&1+a\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2-a&2\\2&1-a\end{pmatrix}+a^2\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8-a^2&6\\6&5-a^2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a^2&0\\0&a^2\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}8&6\\6&5\end{pmatrix}=M$. **c)** $M\cdot X=A(0)\Rightarrow X=M^{-1}\cdot A(0)=\dfrac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix}-2&4\\4&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&1\\1&1\end{pmatrix}$.

4. a) $\det M(A)=1-2a^2\Rightarrow\det M(1)=1-2\cdot 1=-1$.

b) $M(a)\cdot M(b)=I_2+(a+b)A+ab\cdot 2\cdot M(0)=M(a+b)+2abM(0)$.

c) $X\cdot M(1)=M(0)\Rightarrow X=M(0)\cdot M(1)^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1\\-2&1\end{pmatrix}$.

5. b) $A(x)+A(-x)=\begin{pmatrix}x-3&1\\1&3-x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-x-3&1\\1&3+x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6&2\\2&6\end{pmatrix}=2\cdot A(0)$.

c) $A(x)\cdot A(x)=10\cdot I_2\Rightarrow\begin{pmatrix}(x-3)^2+1&0\\0&1+(3-x)^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&0\\0&10\end{pmatrix}\Rightarrow$

$(x-3)^2+1=10\Rightarrow(x-3)^2=9\Rightarrow x\in\{0;6\}$.

6. b) $A\cdot A\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot A=A.$

c) $A\cdot X=I_2+3A\Leftrightarrow\begin{pmatrix}3 & 2\\ -4 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}9 & 6\\ -12 & -9\end{pmatrix}\Rightarrow$

$\begin{pmatrix}3a+2c & 3b+2d\\ -4a-3c & -4b-3d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & 6\\ -12 & -8\end{pmatrix}\Rightarrow a=6,b=2,c=-4,d=0.\quad X=\begin{pmatrix}6 & 2\\ -4 & 0\end{pmatrix}.$

7. b) $C=A\cdot A+B\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow\det C=0$, deci C nu este imnversabilă.

c) $A\cdot X=X\cdot B\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ x & y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ x & y\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1+x & 2+y\\ x & y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 2\\ x+y & y\end{pmatrix}\Rightarrow$

$1+x=3\Rightarrow x=2;$ şi $2+y=2\Rightarrow y=0.$

8. b) $A\cdot A+A=\begin{pmatrix}-3 & -6\\ 2 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 6\\ -2 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=O_2$

c) $X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\Rightarrow X+I_2=\begin{pmatrix}a+1 & b\\ c & d+1\end{pmatrix}\Rightarrow\ ad-bc=ad+a+d+1-bc\Rightarrow a+d+1=0$ care are o infinitate de soluţii reale.

9. b) $A\cdot A\cdot A+A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}+A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 5 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 2 & 6 & 2\end{pmatrix}=2A.$

c) $B(x)=A+x\cdot I_3=\begin{pmatrix}x & 1 & 0\\ 0 & x+1 & 0\\ 1 & 1 & x+1\end{pmatrix}.$ B este inversabilă dacă şi numai dacă determinantul lui B este diferit de 0. $\det\left(B(x)\right)=x(x+1)^2=0\Rightarrow x\in\{-1;0\}.$ Aşadar, B este inversabilă $\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}-\{-1;0\}.$

10. b) $A\cdot A=\begin{pmatrix}4 & 4\\ 12 & 12\end{pmatrix}=4\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 3\end{pmatrix}=4A.$

c) $A\cdot X=X\cdot A\Leftrightarrow\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\Rightarrow$

$\begin{pmatrix}a+3b & a+3b\\ c+3d & c+3d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+c & b+d\\ 3a+3c & 3b+3d\end{pmatrix}\Rightarrow$

$c=3b,\ d=a+2b\Rightarrow X=\begin{pmatrix}a & b\\ 3b & a+2b\end{pmatrix},\ a,b\in\mathbb{R}\Rightarrow$ că există o infinitate de matrice de forma lui X.

11. b) $\det(A-2B(x;y))=\begin{vmatrix}1-2x & 0\\ 1-2y & 0\end{vmatrix}=0.$

c) $A\cdot B(x;y)=B(x;y)\cdot A\Rightarrow\begin{pmatrix}x+2y & -1\\ x-2y & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+1 & 2x-2\\ y-1 & 2y+2\end{pmatrix}\Rightarrow x=\frac{1}{2},\ y=\frac{1}{2}.$

12. b) $2A-A\cdot A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -4 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ -4 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2.$

c) $A\cdot\begin{pmatrix} x-2 & y \\ z+1 & 1 \end{pmatrix}-I_2=O_2\Rightarrow\begin{pmatrix} x-2-1 & y \\ -2x+4-z-1 & -2y+1-1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow x=3, y=0; z=-3$.

13. b) $B\cdot B+A=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=O_2$;

c) $A\cdot B+B\cdot A-(A+B)=\begin{pmatrix} \log_2 x & 0 \\ 0 & \log_3 y \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \log_2 x & 0 \\ 0 & \log_3 y \end{pmatrix}\Rightarrow$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \log_2 x & 0 \\ 0 & \log_3 y \end{pmatrix}\Rightarrow x=2,\ y=3.$

14. b) $A\cdot A=xA\Rightarrow\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2x & x \\ 2x & x \end{pmatrix}\Rightarrow x=3.$

c) $\det(A+I_2)+\det(A-I_2)=\det\left(aI_2\right)\Rightarrow\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix}\Rightarrow a^2=2\Rightarrow a=\pm\sqrt{2}.$

15. b) $2B+I_2=2\cdot\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}=3\cdot\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=3A..$

c) $(A-B+I_2)\cdot X=I_2\Rightarrow X=\left(A-B+I_2\right)^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

16. b) $A(a)\cdot A(-a)=\begin{pmatrix} 2-a^2 & 0 \\ 0 & 2-a^2 \end{pmatrix}=(2-a^2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=(2-a^2)\cdot I_2.$

c) $A(1)^{-1}=\begin{pmatrix} 0 &] \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\Rightarrow X=A(1)^{-1}\cdot A(2)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$

18. b) $M(a)\cdot M(b)=\begin{pmatrix} 1+a+b & -b-a \\ a+b & 1-a-b \end{pmatrix}=M(a+b),\ \forall a,b\in\mathbb{R}.$

c) $M(1)\cdot X\cdot M(2)=A\Rightarrow X=M(1)^{-1}\cdot A\cdot M(2)^{-1}=\begin{pmatrix} -11 & 18 \\ -17 & 28 \end{pmatrix}$ unde $M(a)^{-1}=M(-1)$ care s-a obţinut din relaţia $M(a)\cdot M(-1)=M(0).$

19. b) $A\cdot A=A$ şi

$M(a)\cdot M(b)=\left(I_2+aA\right)\cdot\left(I_2+ab\right)=I_2+aA+bA+abA\cdot A=I_2+(a+b+ab)A=M(a+b+ab)$.

c) $M(1)+M(2)+M(3)+.....+M(2019)=2019M(a)\Rightarrow$

$(I_2+A)+(I_2+2A)+....(I_2+2019A)=2019I_2+(1+2+....+2019)A\Rightarrow a=1010.$

20. b) $\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}=a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow a=16.$

c) $\det\left(xA+\frac{1}{x}B\right)=\begin{vmatrix} x+\frac{6}{x} & -5x+\frac{5}{x} \\ 2x-\frac{2}{x} & 6x+\frac{1}{x} \end{vmatrix}=16x^2+\frac{16}{x^2}+17\geq 49\Leftrightarrow 16(x-\frac{1}{x})^2\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}^*.$

ANALIZA MATEMATICĂ

1. a) $f^I(x)=\left(2\sqrt{x}\right)^I\cdot(\ln x-1)+2\sqrt{x}\cdot(\ln x-1)^I=2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot(\ln x-1)+2\sqrt{x}\cdot\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{x}(\ln x+1)}{x}$.

b) Formula ecuaţiei tangentei în x_0 este $y-y_0=f^I(x)(x-x_0)$.

$y_0=f(x_0)=f(\frac{1}{e})=\frac{2}{\sqrt{e}}\cdot(-2)$.

$f^I(\frac{1}{e})=0\Rightarrow$ ecuaţia tangentei este $y=-\frac{4}{\sqrt{e}}$.

c) $f^I(x)=0\Rightarrow\sqrt{x}(\ln x+1)=0\Rightarrow x\in\left\{0;\frac{1}{e}\right\}$. Conform monotoniei funcţiei se observă că f (x) este strict descrescătoare pe $\left(0;\frac{1}{e}\right)$ şi strict crescătoare pe $\left(\frac{1}{e};\infty\right)$, deci $\frac{1}{e}$ este punct de minim iar minimul funcţiei este $f\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{4}{\sqrt{e}}\Rightarrow f(x)\geq-\frac{4}{\sqrt{e}},\ \forall x\in(0;\infty)$.

2. a) $f^I(x)=\left(x^5-5x+2020\right)^I=5x^4-5=5\left(x^4-1\right)=5\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)=5(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)$.

b) $f^{II}(x)=\left(5x^4-5\right)^I=20x^3\langle0,\ \forall x\in(-\infty;0]$. Deci f este concavă pe $(-\infty;0]$.

c) $f(x)=2025\Rightarrow x^5-5x-5=0$ ecuaţia nu are soluţii pe $[-1;1]$ deoarece dacă notăm $g(x)=x^5-5x-5$ atunci $g(-1)\cdot g(1)=-1\cdot(-9)=9\rangle0$.

3. b) $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-x^3+2x^2+x-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{3x^2-2x+1}{1}=2$;

c) (d)- ecuaţia tangentei: $y-y_0=f^I(x)(x-x_0)$;

(g)- $y=12x+2020$ având panta egală cu 12; Cum $d\parallel g\Rightarrow f^I(x_0)=m_g$. (*).

Punctele de abcisă se obţin rezolvând ecuaţia (*),

$6x^2-6x=12\Rightarrow x^2-x-2=0\Rightarrow x\in\{-1;2\}$.

4. a) $f^I(x)=\frac{\left(x^2+4x+4\right)^I\cdot(x+1)-(x^2+4x+4)\cdot(x+1)^I}{(x+1)^2}=\frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$.

b) Ecuaţia asimptotei oblice la infinit este $y=mx+n$ unde

$m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+4x+4}{(x+1)x}=1$,

$n=\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x+4}{x+1}=3$. Ecuaţia asimptotei spre infinit este $y=x+3$.

c) $f^{II}(x)=\left(\frac{x(x+2)}{(x+1)^2}\right)^I=\left(\frac{x^2+2x}{x^2+2x+1}\right)^I=\frac{2}{(x+1)^3}\rangle0,\ \forall x\rangle-1$. Aşadar, f(x) este convexă pe $(-1;\infty)$.

5. a) $f^I(x)=\left(x^5+5x^4+5x^3\right)^I=5x^4+20x^4+15x^2=5x^2(x^2-4x+3)=5x^2(x-3)(x-1)$.

b) $y-y_0=f^I(x)(x-x_0),\ x_0=1\Rightarrow y_0=f(1)=1,\ f^I(1)=0\Rightarrow y=1$ este ecuaţia tangentei.

c) $f^I(x)\le 0,\ \forall x\in[0;3]\Rightarrow$ f(x) este descrescătoare pe $[0;3]\Rightarrow\ f(3)\le f(x)\le f(0)\Rightarrow$ $-27\le f(x)\le 1$.

6. a) $f^I(x)=2(x-1)^I\cdot e^x+2(x-1)\cdot\left(e^x\right)^I=2xe^x$.

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f^I(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\cdot 2x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}e^x\cdot 2=2$;

c) $xe^x\ge e^x-1\Leftrightarrow xe^x-e^x+1\ge 0$. Notăm $f(x)=xe^x-e^x+1$. $f^I(x)=xe^x\ge 0,\forall x\ge 0\Rightarrow$ f este crescătoare pe $[0;\infty)$. Rezultă, $\forall x\ge 0\Rightarrow f(x)\ge f(0)=0\Rightarrow f(x)\ge 0$.

7. a) funcţia f este continuă în $x_0=1\Leftrightarrow l_s(1)=l_d(1)=f(1)=2$.

b) $y=b,\ b=\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{x}=1\Rightarrow y=1$.

c) $f^I(x)=\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^I=-\dfrac{1}{x^2}\Rightarrow f^{II}(x)=\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)^I=\dfrac{2}{x^3}\rangle 0,\ \forall x\rangle 1$. Rezultă că $f^I(x)$ este crescătoare deoarece $f^{II}(x)\rangle 0$.

8. a) $f^I(x)=\left(\dfrac{(x-1)^2}{x-2}\right)^I=\dfrac{(x^2+2x+1)^I\cdot(x-2)-(x^2+2x+1)\cdot(x-2)^I}{(x-2)^2}=\dfrac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}$.

b) $y-y_0=f^I(x)(x-x_0)\Rightarrow y-4=0\cdot(x-3)\Rightarrow y=4$.

c) $f^{II}(x)=\left(\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-4x+4}\right)^I=\dfrac{2x-4}{(x-2)^4}$. $f^I(x)$ este crescătoare pe $(2;\infty)$.

9. a) $f^I(x)=\left(x^2-2\ln x\right)^I=2x-\dfrac{2}{x}=\dfrac{2(x-1)(x+1)}{x}$.

b) $f^I(x)=0\Rightarrow x\in\{-1;1\}$. f(x) e descrescătoare pe $(0;1)$ şi crescătoare pe $[1;\infty)$.

c) $f(x)\ge f(1)\Rightarrow f(x)\ge 1\Rightarrow \ln x\le -\dfrac{1}{2}+\dfrac{x^2}{2}$. Pentru $x=\dfrac{2}{3}\Rightarrow \ln\dfrac{2}{3}\le -\dfrac{5}{18}$.

10. a) $f^I(x)=\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^I=\dfrac{(x^2-1)^I(x^2+1)-(x^2-1)(x^2+1)^I}{(x^2+1)^2}=\dfrac{4x}{(x^2+1)^2}$.

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f\ (x)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{(x^2+1)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{x^2+1}=1$.

c) $f^{II}(x)\rangle 0$ adică f este convexă pe intervalul cerut.

11. a) $f^I(x)=\left(\dfrac{x^2-1}{x}\right)^I=\dfrac{(x^2-1)^I(x)-(x^2-1)(x)^I}{(x)^2}=1+\dfrac{1}{x^2}$.

b) y=x; **c)** $f^{II}(x)=\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^I=\dfrac{-2}{x^3}\langle 0,\ \forall x\rangle 0$.

12. a) $f^I(x)=\left(\dfrac{4}{x}+\ln x-5\right)^I=\dfrac{-4}{x^2}+\overset{x)}{\dfrac{1}{x}}=\dfrac{x-4}{x^2}$.

b) f este descrescătoare pe $(0;4]$ şi este crescătoare pe $[4;\infty)$.

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f\ (x)}{x}=0$ şi $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$ deci nu există nici asimptotă orizontală, nici oblică.

13. a) $f^I(x)=\left(\frac{x^2+2x+3}{x^2+2x+2}\right)^I=\frac{\left(x^2+2x+3\right)^I\cdot\left(x^2+2x+2\right)-\left(x^2+2x+3\right)\cdot\left(x^2+2x+2\right)^I}{\left(x^2+2x+2\right)^2}=$

$=\frac{-2(x+1)}{(x^2+2x+2)^2}$.

b) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+2x+3}{x^2+2x+2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+2}{2x+2}=1.\Rightarrow y=1$ este ecuaţia asimptotei la infinit.

c) f este crescătoare pe $(-\infty;-1]$ şi este descrescătoare pe $[-1;\infty)$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=1$, $f(-1)=2$, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=1$, f este continuă şi $f(x)\neq 1$, pentru orice număr real x.

Imaginea lui f(x) este $\operatorname{Im} f=(1;2]$.

14. a) $f^I(x)=(x-1)^I\cdot\ln x+(x-1)\cdot(\ln x)^I=\ln x+\frac{x-1}{x}=\ln x+1-\frac{1}{x}$.

15. a) $f^I(x)=\left(\frac{x}{x^6+5}\right)^I=\frac{x^I\cdot(x^6+5)-x\cdot(x^6+5)^I}{(x^6+5)^2}=\frac{5(1-x^3)(1+x^3)}{(x^6+5)^2}$. **b)** ecuaţia tangentei este $y=\frac{1}{5}x$. **c)** f este continuă pe R, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$, $f(-1)=-\frac{1}{6}$, $f(1)=\frac{1}{6}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

Mulţimea valorilor funcţiei f este $\operatorname{Im} f=\left[-\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right]$.

16. a) $f^I(x)=\left(x^3-3x+5\right)^I=3x^2-3=3(x^2-1)=3(x-1)(x+1).$

b) $f^{II}(x)=6x\geq 0,\ \forall x\in[0;\infty)\Rightarrow$ f este convexă pe $[0;\infty)$.

c) f este crescătoare pe $(-\infty;-1]$ şi este descrescătoare pe $[-1;1]$.

$f(x)\leq f(-1)=7\Rightarrow f(x)\leq 7$.

17. a) $f^I(x)=(x-2)^I\cdot e^x+(x-1)\cdot(e^x)^I=(x-1)e^x$. **b)** $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\frac{1}{-e^{-x}}=0$.

c) f este crescătoare pe $[1;2]$ şi este descrescătoare pe $(-\infty;1]$.

$-e\leq f(x)\leq f(1)\leq f(2)=0\Rightarrow -e\leq f(x)\leq 0$.

18. b) Ecuaţia tangentei este $y=-3x+4$; **c)** $f(x)\geq f(2)=-1\Rightarrow f(x)\geq -1,\ \forall x\in[0;\infty)$.

Partea I .
STRUCTURI ALGEBRICE

I. Legi de compoziţie
II. Grupuri
III. Inele şi corpuri
IV. Inele de polinoame

I. Legi de compoziţie

1. Legi de compoziție. Definiție



Noțiunea de **structură algebrică** se referă la o mulțime nevidă de numere, pe care se definește una sau două funcții numite **legi de compoziție** și care verifică o serie de proprietăți numite **axiomele structurii**.

Din cele mai vechi timpuri, matematicienii au încercat să axiomatizeze geometria și aritmetica, să dea pentru fiecare disciplină un set riguros de reguli care să ducă la construcția matematică bazată pe logică și raționament deductiv al disciplinei.

După contribuțiile matematicianului francez **Evariste Galois** (1811-1832) la cercetarea teoriei grupurilor, și algebra a cunoscut o dezvoltare în determinarea unor structuri abstracte, a cuaternionilor reali, a vectorilor, a matricelor, a algebrei Boole, etc.

Definiţie

Fie $M \neq \varnothing$, (o mulţime nevidă). O aplicaţie φ definită pe produsul cartezian $M \times M$ cu valori în M, $\varphi : M \times M \to M$, $(x, y) \to \varphi\big((x, y)\big)$ se numeşte **lege de compoziţie** (internă) pe M.

Pentru fiecare pereche ordonată $(x; y)$ din $M \times M$ există un unic element $\varphi\big((x, y)\big)$ din M care se mai numește **compusul lui x cu y** prin legea de compoziție φ .

Exemple de legi de compoziţie:

a) $x * y = xy - 4x - 4y + 20, \forall x, y \in \mathbb{R}.$

b) $x \circ y = \sqrt{x^2 + y^2}, \forall x, y \in \mathbb{R}$;

c) $x \Delta y = \dfrac{x + y}{xy + 1}, \forall x, y \in (-1; 1)$.

Simbolurile "$*$", "$\circ$", "Δ"reprezintă operaţiile prin care sunt definite legile de compoziţie adică $\varphi((x,y)) = x * y$ sau $\varphi((x,y)) = x \circ y$ sau $\varphi((x,y)) = x \Delta y$.

Alte simboluri folosite sunt: $\top$, $\perp$, $\oplus$, $\otimes$, $\odot$, sau notaţia aditivă ‘’ + ‘’ şi notaţia multiplicativă
‘’ . ’’.

Cu ajutorul legilor de compoziţie putem avea de făcut o serie de calcule algebrice.

Exemplu 1: Pe $\mathbb{R}$ se definesc legile de mai sus : $x * y, x \circ y, x \Delta y$. Să se calculeze:

a) $2 * 3$; b) $1 \circ 2$; c) $4 \Delta 2014$;

Rezolvare: **a**) $2 * 3 = 2 \cdot 3 - 4 \cdot 2 - 4 \cdot 3 + 20 = 6 - 8 - 12 + 20 = 6$;

b) $1 \circ 2 = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$;

c) $4 \Delta 2014 = \dfrac{4 + 2014}{4 \cdot 2014 + 1} = \dfrac{2016}{8057}$.

De asemenea, putem avea de rezolvat ecuaţii şi inecuaţii algebrice:

Exemplu 2:

Pe $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziţie $x * y = xy - 2x - 2y + 6, \ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

a) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $x * 4 = 10$.

b) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuaţia $x * x \le 3$.

Rezolvare: a) Punând în legea de compoziţie în loc de y pe 4, ecuaţia dată $x * 4 = 10$ devine $4x - 2x - 8 + 6 = 10$ de unde rezultă că 2x=12 adică x=6;

b) Punând în legea de compoziţie în loc de y pe x se obţine inecuaţia $x^2 - 4x + 6 \le 3$ sau $x^2 - 4x + 3 \le 0$.

Pentru a rezolva inecuaţia de gradul doi, se asociază ecuaţia de gradul doi, $x^2 - 4x + 3 = 0$ căreia i se determină soluţiile: $x_1 = 1$ şi $x_2 = 3$. Prin urmare, funcţia de gradul doi din stînga este negativă între cele două soluţii (conform semnului unei funcţii de gradul doi), adică , în cazul nostru soluţia inecuaţiei date este $x \in [1;3]$.

Observaţie: Fie M o mulţime nevidă cu n elemente, $n \in \mathbb{N}$. Atunci, numărul legilor de compoziţie $\varphi : M \times M \to M$ definite pe mulţimea M este egal cu n^{n^2}.

Exemplu: Dacă M este o mulţime cu 3 elemente, atunci numărul legilor de compoziţie $\varphi : M \times M \to M$ ce se pot defini pe M este egal cu $3^{3^2} = 3^9$.

Activitate independentă	**Răspuns**
Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x * y = 2xy - 6x - 6y + 21, \forall x, y \in \mathbb{R}$. **a) Să se calculeze:** $1 * 2$; **b) Să se arate că** $x * 3 = 3, \forall x \in \mathbb{R}$ **c) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia** $x * 5 = 19$**;** **d) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuaţia** $x * x \le 5$**;** **e) Să se calculeze** $1 * 2 * 3 * .... * 2014 * 2015$;	**a) 7;** **c) x = 7;** **d)** $x \in [2;4]$ **e) 3;**

Exercitii rezolvate

1. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea $x \circ y = xy - 3x - 3y + 12, \forall x, y \in \mathbb{R}$. **Se cere:**

a) Să se calculeze $2014 \circ 3$;

b) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $x \circ 4 = 5$.

c) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuaţia $x \circ 5 \le 5$.

Rezolvare:

a) $2014 \circ 3 = \cancel{2014 \cdot 3} - \cancel{3 \cdot 2014} - 3 \cdot 3 + 12 = -9 + 12 = 3$;

b) $x \circ 4 = 5 \Leftrightarrow x \cdot 4 - 3 \cdot x - 3 \cdot 4 + 12 = 5 \Rightarrow 4x - 3x \cancel{- 12} + \cancel{12} = 5 \Rightarrow x = 5$.

c) $x \circ 5 \le 5 \Leftrightarrow 5x - 3x - 3 \cdot 5 + 12 \le 5 \Rightarrow 2x \le 8 \Rightarrow x \le 4$. $x \in (-\infty; 4]$.

2. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x * y = -xy + 5x + 5y - 20$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

a) Să se calculeze: $x * 4$; $3 * 5$; $2 * 3 * 4 * 5$;

b) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $x * 10 = 10$;

c) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuaţia $x * 6 \ge 4$;

Rezolvare:

a) $x * 4 = -4x + 5x + 5 \cdot 4 - 20 = x$; $3 * 5 = -15 + 5 \cdot 3 + 5 \cdot 5 - 20 = \cancel{-15} + \cancel{15} + 25 - 20 = 5$;

$2 * 3 = -6 + 5 \cdot 2 + 5 \cdot 3 - 20 = -6 + 10 + 15 - 20 = 25 - 26 = -1$;

$2 * 3 * 4 = (-1) * 4 = -1$ conform exerciţiului de sus, $2 * 3 * 4 * 5 = (-1) * 5 = 5$, conform calculului de mai sus;

Altfel, legea se poate scrie de forma $x * y = -(x-5)(y-5) + 5$ si se pot face calculele după aceasta.

b) $x * 10 = 10 \Leftrightarrow -10x + 5x + 5 \cdot 10 - 20 = 10 \Rightarrow -10x + 5x = 10 - 30 \Rightarrow$

$-10x + 5x = 10 - 30 \Rightarrow -5x = -20 \Rightarrow x = 4$.

c) $x * 6 \ge 4 \Leftrightarrow -(x-5)(6-5) + 5 \ge 4 \Rightarrow -(x-5) \ge -1 \Big| : (-1) \Rightarrow x - 5 \le 1 \Rightarrow x \le 6$.

3. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea $x * y = 3xy - 6x - 6y + 14, \forall x, y \in \mathbb{R}$. **Se cere:**

a) Să se calculeze: $1 * 2$;

b) Să se arate că $2 * x = 2$, $\forall x \in \mathbb{R}$;

c) Să se calculeze $E = 1 * 2 * 3 * ..... * 2014$;

Rezolvare:

a) $1 * 2 = 3 \cdot 1 \cdot 2 - 6 \cdot 1 - 6 \cdot 2 + 14 = 6 - 6 - 12 + 14 = 2$;

b) $2 * x = 3 \cdot 2 \cdot x - 6 \cdot 2 - 6 \cdot x + 14 = \cancel{6x} - 12 - \cancel{6x} + 14 = 2, \forall x \in \mathbb{R}$;

c) Întrucât numărul 2 compus cu orice număr real x după legea de compoziţie din enunţ va da tot 2 şi calculând de la stânga la dreapta pentru fiecare număr se obţine $E = 1 * 2 * 3 * ..... * 2014 = 2$.

Observaţie: Se poate demonstra prin inducţie matematică că $1 * 2 * 3 * ..... * n = 2$, pentru orice număr natural n.

4. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea $x \circ y = -xy - 2x - 2y - 2, \forall x, y \in \mathbb{R}$. **Se cere:**

a) Să se calculeze: $1 \circ 2 \circ 3$;

b) Să se arate că $x \circ y = -(x+2)(y+2) + 2, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

c) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $x\circ x=-14$.

Rezolvare:

a) $1\circ 2=-1\cdot 2-2\cdot 1-2\cdot 2-2=-10$, $1\circ 2\circ 3=(-10)\circ 3=-(-10)\cdot 3-2\cdot(-10)-2\cdot 3-2=42$;

b) Cum $-(x+2)(y+2)+2=-(xy+2x+2y+4)+2=-xy-2x-2y-2$, rezultă că

$x\circ y=-(x+2)(y+2)+2, \forall x,y\in\mathbb{R}$.

c) Folosind punctul b) rezultă

$x\circ x=-14\Leftrightarrow -(x+2)^2+2=-14\Rightarrow (x+2)^2=16\Rightarrow x+2=\pm\sqrt{16}\Rightarrow x\in\{-6;2\}$.

5. Pe $(5;\infty)$ se defineşte legea de compoziţie $x*y=xy-5x-5y+30,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$**. Se cere:**

a) Să se arate că $x*y=(x-5)(y-5)+5,\ \forall x,y\in(5;\infty)$

b) Să se demonstreze că $\underbrace{x*x*....*x}_{n\ de\ x}=(x-5)^n+5,\ \forall n\in\mathbb{N}$ **;**

c) Să se rezolve în $\mathbb{R}_+$ ecuaţia $\underbrace{\log_5 x*\log_5 x*.....*\log_5 x}_{2014\ termeni}=5$**;**

Rezolvare:

a) $(x-5)(y-5)+5=xy-5x-5y+25+5=xy-5x-5y+30=x*y$;

b) Se demonstrează prin inducţie matematică.

Din punctul a) se observă că $x*x=(x-5)^2+5,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Presupunem că

P(n): $\underbrace{x*x*.....*x}_{n\ termeni}=(x-5)^n+5,\ x\in\mathbb{R},n\in\mathbb{N}$ este adevărată şi demonstrăm că

P(n+1): $\underbrace{x*x*.....*x}_{n+1\ termeni}=(x-5)^{n+1}+5,\ x\in\mathbb{R},n\in\mathbb{N}$ este adevărată.

$$\underbrace{x*x*.....*x}_{n+1\ termeni}=\left(\underbrace{x*x*.....*x}_{n\ termeni}\right)*x=\left[2^{n-1}(x-1)^n+1\right]*x=\left[(x-5)^n+5-5\right](x-5)=$$

$=(x-5)^{n+1}+5$.

Rezultă că P(n) este adevărată, $\forall n\in\mathbb{N}$.

c) Din punctul b) rezultă că $\underbrace{\log_5 x*\log_5 x*.....*\log_5 x}_{2014\ termeni}=5\Leftrightarrow(\log_5 x-5)^{2014}+5=5\Rightarrow$

$(\log_5 x-5)^{2014}=0\Rightarrow\log_5 x=5\Rightarrow x=5^5$.

6. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea $x*y=2xy-2x-2y+3,\forall x,y\in\mathbb{R}$**. Se cere:**

a) Să să arate că $x*x=2(x-1)^2+1,\ \forall x\in\mathbb{R}$ **;**

b) Să se rezolve ecuaţia $x*x*x=4\cdot 2014^3+1,\ x\in\mathbb{R}$.

c) Să se arate că $\underbrace{x*x*.....*x}_{n\ termeni}=2^{n-1}(x-1)^n+1,\ x\in\mathbb{R},n\in\mathbb{N}$**,** $n\in\mathbb{N}$.

Rezolvare:

a) Se scrie legea $x\circ y=2xy-2x-2y+3,\forall x,y\in\mathbb{R}$. sub forma $x*y=2(x-1)(y-1)+1$şi atunci devine evident că $x*x=2(x-1)^2+1,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

b) Din punctul a) şi după legea $x*y=2(x-1)(y-1)+1$se obţine că $x*x*x=2^2\cdot(x-1)^3+1$. Atunci, ecuaţia dată este echivalentă cu $2^2\cdot(x-1)^3+1=4\cdot 2014^3+1$ de unde rezultă că x = 2015 ;

c) Se demonstrează prin inducţie matematică.

Din punctul a) se observă că $x*x=2(x-1)^2+1,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Presupunem că

P(n): $\underbrace{x*x*.....*x}_{n\ termeni}=2^{n-1}(x-1)^n+1,\ x\in\mathbb{R},n\in\mathbb{N}$ este adevărată şi demonstrăm că

P(n+1): $\underbrace{x*x*.....*x}_{n+1\ termeni}=2^n(x-1)^{n+1}+1,\ x\in\mathbb{R},n\in\mathbb{N}$ este adevărată.

$$\underbrace{x*x*.....*x}_{n+1\ termeni}=\left(\underbrace{x*x*.....*x}_{n\ termeni}\right)*x=\left[2^{n-1}(x-1)^n+1\right]*x=2\left[2^{n-1}(x-1)^n+1-1\right](x-1)=$$

$$=2^n(x-1)^{n+1}+1.$$

Rezultă că P(n) este adevărată, $\forall n\in\mathbb{N}$.

7*. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x*y=\ln(e^x+e^y)\ \forall x,y\in\mathbb{R}$.

a) Să se calculeze $0*1$;

b) Să se rezolve ecuaţia $(x*x)*x=0$;

c) Să se calculeze $E=1*2*3*.....*2014$.

Rezolvare: a) $0*1=\ln(e^0+e^1)=\ln(1+e)$;

b) $(x*x)*x=0\Leftrightarrow\ln 3e^x=0\Rightarrow 3e^x=1\Rightarrow e^x=\frac{1}{3}\Rightarrow x=\ln\frac{1}{3}=\ln 3^{-1}=-\ln 3$;

c) $1*2=\ln(e^1+e^2)$; $(1*2)*3=\ln(e^1+e^2)*3=\ln(e^{\ln(e^1+e^2)}+e^3)=\ln(e^1+e^2+e^3)$; Din aproape în aproape se obţine $E=1*2*3*.....*2014=\ln(e^1+e^2+e^3+...+e^{2014})$.

Observaţie: Se poate demonstra prin inducţie matematică că

$1*2*3*.....*n=\ln(e^1+e^2+...+e^n),\ \forall n\in\mathbb{N}$,pentru orice număr natural n.

8*. Pe $(4;\infty)$ se defineşte legea de compoziţie $x*y=xy-4x-4y+20,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$. Se cere:

a) Să se calculeze $3*4$;

b) Să se demonstreze că $\underbrace{x*x*....*x}_{n\ termeni}=(x-4)^n+4$, $n\in\mathbb{N}$;

c) Să se rezolve în $\mathbb{R}_+$ ecuaţia $\underbrace{\log_2 x*\log_2 x*.....*\log_2 x}_{2014\ termeni}=5$,

Rezolvare: a) $3*4=3\cdot4-4\cdot3-4\cdot4+20=\cancel{12}-\cancel{12}-16+20=4$;

b) Se demonstrează prin inducţie matematică.

Se observă că $x*x=(x-4)^2+4,\ \forall x\in\mathbb{R}$; Presupunem că P(n): $\underbrace{x*x*....*x}_{n\ termeni}=(x-4)^n+4$ este adevărată şi demonstrăm că P(n+1): $\underbrace{x*x*....*x*x}_{n+1\ termeni}=(x-4)^{n+1}+4$ este adevărată.

$$\underbrace{x*x*....*x*x}_{n+1\ termeni}=\left(\underbrace{x*x*....*x}_{n\ termeni}\right)*x=\left((x-4)^n+4-4\right)(x-4)+4=(x-4)^n(x-4)+4=(x-4)^{n+1}+4$$

Rezultă că P(n) este adevărată, $\forall n\in\mathbb{N}$.

c) Conform punctului b) rezultă că ecuaţia dată este echivalentă cu

$(\log_2 x-4)^{2014}+4=5\Rightarrow\ \log_2 x-4=1$ sau $\log_2 x-4=-1\Rightarrow x\in\{8;32\}$.

Exercitii propuse

1. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea $x*y=3xy-6x-6y+14, \forall x,y\in\mathbb{R}$. Se cere:
a) Să se calculeze: $3*4$; b) Să se rezolve ecuaţia $x*5=11$;
c) Să se calculeze $E=1*2*3*.....*2014*2015$.

2. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea $x*y=-xy+3x+3y-6\ \forall x,y\in\mathbb{R}$. Se cere:
a) Să se arate că $x*y=-(x-3)(y-3)+3,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$;
b) Să se rezolve ecuaţia $x*2*x=2,\ x\in(0;\infty)$;
c) Să se rezolve în $\mathbb{R}_+$ ecuaţia $3^x*\log_3 x=3$.

3. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea $x\circ y=xy-4x-4y+20, \forall x,y\in\mathbb{R}$. Se cere:
a) Să se calculeze $3\circ 5$; b) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $x\circ 5=9$;
c) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația $x\circ 3\le 6$;

4. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea $x*y=x+y-10\ \forall x,y\in\mathbb{R}$
a) Să se calculeze $10*10*10*10*10$; b) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $x^2*x=80$
c) Să se determine numărul de soluţii ale ecuaţiei $2^x*3^x*4^x=-17$.

5. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea $x\circ y=x+y-1\ \forall x,y\in\mathbb{R}$
a) Să se determine numărul de soluţii ale ecuaţiei $2^x o 3^x o 4^x=1$.
b) Să se rezolve ecuaţia $C_n^0\circ C_n^1\circ C_n^2\circ.....\circ C_n^n=8n+72$.
c) Să se determine soluția ecuației $\log_2 x\circ\log_3 x\circ....\circ\log_{2015} x=-2013$.

6. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea $x\circ y=x+y-1\ \forall x,y\in\mathbb{R}$
a) Să se rezolve inecuaţia $x^2\circ x\langle 5$;
b) Să se determine cel mai mic număr natural n pentru care $1\circ 2\circ 3\circ....\circ n\ge 46$;
c) Să se calculeze $\underbrace{2\circ 2\circ 2\circ....\circ 2}_{2015\ de\ 2}$.

7. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea $x\circ y=x+y+2\ \forall x,y\in\mathbb{R}$
a) Să se determine soluția ecuației $2^x o 3^x o 4^x=13$.
b) Să se rezolve ecuaţia $C_n^0\circ C_n^1\circ C_n^2\circ.....\circ C_n^n=2n+256$.
c) Să se determine soluția ecuației : $\log_2 x\circ\log_3 x\circ....\circ\log_{2015} x=4026$

8. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea $x\circ y=x+y+2\ \forall x,y\in\mathbb{R}$
a) Să se rezolve inecuaţia $x^2 o x\langle 4$.
b) Să se determine cel mai mic număr natural n pentru care $1\circ 2\circ...\circ n\rangle\ 70$;
c) Să se calculeze $\underbrace{3\circ 3\circ 3\circ....\circ 3}_{2015\ de\ 3}$.

9. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea $x*y=x+y-10\ \forall x,y\in\mathbb{R}$
a) Să se rezolve ecuaţia $\log_2 x*\log_3 x*....*\log_{2015} x=-20130$;
b) Să se rezolve inecuaţia $x^2*x\langle -4$;
c) Să se determine cel mai mic număr natural n pentru care $1\circ 2\circ...\circ n\rangle\ 20$;

2. Parte stabilă

Definiţie:

Fie $M \neq \varnothing$,(o mulţime nevidă) pe care este dată o lege de compoziţie φ . O submulţime H a lui M cu proprietatea $\forall x, y \in H \Rightarrow \varphi(x, y) \in H$ se numeşte **parte stabilă** a lui M în raport cu legea de compoziţie φ. (Se mai spune că legea φ este corect definită)

Exemplu 1:

Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea $x * y = xy - 4x - 4y + 20, \forall x, y \in \mathbb{R}$. Să se arate că submulţimea $H = (4;\infty)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$.

Rezolvare: Trebuie să arătăm că $\forall x, y \in H \Rightarrow x * y \in H$

Fie $x, y \in H = (4;\infty) \Rightarrow x \rangle 4,\ y \rangle 4 \Rightarrow x - 4 \rangle 0,\ y - 4 \rangle 0$.

Cum $x * y = xy - 4x - 4y + 20 = \underbrace{(x-4)(y-4)}_{\rangle 0} + 4 \Rightarrow x * y \rangle 4 \Leftrightarrow x * y \in H$.

Exemplu 2:

Se consideră mulţimea $H = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} 3^x & 0 \\ 0 & 9^x \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\} \subset M_2(\mathbb{R})$. Să se arate că H este parte stabilă a lui $M_2(\mathbb{R})$ în raport cu înmulţirea matricelor.

Rezolvare: Trebuie să arătăm că $\forall A(x),\ B(y) \in H \Rightarrow A(x) \cdot B(y) \in H$ **.**

Fie $A(x) = \begin{pmatrix} 3^x & 0 \\ 0 & 9^x \end{pmatrix} \in H$ **şi** $B(y) = \begin{pmatrix} 3^y & 0 \\ 0 & 9^y \end{pmatrix} \in H$. Atunci,

$$A(x) \cdot B(y) = \begin{pmatrix} 3^x & 0 \\ 0 & 9^x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3^y & 0 \\ 0 & 9^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^{x+y} & 0 \\ 0 & 9^{x+y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^m & 0 \\ 0 & 9^m \end{pmatrix} \in H,\ m \in \mathbb{R}.$$

Activitate independentă		**Răspuns**
Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x * y = 2xy - 6x - 6y + m, \forall x, y \in \mathbb{R}$. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât mulţimea $[3;\infty)$ să fie parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea de compoziţie $x * y$.		**m=21**

Exercitii rezolvate

1. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea $x * y = 3xy - 6x - 6y + 14, \forall x, y \in \mathbb{R}$. Să se arate că submulţimea $H = (2;\infty)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$;

Rezolvare: $H = (2;\infty)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R} \Leftrightarrow \forall x, y \in H \Rightarrow x * y \in H$. Fie $x, y \in H \Rightarrow x \rangle 2, y \rangle 2 \Rightarrow x - 2 \rangle 0, y - 2 \rangle 0$ şi cum $x * y = 3\underbrace{(x-2)(y-2)}_{\rangle 0} + 2, \forall x, y \in \mathbb{R}$ rezultă evident că $x * y \rangle 2 \Rightarrow x * y \in H$.

2. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea $x\circ y=2xy-2x-2y+3,\forall x,y\in\mathbb{R}$. Să se arate că $\forall x,y\in(1;\infty)\Rightarrow x\circ y\in(1;\infty)$;

Rezolvare: Fie $x,y\in(1;\infty)\Rightarrow x\rangle 1,\ y\rangle 1\Rightarrow x-1\rangle 0,\ y-1\rangle 0$.

Cum $x\circ y=2xy-2x-2y+3=2\underbrace{(x-1)(y-1)}_{\rangle 0}+1\Rightarrow x\circ y\rangle 1\Leftrightarrow x\circ y\in(1;\infty)$;

3. Fie $H=\left\{A\middle|A=\begin{pmatrix}a&b\\0&a\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R}),a,b\in\mathbb{R}\right\}$. Să se arate că pentru orice $A,B\in H\Rightarrow A\cdot B\in H$.

Rezolvare: Fie $A=\begin{pmatrix}a&b\\0&a\end{pmatrix}\in H$, $B=\begin{pmatrix}c&d\\0&c\end{pmatrix}\in H$. Atunci,

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}a&b\\0&a\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}c&d\\0&c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ac&ad+bc\\0&ac\end{pmatrix}\in H$$

4. Se consideră mulţimea $H=\left\{A(a)=\begin{pmatrix}1&\ln a&0\\0&1&0\\0&0&a\end{pmatrix}\middle|a\in\mathbb{R}\right\}$. Să se arate că mulţimea H este parte stabilă în raport cu înmulţirea matricelor.

Rezolvare: Trebuie arătat că pentru orice $A,B\in H\Rightarrow A\cdot B\in H$.

Fie $A(a)=\begin{pmatrix}1&\ln a&0\\0&1&0\\0&0&a\end{pmatrix}$ şi $B(b)=\begin{pmatrix}1&\ln b&0\\0&1&0\\0&0&b\end{pmatrix}$, atunci

$$A(a)\cdot B(b)=\begin{pmatrix}1&\ln a&0\\0&1&0\\0&0&a\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&\ln b&0\\0&1&0\\0&0&b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&\ln ab&0\\0&1&0\\0&0&ab\end{pmatrix}\in H$$

5. Se consideră mulţimea $H=\left\{A(x)=\begin{pmatrix}1-x&x\\x&1-x\end{pmatrix}\middle|x\in\mathbb{R}\right\}\subset M_2(\mathbb{R})$. Să se arate că H este parte stabilă a lui $M_2(\mathbb{R})$ în raport cu înmulţirea matricelor.

Rezolvare: Rezolvare: Trebuie să arătăm că $\forall A(a),\ A(b)\in H\Rightarrow A(a)\cdot A(b)\in H$.

Fie $A(a)=\begin{pmatrix}1-a&a\\a&1-a\end{pmatrix}\in H$ **şi** $A(b)=\begin{pmatrix}1-b&b\\b&1-b\end{pmatrix}\in H$. **Atunci,**

$$A(a)\cdot A(b)=\begin{pmatrix}1-a&a\\a&1-a\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1-b&b\\b&1-b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-m&m\\m&1-m\end{pmatrix}\in H,$$ **unde**

$m=a+b-2ab\in\mathbb{R}$

6*. Pentru ce valori ale parametrului real "a", intervalul $[1,\infty)$ este o parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea de compoziţie: $x*y=3xy-3x-3y+a$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$.

Rezolvare: Fie $x,y\in[1;\infty)\Rightarrow x\geq 1,\ y\geq 1\Rightarrow x-1\geq 0,\ y-1\geq 0\Rightarrow(x-1)(y-1)\geq 0$.

Cum $x*y=3xy-3x-3y+a=3(x-1)(y-1)-3+a$ rezultă că intervalul $[1,\infty)$ este o parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea de compoziţie: $x*y=3xy-3x-3y+a$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$

dacă și numai dacă $x*y\geq 1\Leftrightarrow \underbrace{3(x-1)(y-1)}_{\geq 0}-3+a\geq 1\Leftrightarrow -3+a\geq 1\Rightarrow a\geq 4.$ Aşadar, trebuie ca $a\in[4;\infty)$.

7. Fie $H=(-2;2)$ și legea de compoziție definită pe H, $x*y=\dfrac{x+y}{1+\dfrac{xy}{4}},\ \forall x,y\in H$.**

Să se arate că legea de compoziție este corect definită.

Rezolvare: Fie $x,y\in(-2;2)\Leftrightarrow|x|\langle 2,\ |y|\langle 2\Rightarrow|xy|\langle 4\Leftrightarrow\dfrac{|xy|}{4}\langle 1\Leftrightarrow -1\langle\dfrac{xy}{4}\langle 1|+1\Leftrightarrow 0\langle 1+\dfrac{xy}{4}\langle 2$

Trebuie arătat că $x*y=\dfrac{x+y}{1+\dfrac{xy}{4}}\in(-2;2)\Leftrightarrow -2-\dfrac{xy}{2}\langle x+y\langle 2+\dfrac{xy}{2}\ \Leftrightarrow\begin{cases}(x+2)(y+2)\rangle 0\\(x-2)(2-y)\langle 0\end{cases}$, ceea ce este adevărat.

8. Pe $\mathbb{R}_+^*$ se definește legea de compoziție $x*y=\log_a x+\log_a y,\ \forall x,y\in\mathbb{R}_+^*$, $a\in(1;\infty)$. Să se determine valorile lui a pentru care mulțimea $[a;\infty)$ este parte stabilă în raport cu operația $*$.**

Rezolvare: $[a;\infty)$ este parte stabilă în raport cu operația $*$ dacă și numai dacă $\forall x,y\in[a;\infty)\Rightarrow x*y\in[a;\infty)\Leftrightarrow\log_a xy\geq a\Leftrightarrow xy\geq a^a$.

Fie $x,y\in[a;\infty)\Rightarrow x\geq a,y\geq a\Rightarrow xy\geq a^2$. Din $a^2\geq a^a\Rightarrow a\leq 2.$

Exercitii propuse

1. Fie $H=(-1;\infty)$ și legea de compoziție pe $\mathbb{R}$, $x*y=xy+x+y,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$.
Să se arate că H este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea de compoziție $x*y$.

2. Fie $M=\left\{A\middle|A=\begin{pmatrix}1 & a\\0 & 1\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{Z}),a\in\mathbb{Z}\right\}$. Să se arate că pentru orice $A,B\in M\Rightarrow A\cdot B\in M$.

3. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x*y=5xy-20(x+y)+84,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$. Să se arate că
$[4;\infty)$ e parte stabile a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea $x*y$.

4. Să se arate că mulţimea $M=\{-1;1;-i;i\}$ este parte stabilă a mulţimii numerelor complexe $\mathbb{C}$ în raport cu operaţia de înmulţire de pe $\mathbb{C}$;

5. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x*y=xy+4x+4y+12,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$. Să se arate că
$(-4;\infty)$ e parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea $x*y$.

6. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x*y=xy-x-y-2,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$. Să se arate că $\forall x,y\in(1;\infty)\Rightarrow x*y\in(1;\infty)$.

7. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x*y=\sqrt{x^2+y^2-4}$, $x,y\in[2;\infty)$. Să se arate că $[2;\infty)$ e parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea $x*y$.

8. Fie mulţimea $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]=\left\{x\middle|x=a+b\sqrt{2},a,b\in\mathbb{Z}\right\}$. Să se arate că $\forall x,y\in\mathbb{Z}[\sqrt{2}]\Rightarrow x+y\in\mathbb{Z}[\sqrt{2}],\ x\cdot y\in\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$;

9. Fie mulţimea de matrice $M=\left\{A\middle|A=\begin{pmatrix}a&0\\c&b\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R}),a,b,c\in\mathbb{R}\right\}$. Să se arate că $\forall A,B\in M\Rightarrow A\cdot B\in M$;

10. Să se arate că mulţimea $M=\left\{A\middle|A=\begin{pmatrix}a&b\\-b&a\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R}),a,b\in\mathbb{R},a^2+b^2=1\right\}$ este parte stabilă a lui $M_2(\mathbb{R})$ în raport cu înmulţirea matricelor.

11. Să se arate că mulţimea $M=\left\{A\middle|A=\begin{pmatrix}a&2b\\b&a\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{Z}),a,b\in\mathbb{Z}\right\}$ este parte stabilă a lui $M_2(\mathbb{Z})$ în raport cu înmulţirea matricelor.

12. Să se arate că mulțimea $M=(-\infty;4)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea $x*y=\dfrac{xy-16}{x+y-8}$.

13. Să se arate că mulțimea $M=(3;\infty)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea $x*y=\dfrac{xy-9}{x+y-6}$.

14. Pentru ce valori ale parametrului real "a", intervalul $(2,\infty)$ este o parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea de compoziţie: $x\circ y=xy-2x-2y+a$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$.

15. Pentru ce valori ale parametrului real "a", intervalul $[3,\infty)$ este o parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea de compoziţie: $x*y=2xy-6x-6y+a$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$.

16. Se consideră mulțimea $H=\left\{A(x)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\x&0&1\end{pmatrix}\middle|x\in\mathbb{Z}\right\}$. Să se arate că $A(x)\cdot A(y)\in H$ pentru orice $A(x),\ A(y)\in H$.

17. Se consideră mulțimea $H=\left\{A(x)=\begin{pmatrix}1+2x&x\\-2x&1-x\end{pmatrix}\middle|x\in\mathbb{R}\right\}$. Să se arate că $A(x)\cdot A(y)\in H$ pentru orice $A(x),\ A(y)\in H$.

18. Se consideră mulțimea $H=\left\{A=\begin{pmatrix}x+4y&y\\-x&x-4y\end{pmatrix}\middle|x,y\in\mathbb{R}\right\}$. Să se arate că $A\cdot B\in H$ pentru orice $A,\ B\in H$.

19. Se consideră mulțimea $H=\left\{A(x)=\begin{pmatrix}1&0&x\\-x&1&-\dfrac{1}{2}x\\0&0&1\end{pmatrix}\middle|x\in\mathbb{R}\right\}$. Să se arate că H este parte stabilă a mulțimii matricelor de ordinul trei în raport cu înmulțirea matricelor .

3. Asociativitatea și comutativitatea unei legi de compoziție

Proprietățile de asociativitate și comutativitate au mai fost studiate până în prezent pentru mulțimele de numere întregi, raționale, reale sau complexe respectiv pentru funcții . De exemplu, pe $\mathbb{R}$ se știe că adunarea și inmulțirea numerelor reale este atât asociativă cât și comutativă:

$(x+y)+z=x+(y+z),\ \forall x,y,z\in\mathbb{R}$, Ex. (2+3)+5=2+(3+5)

$(x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z),\ \forall x,y,z\in\mathbb{R}$, Ex. $(2\cdot 3)\cdot 5=2\cdot(3\cdot 5)$

$x+y=y+x,\forall x,y\in\mathbb{R}$, Ex. 2+3 = 3+2

$x\cdot y=y\cdot x,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$. Ex. $2\cdot 3=3\cdot 2$

Definiţie:

O lege de compoziţie MxM→M , (x,y) → x$*$y se numeşte **asociativă** pe M dacă $(x*y)*z=x*(y*z),\ \forall x,y,z\in M$

Exemplu 1: Să se arate că legea de compoziţie $x*y=xy-4x-4y+20$este asociativă pe $\mathbb{R}$.

Rezolvare: Trebuie să demonstrăm relaţia $(x*y)*z=x*(y*z),\forall x,y,z\in\mathbb{R}.$

$(x*y)*z=(xy-4x-4y+20)*z=(xy-4x-4y+20)\cdot z-4(xy-4x-4y+20)-4z+20=$

$=xyz-4xz-4yz+20z-4xy+16x+16y-80-4z+20;$ (1)

$x*(y*z)=x*(yz-4y-4z+20)=x(yz-4y-4z+20)-4x-4(yz-4y-4z+20)+20=$

$=xyz-4xy-4xz+20x-4x-4yz+16y+16z-80+20;$ (2)

Din (1) şi (2) se observă că cele două expresii sunt egale, rezultă asociativitatea legii de compoziţie.

Definiţie:

O lege de compoziţie MxM→M , (x,y) → x$*$y se numeşte **comutativă** pe M dacă x$*$y =y$*$x, $\forall x,y\in M$.

Exemplu 2: Să se arate că legea de compoziţie $x*y=xy-4x-4y+20$este comutativă pe $\mathbb{R}$.

Rezolvare: Trebuie să demonstrăm că $x*y=y*x,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$.

Din $x*y=xy-4x-4y+20=yx-4y-4x+20=y*x\Rightarrow$comutativitatea legii;

Activitate independentă	**Răspuns**
Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=xy-6x-6y+42,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$. Se cere: a) Să se arate că $x\circ y=(x-6)(y-6)+6,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$; b) Să se arate că legea este asociativă şi comutativă; c) Să se calculeze $A=\sqrt{1}\circ\sqrt{2}\circ\sqrt{3}\circ\sqrt{4}\circ.....\circ\sqrt{49}\circ\sqrt{50}.$	**c) A=6**

Exercitii rezolvate

1. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x*y=xy-7x-7y+56,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$. Să se arate că legea este asociativă şi comutativă.

Rezolvare:

Ca legea să fie asociativă trebuie să demonstrăm relaţia $(x*y)*z=x*(y*z),\forall x,y,z\in\mathbb{R}$.

$(x*y)*z=(xy-7x-7y+56)*z=(xy-7x-7y+56)\cdot z-7(xy-7x-7y+56)-7z+56=$

$=xyz-7xz-7yz+\underline{\underline{56z}}-7xy+49x+49y-\underline{392}-\underline{7z}+\underline{56}.$ (1).

$x*(y*z)=x*(yz-7y-7z+56)=x\cdot(yz-7y-7z+56)-7x-7(yz-7y-7z+56)+56=$

$=xyz-7xy-7xz+\underline{\underline{56x}}-\underline{\underline{7x}}-7yz+49y+49z-\underline{392}+\underline{56}.$ (2).

Din (1) şi (2) se observă că cele două expresii sunt egale, rezultă asociativitatea legii de compoziţie.

Pentru comutativitate: Evident, $x*y=xy-7x-7y+56=yx-7y-7x+56,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$.

2. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea $x\circ y=2xy-2x-2y+3,\forall x,y\in\mathbb{R}$. Se cere:

a) Să se arate că $x\circ y=y\circ x,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$;

b) Să se arate că $(x\circ y)\circ z=x\circ(y\circ z),\ \forall x,y,z\in\mathbb{R}$;

Rezolvare: a) $x\circ y=2xy-2x-2y+3=2yx-2y-2x+3=y\circ x,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$;

b) $(x\circ y)\circ z=(2xy-2x-2y+3)\circ z=2(2xy-2x-2y+3)\cdot z-2(2xy-2x-2y+3)-2z+3=$

$=4xyz-4xz-4yz+6z-4xy+4x+4y-6-2z+3$ (1)

$x\circ(y\circ z)=x\circ(2yz-2y-2z+3)=2x(2yz-2y-2z+3)-2x-2(2yz-2y-2z+3)+3=$

$=4xyz-4xy-4xz+6x-2x-4yz+4y+4z-6+3$ (2)

Din (1) şi (2) rezultă că legea este asociativă.

3. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x*y=xy+mx+5y+10,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât legea "$x*y$" să fie comutativă.

Rezolvare:

Legea "$x*y$" este comutativă $\Leftrightarrow x*y=y*x,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$. În cazul nostru rezultă

$xy+mx+5y+10=yx+my+5x+10\Rightarrow(m-5)x+(5-m)y=0\Rightarrow m=5$.

4. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=-xy-x-y-2,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$. Se cere:

a) Să se arate că $x\circ y=-(x+1)(y+1)-1,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$;

b) Să se arate că legea e asociativă pe $\mathbb{R}$;

c) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia: $x\circ(x+1)\circ(x-1)=-1$.

Rezolvare: a) $-(x+1)(y+1)-1=-(xy+x+y+1)-1=-xy-x-y-2=x\circ y$.

b) Se arată că $(x\circ y)\circ z=x\circ(y\circ z),\ \forall x,y,z\in\mathbb{R}$.

$(x\circ y)\circ z=(-xy-x-y-2)\circ z=-(-xy-x-y-2)\cdot z-(-xy-x-y-2)-z-2=$

$= xyz + xz + yz + \underline{2z} + xy + x + y + \not{2} - \underline{z} - \not{2}$; (1)

$x \circ (y \circ z) = x \circ (-yz - y - z - 2) = -x(-yz - y - z - 2) - x - (-yz - y - z - 2) - 2 =$

$= xyz + xy + xz + \underline{2x} - \underline{x} + yz + y + z + \not{2} - \not{2}$; (2)

Din (1) = (2) rezultă că legea este asociativă;

c) $x \circ (x+1) \circ (x-1) = -1 \Leftrightarrow \left[-(x+1)(x+2-1)\right] \circ (x-1) = -1 \Leftrightarrow -\left(-x^2 - 3x - 2\right) \cdot x - 1 = -1 \Rightarrow$

$x(x^2 + 3x + 2) = 0 \Rightarrow x \in \{-2; -1; 0\}$.

5. Pe $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție $x * y = xy - 5x - 5y + 30,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$. Se cere:

a) Să se arate că legea este asociativă și comutativă pe $\mathbb{R}$;

b) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\sqrt[3]{x} * \sqrt{x} = 5$;

c) Să se arate că există $a, b \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$ astfel încât $a * b \in \mathbb{N}$.

Rezolvare:

a) Se aplică proprietățile; b) $\sqrt[3]{x} * \sqrt{x} = 5 \Leftrightarrow (\sqrt[3]{x} - 5) \cdot (\sqrt{x} - 5) = 0 \Rightarrow x \in \{25; 125\}$; c) $a * b = (a-5)(b-5) + 5 \in \mathbb{N}$ dacă, de exemplu, $a - 5 = \frac{2}{3}, b - 5 = \frac{3}{2}$, rezultă $a = \frac{17}{3}, b = \frac{13}{2}$

6*. Pe $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție $x * y = xy + ax + by,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Să se determine a și b astfel ca legea să fie asociativă și comutativă.

Rezolvare: Din condiția de asociativitate a legii, $(x * y) * z = x * (y * z),\ \forall x, y, z \in \mathbb{R}$ se obține $a = b,\ a^2 = a,\ b^2 = b$ și din condiția de comutativitate a legii, $x * y = y * x,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$ se obține a=b.

Se obțin situațiile când a=b=0 rezultă $x * y = xy$ și când a=b=1 rezultă $x * y = xy + x + y$.

Exercitii propuse

1. Să se studieze asociativitatea şi comutativitatea următoarelor legi de compoziţie pe mulţimile indicate:

a) $x * y = xy - x - y + 2,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$;

b) $x * y = xy + 2x + 2y + 2,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$;

c) $x * y = xy - 2x - 2y + 6,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$;

d) $x * y = 2xy + 3x + 3y + 3,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$;

e) $x * y = xy + 5x + 5y + 20,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$

f) $x * y = \sqrt{x^2 + y^2},\ \forall x, y \in \mathbb{R}$;

g) $x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3},\ \forall x, y \in \mathbb{R}$;

2. Fie mulţimea $M = \left\{ A \middle| A = \begin{pmatrix} x & 3x \\ y & y \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Q}), x, y \in \mathbb{Q} \right\}$. Să se arate că înmulţirea şi adunarea matricelor din M este asociativă şi comutativă.

3. Fie mulţimea $M=\left\{A\left|A=\begin{pmatrix}x & 2y\\ y & x\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{Q}), x^2+y^2\neq 0\right.\right\}$. Să se arate că înmulţirea şi adunarea matricelor din M este asociativă şi comutativă.

4. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x*y=2xy+ax+8y+16,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$. Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât această lege să fie comutativă. .

5. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x*y=xy+2x+ay+2,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$. Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât această lege să fie comutativă. .

6*. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x*y=xy+2ax+y,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$. Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât această lege să fie asociativă.

7*. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x*y=ax+by-2,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$. Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât legea $x*y$ să fie asociativă şi comutativă.

4. Elementul neutru. Elemente simetrizabile ale unei legi de compoziție

Definiție

Un element **e** $\in$ M se numeşte **element neutru** pentru o lege de compoziţie MxM→M,
(x,y) → x$*$y, dacă x$*$e =e$*$x, $\forall x \in M$. (**e** dacă există este unic).

Exemplu 1: Să se determine elementul neutru al legii de compoziţie
$x * y = xy - 4x - 4y + 20, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Rezolvare: Trebuie să arătăm că există **e** $\in \mathbb{R}$ astfel încât x$*$e =e$*$x, $\forall x \in \mathbb{R}$. Cum legea este comutativă este suficient să scriem doar relaţia $x * e = x$ De aici se obţine:

$$xe - 4x - 4e + 20 = x \Rightarrow e(x-4) = 5x - 20 \Rightarrow e = \frac{5(x-4)}{x-4} \Rightarrow e = 5, \ \forall x \in \mathbb{R} \ .$$

Definiție

Fie M$\neq 0$ o mulţime înzestrată cu o lege de compoziţie MxM→M, (x,y) → x$*$y, asociativă şi care admite element neutru, e. Un element x $\in M$ se numeşte **simetrizabil** în raport cu legea de compoziţie , dacă există x’$\in M$ a.î. x$*$x’ =x’$*$x= e $\forall x \in M$.

Observaţia 1. **x’** se numeşte simetricul lui x şi este unic.
Observaţia 2. **(x$*$y)’ = y’$*$x’.**
Observaţia 3. **(x’)’ = x.**

Exemplu 2. Să se determine elementele simetrizabile ale legii
$x * y = xy - 4x - 4y + 20, \ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Rezolvare: Cum legea este comutativă, este suficient să scriem doar relaţia $\exists x' \in \mathbb{R} \ a.î. \ x * x' = e, \forall x \in \mathbb{R}$. Elementul neutru este e =5; De aici rezultă

$$xx' - 4x - 4x' + 20 = 5 \Rightarrow x'(x-4) = 4x - 15 \Rightarrow x' = \frac{4x-15}{x-4} \in \mathbb{R}, \ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{4\}.$$

Exemplu 3. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea $x * y = 3xy - 6x - 6y + 14, \forall x, y \in \mathbb{R}$. Se cere:
Să se determine elementul neutru şi elementele simetrizabile ale legii;

Rezolvare:

Trebuie să arătăm că există **e** $\in \mathbb{R}$ astfel încât x$*$e =e$*$x, $\forall x \in \mathbb{R}$. Cum legea este comutativă este suficient să scriem doar relaţia $x * e = x$ De aici se obţine:

$$3xe - 6x - 6e + 14 = x \Rightarrow e(3x-6) = 7x - 14 \Rightarrow e = \frac{7(x-2)}{3(x-2)} \Rightarrow e = \frac{7}{3}, \ \forall x \in \mathbb{R} \ .$$

Elemente simetrizabile: $\exists x' \in \mathbb{R} \ a.î. \ x * x' = e, \forall x \in \mathbb{R} - \{e\}$. De aici rezultă

$$3xx' - 6x - 6x' + 14 = \frac{7}{3} \Rightarrow x'(9x-18) = 18 + 18x \Rightarrow \ x' = \frac{2+2x}{x-2} \in \mathbb{R}, \ \forall x \in \mathbb{R} - \{2\}.$$

Activitate independentă		**Răspuns**
Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x \circ y = xy - 6x - 6y + 42, \ \forall x, y \in \mathbb{R}$. Se cere:		**a) e=7;**

a) Să se determine elementul neutru al legii de compoziție; b) Să se determine elementele simetrizabile ale legii de compoziție; c) Să se determine simetricul lui 8;	**b)** $x'=\frac{7x-35}{x-7}$; **c)** $8'=21$.

Exercitii rezolvate

1. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea $x\circ y=2xy-2x-2y+3,\forall x,y\in\mathbb{R}$. Se cere:

a) Să se arate că există $e\in\mathbb{R}$ astfel încât $x\circ e=e\circ x=x,\ \forall x\in\mathbb{R}$;

b) Să se determine elementele simetrizabile ale legii;

c) Să se calculeze valoarea expresiei $(-2012)\circ(-2011)\circ....\circ(-1)\circ 0\circ 1\circ.....\circ 2011\circ 2012$.

Rezolvare:

a) Cum legea este comutativă este suficient să scriem $x\circ e=x,\ \forall x\in\mathbb{R}$. De aici rezultă

$2xe-2x-2e+3=x\Rightarrow e(2x-2)=3x-3\Rightarrow e=\frac{3}{2}$;

b) Din $x\circ x'=\frac{3}{2}\Rightarrow 2xx'-2x-2x'+3=\frac{3}{2}\Rightarrow x'=\frac{4x-3}{4x-4},\ \forall x\in\mathbb{R}-\{1\}$;

c) Cum $1\circ x=1,\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow$ valoarea expresiei este egală cu 1 deoarece 1 se găseşte printre termenii compunerilor şi legea este asociativă.

2. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea $x\circ y=x+y+a,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$ Se cere:

a) Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât elementul e= 5 să fie elementul neutru al legii;

b) Pentru a = -5 să se determine elementele simetrizabile;

c) Pentru a = 2, ştiind că legea este asociativă , să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația

$\underbrace{x\circ x\circ x\circ.....\circ x}_{2014\ de\ x}=-2$.

Rezolvare:

a) Cum legea este evident comutativă şi din formula $x\circ e=e\circ x=x,\ \forall x\in\mathbb{R}$, rezultă

$x\circ e=x,\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow\ x\circ 5=x\Rightarrow x+5+a=x\Rightarrow a=-5$.

b) $x\circ x'=e,\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow x+x'-5=5\Rightarrow x'=10-x$.

c) Pentru a = 2 rezultă $x\circ y=x+y+2,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$. Atunci, $\underbrace{x\circ x\circ x\circ.....\circ x}_{2014\ de\ x}=-2\Leftrightarrow$

$2014x+2013\cdot 2=-2\Rightarrow x=-2$.

3. Pe $\mathbb{R}-\{1\}$ se defineşte legea $x\circ y=2xy-2x-2y+m,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$. Se cere:

a) Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât legea să fie asociativă pe $\mathbb{R}-\{1\}$;

b) Pentru m = 3 să se determine elementul neutru al legii;

c) Pentru m = 3 să se determine simetricul elementului 3;

Rezolvare:

a) Legea $x\circ y$ este asociativă pe $\mathbb{R}$ dacă şi numai dacă

$(x\circ y)\circ z=x\circ(y\circ z),\ \forall x,y,z\in\mathbb{R}$.

$(x\circ y)\circ z=(2xy-2x-2y+m)\circ z=2(2xy-2x-2y+m)\cdot z-2(2xy-2x-2y+m)-2z+m=$

$=4xyz-4xz-4yz+2mz-4xy+4x+4y-2m-2z+m$. (1).

$x\circ\left(y\circ z\right)=x\circ(2yx-2y-2z+m)=2x(2yx-2y-2z+m)-x-2(2yx-2y-2z+m)+m=$

$=4xyz-4xy-4xz=2xm-2x-4yz+4y+4z-2m+m.$ (2).

Din (1) = (2) rezultă 2m-2=4 adică m = 3.

b) Pentru m = 3 rezultă $x\circ y=2xy-2x-2y+3,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$, atunci, din $x\circ e=x,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow$

$2x\cdot e-2x-2e+3=x\Rightarrow e(2x-2)=2x+x-3\Rightarrow\ e\cdot 2(x-1)=3(x-1)\vdots(x-1)\Rightarrow\ e=\frac{3}{2}$.

c) Cum legea este comutativă şi din $x\circ x'=e,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow x'=\frac{4x-3}{4x-4}\Rightarrow$simetricul lui 3 este

$3'=\frac{9}{8}$.

4. Pe $\mathbb{Z}$ se defineşte legea $x\circ y=xy-7x-7y+56.$ Să se determine numărul elementelor simetrizabile în raport cu legea $x\circ y$.

Rezolvare:

Fie e elementul neutru al legii. Rezultă $e\circ x=x,\ \forall x\in\mathbb{Z}\Rightarrow e=8$.

x' este inversul lui x . Din $x'\circ x=e\Rightarrow x'=7+\frac{1}{x-7}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x-7\vdots 1\Rightarrow x-7=\pm1\Rightarrow x\in\{6;8\}$.

Rezultă că 6 şi 8 sunt simetrizabile aşadar numărul elementelor simetrizabile este 2.

5*. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x*y=ax+by+c,\ a,b,c\in\mathbb{R}$. Ştiind că elementul neutru este e = 2012, să se calculeze a+ b + c;

Rezolvare:

Dacă e este elementul neutru al legii rezultă $x*e=e*x=x,\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow$

$$\begin{cases}a\cdot x+b\cdot 2012+c=x\\ a\cdot 2012+b\cdot x+c=x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a-1)x+b\cdot 2012+c=0\vdots\Rightarrow a-1=0\ ,2012b+c=0\\ a\cdot 2012+(b-1)x+c=0\vdots\Rightarrow b-1=0,\ 2012a+c=0\end{cases}\Rightarrow a=b=1,c=-2012$$

Rezultă că a + b + c = - 2010;

Exercitii propuse

1. Să se determine elementul neutru al următoarelor legi de compoziţie de pe mulţimile indicate:

a) $x*y=xy-x-y+2,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$**;**

b) $x*y=2xy+3x+3y+3,\ \forall x,y\in\mathbb{Z}$**;**

c) $x*y=xy-7x-7y+56,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$**;**

d) $x*y=\sqrt{x^2+y^2},\ \forall x,y\in\mathbb{R}$**;**

e) $x*y=\frac{x+y}{xy+1},\ \forall x,y\in(-1;1)$**;**

2. Fie G=(4, ∞) şi $x\circ y=xy-4(x+y)+20$. Dacă e este element neutru să se calculeze $3e^2+1$.

3. Pe $\mathbb{R}$ se definesc legile de compoziţie $x*y=x+y+\frac{1}{3}$ cu elementul neutru e_1 şi $x\circ y=-3xy-x-y-\frac{2}{3}$. Dacă $a=\underbrace{e_1\circ e_1\circ\ldots\circ e_1}_{2012\ de\ termeni}$ şi $b=\underbrace{e_2*e_2*\ldots*e_2}_{2012\ de\ termeni}$ să se determine a şi b;

4. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x*y=3xy+ax+by+4,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$. Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât această lege să fie comutativă şi să admită elementul neutru $e=\frac{4}{3}$.

5. Pe $\mathbb{R}$ se definesc legile de compoziţie $x*y=\sqrt{x^2+y^2},\ \forall x,y\in\mathbb{R}$ şi $x\circ y=xy-x-y+2,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$. Dacă e_1 este elementul neutru al primei legi iar e_2 este elementul neutru al celei de a doua lege, să se calculeze $a=\underbrace{e_1*e_1*...*e_1}_{2015\ de\ e_1}$, $b=\underbrace{e_2\circ e_2\circ...\circ e_2}_{2015\ de\ e_2}$ şi $a*b+a\circ b$.

6. Pe $\mathbb{R}$ se definesc legile de compoziţie $x*y=5xy-5x-5y+6,\forall x,y\in\mathbb{R}$ cu elementul neutru e şi $x\circ y=3xy+3x+3y+2,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$ cu elementul neutru f. Să se rezolve sistemul $\begin{cases}(x+y)*e=2\\(x-y)\circ f=0\end{cases}$.

7. Să se determine elementele simetrizabile din mulţimea M în raport cu legea indicată:

a) $M=(1;\infty),\ \ x*y=xy-x-y+2,\ \forall x,y\in(1;\infty)$**;**

b) $M=\mathbb{Z},\ \ x*y=2xy+3x+3y+3,\ \forall x,y\in\mathbb{Z}$**;**

c) $M=\mathbb{R},\ \ x*y=xy-7x-7y+56,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$**;**

d) $M=\mathbb{R},\ \ x*y=\sqrt[3]{x^3+y^3},\ \forall x,y\in\mathbb{R}$**;**

e) $M=[1;\infty),\ \ x*y=\sqrt{x^2+y^2-1},\ \forall x,y\in[1;\infty)$**;**

f) $M=\left\{x+y\sqrt{5}\,|\,x,y\in\mathbb{Z}\right\}$, înmulţirea numerelor întregi;

g*) $M=(0;\infty)\setminus\{1\},\ \ x*y=x^{3\ln y},\ \forall x,y\in(0;\infty)\setminus\{1\}$**;**

8. Pe $\mathbb{Z}$ se defineşte legea $x*y=2xy-3x-3y+6,\forall x,y\in\mathbb{Z}$. Să se determine numărul elementelor simetrizabile în raport cu legea $x*y$. Â

9. Să se determine elementele inversabile ale mulţimii

$M=\left\{A\,\middle|\,A=\begin{pmatrix}a&0\\c&b\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R}),a,b,c\in\mathbb{R}\right\}$ în raport cu înmulţirea matricelor;

10. Să se determine elementele inversabile ale mulţimii

$M=\left\{A\,\middle|\,A=\begin{pmatrix}a&2b\\b&a\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R}),a,b\in\mathbb{R}^*\right\}$ în raport cu înmulţirea matricelor;

11. Să se determine elementele inversabile ale mulţimii

$M=\left\{A\,\middle|\,A=\begin{pmatrix}1&n\\0&1\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{Z}),n\in\mathbb{Z}\right\}$ în raport cu înmulţirea matricelor;

12*. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=2ax+by+xy$. Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât această lege să fie asociativă, comutativă şi cu elementul neutru 0.

13*. Pe $\mathbb{R}$ se definesc legile de compoziție $x*y=2xy-x-y+1$ cu elementul neutru e_* și $x\circ y=x+y-4$ cu elementul neutru $e_\circ$. Să se rezolve sistemul $\begin{cases}(x-1)*(y-1)=e_* \\ \frac{1}{x}\circ\frac{1}{y}=e_\circ\end{cases}$.

14.** Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3$ și $m\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(m)=(m+2)^3$. Pe $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziție $a*b=f\left(f^{-1}(a)-f^{-1}(b)+m\right)$. Să se determine suma soluțiilor ecuației $x^2*x=e,$ unde e este elementul neutru al legii;

5. Exerciții recapitulative

1.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=3-(x-3)(y-3)$.

a) Arătaţi că $1*3=3$.

b) Arătaţi că e = 2 este elementul neutru al legii de compoziţie ,,* ".

c) Determinaţi mulţimea valorilor reale ale lui x pentru care $x*(x+6)\geq 3$.

(BAC, 2021-iulie)

2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=x^2+(x+1)(y+1)+y^2$.

a) Arătaţi că $3\circ(-1)=10$.

b) Demonstraţi că legea de compoziţie ,,* " este comutativă .

c) Demonstarţi că $x\circ 1\geq 2,$ pentru orice număr real x.

(BAC, 2020-iulie)

3.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=x^2+xy-x-y+1$.

a) Arătaţi că $3*2=11$.

b) Demonstraţi că $x*(-x)=1$ pentru orice număr real x.

c) Determinaţi numărul real x pentru care $2^x*4=1$.

(BAC, 2020-august)

4.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x\circ y=5xy+15(x+y)+42$.

a) Arătaţi că $(-2)\circ(-2)=2$.

b) Demonstraţi că $x\circ y=5(x+3)(y+3)-3,$ pentru orice numere reale x şi y.

c) Determinaţi numărul real x, pentru care $(x-3)\circ(x-3)\circ(x-3)=197$.

(BAC, 2018-iulie)

5.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=xy-3x-3y+12$.

a) Arătaţi că $1\circ 3=3$.

b) Demonstraţi că $x\circ y=(x-3)(y-3)+3,$ pentru orice numere reale x şi y.

c) Determinaţi numărul real x, pentru care $(x\circ x)\circ x=3.$

(BAC, 2017-iulie)

6.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=xy+3x+3y+6$.

a) Arătaţi că $1\circ(-3)=-3$.

b) Demonstraţi că $x\circ y=(x+3)(y+3)-3,$ pentru orice numere reale x şi y.

c) Determinaţi valorile reale ale lui x, pentru care $x\circ x\le x.$

(BAC, 2016-august)

7. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea $x*y=3xy-6x-6y+14,\forall x,y\in\mathbb{R}.$ Se cere:

a) Să se calculeze: $1*2$;

b) Să se arate că $2*x=2,\ \forall x\in\mathbb{R}$;

c) Să se calculeze $E=1*2*3*.....*2019*2020$;

8. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x*y=xy-5x-5y+30,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$. Se cere:

a) Să se arate că legea este asociativă pe $\mathbb{R}$;

b) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\sqrt[3]{x}*\sqrt{x}=5$;

c) Să se arate că există $a,b\in\mathbb{Q}-\mathbb{Z}$astfel încât $a*b\in\mathbb{N}$.

9. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=-xy-x-y-2,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$.Se cere:

a) Să se arate că $x\circ y=-(x+1)(y+1)-1,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$;

b) Să se arate că legea e asociativă pe $\mathbb{R}$;

c) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația: $x\circ(x+1)\circ(x-1)=-1$.

10. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x*y=xy-3x-3y+12,\ \forall x,y\in\mathbb{R}.$. Se cere:

a) Să se arate că $x*y=(x-3)(y-3)+3,\ \forall x,y\in\mathbb{R}.$;

b) Să se calculeze $\frac{1}{10}*\frac{2}{10}*\frac{3}{10}*.....*\frac{49}{10}*\frac{50}{10}$, , ştiind că legea e asociativă;

c) Să se rezolve ecuația $x*x*x=30$;

11. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea $x*y=2xy-4x-4y+10,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$. Se cere:

a) Să se arate că legea este asociativă.

b) Să se determine simetricul lui 5 în raport cu legea de compoziţie $"x*y"$.

c) Să se calculeze $2015*2014*....*3*2*1$;

12. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea $x*y=xy-10x-10y+110,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$. Se cere:

a) Să se arate că $x*y=y*x,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$.

b) Să se determine elementul neutru al legii $"x*y"$;

c) Să se determine simetricul lui 11 în raport cu legea de compoziţie $"x*y"$.

13. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=xy-6x-6y+42,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$.Se cere:

a) Să se arate că mulțimea $H=(6;\infty)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea data;

b) Să se arate că $x\circ x=(x-6)^2+6,\ \forall x\in\mathbb{R}.$

c) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $x\circ x\circ x=7$.

14. Pe mulțimea $G=(1;\infty)$ se definește legea $x\circ y=2xy-2x-2y+3,\forall x,y\in\mathbb{R}$. Se cere:
a) Să se arate că $\forall x,y\in(1;\infty)$ rezultă $x\circ y\in(1;\infty)$;
b) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $x\circ x=9$;
c) Să se calculeze $\underbrace{x\circ x\circ....\circ x}_{2015\ de\ x}$;

15. Pe $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție $x*y=-xy+3x+3y-6,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$.
a) Să se calculeze $0*1*2*3$
b) Să se arate că legea este asociativă;
c) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $3^x*\log_3 x=3$;

16. Pe $\mathbb{R}$ se definește legea $x*y=2xy-6x-6y+21,\forall x,y\in\mathbb{R}$. Se cere:
a) Să se studieze asociativitatea legii de compoziție $"x*y"$;
b) Să se determine elementele simetrizabile;
c) Să se rezolve ecuația $C_x^2*C_x^2=5$.

17. Pe $\mathbb{Z}$ se definește legea $x\circ y=xy-2x-2y+6,\forall x,y\in\mathbb{Z}$. Se cere:
a) Să se demonstreze că $x\circ y=(x-2)(y-2)+2,\forall x,y\in\mathbb{Z}$.;
b) Să se determine elementele simetrizabile în $\mathbb{Z}$;
c) Să se calculeze $A=2^{2015}\circ 2^{2014}\circ....\circ 2^1\circ 2^0$.

18. Pe $\mathbb{R}$ se definește legea $x*y=xy-4x-4y+20,\forall x,y\in\mathbb{R}$. Se cere:
a) Să se studieze asociativitatea legii de compoziție $"x*y"$;
b) Să se rezolve ecuația $x*6=10$;
c) Să se calculeze $E=(-2015)*(-2014)*...*0*1*...*2014*2015$.

19. Pe $\mathbb{R}$ se definește legea $x*y=3xy-6x-6y+14,\forall x,y\in\mathbb{R}$. Se cere:
a) Să se studieze asociativitatea legii de compoziție $"x*y"$;
b) Să se determine elementele simetrizabile;
c) Să se calculeze $E=1*2*3*...*2015$ știind că legea este asociativă.

20. Pe $\mathbb{R}$ se definește legea $x*y=(x-3)(y-3)+3,\forall x,y\in\mathbb{R}$. Se cere:
a) Să se arate că $(x+3)*(\frac{1}{x}+3)=4,\forall x\in\mathbb{R}^*$;
b) Să se determine elementul neutru al legii de compoziție $"x*y"$;
c) Să se determine elementele simetrizabile ale lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea $"x*y"$.

21. Pe $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție $x*y=xy-7x-7y+56,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$.
a) Să se arate că legea este asociativă pe $\mathbb{R}$;
b) Să se arate că $x*y=(x-7)(y-7)+7,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$
c) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\underbrace{x*x*....*x}_{6\ de\ x}=736$.

22. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x*y=3xy-6x-6y+14,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$.
a) Să se determine elementul neutru al legii;
b) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $x*x*x=9\cdot 2015^3+2$.
c) Să se calculeze $\underbrace{x*x*....x}_{2015\ de\ x}$.

23. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x*y=2xy-6x-6y+21,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$.
a) Să se arate că mulţimea $H=[3;\infty)$ este parte stabilă în raport cu legea de compoziţie de pe $\mathbb{R}$;
b) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $x*x*x=4\cdot 2015^3+3$.
c) Să se calculeze $\underbrace{x*x*....x}_{2015\ de\ x}$.

24. Pe $M=[1;+\infty)$ se defineşte legea $x\circ y=7xy-7x-7y+8,\forall x,y\in M.$ Se cere:
a) Să se arate că $x\circ y\in M,\forall x,y\in M$;
b) Să se afle mulţimea elementelor simetrizabile din M în raport cu legea $"x\circ y"$;
c) Să se rezolve ecuaţia $x\circ x\circ x=\frac{8}{7}$.

25. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea $x*y=3xy-12x-12y+52,\forall x,y\in\mathbb{R}.$ Se cere:
a) Să se arate că $x*y=3(x-4)(y-4)+4,\forall x,y\in\mathbb{R}.$
b) Să se determine elementele simetrizabile ale lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea $"x*y"$;
c) Să se calculeze $\underbrace{x*x*.....*x}_{2012\ termeni}$;

26. Pe $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziţie $x*y=3xy-12x-12y+52,\forall x,y\in\mathbb{R}.$
a) Să se studieze asociativitatea legii de compoziţie;
b) Stiind că legea este asociativă să se calculeze $2^{2011}*2^{2010}*.....*2^2*2^1*2^0$;
c) Să se calculeze $\underbrace{x*x*x*....*x}_{n\ factori}$.

27. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea $x*y=\sqrt{x^2+y^2},\ \forall x,y\in\mathbb{R}$. Se cere:
a) Să se arate că legea este comutativă pe $\mathbb{R}$;
b) Să se arate că legea este asociativă pe $\mathbb{R}$;
c) Să se calculeze $\underbrace{x*x*.....*x}_{2015\ de\ x},\ x\in[0;\infty)$.

28. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea $x*y=\sqrt[3]{x^3+y^3},\ \forall x,y\in\mathbb{R}$. Se cere:
a) Să se arate că legea este comutativă pe $\mathbb{R}$;
b) Să se arate că legea este asociativă pe $\mathbb{R}$;
c) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\underbrace{x*x*.....*x}_{64\ de\ x}=8$.

II. Grupuri

1. Grupuri. Definiție

Definiţie

O mulţime nevidă G înzestrată cu o lege de compoziţie GxG→G, (x,y) → x ∗ y se numeşte **grup comutativ** sau abelian dacă sunt îndeplinite condiţiile:

1. $(x*y)*z=x*(y*z),\forall x,y,z\in G.$ **(Asociativitatea)**

2. $x*y=y*x,\ \forall x,y\in G;$ **(Comutativitatea)**

3. $\exists e\in G\ a.\hat{i}\ x*e=e*x=x,\ \forall x\in G$ **; (Element neutru)**

4. $\forall x\in G,\ \exists x^{I}\in G\ a.\hat{i}\ x*x^{I}=x^{I}*x=e$ **. (Elemente simetrizabile)**

Dacă condiţia 2 nu este îndepliniă, G se numeşte simplu, grup.

Exemple de grupuri: $(\mathbb{Z},+);\ (\mathbb{Q},+);\ (\mathbb{R},+);\ (\mathbb{C},+);\ (\mathbb{Q}^*,\bullet);\ (\mathbb{R}^*,\bullet);\ (\mathbb{C}^*,\bullet);\ (M_2(\mathbb{R}),+);$ $(F(E),\circ);$

Exemplu : Pe mulţimea $G=(2;\infty)$ **se consideră legea de compoziţie** $x*y=xy-2x-2y+6,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$ **. Să se arate că G împreună cu legea dată formează o structură de grup abelian.**

Rezolvare:

Se verifică mai întâi că legea dată este corect definită adică G este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea dată.

Fie $x,y\in(2;\infty)\Rightarrow x-2\rangle 0,\ y-2\rangle 0.$

Cum $x*y=\underbrace{(x-2)(y-2)}_{\rangle 0}+2\rangle 2$, rezultă că $x*y\rangle 2$.

Asociativitatea:

Legea este asociativă dacă $(x*y)*z=x*(y*z),\ \forall x,y,z\in G$.

$(x*y)*z=(xy-2x-2y+6)*z=(xy-2x-2y+6)\cdot z-2(xy-2x-2y+6)-2z+6=$

$=xzy-2xz-2yz+6z-2xy+4x+4y-12-2z+6=xzy-2xz-2yz+4z-2xy+4x+4y-6.$

(1)

$x*(y*z)=x*(yz-2y-2z+6)=x(yz-2y-2z+6)-2x-2(yz-2y-2z+6)+6=$

$=xyz-2xy-2xz+6x-2x-2yz+4y+4z-12+6=xyz-2xy-2xz+4x-2yz+4y+4z-6.$

(2)

Din (1) = (2) rezultă că legea este asociativă, $\forall x,y,z\in G$.

Comutativitatea:

Legea este comutativă dacă $x*y=y*x,\forall x,y\in G$.

$x*y=xy-2x-2y+6=yx-2y-2x+6=y*x,\ \forall x,y\in G$.

Elementul neutru:

Legea admite element neutru dacă $x*e=e*x=x,\ \forall x\in G$.

Cum legea este comutativă este suficientă doar relația $x*e=x,\ \forall x\in G\Rightarrow$

$xe-2x-2e+6=x\Rightarrow\ e(x-2)=3x-6\Rightarrow\ e=\dfrac{3(x-2)}{x-2}=3,\ \forall x\in G.$

Elemente simetrizabile:

Elementele lui G sunt simetrizabile dacă pentru orice element $x\in G$, există $x'\in G$ astfel încât să aibă loc proprietatea $x*x'=x'*x=e,\ \forall x\in G.$

Cum legea este comutativă este suficientă relația $x*x'=e,\ \forall x\in G\Rightarrow$

$x\cdot x'-2x-2x'+6=3$

Rezultă, $x'=\dfrac{2x-3}{x-2},\ \forall x\in G=(2;\infty)$.

Se arată că $x'\in G=(2;\infty)$. Evident, $x'=\dfrac{2x-3}{x-2}=\dfrac{2(x-2)+1}{x-2}=2+\dfrac{1}{x-2}\rangle 2,\ \forall x\in G=(2;\infty)$.

Aşadar, G împreună cu legea dată este **grup comutativ.**

Activitate independentă	**Răspuns**
Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x*y=3xy-6x-6y+14,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$. Să se arate că mulțimea $\mathbb{R}-\{2\}$ împreună cu legea dată formează un grup comutativ.	$e=\dfrac{7}{3}$ $x'=\dfrac{18x-35}{9x-18}$

Exercitii rezolvate

1. Pe mulțimea $G=(6;\infty)$ se defineşte legea de compoziţie $x*y=xy-6x-6y+42,\ \ \forall x,y\in\mathbb{R}$. Să se arate că mulțimea G împreună cu legea dată formează o structură de grup comutativ.

Rezolvare:

Se verifică mai întâi că legea dată este corect definită adică G este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea dată.

Fie $x,y\in(6;\infty)\Rightarrow x-6\rangle 0,\ \ y-6\rangle 0.$

Cum $x*y=\underbrace{(x-6)(y-6)}_{\rangle 0}+6\rangle 6$, rezultă că $x*y\rangle 6$.

Asociativitatea:

Legea este asociativă dacă $(x*y)*z=x*(y*z),\ \forall x,y,z\in G.$

$(x*y)*z=(xy-6x-6y+42)*z=(xy-6x-6y+42)\cdot z-6(xy-6x-6y+42)-6z+42=$

$=xyz-6xz-6yz+42z-6xy+36x+36y-252-6z+42.\quad (1)$

$x*(y*z)=x*(yz-6y-6z+42)=x(yz-6y-6z+42)-6x-6(yz-6y-6z+42)+42=$

$=xyz-6xy-6xz+42x-6x-6yz+36y+36z-252+42.\quad (2)$

Din (1) = (2) rezultă că legea este asociativă, $\forall x,y,z\in G.$

Comutativitatea:

Legea este comutativă dacă $x*y=y*x, \forall x,y\in G$.

$x*y=xy-6x-6y+42=yx-6y-6x+42=y*x,\ \forall x,y\in G$.

Elementul neutru:

Legea admite element neutru dacă $x*e=e*x=x,\ \forall x\in G$.

Cum legea este comutativă este suficientă doar relația $x*e=x,\ \forall x\in G\Rightarrow$

$xe-6x-6e+42=x\Rightarrow\ e(x-6)=7x-42\Rightarrow\ e=\dfrac{7(x-6)}{x-6}=7,\ \forall x\in G$.

Elemente simetrizabile:

Elementele lui G sunt simetrizabile dacă pentru orice element $x\in G$, există $x'\in G$ astfel încât să aibă loc proprietatea $x*x'=x'*x=e,\ \forall x\in G$.

Cum legea este comutativă este suficientă relația $x*x'=e,\ \forall x\in G\Rightarrow$ $x\cdot x'-6x-6x'+42=7$

Rezultă, $x'=\dfrac{6x-35}{x-6},\ \forall x\in G=(6;\infty)$.

Se arată că $x'\in G=(6;\infty)$. Evident, $x'=\dfrac{6x-35}{x-6}=\dfrac{6(x-6)+1}{x-6}=6+\dfrac{1}{x-6}\rangle 6,\ \forall x\in G=(6;\infty)$.

Aşadar, G împreună cu legea dată este grup comutativ.

Exercitii propuse

1. Să se arate că mulţimile G împreună cu legea de compoziţie "$x*y$" determină o structură de grup comutativ:

a) $G=\mathbb{R}$, $x*y=x+y-6,\forall x,y\in\mathbb{R}$;

b) $G=\mathbb{R}\setminus\{7\}$, $x*y=xy-7x-7y+56,\forall x,y\in\mathbb{R}$.;

c) $G=\mathbb{Z}$, $x*y=x+y+1,\forall x,y\in\mathbb{Z}$;

d) $G=(0;\infty)\setminus\{1\}$, $x*y=x^{3\ln y},\forall x,y\in(0;\infty)$;

e) $G=(5;\infty)$, $x*y=xy-5x-5y+30,\forall x,y\in\mathbb{R}$.;

f) $G=\mathbb{R}\setminus\{8\}$, $x*y=xy-8x-8y+72,\forall x,y\in\mathbb{R}$.;

g) $G=(-1;1)$, $x*y=\dfrac{x+y}{1+xy},\forall x,y\in(-1;1)$;

h) $G=(2;\infty)$, $x*y=xy-2(x+y)+6,\forall x,y\in\mathbb{R}$.;

2. Să se arate că mulţimile G împreună cu legea de compoziţie "$x*y$" determină o structură de grup comutativ:

a) $G=\left\{A(x)=\begin{pmatrix}x & x\\ 0 & x\end{pmatrix}\middle|x\in\mathbb{Q}\right\}$, ăn raport cu adunarea matricelor din $M_2(\mathbb{Q})$;

b) $G=\left\{X(a)\middle|X(a)=\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})\right\}$, în raport cu înmulţirea matricelor din $M_2(\mathbb{R})$;

c) $G=\left\{A(x)\middle|A(x)=\begin{pmatrix}x & x-1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R}), x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\right\}$, în raport cu înmulţirea matricelor din $M_2(\mathbb{R})$**;**

d) $G=\left\{A\middle|A=\begin{pmatrix}a & 2b\\ b & a\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{Q}), a,b\in\mathbb{Q}\setminus\{0\}\right\}$, în raport cu înmulţirea matricelor din $M_2(\mathbb{Q})$;

e) $G=\left\{A\middle|A=\begin{pmatrix}1 & a & b\\ 0 & 1 & a\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R}), a,b\in\mathbb{R}\right\}$, în raport cu înmulţirea matricelor din $M_3(\mathbb{R})$;

f) $G=\left\{A\middle|A=\begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{Z}), n\in\mathbb{Z}\right\}$ în raport cu înmulţirea matricelor din $M_2(\mathbb{Z})$;

g) $G=\left\{A(x)\middle|A(x)=\begin{pmatrix}2^x & 0\\ 0 & 3^x\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R}), x\in\mathbb{R}\right\}$ în raport cu înmulţirea matricelor din $M_2(\mathbb{R})$;

h) $G=\left\{A\middle|A=\begin{pmatrix}1 & \ln a & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & a\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R}), a\in(0;\infty)\right\}$, în raport cu înmulţirea matricelor din $M_3(\mathbb{R})$;

3*. Să se arate că mulţimile G împreună cu legea de compoziţie "$x*y$" determină o structură de grup comutativ:

a) $G=(0;1),\quad x*y=\dfrac{xy}{2xy-x-y+1},\ \forall x,y\in G$**;**

b) $G=\mathbb{R}$**,** $x*y=\sqrt[3]{x^3+y^3},\ \forall x,y\in\mathbb{R}$**;**

c) $G=\left\{\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -a & 1 & -\dfrac{a^2}{2}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\middle|a\in\mathbb{R}\right\}$, în raport cu înmulţirea matricelor din $M_3(\mathbb{R})$;

2. Morfisme şi izomorfisme de grupuri

Definiţie

Fie $(G;*)$ şi $(G';\circ)$ două grupuri. O funcţie $f:G\to G'$ se numeşte **morfism de grupuri** dacă verifică proprietatea $f(x*y)=f(x)\circ f(y),\ \forall x,y\in G$;

Un morfism $f:G\to G$ se numeşte endomorfism al lui G;

Exemplu 1: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^*_+$, $f(x)=5^x$ este un morfism de la grupul $(\mathbb{R};+)$ la grupul $(\mathbb{R}^*_+;\bullet)$ întrucât

$f(x+y)=5^{x+y}=5^x\cdot 5^y=f(x)\cdot f(y),\forall x,y\in\mathbb{R}$;

Definiţie

Fie $(G;*)$ şi $(G';\circ)$ două grupuri. Un morfism $f:G\to G'$ se numeşte **izomorfism de grupuri** dacă f este o funcţie bijectivă;

Un izomorfism $f:G\to G$ se numeşte **automorfism** al lui G;

Exemplu 2: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^*_+$, $f(x)=5^x$ este un izomorfism de la grupul $(\mathbb{R};+)$ la grupul $(\mathbb{R}^*_+;\bullet)$ întrucât f este morfism şi de asemenea este o funcţie bijectivă:

Injectivitatea: Din $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow 5^{x_1}=5^{x_2}\Rightarrow x_1=x_2,\ \forall x_1,x_2\in\mathbb{R}$;

Surjectivitatea : $\forall y\in\mathbb{R}^*_+=(0;\infty)\Rightarrow\exists x\in\mathbb{R}\ a.i\ f(x)=y\Leftrightarrow 5^x=y\Rightarrow\exists x=\log_5 y\in\mathbb{R}$;

Observaţie: Dacă $f:G\to G'$ este un izomorfism de grupuri atunci $f^{-1}:G'\to G$ este de asemenea un izomorfism.

Teorema: Dacă $f:(G,*)\to(G,\circ)$ este morfism de grupuri iar **e** respectiv **e'** sunt elementele neutre ale celor două grupuri atunci $f(e)=e'$;

Demonstraţie:

$f(e)=f(e*e)=f(e)\circ f(e)\ \big|\ \bullet f^{-1}(e)\Rightarrow e'=f(e)$.

Exemplu 3: Pe $\mathbb{R}$ se definesc legile de compoziţie $x*y=x+y-6$, $x\circ y=x+y-8,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$.

Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=mx+2$ să fie morfism de la grupul $(\mathbb{R},*)$ la grupul $(\mathbb{R},\circ)$.

Rezolvare:

Conform teoremei de mai sus, f este morfism de grupuri , prin urmare $f(e_*)=e_\circ$ unde e_*, $e_\circ$ sunt elementele neutre ale celor două grupuri:

$x*e_*=x\Rightarrow e_*=6$ şi $x\circ e_\circ=x\Rightarrow e_\circ=8$

Aşadar, $f(6)=8\Rightarrow m\bullet 6+2=8\Rightarrow m=1$.

Exercitii rezolvate

1. Fie $(G,\circ)$ un grup, unde $G=(3;\infty)$ şi $x\circ y=(x-3)(y-3)+3$. Se consideră funcţia $f:(0;\infty)\to G,\ f(x)=x+3$. Să se arate că f este un izomorfism de grupuri de la $((0;\infty),\cdot)$ la $(G,\circ)$.

Rezolvare : f este izomorfism dacă şi numai dacă este un morfism bijectiv de grupuri.

f este funcţie de gradul întâi prin urmare este funcţie bijectivă.

Injectivitatea : Din $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1+3=x_2+3\Rightarrow x_1=x_2$;

Surjectivitatea : $\forall y\in G=(3;\infty)\Rightarrow\exists x\in(0;\infty)\ a.i\ f(x)=y$

Fie $y\in G=(3;\infty)\Rightarrow f(x)=y\Rightarrow x+3=y\Rightarrow x=y-3\Rightarrow x\rangle 0$.

Morfism: Trebuie să arătăm că $f(x\cdot y)=f(x)\circ f(y),\ \forall x,y\in(0;\infty)$;

$f(x\cdot y)=xy+3$,

$f(x)\circ f(y)=(x+3)(y+3)=(x+3-3)(y-3+3)+3=xy+3=f(xy)$.

2. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea $x*y=2xy-6x-6y+21,\forall x,y\in\mathbb{R}$. Să se arate că funcţia $f:(3;\infty)\to\mathbb{R}_+^*$, f(x)=2(x-3) este un izomorfism de grupuri de la $((3;\infty),*)$ la $(\mathbb{R}_+^*,\cdot)$.

Rezolvare: Trebuie demonstrat că f este un morfism bijectiv.

Pentru a demonstra că f este morfism de grupuri trebuie să arătăm că

$f(x*y)=f(x)\cdot f(y),\ \forall x,y\in(3;\infty)$.

$f(x*y)=2(x*y-3)=2(2xy-6x-6y+18)=4xy-12x-12y+36$,

$f(x)\cdot f(y)=2(x-3)\cdot 2(y-3)=4xy-12y-12x+36$, ceea ce arată că f este morfism.

f bijectivă: Cum f(x)=2(x-3) este crescătoare adică monotonă, rezultă că f este injectivă.

Cum $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty,\ \lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty\Rightarrow \mathrm{Im}\,f=\mathbb{R}\Rightarrow$ f este surjectivă. Aşadar, f este bijectivă.

Altfel, din $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow 2(x_1-3)=2(x_2-3)\Rightarrow x_1=x_2\Rightarrow$ f este injectivă.

Fie $y\in\mathbb{R}_+^*\Rightarrow f(x)=y\Rightarrow 2(x-3)=y\Rightarrow\exists x=\frac{y+6}{2}\rangle 3$. Rezultă f surjectivă adică f este bijectivă.

Mai mult f este izomorfism între cele două grupuri.

3. Se consideră grupul $([7;\infty),*)$ cu legea de compoziţie $x*y=xy-7x-7y+56$. Să se arate că funcţia $f:[7;\infty)\to\mathbb{R}_+^*,\ f(x)=x-7$ este izomorfism de la grupul $([7;\infty),*)$ la grupul $(\mathbb{R}_+^*,\cdot)$.

Rezolvare: f este morfism de grupuri, $\Leftrightarrow f(x*y)=f(x)\cdot f(y),\ \forall x,y\in[7;\infty)$.

$f(x*y)=x*y-7=xy-7x-7y+56-7=xy-7x-7y+49$.

$f(x)\cdot f(y)=(x-7)(y-7)=xy-7x-7y+49$. Din cele două relaţii rezultă că f este morfism de grupuri.

$f:[7;\infty)\to\mathbb{R}_+^*$, $f(x)=x-7$ este bijectivă dacă şi numai dacă f este injectivă şi surjectivă.

Injectivitatea: Fie $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1-7=x_2-7\Rightarrow x_1=x_2$;

Surjectivitatea: Fie $y\in\mathbb{R}_+^*$ astfel încât $f(x)=y$ $\Leftrightarrow x-7=y\Rightarrow x=y+7\geq 0+7\Rightarrow x\geq 7$. Rezultă că f este surjectivă, deci, f este bijectivă.

Aşadar, f este izomorfism de grupuri.

4*. Fie mulţimea $G=(2;\infty)$ înzestrată cu legea de compoziţie $x*y=xy-2x-2y+6,\forall x,y\in(2;\infty)$ Să se arate că funcţia $f:\mathbb{R}\to(2;\infty)$, $f(x)=e^x+2$ este un izomorfism între grupurile $(\mathbb{R},+)$ şi $(G,*)$.

Rezolvare: Pentru a arăta că $f:\mathbb{R}\to(2;\infty)$ este izomorfism între grupurile $(\mathbb{R},+)$ şi $(G,*)$ trebuie să arătăm că f este un morfism bijectiv de grupuri.

f morfism de grupuri $\Leftrightarrow f(x+y)=f(x)*f(y),\ \forall x,y\in(2;\infty)$.

$f(x+y)=e^{x+y}+2$, $f(x)*f(y)=(e^x+2)(e^y+2)-2(e^x+2)-2(e^y+2)+6=e^{x+y}+2$

f este funcţie bijectivă deoarece:

a) f este injectivă: Din $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow e^{x_1}+2=e^{x_2}+2\Rightarrow x_1=x_2$;

b) f este surjectivă: Pentru $\forall y\in(2;\infty),\exists x\in\mathbb{R}$ a.î. f(x) = y. Rezultă $y=e^x+2\Rightarrow e^x=y-2\Rightarrow x=\ln(y-2)\in\mathbb{R}$.

Aşadar, f este izomorfism de grupuri

Exercitii propuse

1. Să se arate că funcţia $f:\mathbb{R}\to(0;\infty)$, $f(x)=5^x$ este un izomorfism de grupuri de la $(\mathbb{R},+)$ la $(\mathbb{R}_+^*,\bullet)$.

2. Să se arate că funcţia $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, $f(n)=na$, $\forall n\in\mathbb{Z}$ este un endomorfism (morfism de grupuri de la $(\mathbb{Z};+)$ la $(\mathbb{Z};+)$);

3. Să se arate că funcţia $f:\mathbb{C}^*\to\mathbb{R}_+^*$, $f(x+iy)=\sqrt{x^2+y^2}$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$ este un morfism de grupuri de la $(\mathbb{C}^*;\bullet)$ la $(\mathbb{R}_+^*;\bullet)$;

4. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea $x*y=xy+2x+2y+2,\forall x,y\in\mathbb{R}$. Să se arate că funcţia $f:(-2;\infty)\to\mathbb{R}_+^*$, f(x) = x+2 este un izomorfism de grupuri de la $((-2;\infty),*)$ la $(\mathbb{R}_+^*,\bullet)$.

5. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea $x*y=xy-5x-5y+30,\forall x,y\in\mathbb{R}$. Să se arate că funcţia $f:(5;\infty)\to\mathbb{R}_+^*$, f(x) = x-5 este un izomorfism de grupuri de la $((5;\infty),*)$ la $(\mathbb{R}_+^*,\bullet)$.

6. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea $x*y=-xy+3x+3y-6, \forall x,y\in\mathbb{R}$. Să se arate că funcţia $f:(-\infty;3)\to\mathbb{R}_+^*$, f(x) = - x + 3 este un izomorfism de grupuri de la $((-\infty;3),*)$ la $(\mathbb{R}_+^*,\bullet)$.

7. Se consideră grupul $((5,\infty),*)$ cu legea de compoziţie $x*y=xy-5x-5y+30,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$.

Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât funcţia $f:(5;\infty)\to\mathbb{R}_+^*,\ f(x)=x+m$ să fie izomorfism de grupuri.

8. Se consideră grupurile $(\mathbb{R},+)$ şi $(\mathbb{R}_+^*,\cdot)$. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+^*,\ f(x)=3^{mx+m-1}$ să fie morfism de grupuri.

9. Pe $\mathbb{Z}$ se introduc legile de compoziţie $x*y=x+y-2,\ x\circ y=x+y+1$. Să se determine $a\in\mathbb{Z}$ astfel încât funcţia $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z},\ f(x)=x+a$ să fie izomorfism de grupuri de la $(\mathbb{Z},*)$ la $(\mathbb{Z},\circ)$;

10*. Se consideră grupul $((3,\infty),*)$ cu legea de compoziţie $x*y=xy-3x-3y+12,\ \forall x,y\in(3;\infty)$.

Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât $f:\mathbb{R}_+^*\to(3;\infty),\ f(x)=ax+b,\ \forall x\in\mathbb{R}_+^*$ să fie izomorfism de la grupul $(\mathbb{R}_+^*,\bullet)$ la grupul $((3,\infty),*)$.

11*. Pe mulţimea $G=(-1;1)$, se defineşte legea $x*y=\dfrac{x+y}{1+xy},\forall x,y\in(-1;1)$; Să se arate că funcţia $f:(-1;1)\to\mathbb{R}_+,\ f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$ este un izomorfism de grupuri de la $((-1;1),*)$ la $(\mathbb{R}_+,\bullet)$

12*. Pe mulţimea $G=(1;\infty)$ se defineşte legea $x*y=\sqrt{x^2y^2-x^2-y^2+2},\ \forall x,y\in(1;\infty)$. Să se arate că funcţia $f:\mathbb{R}_+^*\to(1;\infty),\ f(x)=\sqrt{x+1}$, este un izomorfism de grupuri de la $(\mathbb{R}_+^*,\bullet)$ la $((1;\infty),*)$.

13.** Se consideră grupurile comutative , $G=\left\{z\,\middle|\,z=x+y\sqrt{5},x,y\in\mathbb{Q},x^2-5y^2=1\right\}$ cu înmulţirea numerelor iraţionale şi $M=\left\{A\,\middle|\,A=\begin{pmatrix}x & 2y\\ \frac{5}{2}y & x\end{pmatrix},x,y\in\mathbb{Q},x^2-5y^2=1\right\}$ cu înmulţirea matricelor. Să se arate că funcţia $f:G\to M$, $f(x+y\sqrt{5})=\begin{pmatrix}x & 2y\\ \frac{5}{2}y & x\end{pmatrix}$ este un izomorfism de la grupul $(G,\cdot)$ la grupul $(M,\cdot)$.

14**. Fie grupul comutativ $(G,*)$ unde $G=(-1;1)$ şi $x*y=\dfrac{x+y}{1+xy},\forall x,y\in G.$ Să se calculeze numărul $A=\dfrac{1}{2\cdot1+1}*\dfrac{1}{2\cdot2+1}*\dfrac{1}{2\cdot3+1}*....*\dfrac{1}{2\cdot2015+1}$.

III. Inele şi corpuri

1. Inele şi corpuri. Definiţie

Definiţie

Fie $M \neq 0$ o mulţime înzestrată cu două legi de compoziţie MxM→M, $(x,y) \to x * y$, $(x,y) \to x \circ y$.

Operaţia "$\circ$" **este distributivă la stânga faţă de operaţia** "$*$"
$\Leftrightarrow x \circ (y * z) = (x \circ y) * (x \circ z),\ \forall x, y, z \in M$;

Operaţia "$\circ$" **este distributivă la dreapta faţă de operaţia** "$*$"
$\Leftrightarrow (y * z) \circ x = (y \circ x) * (z \circ x),\ \forall x, y, z \in M$;

Spunem că legea de compoziţie $(x,y) \to x \circ y$ **este distributivă faţă de legea** $(x,y) \to x * y$ dacă este **distributivă şi la stânga şi la dreapta.**

Observaţie: Dacă legea $(x,y) \to x \circ y$ este comutativă, atunci distributivitatea la stânga o implică pe cea la dreapta.

Exemplu 1: Distributivitatea înmulţirii faţă de adunare
$5 \cdot (3+4) = 5 \cdot 3 + 5 \cdot 4 = 35$, $(3+4) \cdot 5 = 3 \cdot 5 + 4 \cdot 5 = 35$;

Definiţie

O mulţime nevidă I înzestrată cu două legi de compoziţie "$*$" şi "$\circ$" se numeşte **inel** dacă sunt îndeplinite următoarele condiţii:

1. $(I;*)$ **este grup abelian;**

2. a doua lege este asociativă $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z), \forall x, y, z \in I.$

3. a doua lege este distributivă faţă de prima $x \circ (y * z) = (x \circ y) * (x \circ z),\ \forall x, y, z \in I$;
$(y * z) \circ x = (y \circ x) * (z \circ x),\ \forall x, y, z \in I$.

Dacă în plus, operaţia de înmulţire, "$\circ$" admite element neutru, spunem că inelul $(I;*,\circ)$ este unitar;

Dacă înmulţirea este comutativă, inelul se numeşte comutativ.

Uneori inelul poate fi dat prin $(I;+,\cdot)$ unde prima lege este adunarea şi cea de a doua este înmulţirea pe I;

Exemple de inele: $(\mathbb{Z},+,\cdot)$; $(\mathbb{Q},+,\cdot)$; $(\mathbb{R},+,\cdot)$; $(\mathbb{C},+,\cdot)$; $(\mathbb{Z}_n,+,\bullet)$; $\left(\mathbb{Z}[\sqrt{2}],+,\bullet\right)$;
$(\mathbb{Z}[i],+,\bullet)$; $(M_n(\mathbb{C}),+,\bullet)$; $(F(E),+,\circ)$;

Notăm cu "0" **elementul zero al inelului adică elementul neutru de la prima lege;**

Definiţie

Fie $(I,*,\circ)$ un inel . Un element $a \in I,\ a \neq 0$ se numeşte **divizor al lui „0" la stânga** (respectiv la dreapta dacă $\exists b \in I,\ b \neq 0$ astfel încât $a \bullet b = 0$ ($b \bullet a = 0$).

Un element „ a" care este în acelaşi timp divizor al lui „ 0 " la stânga şi la dreapta se numeşte **divizor al lui „ 0 ".**

Exemplu 2: În inelul $(\mathbb{Z}_6,+,\bullet)$ elementele 2 şi $\hat{3}$ sunt divizori ai lui „$\hat{0}$ „ - elementul zero şi anume elementul neutru la operaţia de adunare în inelul claselor de resturi modulo 6.

Din $2\neq\hat{0},\ \hat{3}\neq\hat{0}\Rightarrow 2\bullet 3=\hat{6}=\hat{0}$.

Definiţie

Un inel $(I,*,\circ)$ **are divizori ai lui „ 0 „** $\Leftrightarrow\exists a,b\in I,\ a,b\neq 0$ astfel încât $a\circ b=0$, $b\circ a=0$.

Un inel $(I,*,\circ)$ **nu are divizori ai lui „ 0 „** $\Leftrightarrow a\circ b=0\Rightarrow a=0$ *sau* $b=0$ sau $\forall a,b\in I, a\neq 0$, $b\neq 0\Rightarrow a\circ b\neq 0$;

Exemplu 3: Inelul $(M_2(\mathbb{C}),+,\bullet)$ are divizori ai lui zero la stânga întrucât din

$$\begin{pmatrix}2&0\\1&0\end{pmatrix}\neq O_2,\ \begin{pmatrix}0&0\\3&1\end{pmatrix}\neq O_2\Rightarrow\begin{pmatrix}2&0\\1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0\\3&1\end{pmatrix}=O_2;$$

Definiţie

Un inel $(I,*,\circ)$ unitar, nenul fără divizori ai lui „ 0 „ se numeşte **inel integru**. Dacă în plus, inelul este şi comutativ, va fi numit **domeniu de integritate**.

Exemple de domenii de integritate: $(\mathbb{Z},+,\cdot)$; $(\mathbb{Q},+,\cdot)$; $(\mathbb{R},+,\cdot)$; $(\mathbb{C},+,\cdot)$; $(\mathbb{Z}[i],+,\bullet)$;

Definiţie

Fie $(I,*,\circ)$ un inel unitar. Un element $a\in(I,*,\circ)$ se numeşte **inversabil** dacă există $b\in(I,*,\circ)$ astfel încât $a\circ b=b\circ a=e_\circ$ unde $e_\circ$ este elementul neutru de la a doua lege.

Notăm cu $U(I)=\{a\in I\,|\,a-inversabil\}$ **- grupul elementelor inversabile ale inelului** $(I,*,\circ)$**;**

Definiţie

Fie $(K,*,\circ)$ un inel unitar cu $1\neq 0$. K se numeşte **corp** dacă orice element diferit de elementul zero ” 0 ” al inelului este inversabil. Dacă în plus, a doua lege este comutativă, atunci K este **corp comutativ**.

Exemple de corpuri**:** $(\mathbb{Q};+;\bullet)$**;** $(\mathbb{R};+;\bullet)$**;** $(\mathbb{C};+;\bullet)$**;** $\left(\mathbb{Q}[\sqrt{d}];+;\bullet\right)$

Exemplu 4: Pe $\mathbb{Q}$ **se definesc legile de compoziţie**

$x*y=x+y+2$ **şi** $x\circ y=xy+2x+2y+2$**,** $\forall x,y\in\mathbb{Q}$**; Să se arate că** $(\mathbb{Q},*,\circ)$ **este un corp comutativ.**

Rezolvare: Pentru legea $x*y=x+y+2$ se arată că este corect definită , este asociativă şi comutativă, după care se determină elementul neutru $e_*=-2$, elementele simetrizabile au forma $x'=-4-x,\ \forall x\in\mathbb{Q}$.

Aşadar, $(\mathbb{Q},*)$ este grup comutativ.

Distributivitatea înmulţirii "$\circ$" faţă de adunare "$*$":

$x\circ(y*z)=(x\circ y)*(x\circ z),\ \forall x,y,z\in\mathbb{Q}$.

$x\circ(y*z)=x\circ(y+z+2)=x(y+z+2)+2x+2(y+z+2)+2=xy+xz+4x+2y+2z+6$;

$(x\circ y)*(x\circ z)=(xy+2x+2y+2)*(xz+2x+2z+2)=(xy+2x+2y+2)+(xz+2x+2z+2)+2=$
$=xy+xz+4x+2y+2z+6$..

Legea a doua este comutativă şi asociativă. Se determină elementul neutru $e_{\circ}=-1$ şi apoi elementele simetrizabile:

$x\circ x'=e\Rightarrow\ xx'+2x+2x'+2=-1\Rightarrow\ x'(x+2)=-2x-3\Rightarrow\ x'=\dfrac{-2x-3}{x+2}\in\mathbb{Q}-\{-2\}$.

Aşadar, orice element nenul (diferit de elementul neutru $e_{*}=-2$) este inversabil , rezultă că $(\mathbb{Q},*,\circ)$ este corp comutativ.

Activitate independentă		**Răspuns**
Pe $\mathbb{R}$ se definesc legile de compoziţie $x*y=x+y-1$ şi $x\circ y=2xy-2x-2y+3,\quad \forall x,y\in\mathbb{R}$; Să se arate că $(\mathbb{R},*,\circ)$ este un corp comutativ .		

Exercitii rezolvate

1. Pe $\mathbb{Z}$ se definesc legile de compoziţie $x*y=x+y+3$ şi $x\circ y=xy+3x+3y+6,\forall x,y\in\mathbb{Z}$;
Să se arate că $(\mathbb{Z},*,\circ)$ este un inel comutativ fără divizori ai lui zero. Să se determine elementele inversabile ale inelului.

Rezolvare: $(\mathbb{Z},*)$ - grup comutativ;

Asociativitatea $(x*y)*z=x*(y*z),\ \forall x,y,z\in\mathbb{Z}$;

$(x*y)*z=(x+y+3)*z=x+y+3+z+3=x+y+z+6$

$x*(y*z)=x*(y+z+3)=x+y+z+3+3=x+y+z+6$

Comutativitatea: $x*y=y*x,\ \forall x,y\in\mathbb{Z}$; $x*y=x+y+3=y+x+3=y*x$;

Element neutru: $\exists e\in\mathbb{Z}$ *a.î* $x*e=x,\forall x\in\mathbb{Z}$ $x*e=x\Rightarrow x+e+3=x\Rightarrow e=-3\in\mathbb{Z}$;

Elemente simetrizabile: $\exists x'\in\mathbb{Z}$ *a.î* $x*x'=e,\forall x\in\mathbb{Z}$.

$x*x'=e\Rightarrow x+x'+3=-3\Rightarrow x'=-x-6\in\mathbb{Z}$

Distributivitatea înmulţirii faţă de adunare, (a legii "$\circ$" faţă de legea "$*$"):

$x\circ(y*z)=(x\circ y)*(x\circ z),\ \forall x,y,z\in\mathbb{Z}$;

Este suficientă aceasta întrucât legea "$\circ$" este comutativă. $x\circ y=y\circ x,\ \forall x,y\in\mathbb{Z}$

$x\circ(y*z)=x\circ(y+z+3)=x(y+z+3)+3x+3(y+z+3)+6=xy+xz+6x+3y+3z+15$ (1)

$(x\circ y)*(x\circ z)=(xy+3x+3y+6)*(xz+3x+3z+6)=xy+3x+3y+6+xz+3x+3z+6+3$ (2)

Aşadar, din (1) şi (2) rezultă distributivitatea celei de a doua lege faţă de prima;

$(\mathbb{Z},*)$

Element neutru: $\exists e'\in\mathbb{Z}$ *a.î* $x\circ e'=x,\forall x\in\mathbb{Z}$

$x\circ e'=x\Rightarrow xe'+3x+3e'+6=x\Rightarrow e'=-2\in\mathbb{Z},\ \forall x\in\mathbb{Z}$;

Aşadar, $(\mathbb{Z},*,\circ)$ este un inel comutativ cu unitate; Să arătăm că **inelul nu are divizori ai lui zero**.

Presupunem că inelul are divizori ai lui zero(elementul zero al inelului este elementul neutru de la prima lege e= - 3); $\Rightarrow \exists a,b\in\mathbb{R}, a\neq -3, b\neq -3$ astfel încât $a\circ b=-3\Rightarrow ab+3a+3b+6=-3\Leftrightarrow (a+3)(b+3)=0\Rightarrow a=-3,\ sau\ b=-4$. Contradicţie cu presupunerea făcută. Aşadar, inelul nu are divizori ai lui zero.

Să determinăm **elementele inversabile** ale inelului.

Fie $\exists x'\in\mathbb{Z}$ astfel încât $x\circ x'=e,\ \forall x\in\mathbb{Z}\setminus\{-3\}$. Rezultă,

$$xx'+3x'+3x+6=-2\Rightarrow x'=\frac{-8-3x}{x+3}=-3+\frac{1}{x+3}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x+3\,|\,\mathbb{Z}\Rightarrow x\in\{-4;-2\};$$

Exercitii propuse

1. Pe $\mathbb{Z}$ se definesc legile de compoziţie $x*y=x+y-2$ şi $x\circ y=xy-2(x+y)+6,\forall x,y\in\mathbb{Z}$;

a)Să se arate că $(\mathbb{Z},*,\circ)$ este un inel comutativ fără divizori ai lui zero.

b) Determinaţi elementele inversabile ale inelului;

2. Pe $\mathbb{R}$ se definesc legile de compoziţie $x*y=x+y+4$ şi $x\circ y=xy+4x+4y+12,\forall x,y\in\mathbb{R}$;

Să se arate că $(\mathbb{R},*,\circ)$ este un inel comutativ fără divizori ai lui zero.

3. Pe $\mathbb{Z}$ se definesc legile de compoziţie $x*y=x+y-3$ şi $x\circ y=xy-3x-3y+12$;

Să se arate că $(\mathbb{Z},*,\circ)$ $(\mathbb{R},*,\circ)$ este un inel comutativ fără divizori ai lui zero.

4. Pe $\mathbb{R}$ se definesc legile de compoziţie $x*y=x+y+5$ şi $x\circ y=xy+5x+5y+20$;

Să se arate că $(\mathbb{R},*,\circ)$ este un inel comutativ fără divizori ai lui zero.

5. Pe $\mathbb{R}$ se definesc legile de compoziţie $x*y=x+y+2$ şi $x\circ y=2xy+4x+4y+6$;

Să se arate că $(\mathbb{R},*,\circ)$ este un inel comutativ fără divizori ai lui zero.

6. Să se arate că mulţimea $I=\left\{\begin{pmatrix}x & y\\ 5y & x\end{pmatrix}\middle|x,y\in\mathbb{Z}\right\}$ împreună cu adunarea şi înmulţirea matricelor este un inel fără divizori ai lui zero;

7. Să se arate că mulţimea $I=\left\{\begin{pmatrix}x & -y\\ -3y & x\end{pmatrix}\middle|x,y\in\mathbb{Z}\right\}$ împreună cu adunarea şi înmulţirea matricelor este un inel fără divizori ai lui zero;

8. Să se arate că mulţimea $M=\left\{A\middle|A=\begin{pmatrix}x & y\\ 13y & x\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})\right\}$ împreună cu adunarea şi înmulţirea matricelor este un inel fără divizori ai lui zero;

9. Să se arate că mulţimea $I=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}\middle|a,b\in\mathbb{Z}\right\}$ împreună cu adunarea şi înmulţirea

matricelor este un inel comutativ;

10. Să se arate că mulţimea $I=\left\{A\left|A=\begin{pmatrix}x & y\\ 0 & x\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})\right.\right\}$ împreună cu adunarea şi înmulţirea matricelor este un inel cu divizori ai lui zero;

11. Să se arate că mulţimea $\mathbb{Z}[i]=\left\{a+bi\left|a,b\in\mathbb{Z},i^2=-1\right.\right\}\subset\mathbb{C}$ împreună cu adunarea şi înmulţirea numerelor complexe este un inel comutativ fără divizori ai lui zero;

12. Să se arate că mulţimea $A=\left\{x+y\sqrt{3}\left|x,y\in\mathbb{Z}\right.\right\}\subset\mathbb{R}$ împreună cu adunarea şi înmulţirea numerelor reale este inel;

13. Pe $\mathbb{R}$ se definesc legile de compoziţie $x*y=x+y-2$ şi $x\circ y=2xy-4x-4y+10,\forall x,y\in\mathbb{R}$;

Să se arate că $(\mathbb{R},*,\circ)$ este un corp comutativ.

14. Pe $\mathbb{Q}$ se definesc legile de compoziţie $x*y=x+y+2$ şi $x\circ y=xy+2x+2y+2,\forall x,y\in\mathbb{Q}$;

Să se arate că $(\mathbb{Q},*,\circ)$ este un corp comutativ .

15. Pe $\mathbb{Q}$ se definesc legile de compoziţie $x*y=x+y-7,\ x\circ y=xy-7x-7y+56,\ \forall x,y\in\mathbb{Q}.$

Să se arate că $(\mathbb{Q},*,\circ)$ este un corp comutativ .

16**. Pe mulțimea $K=(0;\infty)$ se definesc legile de compoziție $x*y=x\cdot y,\ x\circ y=x^{\ln y},\ \forall x,y\in K$.

Să se arate că $(K,*,\circ)$ este un corp comutativ.

17**.Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se definesc legile de compoziție $x*y=\sqrt[3]{x^3+y^3},\ x\circ y=x\cdot y,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$.

Să se arate că $(\mathbb{R},*,\circ)$ este un corp comutativ.

18**. Pe $\mathbb{R}$ se definesc legile de compoziție $x*y=ax+by+c$ și $x\circ y=x\cdot y,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$. Determinați $a,b,c\in\mathbb{R}$ astfel încât $(\mathbb{R},*,\circ)$ să fie inel.

2. Morfisme și izomorfisme de inele și corpuri

Definiție:

Fie $(I;+,\bullet)$ și $(I',*,\circ)$ două inele. O funcţie $f:G\to G'$ se numeşte **morfism de inele** dacă verifică proprietăţile $f(x+y)=f(x)*f(y),\ \forall x,y\in I$ şi $f(x\bullet y)=f(x)\circ f(y),\ \forall x,y\in I$;

- f este **izomorfism de inele** dacă și numai dacă este un morfism bijectiv de inele.
- f este **morfism de corpuri** dacă și numai dacă este morfism de inele.
- f este **izomorfism de corpuri** dacă și numai dacă este izomorfism de inele

Observație:

Fie $(I;+,\bullet)$ și $(I',*,\circ)$ două inele unitare cu elementele neutre e respectiv e' în raport cu a doua lege. Dacă f este morfism de inele, și $f(e)=e'$, rezultă că f este morfism unitar de inele.

Exemplu.

Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se definesc legile de compoziție $x*y=x+y+2,\ x\circ y=2x\cdot y+4x+4y+6,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$. Să se arate că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{2}x-2$ este izomorfism de corpuri, de la corpul $(\mathbb{R};+,\bullet)$ la corpul $(\mathbb{R},*,\circ)$.

Rezolvare:

f este izomorfism de corpuri dacă și numai dacă f este un morfism bijectiv de inele.

f este morfism de inele , de la inelul $(\mathbb{R};+,\bullet)$ la inelul $(\mathbb{R},*,\circ)$ dacă și numai dacă $f(x+y)=f(x)*f(y),$ și $f(x\bullet y)=f(x)\circ f(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}.$

$$\begin{cases} f(x+y)=\dfrac{x+y}{2}-2=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}y-2. \\ f(x)*f(y)=\left(\dfrac{1}{2}x-2\right)*\left(\dfrac{1}{2}y-2\right)=\dfrac{1}{2}x-2+\dfrac{1}{2}y-2\ +2 \end{cases} \Rightarrow f(x+y)=f(x)*f(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

$$\begin{cases} f(x\bullet y)=\dfrac{x\cdot y}{2}-2 \\ f(x)\circ f(y)=\left(\dfrac{1}{2}x-2\right)\circ\left(\dfrac{1}{2}y-2\right)=2\bullet\left(\dfrac{1}{2}x-2\right)\bullet\left(\dfrac{1}{2}y-2\right)\ +4\left(\dfrac{1}{2}x-2\right)+4\left(\dfrac{1}{2}y-2\right)+6=\dfrac{x\cdot y}{2}-2 \end{cases}$$

$\Rightarrow f(x\bullet y)=f(x)\circ f(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}.$

Mai rămâne de arătat că f este funcție bijectivă.

Injectivitatea: Din $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow\frac{1}{2}x_1-2=\frac{1}{2}x_2-2\Rightarrow x_1=x_2$.

Surjectivitatea: Fie $y\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(x)=y\Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x\ -2\Rightarrow x=2y+4\in\mathbb{R}$.

Altfel, cum f este o funcție continuă, și $f'(x)=\frac{1}{2}\rangle 0\Rightarrow$ f este strict crescătoare, deci

injectivă, şi cum $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ iar $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ adică $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$, rezultă că f este surjectivă. Aşadar, f este bijectivă.

Exercitii rezolvate

1. Pe $\mathbb{Z}$ se definesc legile de compoziţie $x*y=x+y-2$ şi $x\circ y=xy-2(x+y)+6, \forall x,y\in\mathbb{Z}$;

Determinaţi $a,b\in\mathbb{Z}$ astfel încât $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z},\ f(x)=ax+b$ să fie izomorfism de la inelul $(\mathbb{Z},+,\bullet)$ la inelul $(\mathbb{Z},*,\circ)$;

Rezolvare: „ 0 ” este elementul neutru în raport cu adunarea şi „1 „ elementul neutru la înmulţire în inelul $(\mathbb{Z},+,\bullet)$. Atunci, din f(0)=2 şi f(1) =3 rezultă f(x)= x +2; Se mai arată că f este bijectivă şi morfism între grupurile subiacente: $f(x+y)=f(x)*f(y),$

$f(x\bullet y)=f(x)\circ f(y)$;

2. Pe $\mathbb{Q}$ se definesc legile de compoziţie $x*y=x+y-7,\ x\circ y=xy-7x-7y+56,\ \forall x,y\in\mathbb{Q}$.

Să se determine numerele reale a şi b astfel încât funcţia $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$, $f(x)=ax+b$ să fie un izomorfism intre corpurile $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ şi $(\mathbb{Q},*,\circ)$.

Rezolvare: Se determină elementele neutre ale legilor de compoziţie $e_*=7,\ e_\circ=8$.

Cum f este izomorfism rezultă $f(0)=7$ şi $f(1)=8$ unde 0 este elementul neutru la adunare iar 1 elemenetul neutru la inmulţire. Rezultă sistemul în funcţie de a şi b de unde rezultă $a=1,\ b=7\Rightarrow$

$f(x)=x+7$.

3. Se consideră corpurile $M=\left\{\begin{pmatrix} a & 7b\\ b & a\end{pmatrix}\middle| a,b\in\mathbb{Q}, a^2-7b^2=1\right\}\subset M_2(\mathbb{Q})$ şi $Q\left(\sqrt{7}\right)=\left\{a+b\sqrt{7}\middle| a,b\in\mathbb{Q}, a^2-7b^2=1\right\}\subset\mathbb{R}$.

Să se arate că funcţia $f:Q(\sqrt{7})\to M,\ f(a+b\sqrt{7})=\begin{pmatrix} a & 7b\\ b & a\end{pmatrix}$ e izomorfism de la corpul $\left(Q\left(\sqrt{7}\right),+,\cdot\right)$ la $(M,+,\cdot)$

Rezolvare: Bijectivitatea este evidentă.

Fie $A,B\in M$ de forma $A=\begin{pmatrix} a & 7b\\ b & a\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} x & 7y\\ y & x\end{pmatrix}$. Atunci, $A+B=\begin{pmatrix} a+x & 7(b+y)\\ b+y & a+x\end{pmatrix}$, .

$A\cdot B=\begin{pmatrix} ax+7by & 7(ay+bx)\\ ay+bx & ax+7by\end{pmatrix}$. Fie $u=a+b\sqrt{7}\in Q\left(\sqrt{7}\right),\ v=x+y\sqrt{7}\in Q\left(\sqrt{7}\right)$, atunci,

$$f(u+v)=f(a+x+(b+y)\sqrt{7})=\begin{pmatrix} a+x & 7(b+y)\\ b+y & a+x\end{pmatrix}=A+B=f(u)+f(v);$$

$f(u\cdot v)=f(ax+7by+(ay+bx)\sqrt{7})=\begin{pmatrix} ax+7by & 7(ay+bx) \\ ay+bx & ax+7by \end{pmatrix}=A\cdot B=f(u)\cdot f(v)$.

Cum $f(1+0\cdot\sqrt{3})=\begin{pmatrix} 1 & 7\cdot 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=I_2$ rezultă că f este izomorfism de corpuri.

Exercitii propuse

1. Se consideră inelele $A=\left\{x+y\sqrt{13}\,|\,x,y\in\mathbb{Z}\right\}$, $M=\left\{A\,\middle|\,A=\begin{pmatrix} x & y \\ 13y & x \end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})\right\}$.

Să se arate că funcția $f:A\to M$ definită prin $f(x+y\sqrt{13})=\begin{pmatrix} x & y \\ 13y & x \end{pmatrix}$ este un izomorfism de inele.

2. Se consideră inelele $I=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}|a,b\in\mathbb{Z}\right\}$ împreună cu adunarea şi înmulţirea matricelor respectiv $\mathbb{Z}[i]=\left\{a+bi\,\middle|\,a,b\in\mathbb{Z},i^2=-1\right\}\subset\mathbb{C}$ împreună cu adunarea şi înmulțirea numerelor întregi. Să se arate că funcția $f:\mathbb{Z}[i]\to I$, definită prin $f(a+bi)=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$este izomorfism de inele.

3. Pe mulțimea $K=(0;\infty)$se definesc legile de compoziție $x*y=x\cdot y$, $x\circ y=x^{\ln y}$, $\forall x,y\in K$. Să se arate că funcția $f:K\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x$, este izomorfism de la corpul $(K,*,\circ)$ la corpul $(\mathbb{R},+,\cdot)$.

4. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se definesc legile de compoziție $x*y=\sqrt[3]{x^3+y^3}$, $x\circ y=x\cdot y$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$. Să se arate că $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{x}$, este izomorfism de la corpul $(\mathbb{R},+,\cdot)$ la corpul $(\mathbb{R},*,\circ)$.

5*. Pe $\mathbb{Q}$se definesc legile de compoziţie $x*y=x+y+2$şi $x\circ y=xy+2x+2y+2,\forall x,y\in\mathbb{Q}$; Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$ să fie izomorfism de la corpul $(\mathbb{R},+,\bullet)$ la corpul $(\mathbb{R},*,\circ)$;

6*. Pe $\mathbb{R}$ se definesc legile de compoziţie $x*y=x+y-1$şi $x\circ y=2xy-2x-2y+3,\forall x,y\in\mathbb{R}$; Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$ să fie izomorfism de la corpul $(\mathbb{R},+,\bullet)$ la corpul $(\mathbb{R},*,\circ)$;

7*. Pe $\mathbb{Q}$se definesc legile de compoziţie $x*y=x+y-7$şi $x\circ y=xy-7(x+y)+56,\forall x,y\in\mathbb{Q}$; Să se determine $a,b\in\mathbb{Q}$ astfel încât $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$, $f(x)=ax+b$ să fie izomorfism de la corpul $(\mathbb{Q},+,\bullet)$ la corpul $(\mathbb{Q},*,\circ)$;

3. Inelul claselor de resturi modulo n

Conform **Teoremei împărţirii cu rest în** $\mathbb{Z}$, pentru orice două numere întregi a şi b există un unic număr q numit câtul împărţirii dintre a şi b şi un rest r cu proprietatea $0 \le r \langle |b|$ astfel încât să avem $a = b \cdot q + r$.

$$\forall a,b \in \mathbb{Z}, \exists! q \in \mathbb{Z} \quad si \quad r \in \mathbb{N} \quad a.\hat{i}. \quad a = bq + r \quad cu \quad 0 \le r \le |b|.$$

Definiţie

Fie n $\in \mathbb{N}^*$. Prin **rest modulo n a lui a** $\in \mathbb{Z}$ se înţelege restul împărţirii lui a la n(şi se notează cu a mod n).

a mod n $\in \{0,1,2,3,...n-1\}$ - mulţimea resturilor lui a la împărţirea cu n. Se notează cu Rn.

Proprietăţile adunării şi înmulţirii modulo n.

Fie n$\in \mathbb{N}^*$ şi a,b$\in \mathbb{Z}$. Pe $\mathbb{Z}$ am definit două legi de compoziţie: suma respectiv produsul modulo n.

$a \oplus_n b \ \underline{\underline{def}} (a+b) \bmod n, \ a \otimes_n b \ \underline{\underline{def}} \ a \cdot b \mod n$.

Teoremă: **1**. $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$;
2. $(a \oplus b) = b \oplus a$;
3. $(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$;
4. $(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$;
5. $a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c), \quad \forall a,b,c \in \mathbb{Z}$.

Pe $\mathbb{Z}$ **introducem următoarea relaţie :** $a \equiv b (\bmod n) \Leftrightarrow n | a-b$ **;**

Pentru orice număr întreg **a** există un unic $x \in \{0;1;2;.....;n-1\}$ astfel încât $a \equiv x (\bmod n)$ **;**

Fie $x \in \mathbb{Z}$, Atunci, prin **clasa elementului x** înţelegem mulţimea $\overline{x} = \{a \in \mathbb{Z} | a \equiv x (\bmod n)\}$, a tuturor numerelor întregi **a** care dau restul **x** la împărţirea cu **n** ;

$x = x \bmod n$;

Exemple: 7mod5 = 2; 8mod4=0; 12mod7=5;

$\hat{0} = \{a \in \mathbb{Z} | a \bmod n = 0\}$;

$\hat{1} = \{a \in \mathbb{Z} | a \bmod n = 1\}$

.....

$\overline{n-1} = \{a \in \mathbb{Z} | a \bmod n = n-1\}$;

Notăm cu $\mathbb{Z}_n = \{\hat{0};\hat{1};2;....;n-1\}$ **- mulţimea claselor de resturi modulo n;**

Aşadar, $a \in k \Leftrightarrow a \bmod n = k$;

$\mathbb{Z} = \hat{0} \cup \hat{1} \cup 2 \cup .... \cup n-1$**;**

Pe $\mathbb{Z}_n = \{\hat{0}; \hat{1}; 2; ....; n-1\}$ introducem două operaţii: adunarea şi înmulţirea claselor modulo n

$a + \hat{b} = a + b = (a+b) \bmod n$ **şi** $a \bullet \hat{b} = a \bullet b = (a \bullet b) \bmod n$ în raport cu care $(\mathbb{Z}_n, +, \bullet)$ devine **inel,** numit **inelul claselor de resturi modulo n;**

Exemple: $\hat{3} + \hat{5} = \hat{8} = 2$ *în* $\mathbb{Z}_6$**;** $4 + 7 = 11 = \hat{0}$ *în* $\mathbb{Z}_{11}$**;** $\hat{3} \bullet \hat{5} = 15 = \hat{1}$ *în* $\mathbb{Z}_7$

Tablele operațiilor de adunare și înmulțire ale claselor de resturi modulo n

Proprietățile pe care le au adunarea și înmulțirea claselor de resturi modulo n pentru care mulțimea de resturi modulo n devine inel se pot observa și pe tablele acestor operații:

n=2

+	$\hat{0}$	$\hat{1}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$
$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{0}$

•	$\hat{0}$	$\hat{1}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$
$\hat{1}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$

n=3

+	$\hat{0}$	$\hat{1}$	2
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	2
$\hat{1}$	$\hat{1}$	2	$\hat{0}$
2	2	$\hat{0}$	$\hat{1}$

•	$\hat{0}$	$\hat{1}$	2
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$
$\hat{1}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	2
2	$\hat{0}$	2	$\hat{1}$

Elemente simetrizabile în inelul $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$

În raport cu adunarea claselor de resturi modulo n , simetricul elementului a este elementul $-a$:

Teoremă. Fie $n \in \mathbb{N}$**. Atunci** $-a = n - a, \ \forall a \in \mathbb{Z}_n$**;**

Exemple: $-\hat{6} = 7 - 6 = \hat{1}$ *în* $\mathbb{Z}_7$**;** $-2 = 9 - 2 = 7$ *în* $\mathbb{Z}_9$**;**

În raport cu înmulțirea claselor de resturi modulo n , elementele simetrizabile se numesc elemente inversabile:

Teoremă $a \in \mathbb{Z}_n$ **este inversabil dacă și numai dacă a și n sunt prime între ele,** $(a, n) = 1$**;**

Demonstrație: Fie $a \in \mathbb{Z}_n$ un element inversabil din inel ceea ce este echivalent cu faptul că există un alt element $\hat{b} \in \mathbb{Z}_n$ astfel încât $a \cdot \hat{b} = \hat{1} \Leftrightarrow$ există $k \in \mathbb{Z}$ astfel încât $a \cdot b = nk + 1 \Leftrightarrow a \cdot b + n(-k) = 1 \Leftrightarrow (a, n) = 1$.

Teoremă $(\mathbb{Z}_n, +; \bullet)$ **este corp** $\Leftrightarrow$ **n este număr prim;**

Demonstrație: Dacă $(\mathbb{Z}_n,+;\bullet)$ este corp, rezultă $\forall\ a\in\mathbb{Z}_n$ element inversabil, conform teoremei precedente rezultă că a și n sunt prime între ele, $(a,n)=1$, deci n este număr prim.
Reciproc, dacă n este număr prim rezultă $\forall\ a\in\mathbb{Z}$, $(a,n)=1$, conform teoremei precedente rezultă că $\forall\ a\in\mathbb{Z}_n$, a este inversabil deci aceasta implică faptul că $(\mathbb{Z}_n,+;\bullet)$ este corp.

Mulțimea elementelor inversabile din $\mathbb{Z}_n$ în raport cu înmulțirea din $\mathbb{Z}_n$ formează grupul elemenelor inversabile $U(\mathbb{Z}_n)$.

Atunci, $U(\mathbb{Z}_n)=\left\{a\in\mathbb{Z}_n\,\middle|\,a-inversabil\right\}=\left\{a\in\mathbb{Z}_n\,\middle|\,(a;n)=1\right\}$;

Numărul elementelor inversabile ale inelului $(\mathbb{Z}_n,+,\bullet)$ este dat de formula

$|U(\mathbb{Z}_n)|=\varphi(n)=n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdot....\cdot\left(1-\frac{1}{p_k}\right)$ unde $n=p_1^{a_1}\cdot p_2^{a_2}\cdot....\cdot p_k^{a_k}$ reprezintă descompunerea în factori primi ai numărului natural **n**;

Exemple: $U(\mathbb{Z})=\{-1;1\}$; $U(\mathbb{Q})=\mathbb{Q}\setminus\{0\}$; $U(\mathbb{R})=\mathbb{R}\setminus\{0\}$; $U(\mathbb{C})=\mathbb{C}\setminus\{0\}$;

$U(\mathbb{Z}_2)=\{\hat{1}\}$; $U(\mathbb{Z}_3)=\{\hat{1};\hat{2}\}$; $U(\mathbb{Z}_4)=\{\hat{1};\hat{3}\}$; $U(\mathbb{Z}_5)=\{\hat{1};\hat{2};\hat{3};\hat{4}\}$; $U(\mathbb{Z}_6)=\{\hat{1};\hat{5}\}$;

În general, $U(\mathbb{Z}_p)=\mathbb{Z}_p\setminus\{\hat{0}\}$, $p-prim$;

$U(\mathbb{Z}[i])=\{-1;1;i;-i\}$; $U\left(\mathbb{Z}[i\sqrt{d}]\right)=\{-1;1\}$, d întreg, liber de pătrate;

$U(M_n(A))=\left\{X\in M_n(A)\,\middle|\,\det X\in U(A)\right\}$;

$U(M_n(\mathbb{Z}))=\left\{X\in M_n(\mathbb{Z})\,\middle|\,\det X\in\{-1;1\}\right\}$;

$U(M_n(\mathbb{Z}_8))=\left\{X\in M_n(\mathbb{Z}_8)\,\middle|\,\det X\in\left\{\hat{1},\hat{3},\hat{5},7\right\}\right\}$;

Exercitii rezolvate

1. Să se calculeze: a) $45+34$ în $\mathbb{Z}_{11}$; **b)** $123+255$ în $\mathbb{Z}_9$;

Rezolvare:

a) $45=45\bmod 11=4$, $34=34\bmod 11=\hat{1}$, $45+34=4+\hat{1}=\hat{5}$ în $\mathbb{Z}_{11}$;

b) $123=123\bmod 9=\hat{6}$, $255=255\bmod 9=\hat{3}$, $123+255=\hat{6}+\hat{3}=\hat{9}=\hat{0}$ în $\mathbb{Z}_9$;

2. Să se calculeze în $\mathbb{Z}_5$**: a)** $\begin{pmatrix}2&\hat{3}\\4&\hat{1}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\hat{3}&\hat{1}\\2&4\end{pmatrix}$; **b)** $\begin{pmatrix}\hat{1}&2\\\hat{3}&\hat{0}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&\hat{3}\\4&2\end{pmatrix}$.

Rezolvare: a) $\begin{pmatrix}2&\hat{3}\\4&\hat{1}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\hat{3}&\hat{1}\\2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4\\4&\hat{3}\end{pmatrix}$;

$l_1c_1 = 2\cdot\hat{3}+\hat{3}\cdot 2 = 12 = 2.$

$l_1c_2 = 2\cdot\hat{1}+\hat{3}\cdot 4 = 14 = 4.$

$l_2c_1 = 4\cdot\hat{3}+\hat{1}\cdot 2 = 14 = 4.$

$l_2c_2 = 4\cdot\hat{1}+\hat{1}\cdot 4 = \hat{8} = \hat{3}.$

b) $\begin{pmatrix}\hat{1} & 2\\ \hat{3} & \hat{0}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & \hat{3}\\ 4 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\hat{0} & 2\\ \hat{1} & 4\end{pmatrix}$.

3. Să se calculeze determinanții în $\mathbb{Z}_7$:

a) $\begin{vmatrix}\hat{3} & 4\\ 2 & \hat{5}\end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix}4 & \hat{6}\\ \hat{5} & \hat{3}\end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix}\hat{3} & 2 & \hat{1}\\ \hat{1} & \hat{5} & 4\\ 2 & \hat{6} & \hat{3}\end{vmatrix}$; **d)** $\begin{vmatrix}2 & \hat{3} & 4\\ \hat{0} & \hat{5} & \hat{6}\\ 2 & \hat{1} & \hat{3}\end{vmatrix}$;

Rezolvare:

a) $\begin{vmatrix}\hat{3} & 4\\ 2 & \hat{5}\end{vmatrix} = \hat{3}\cdot\hat{5}-4\cdot 2 = 7 = \hat{0}.$

b) $\begin{vmatrix}4 & \hat{6}\\ \hat{5} & \hat{3}\end{vmatrix} = 4\cdot\hat{3}-\hat{6}\cdot\hat{5} = -18 = 21-18 = \hat{3}$

c) $\begin{vmatrix}\hat{3} & 2 & \hat{1}\\ \hat{1} & \hat{5} & 4\\ 2 & \hat{6} & \hat{3}\end{vmatrix} = 45+\cancel{6}+\widetilde{16-10-60-\cancel{6}} = -\hat{9} = -\widehat{2} = \widehat{7-2} = \hat{5}$;

d) $\begin{vmatrix}2 & \hat{3} & 4\\ \hat{0} & \hat{5} & \hat{6}\\ 2 & \hat{1} & \hat{3}\end{vmatrix} = 30+36-40-12 = 66-52 = 14 = \hat{0}$;

4. Să se rezolve sistemele de ecuaţii pe mulţimile indicate:

a) $\begin{cases}2x+y=\hat{1}\\ x+y=2\end{cases}$ **în** $\mathbb{Z}_3$; **b)** $\begin{cases}\hat{5}x+\hat{3}y=4\\ 2x+y=2\end{cases}$ **în** $\mathbb{Z}_7$;

Rezolvare: a) Adunând cele două ecuaţii se obţine: $\hat{3}x+2y=\hat{3}\Rightarrow 2y=\hat{0}\Rightarrow y=\hat{0}$ şi din una din ecuaţii obţinem că $x=2\Rightarrow S=\{(2;\hat{0})\}$;

b) Adunând cele două ecuaţii se obţine $7x+4y=\hat{6}\Rightarrow 4y=\hat{6}\Rightarrow y=\hat{5}$. Înlocuind într-una din ecuaţii se obţine că $x=2\Rightarrow S=\{(2;\hat{5})\}$;

5. Să se arate că ecuaţia $x^2+2x+\hat{5}=\hat{0}$ nu are nicio soluţie în mulţimea $\mathbb{Z}_6$;

Rezolvare: Se va rezolva ecuaţia $x^2+2x+\hat{5}=\hat{0}$ verificând pentru fiecare element din $\mathbb{Z}_6$:

$\hat{0}^2+2\cdot\hat{0}+\hat{5}\neq\hat{0}$, $\hat{1}^2+2\cdot\hat{1}+\hat{5}\neq\hat{0}$, $\hat{2}^2+2\cdot\hat{2}+\hat{5}\neq\hat{0}$, $\hat{3}^2+2\cdot\hat{3}+\hat{5}\neq\hat{0}$, $\hat{4}^2+2\cdot\hat{4}+\hat{5}\neq\hat{0}$, $\hat{5}^2+2\cdot\hat{5}+\hat{5}\neq\hat{0}$

6. **Să se calculeze probabilitatea ca alegând un element din mulţimea $\mathbb{Z}_5$, acesta să verifice egalitatea $\hat{3}x+4=\hat{0}$;**

Rezolvare: Se verifică că singura soluţie a ecuaţiei $\hat{3}x+4=\hat{0}$ este $x=2$, rezultă că probabilitatea este $P=\frac{1}{5}$;

7. Să se determine elementele inversabile din a) $(\mathbb{Z}_{37},+,\cdot)$**, b)** $(\mathbb{Z}_{40},+,\cdot)$

Rezolvare:

a) Dacă n este prim atunci toate elementele nenule sunt inversabile. Atunci, mulţimea elementelor inversabile este $U(\mathbb{Z}_{37})=\mathbb{Z}_{37}-\{\hat{0}\}$.

b) Conform definiţiei, $a\in\mathbb{Z}_n$ este inversabil dacă şi numai dacă $(a,n)=1$.

Mulţimea elementelor inversabile este

$U(\mathbb{Z}_{40})=\{\hat{1},\hat{3},\hat{5},7,11,13,17,19,21,23,27,29,31,33,37,39\}$.

8. Să se determine inversul elementului: a) $\hat{5}$ **în** $\mathbb{Z}_8$**; b)** 7 **în** $\mathbb{Z}_9$**; c)** 4 **în** $\mathbb{Z}_{11}$**;**

Rezolvare:

a) $\hat{5}\cdot x=\hat{1}\Rightarrow x=\hat{5}$ este inversul lui $\hat{5}$ în $\mathbb{Z}_8$;

b) $7\cdot x=\hat{1}\Rightarrow x=4$ este inversul lui 7 în $\mathbb{Z}_9$;

c) $4\cdot x=\hat{1}\Rightarrow x=\hat{3}$ este inversul lui 4 în $\mathbb{Z}_{11}$;

Exercitii propuse

1. Să se calculeze:

a) $\hat{1}+2+\hat{3}+4+\hat{5}+\hat{6}$ în $\mathbb{Z}_7$; **b)** $\hat{1}+2+\hat{3}+...+49+50$ în $\mathbb{Z}_{11}$; **c)** $\hat{1}\cdot 2+2\cdot\hat{3}+\hat{3}\cdot 4$ în $\mathbb{Z}_5$;

d) $\hat{3}-7+\hat{5}-\hat{8}$ în $\mathbb{Z}_9$; **e)** $2+\hat{6}+\hat{9}-18$ în $\mathbb{Z}_7$;

2. Să se rezolve ecuaţiile în $\mathbb{Z}_5$:

a) $2x+\hat{3}=4$; **b)** $\hat{3}x-\hat{3}=\hat{1}$; **c)** $4x+2=2x+4$; **d)** $x^2+4=\hat{0}$; **e)** $x^2+\hat{3}x=\hat{0}$;

f) $x^2+x+\hat{3}=\hat{0}$.

3. Să se rezolve ecuaţiile în $\mathbb{Z}_5$:

a) $\hat{3}x+2=\hat{1}$; **b)** $4x+\hat{3}=2$; **c)** $x^2+x+2=\hat{3}$; **d)** $x^2+\hat{3}x+\hat{1}=\hat{0}$;

e) $x^3+2x^2+\hat{3}=4$;

4. Să se calculeze:

a) $\begin{pmatrix}2 & 4\\ \hat{1} & \hat{3}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\hat{3} & \hat{1}\\ 2 & 4\end{pmatrix}$ în $\mathbb{Z}_5$; **b)** $\begin{pmatrix}4 & \hat{3}\\ 2 & \hat{5}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\hat{5} & \hat{6}\\ \hat{3} & \hat{1}\end{pmatrix}$ în $\mathbb{Z}_7$; **c)** $\begin{pmatrix}2 & \hat{3}\\ \hat{1} & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\hat{5} & \hat{3}\\ 2 & \hat{3}\end{pmatrix}$ în $\mathbb{Z}_7$;

d) $\begin{pmatrix} 2 & \hat{3} & 4 \\ \hat{1} & 2 & \hat{3} \\ \hat{3} & \hat{1} & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & \hat{1} & \hat{3} \\ \hat{0} & 2 & \hat{1} \\ 4 & \hat{3} & \hat{1} \end{pmatrix}$ în $\mathbb{Z}_5$;

5. Să se calculeze determinanții în $\mathbb{Z}_7$:

a) $\begin{vmatrix} \hat{5} & \hat{3} \\ 2 & \hat{1} \end{vmatrix}$; **b)** $\begin{vmatrix} 4 & \hat{6} \\ \hat{3} & \hat{5} \end{vmatrix}$; **c)** $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ \hat{5} & \hat{6} \end{vmatrix}$.

6. Să se calculeze determinanţii în $\mathbb{Z}_5$:

a) $\begin{vmatrix} \hat{1} & 2 & \hat{3} \\ \hat{0} & 2 & \hat{1} \\ \hat{3} & \hat{1} & 4 \end{vmatrix}$; **b)** $\begin{vmatrix} 4 & \hat{3} & \hat{1} \\ 2 & \hat{0} & \hat{1} \\ \hat{3} & 2 & \hat{1} \end{vmatrix}$; **c)** $\begin{vmatrix} \hat{3} & 2 & \hat{0} \\ 4 & \hat{1} & 2 \\ \hat{1} & 2 & \hat{3} \end{vmatrix}$; **d)** $\begin{vmatrix} 2 & \hat{1} & \hat{3} \\ \hat{3} & 4 & \hat{1} \\ 2 & \hat{1} & \hat{3} \end{vmatrix}$;

7. Să se rezolve în $\mathbb{Z}_7$ sistemele:

a) $\begin{cases} 2x+2y=\hat{0} \\ x+2y=2 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} \hat{3}x+2y=\hat{1} \\ x+y=\hat{1} \end{cases}$; **c)** $\begin{cases} 4x+2y=\hat{5} \\ x+\hat{3}y=2 \end{cases}$; **d)** $\begin{cases} 4x+\hat{3}y=\hat{5} \\ 2x+4y=\hat{1} \end{cases}$; **e)** $\begin{cases} \hat{3}x+y=4 \\ \hat{5}x+2y=\hat{3} \end{cases}$.

8. Să se rezolve sistemele de ecuaţii pe mulţimile indicate:

a) $\begin{cases} \hat{3}x+2y=\hat{3} \\ x+y=\hat{1} \end{cases}$ în $\mathbb{Z}_3$; **b)** $\begin{cases} 2x+\hat{3}y=2 \\ x+2y=2 \end{cases}$ în $\mathbb{Z}_3$; **c)** $\begin{cases} 4x+\hat{3}y=\hat{3} \\ 2x+\hat{3}y=4 \end{cases}$ în $\mathbb{Z}_5$; **d)** $\begin{cases} \hat{3}x+\hat{5}y=2 \\ x+2y=\hat{3} \end{cases}$ în $\mathbb{Z}_7$.

9. Să se calculeze probabilitatea ca alegând un element din mulţimea $\mathbb{Z}_8$, acesta să verifice egalitatea $x^4+2x=7$;

10. Să se rezolve în $\mathbb{Z}_7$ ecuaţia $x+2x+\hat{3}x+...+11x=\hat{5}$;

11. Să se rezolve în $\mathbb{Z}_9$ ecuaţia $x+2x+\hat{3}x+...+\hat{8}x=\hat{0}$;

12. Să se determine numărul elementelor inversabile din:

a) $(\mathbb{Z}_8;\bullet)$; **b)** $(\mathbb{Z}_{12};\bullet)$; **c)** $(\mathbb{Z}_7;\bullet)$; **d)** $(\mathbb{Z}_{17};\bullet)$; **e)** $(\mathbb{Z}_{101};\bullet)$;

13. Să se determine elementele inversabile din: **a)** $(\mathbb{Z}_6;\bullet)$; **b)** $(\mathbb{Z}_7;\bullet)$; **c)** $(\mathbb{Z}_8;\bullet)$; **d)** $(\mathbb{Z}_{37};\bullet)$;

IV. INELE DE POLINOAME

1. Operații cu polinoame

1.1 Forma algebrică a unui polinom

Fie (K, +, ·) un corp comutativ unde K poate fi unul din corpurile $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}_p$ cu p prim;

Definiție (Forma algebrică a unui polinom)

Se numeşte **polinom în nedeterminata X cu coeficienţi în corpul K** o expresie algebrică de forma $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + ... + a_nX^n$, unde $n \in \mathbb{N}$ iar $a_0, a_1, a_2, a_3, ...a_n \in K$ se numesc coeficienţii polinomului, a_0 se numeşte termen liber iar a_n se numește coeficientul dominant.

Exemple de polinoame: $f(X) = 4x - 7$, $g(X) = 2x^2 + 4x - 7$, $h(x) = 4x^3 - 3X + 2$**, etc.**

Următoarele expresii nu sunt polinoame: $\frac{2X^3 + 4X - 1}{X - 2}$; $3X^{\frac{1}{2}} + 4X + 2$; $5X^{-2} + 3X^{-1} + 2$.

Notăm cu K**[X]**, **mulţimea polinoamelor cu coeficienţi în corpul K;**

Dacă $f \in K[X]$, atunci $f = \sum_{i=0}^{n} a_iX^i, a_n \neq 0$ este scrierea sub formă restrânsă a polinomului f;

Definiție (Gradul unui polinom)

Fie $f = \sum_{i=0}^{n} a_iX^i$ un polinom nenul din K[X]. Numărul natural **n** se numeşte **gradul polinomului f** şi scriem grad (f) = n, dacă $a_n \neq 0$ *si* $a_i = 0, \forall i \rangle n.$

Gradul polinomului nul (f=0), este $-\infty$, cu convenţiile, $-\infty \langle n$, $-\infty + n = -\infty$.

Dacă $a_n = 1$, atunci f se numeşte polinom unitar sau monic;

În general, în exerciții, polinoamele se scriu începând de la termenul de grad cel mai mare.

Exemplu 1. Să se determine gradul următoarelor polinoame:

a) $f(X) = 2x - 6$, $f \in \mathbb{Z}[X]$**;** **b)** $f(X) = 4x^3 - \frac{5}{2}X + \frac{7}{4}$, $f \in \mathbb{Q}[X]$**;**

c) $f(X) = \sqrt{3}x^4 + 5X^3 + \sqrt{6}x^2 + 3$, $f \in \mathbb{R}[X]$**.**

Rezolvare:

a) $grad(f)=1$**;** **b)** $grad(f)=3$**.** **c)** $grad(f)=4$**.**

Exemplu 2. Să se determine gradul polinomului $f(X)=(m-2)x^3-2x+9,\ f\in\mathbb{R}[X]$ în funcție de numărul real m.

Rezolvare:

Dacă $m-2=0\Rightarrow m=2$ **rezultă că** $grad(f)=1$**; Dacă** $m\neq 2$ **rezultă că** $grad(f)=3$**.**

Activitate independentă	**Răspuns**
Se consideră polinomul $f(X)=(m-3)X^2+(m^2-9)X+8\in\mathbb{R}[X]$**. Să se determine gradul polinomului f în funcție de parametrul real m.**	$m\neq 3\Rightarrow grad(f)=2$ $m=3\Rightarrow grad(f)=0$

Definiție (Polinoame egale)

Două polinoame $f,g\in K[X]$, $f=a_0+a_1X+a_2X^2+a_3X^3+.....+a_nX^n$ şi $g=b_0+b_1X+b_2X^2+b_3X^3+.....+b_nX^n$ **se numesc egale** şi scriem $f=g$ dacă şi numai dacă au acelaşi grad, n = m şi coeficienții termenilor de acelaşi grad, sunt egali, $a_i=b_i,\forall i=\overline{0,n}.$

Exemplu 3. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât f = g, unde $f=2+X^2$, $g=2+(m-5)X^2$;

Rezolvare:

Din condițiile de egalitate ale celor două polinoame , rezultă m-5 = 1 de unde rezultă că m = 6;

Activitate independentă	**Răspuns**
Se consideră polinoamele $f(X)=(m-3)X^2+(m-9)X+8\in\mathbb{R}[X]$ **și** $g(X)=6X^n+2m-10\in\mathbb{R}[X]$**. Să se determine parametrii reali m,n astfel încât polinoamele să fie egale.**	$m=9,n=2$**.**

Definiție (Polinom constant. Polinom nul)

Un polinom, $f=a_0+a_1X+a_2X^2+a_3X^3+.....+a_nX^n\in K[X]$ **se numește constant** dacă toți coeficienții polinomului cu excepția termenului liber , sunt nuli.

f se numește polinom nul dacă şi numai dacă toți coeficienții polinomului sunt nuli, $a_i=0,\ \forall i\in\overline{0,n}$**.**

Exemplu 4. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât polinomul f = $(m-2)X^2+(m^2-4m+4)X+m^2-4$ să fie nul.

Rezolvare:

Pentru ca polinomul să fie nul trebuie ca toți coeficienții polinomului să fie egali cu 0 în acelaşi timp. Punând condiţiile m-2 = 0, $m^2-4m+4=0$ şi $m^2-4=0$, rezultă m = 2.

Exercitii rezolvate

1. Să se scrie forma algebrică a următoarelor polinoame:

a) $f=4X^2+7X^3-5X+6, f\in\mathbb{R}[X]$; **b)** $g=3+8X^3-7X+X^4, g\in\mathbb{R}[X]$;

c) $h=(2X-5)(3X+2), h\in\mathbb{R}[X]$; **d)** $i=(X+4)^2, i\in\mathbb{R}[X]$;

Rezolvare :

a) $f=7X^3+4X^2-5X+6.$ **b)** $g=3-7X+8X^3+X^4$, **sau** $g=X^4+8X^3-7X+3$;

c) $h=(2X-5)(3X+2)=6X^2+4X-15X-10=6X^2-11X-10$;

d) $i=(X+4)^2=X^2+8X+16$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3+aX^2+bX+c, f\in\mathbb{R}[X]$. **Să se determine** $a,b,c\in\mathbb{R}$ **astfel încât polinomul f să fie egal cu polinomul** $g=(X+2)^3, g\in\mathbb{R}[X]$.

Rezolvare: Cum $g=(X+2)^3=X^3+6X^2+12X+8$, **din** $f=g$ **rezultă** $a=6,\ b=12,\ c=8.$

3. Se consideră polinomul $f\in\mathbb{R}[X]$, $f(X)=x^4+aX^3+7X^2+bX-8$.

a) Să se scrie forma algebrică a polinomului $h(X)=(X^2-6X+8)(X^2-1)$;

b) Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ **astfel încât polinoamele f şi h să fie egale.**

Rezolvare :

a) $h(X)=(X^2-6X+8)(X^2-1)=X^4-6X^3+7X^2+6X-8$

b) Din $f(X)=x^4+aX^3+7X^2+bX-8=X^4-6X^3+7X^2+6X-8$ rezultă a = - 6 şi b=6.

4. Se dau polinoamele $f,g\in\mathbb{Z}_5[X]$, $f(X)=(a+2b)X^2+4X+2a+2b$, $g(X)=\hat{3}X^2+4X+\hat{3}a+b$. **Să se determine** $a,b\in\mathbb{Z}_5$ **astfel încât cele două polinoame să fie egale ;**

Rezolvare : Din f = g rezultă $\begin{cases}a+\hat{2}b=\hat{3}\\ \hat{2}a+\hat{2}b=\hat{3}a+b\Rightarrow a=b\end{cases}$ şi din prima ecuaţie, rezultă $\hat{3}a=\hat{3}\Rightarrow a=\hat{1}\Rightarrow a=b=\hat{1}$.

5. Aflaţi $a,b,c\in\mathbb{R}$ **astfel încât polinomul** $f(X)=X^3+4X^2+3X+1$ **să fie egal cu polinomul** $g(X)=(X-1)^3+a(X-1)^2+b(X-1)+c$.

Rezolvare:

Mai întâi se aduce la forma algebrică polinomul g :

$g(X)=(X-1)^3+a(X-1)^2+b(X-1)+c=X^3-3X^2+3X-1+aX^2-2aX+a+bX-b+c=$

$=X^3+(a-3)X^2+(3-2a+b)X+(-1+a-b+c)$.

Din f = g rezultă $a-3=4\Rightarrow a=7$, $3-2a+b=3\Rightarrow b=14$, iar din $-1+a-b+c=1\Rightarrow c=9$.

6. Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ **astfel încât gradul polinomului** $f(X)=aX^3+(a-2b^2+8)X^2+(b+4)X+10\in\mathbb{R}[X]$ **să fie egal cu 1.**

Rezolvare:

Pentru ca polinomul dat să aibă gradul 1 trebuie ca să egalăm cu zero coeficienții termenilor de grad 3 și 2 iar coeficientul termenului de grad 1 să fie diferit de zero, adică $a=0,\ a-2b^2+8=0,\ b+4\neq 0.$ Din cele trei condiții rezultă $a=0,\ b=4$.

7. Studiați în funcție de parametrul real m gradul polinomului $f(X)=\left(m^2-1\right)X^3+\left(m^2-4m+3\right)X+\left(m-1\right)X+m-1\in\mathbb{R}[X]$.

Rezolvare:

Polinomul poate avea gradul 3 numai dacă $m^2-1\neq 0$ adică $m\neq\pm 1$;

Dacă $m=-1$, atunci gradul polinomului este 2 iar dacă $m=1$ atunci $grad(f)=-\infty$, deoarece polinomul f este nul.

8. Să se determine $a,b,c\in\mathbb{R}$ astfel încât polinomul $f=aX^2-(b-5)X+3c+9, f\in\mathbb{R}[X]$ să fie nul.

Rezolvare:

Se pun condițiile ca toți coeficienții polinomului să fie egali cu 0.

$a=0,\ b-5=0\Rightarrow b=5,\ 3c+9=0\Rightarrow c=-3$;

Exercitii propuse

1. Să se scrie forma algebrică a următoarelor polinoame:

a) $f=5X^4-2X+4X^3+6X, f\in\mathbb{R}[X]$; **b)** $g=5X+2-3X^3+X^2, g\in\mathbb{R}[X]$;

c) $h=(3X-2X^2)(4X+3), h\in\mathbb{R}[X]$; **d)** $i=(2X-3)^2, i\in\mathbb{R}[X]$;

2. Se consideră polinomul $f=aX^2+bX+c, f\in\mathbb{R}[X]$. Să se determine $a,b,c\in\mathbb{R}$ astfel încât polinomul f să fie egal cu polinomul $g=\left(3X-2\right)^2, g\in\mathbb{R}[X]$.

3. Se consideră polinomul $f=X^3+aX^2+bX+c, f\in\mathbb{R}[X]$. Să se determine $a,b,c\in\mathbb{R}$ astfel încât polinomul f să fie egal cu polinomul $g=\left(X-3\right)^3, g\in\mathbb{R}[X]$.

4. Se consideră polinoamele $f=X^3+aX^2+bX-3,\ g(x)=\left(X^2-3X+1\right)(X-3), f,g\in\mathbb{R}[X]$.

Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât polinoamele f și g să fie egale.

5. Se dau polinoamele $f,g\in\mathbb{Z}_3[X]$, $f(X)=(a+b)X^2+2X+\hat{1}$, $g(X)=\hat{3}X^2+(\hat{3}a+b)X+\hat{1}$. Să se determine $a,b\in\mathbb{Z}_3$ astfel încât cele două polinoame să fie egale ;

6. Se consideră polinoamele $f=X^3+aX^2+bX+c,\quad g=(X-1)(X-2)(X+2)$, $f,g\in\mathbb{R}[X]$.

Să se determine $a,b,c\in\mathbb{R}$ astfel încât cele două polinoame să fie egale.

7. Să se determine gradul polinomului $f=(m^2-1)X^3-(m^2-7m+6)X^2+(m-1)X+3m+2\in\mathbb{R}[X]$ în funcţie de parametrul real m.

8. Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât polinomul $f=(a^2-7a+10)X^3-(2b+6)X^2-(a-2)X+2a+b\in\mathbb{R}[X]$ să fie constant.

9. Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât polinoamele $f=(3a-2b)X^3-2X^2+3aX+8\in\mathbb{R}[X]$ şi $g=8X^3+(a+4b)X^2+(b+11)X+8\in\mathbb{R}[X]$ să fie egale.

10. Fie polinomul $f=8X^3+aX^2+bX+27\in\mathbb{Z}[X]$. Să se determine $a,b,m,n\in\mathbb{Z}$ astfel încât $f=(mx+n)^3$;

11. Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât gradul polinomului $f(X)=(a^2-9)X^3-(a+b+5)X^2+(b^2+4)X+3\in\mathbb{R}[X]$ să fie egal cu 1.

12. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât polinomul $f=(m^2-25)X^3+(3m+15)X^2-(m^2+5m)X, f\in\mathbb{R}[X]$ să fie nul.

13. Să se determine $a,b,c\in\mathbb{R}$ astfel încât polinomul $f=(a-2)X^3+bX^2+(2c-6)X+7, f\in\mathbb{R}[X]$ să fie polinom constant.

14. Să se determine numărul tuturor polinoamelor de gradul al doilea cu coeficienți în : a) $\mathbb{Z}_3[X]$; b) $\mathbb{Z}_5[X]$;

1.2 Valoarea numerică a unui polinom

Definiţie

Fie $f \in K[X]$, $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + ... + a_nX^n$. Pentru $x \in K$, numărul $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ... + a_nx^n$ se numeşte **valoarea numerică a polinomului f în x**. Dacă **f(x)=0** atunci **x se numeşte rădăcină a polinomului** $f \in K[X]$ şi spunem că x anulează pe f.

Exemple:

1) Fie $f = 3X^2 + 4 \in \mathbb{Z}[X]$. Valoarea lui f în -1 este f(-1) = 3+4 = 7;

2) Fie $f = 4X^2 + 2X + 3 \in \mathbb{R}[X]$. Valoarea lui f în $\sqrt{2}$, este $f(\sqrt{2}) = 8 + 2\sqrt{2} + 3 = 11 + 2\sqrt{2}$;

3) Fie $f = \hat{3}X^2 + \hat{2}X + \hat{1} \in \mathbb{Z}_4[X]$. Valoarea lui f în $\hat{2}$ este $f(\hat{2}) = \hat{3} \cdot \hat{0} + \hat{2} \cdot \hat{2} + \hat{1} = \hat{1}$.

Definiţie

Fie $f \in K[X]$ un polinom arbitrar ales. Se numeşte **funcţie polinomială asociată polinomului f**, funcţia $\tilde{f} : K \to K$, definită prin $\tilde{f}(x) = f(x), \ \forall x \in K$.

Suma coeficienţilor unui polinom, $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$ se poate determina calculând valoarea polinomului în 1, şi anume f(1);

Suma coeficienţilor termenilor de grad par ai unui polinom, $a_0 + a_2 + a_4 + a_6 + ...$ se determină calculând $\frac{f(1) + f(-1)}{2}$ iar **suma coeficienţilor termenilor de grad impar ai unui polinom**, $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + ...$ se determină calculând $\frac{f(1) - f(-1)}{2}$.

Exemple:

4) Fie polinomul $f(X) = (1 + X + X^3)^{671} \in \mathbb{R}[X]$ având forma algebrică $f = a_{2013}X^{2013} + a_{2012}X^{2012} + ... + a_1X + a_0$. Să se arate că suma $a_1 + a_3 + ... + a_{2013}$ este un număr par.

Rezolvare:

$a_1 + a_3 + ... + a_{2013} = \frac{f(1) - f(-1)}{2} = \frac{(4-1)^{671} - 1}{2} = \frac{4 \cdot M + 1 - 1}{2} = 2M$, adică suma este un număr par;

5) Fie polinomul $f(X) = (1 + X + X^2)^{1007} \in \mathbb{R}[X]$ având forma algebrică $f = a_{2014}X^{2014} + a_{2013}X^{2013} + ... + a_1X + a_0$. Să se arate că suma $a_0 + a_2 + ... + a_{2014}$ este un număr par.

Rezolvare:

$a_0 + a_2 + ... + a_{2014} = \frac{f(1) + f(-1)}{2} = \frac{3^{1007} + 1}{2} = \frac{(4-1)^{1007} + 1}{2} = \frac{4M - 1 + 1}{2} = 2M$, adică suma este un număr par.

Teoremă **Dacă f este un polinom cu coeficienţi raţionali şi** $a,b\in\mathbb{Q},b\rangle 0$ **astfel încât** $\sqrt{b}\notin\mathbb{Q}$**, atunci, există** $A,B\in\mathbb{Q}$ **astfel încât** $f(a+\sqrt{b})=A+B\sqrt{b}$ **respectiv,** $f(a-\sqrt{b})=A-B\sqrt{b}$ **.**

Demonstraţie:

Fie $f=a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+...+a_1X+a_0$ un polinom cu coeficienţii $a_n,a_{n-1},.....,a_1,a_0$ numere raţionale.

Atunci, $f(a\pm\sqrt{b})=a_n(a\pm\sqrt{b})^n+a_{n-1}(a\pm\sqrt{b})^{n-1}+...+a_1(a\pm\sqrt{b})+a_0$. Utilizând **binomul lui Newton** şi ţinând cont că pentru orice număr natural **n**, au loc relaţiile $(\sqrt{b})^{2n}=b^n\in\mathbb{Q}$ şi $(\pm\sqrt{b})^{2n+1}=\pm b^n\sqrt{b}$, rezultă $f(a+\sqrt{b})=A+B\sqrt{b}$, respectiv $f(a-\sqrt{b})=A-B\sqrt{b}$.

Teoremă **Dacă f este un polinom cu coeficienţi reali şi z un număr complex, atunci** $f(\overline{z})=\overline{f(z)},$ **unde** $\overline{z}$ **reprezintă conjugatul lui z, iar** $\overline{f(z)}$**, conjugatul lui f(z).**

Demonstraţie:

Se cunosc proprietăţile conjugatului unui număr complex, adică: $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$, $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$. (*)

Fie polinomul $f=a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+...+a_1X+a_0$, cu coeficienţii $a_n,a_{n-1},.....,a_1,a_0$ numere reale. Atunci, $f(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+...+a_1z+a_0$ iar $\overline{f(z)}=\overline{a_nz^n}+\overline{a_{n-1}z^{n-1}}+...+\overline{a_1z}+\overline{a_0}$.

Mai departe, folosind proprietăţile (*), rezultă : $\overline{f(z)}=\overline{a_n}\cdot\overline{z^n}+\overline{a_{n-1}}\cdot\overline{z^{n-1}}+...+\overline{a_1}\cdot\overline{z}+\overline{a_0}$. Cum $\overline{a_0}=a_0$, $\overline{a_1}=a_1,.....,\overline{a_n}=a_n$ deoarece $a_n,a_{n-1},.....,a_1,a_0$ sunt numere reale rezultă atunci că $\overline{f(z)}=a_n\cdot\overline{z^n}+a_{n-1}\cdot\overline{z^{n-1}}+...+a_1\cdot\overline{z}+a_0\Leftrightarrow\overline{f(z)}=a_n\cdot(\overline{z})^n+a_{n-1}\cdot(\overline{z})^{n-1}+...+a_1\cdot\overline{z}+a_0\Leftrightarrow$ $\overline{f(z)}=f(\overline{z})$ adică tocmai ceea ce trebuia demonstrat.

Activitate independentă	**Răspuns**
Se consideră polinomul $f(X)=X^3-2X^2+3X-1\in\mathbb{Q}[X]$**. Să se arate că suma** $S=f(2-\sqrt{3})+f(2+\sqrt{3})\in\mathbb{N}.$	$S=34\in\mathbb{N}.$

Exercitii rezolvate

1. Se consideră polinomul $f(X)=X^2+X+1\in\mathbb{Z}[X]$**. Să se calculeze:**

a) $f(-2);$ **b)** $f(-\frac{1}{2});$ **c)** $f(\sqrt{2});$ **d)** $f(\sqrt{2}-1);$

Rezolvare:

a) $f(-2)=4-2+1=3;$ b) $f(-\frac{1}{2})=\frac{1}{4}-\overset{2)}{\frac{1}{2}}+\overset{4)}{1}=\frac{3}{4};$

c) $f(\sqrt{2})=2+\sqrt{2}+1=3+\sqrt{2};$ d) $f(\sqrt{2}-1)=2-2\sqrt{2}+1+\sqrt{2}-1+1=3-\sqrt{2}.$

2. Se consideră polinomul $f(X)=X^2-7X+12\in\mathbb{R}[X]$. Să se calculeze $f(1)\bullet f(2)\bullet f(3)\cdot.....\bullet f(10);$

Rezolvare:

Mai întâi trebuiesc găsite valorile pentru care polinomul se anulează.

Se asociază ecuația de gradul doi, $x^2-7x+12=0$ de unde rezultă $x_1=3,\ x_2=4$. Cum 3 este soluție adică $f(3)=0$ și f(3) se găsește în produsul dat, rezultă că produsul este egal cu 0.

3. Se consideră polinomul $f(X)=X^2-3X+1\in\mathbb{R}[X]$. Să se calculeze $f(1)+f(2)+f(3)+.....+f(20);$

Rezolvare :

$$f(1)+f(2)+f(3)+.....+f(20)=\left(1^2+2^2+3^2+.....+20^2\right)-3\left(1+2+3+....+20\right)=20\bullet 1=$$

$$=\frac{20\bullet 21\bullet 41}{6}-3\bullet\frac{20\bullet 21}{2}+20=2870-630+20=2260.$$

S-au folosit formulele: $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2},\forall n\in\mathbb{N}.$

$1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},\forall n\in\mathbb{N}.$

4. Fie $f(X)=X^3-3X-8\ \in\mathbb{R}[X]$ **. Să se calculeze** $f(-1)+f(\sqrt{2})+f(1-\sqrt{2})$ **.**

Rezolvare :

$$f(-1)+f(\sqrt{2})+f(1-\sqrt{2})=-1+3-8+2\sqrt{2}-3\sqrt{2}-8+(1-\sqrt{2})^3-3(1-\sqrt{2})-8=$$

$$=-22-\sqrt{2}+1-3\sqrt{2}+6-2\sqrt{2}-3+3\sqrt{2}=\ -3\sqrt{2}-18.$$

5. Se dă polinomul $f\in\mathbb{Z}_5[X],\ f(X)=(a+\hat{2}b)x^2+\hat{4}X+\hat{2}a+\hat{2}b,$ **Pentru** $a=b=\hat{1}$**, să se calculeze în Z_5 suma :** $f(\hat{0})+f(\hat{1})+f(\hat{2})+f(\hat{3})+f(\hat{4})$**.**

Rezolvare : Pentru $a=b=\hat{1}\Rightarrow f(X)=\hat{3}X^2+\hat{4}X+\hat{4}$**.**

$$f(\hat{0})+f(\hat{1})+f(\hat{2})+f(\hat{3})+f(\hat{4})=\hat{3}(\hat{0}^2+\hat{1}^2+\hat{2}^2+\hat{3}^2+\hat{4}^2)+4(\hat{0}+\hat{1}+\hat{2}+\hat{3}+\hat{4})+\hat{5}\cdot\hat{4}=$$

$$=\hat{3}\cdot(\hat{0}+\hat{1}+\hat{4}+\hat{4}+\hat{1})+\hat{4}\cdot\hat{0}+\hat{0}=\hat{0}.$$

6. Se consideră polinomul $f\in\mathbb{Z}_5[X],\ f(X)=\hat{3}X^3+2X^2+X+m$**. Să se determine** $m\in\mathbb{Z}_5[X]$ **știind că** $f(2)=4.$

Rezolvare: Din $f(2)=4$ rezultă $\hat{3}\cdot\hat{8}+2\cdot 4+2+m=4\Rightarrow 4+m=4\Rightarrow m=\hat{0};$

7. Se consideră polinomul $f(X)=X^3+aX^2+bX+5\in\mathbb{Z}[X]$**. Să se determine** $a,b\in\mathbb{Z}$ **astfel încât** $f(-1)=-3$ **și** $f(2)=9$**.**

Rezolvare:

$$\begin{cases} f(-1)=-3 \\ f(2)=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1+a-b+5=-3 \\ 8+4a+2b+5=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b=-7 \ \ |\bullet 2 \\ 4a+2b=-4 \end{cases} \Rightarrow 6a=-18 \Rightarrow a=-3,\ b=4.$$

8. Fie polinomul $f(X)=(2X-1)^{2015}+2\bullet X^{2014}-1\in\mathbb{R}[X]$, **având forma algebrică** $f=a_{2015}X^{2015}+a_{2014}X^{2014}+...+a_1X+a_0$. **Să se calculeze suma** $a_0+a_1+...+a_{2014}+a_{2015}$.

Rezolvare: Suma $a_0+a_1+...+a_{2014}+a_{2015}$ este egală cu $f(1)=1^{2015}+2\cdot 1^{2014}-1=1+2-1=2$.

9. Se consideră polinomul $f(X)=aX^3+(b-a)X^2+aX+b\in\mathbb{R}[X]$ **. Să se determine** $a,b\in\mathbb{R}$ **astfel încât** $f(-1)=-4,\quad f(1)=4,$ **și** $f(2)=17.$

Rezolvare:

Din $\begin{cases} f(-1)=-4 \\ f(1)=4 \\ f(2)=17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a+b-a-a+b=-4 \\ a+b-a+a+b=4 \\ 8a+4b-4a+2a+b=17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a+4b=0 \\ 6a+5b=17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2b \\ 6a+5b=17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=1 \\ a=2 \end{cases}$.

10. Se consideră polinomul $f(X)=X^8+X^7+...+X+1\in\mathbb{R}[X]$**. Să se calculeze** $f(3)$ **.**

Rezolvare:

Cum $f(3)=1+3+3^2+3^3+...+3^8$ este suma unei progresii geometrice de rație 3 rezultă conform formulei $S_n=b_1\cdot\dfrac{q^n-1}{q-1}$, adică $f(3)=\dfrac{3^9-1}{3-1}=\dfrac{3^9-1}{2}$.

11*. Determinați $a,b\in\mathbb{R}$ **pentru care valoarea polinomului** $f(X)=X^3+X^2+aX+b\in\mathbb{R}[X]$ **în** $\sqrt{2}-1$ **să fie** $5\sqrt{2}-10$**.**

Rezolvare:

$f(\sqrt{2}-1)=5\sqrt{2}-10\Leftrightarrow (\sqrt{2}-1)^3+(\sqrt{2}-1)^2+a(\sqrt{2}-1)+b=5\sqrt{2}-10\Leftrightarrow$

$\underline{(3+a)}\sqrt{2}\underline{\underline{-4-a+b}}=\underline{5}\sqrt{2}\underline{\underline{-10}}\Rightarrow 3+a=5$ **și** $-4-a+b=-10$**, de unde rezultă** $a=2$ **și** $b=-4$**.**

12. Se consideră polinomul** $f(X)=X^3-3X-8\in\mathbb{R}[X]$**. Să se calculeze** $f(\sqrt[3]{5-2\sqrt{6}}+\sqrt[3]{5+2\sqrt{6}})$**.**

Rezolvare : Notăm cu **a** expresia $\sqrt[3]{5-2\sqrt{6}}+\sqrt[3]{5+2\sqrt{6}}$. Observăm însă că

$a^3=\left(\sqrt[3]{5-2\sqrt{6}}+\sqrt[3]{5+2\sqrt{6}}\right)^3=5-2\sqrt{6}+5+2\sqrt{6}+3\sqrt[3]{5-2\sqrt{6}}\cdot\sqrt[3]{5+2\sqrt{6}}\cdot a=$

$=10+3a$. Atunci, f(a)= a^3 – 3a-8 = 10+3a – 3a – 8 = 10-8 = 2.

S-a folosit formula $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$**.**

Exercitii propuse

1. Fie polinomul $f=X^3-3X^2+2X-5\in\mathbb{R}[X]$. Să se calculeze :

a) $f(-3)+f(-1)$; **b)** $f(\frac{1}{2})+f(\frac{3}{2})$; **c)** $f(\sqrt{3})+f(1+\sqrt{3})$; **d)** $f(x)+f(1-x)$;

2. Se consideră polinomul $f(X)=X^2-3X+1\in\mathbb{Z}[X]$. Să se calculeze:

a) $f(-1)+f(-2)$; **b)** $f(\frac{1}{3})+f(\frac{1}{2})$ **c)** $f(\sqrt{2})+f(\sqrt{2}+1)$ **;**

3. Se consideră polinomul $f(X)=(X-1)^3+(X+1)^3\in\mathbb{Z}[X]$. Să se arate că $f(-1)+f(1)=0.$

4. Se consideră polinomul $f(X)=X^2+X-6\in\mathbb{R}[X]$. Să se calculeze

$f(-5)\bullet f(-4)\bullet....\bullet f(-1)\bullet f(0)\bullet f(1)\bullet.....\bullet f(4)\bullet f(5)$;

5. Se consideră polinomul $f=2X^2+3X-5\in\mathbb{R}[X]$. Să se calculeze

$f(1)+f(2)+f(3)+...+f(100)$

6. Se consideră polinomul $f=(x-1)^{10}+(x+1)^{10}-2^{10}\in\mathbb{R}[X]$. Să se calculeze

$f(-100)+f(-99)+..+f(-1)+f(0)+f(1)+...+f(100)$;

7. Se consideră polinomul $f=X^2+\hat{3}X+2\in\mathbb{Z}_5[X]$. Să se calculeze: $f(\hat{1})+f(2)+f(\hat{3})$;

8. Fie polinomul $f=(X-2)^{2012}+X-2\in\mathbb{R}[X]$ având forma algebrică

$f=a_{2012}X^{2012}+a_{2011}X^{2011}+....+a_1X+a_0$. Să se calculeze suma $a_0+a_1+a_2+....+a_{2011}+a_{2012}$

9. Fie polinomul $f=X(1+X-X^2)^{1006}-X^{2013}+1\in\mathbb{R}[X]$ având forma algebrică

$f=a_{2012}X^{2012}+a_{2011}X^{2011}+....+a_1X+a_0$. Să se calculeze suma $a_0+a_1+a_2+....+a_{2011}+a_{2012}$

10. Se consideră polinomul $f\in\mathbb{Z}_7[X]$, $f(X)=2X^3+4X^2+\hat{3}X+m$. Să se determine $m\in\mathbb{Z}_7[X]$ știind că $f(2)=\hat{0}.$

11. . Fie polinomul $f=X^2+aX+b\in\mathbb{R}[X]$. Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(-2)=15$ şi $f(3)=20$;

12. Se consideră polinomul $f(X)=X^3+2X^2+aX+b\in\mathbb{Z}[X]$. Să se determine $a,b\in\mathbb{Z}$ astfel încât $f(-2)=f(2)=5$.

13. Fie polinomul $f(X)=X^7+X^6+X^5+x^4+X^3+X^2+X+1,$ Să se calculeze f(2) ;

14. Se consideră polinomul $f(X)=mX^3+(2m+n-3)X+m-n\in\mathbb{R}[X]$. Să se determine $m,n\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(-2)=25,\ \ f(-1)=5,$ şi $f(1)=-11.$

15. Aflați polinomul f de gradul al doilea cu proprietatea $f(-1)=7;\ f(0)=1;\ f(1)=-1.$

16. Fie $f(X)\in\mathbb{Q}[X]$ astfel încât $f(5-\sqrt{3})=12-4\sqrt{3}$. Să se calculeze $f(5+\sqrt{3})$.

17. Se consideră polinomul

$f(X)=1+\frac{X}{\sqrt{2}+1}+\frac{X^2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{X^3}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+.....+\frac{X^{14}}{\sqrt{15}+\sqrt{14}}+\frac{X^{15}}{\sqrt{16}+\sqrt{15}}$,

$f(X)\in\mathbb{R}[X]$**.** Să se arate că suma coeficienților polinomului f este număr natural.

18*. Se consideră polinomul $f(X)=X^3-3X+1\in\mathbb{Z}[X]$. Să se calculeze:

a) $f\left(\sqrt[3]{2-\sqrt{2}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{2}}\right)$;

b) $f\left(\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}\right)$;

c) $f\left(\sqrt[3]{5-2\sqrt{6}}+\sqrt[3]{5+2\sqrt{6}}\right)$;

19*. Se consideră polinomul $f=(X^2+X+1)^{10}\in\mathbb{R}[X]$ având forma algebrică $f=a_{20}X^{20}+a_{19}X^{19}+...+a_1X+a_0$;

a) Să se calculeze $a_0+a_2+a_4+....+a_{18}+a_{20}$;

b) să se calculeze $a_{20}+a_{19}+a_{18}$;

20*. Determinați $a,b\in\mathbb{R}$ pentru care valoarea polinomului $f(X)=X^3+3X^2+aX+b\in\mathbb{R}[X]$ în $\sqrt{3}-2$ să fie $14\sqrt{3}-22$.

21*. Fie polinomul $f(X)=X^2+3X\in\mathbb{R}[X]$. Să se calculeze determinantul $\Delta=\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ f(a) & f(b) & f(c) \end{vmatrix}$, unde $a,b,c\in\mathbb{R}$.

22.** Să se determine polinomnul $f(X)\in\mathbb{R}[X]$ astfel încât $f(X)-f^I(X)=X^3+4X-3$, unde $f^I(X)$ este derivata lui f(X).

1.3 Operaţii cu polinoame

Definiţie(Adunarea şi înmulţirea polinoamelor)

Fie K un corp comutativ şi $f,g\in K[X]$, $f=a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+...+a_1X+a_0$,grad(f)=n, $g=b_mX^m+b_{m-1}X^{m-1}+...+b_1X+b_0$, grad(g)=m, $n\geq m$.

Atunci, pe mulţimea K[X] definim operaţiile:

$f+g=a_0+b_0+(a_1+b_1)X+.....+a_{m+1}X^{m+1}+...+a_nX^n$

$f\cdot g=a_0\cdot b_0+(a_0b_1+a_1b_0)X+.....+(a_0b_k+a_1b_{k-1}+...+a_kb_0)X^k+...+a_nb_mX^{n+m}$.

Aşadar,operaţiile de adunare şi scădere a polinoamelor se fac adunând respectiv scâzând termenii de acelaşi grad.

În particular, produsul dintre un scalar $a\in K$ şi polinomul $f\in K[X]$ este produsul dintre polinomul constant a şi polinomul f.

În operaţiile cu polinoame sunt necesare următoarele formule de calcul algebric:

$aX\pm bX=(a\pm b)X$, $\left(aX^m\right)\bullet\left(bX^n\right)=(a\cdot b)X^{m+n}$, $\left(aX^m\right):\left(bX^n\right)=(a:b)X^{m-n}$.

Exemplu: Fie $f=3X^2+2X+1\in K[X]$ *si* $g(X)=X+2\in K[X]$. Atunci:

$f+g=3X^2+3X+3$, $f\cdot g=(3X^2+2X+1)\cdot(X+2)=3X^3+8X^2+5X+2$;

Proprietăţi:

Fie K un inel şi $f,g,h\in K[X]$.

1. Adunarea este asociativă: $(f+g)+h=f+(g+h),\quad \forall f,g,h\in K[X]$;

2. Elementul neutru la adunare este polinomul nul: $0+f=f+0,\quad \forall f\in K[X]$;

3. Elementul simetrizabil la adunare este polinomul opus:

$f+(-f)=(-f)+f,\quad \forall f\in K[X]$

De aici putem defini şi scăderea polinoamelor: $f-g=f+(-g),\quad \forall f,g\in K[X]$;

4. Adunarea este comutativă: $f+g=g+f,\quad \forall f\in K[X]$;

5. Înmulţirea este asociativă: $(f\cdot g)\cdot h=f\cdot(g\cdot h)\quad \forall f,g,h\in K[X]$;

6. Elementul neutru la înmulţire este polinomul constant 1: $f\cdot 1=1\cdot f,\quad \forall f\in K[X]$;

7. Înmulţirea este comutativă: $f\cdot g=g\cdot f,\quad \forall f,g\in K[X]$;

8. Înmulţirea polinoamelor este distributivă faţă de adunare:

$f\cdot(g+h)=f\cdot g+f\cdot h,\quad \forall f,g,h\in K[X]$.

K[X] împreună cu operaţiile de adunare şi înmulţire a polinoamelor devine inel comutativ;

Teoremă Fie K un corp şi $f,g\in K[X]$. Atunci:

a) $grad(f+g)\leq \max(grad(f),grad(g))$**;**

b) $grad(f\cdot g)=grad(f)+grad(g)$**;**

Dacă K nu este corp nu avem egalitate la punctul b).

Exemplu: Fie $f,g \in Z_6[X]$, $f = \hat{2}X + \hat{5},\ g = \hat{3}X + \hat{2}$. Atunci, $f \cdot g = (\hat{2}X + \hat{5}) \cdot (\hat{3}X + \hat{2}) = X + \hat{4}$.

Aşadar, $grad(f \cdot g) \langle grad(f) + grad(g)$, întrucât coeficientul dominant al lui $f \cdot g$ este $a_n \cdot b_n = 0$.

Definiţie(Ridicarea la putere a unui polinom)

Fie $f \in \mathbb{R}[X]$ şi $n \in \mathbb{N}$. Atunci, $f^n = \underbrace{f \bullet f \bullet .....\bullet f}_{n\ de\ f}$, iar $f^0 = 1,\ f \neq 0$.

Teoremă Teorema împărţirii cu rest

Fie K un corp comutativ şi $f,g \in K[X],\ g \neq 0$. Atunci există şi sunt unice, polinoamele q şi r din K[X], astfel încât $f = g \cdot q + r$ cu $grad(r) \langle grad(g)$.

(Polinomul **f** se mai numeşte deîmpărţit, **g** se numeşte împărţitor, **q** se numeşte cât iar **r** se numeşte rest.)

Demonstraţie:

Pentru a demonstra existenţa polinoamelor q şi r procedăm prin inducţie după gradul lui f. Astfel, fie m=grad(f) şi n=grad(g). Dacă $m \langle n$, se ia q=0 şi r devine egal cu f, verificându-se relaţia dată.

$g \cdot q + r = g \cdot 0 + f = f$ cu $grad(r) \langle grad(g)$.

Dacă $m \geq n$ şi $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + ... + a_mX^m,\ a_m \neq 0$,

$g = b_0 + b_1X + b_2X^2 + b_3X^3 + ... + b_nX^n,\ b_n \neq 0$, atunci cum $b_n \neq 0$ şi K este corp, rezultă că $b_n \neq 0$ este inversabil, prin urmare, polinomul $f_1 = f - \frac{a_m}{b_n}X^{m-n} \cdot g$ (sau $\mathbf{f_1}=\mathbf{f}-g_1$)

(1)

are acelaşi grad cu al lui g şi acelaşi coeficient dominant cu al lui g.

Rezultă, $grad(f_1) \langle grad(f) = m \Rightarrow$ polinomul $\mathbf{f_1}=\mathbf{f}-g_1$ are gradul mai mic ca m.

Conform ipotezei de inducţie, relaţia fiind adevărată pentru polinoamele f de grad mai mic ca m, atunci există polinoamele $\mathbf{q}_1$ şi $\mathbf{r}_1$ din K[X] astfel încât $f_1 = g \cdot q_1 + r_1$ cu $grad(r_1) \langle grad(g)$. (2)

Din relaţiile (1) şi (2) rezultă:

$f = f_1 + g_1 = g \cdot q_1 + r_1 + \frac{a_m}{b_n}X^{m-n}g \Rightarrow f = g \cdot (q_1 + \frac{a_m}{b_n}X^{m-n}) + r_1$ iar dacă definim

$q = q_1 + \frac{a_m}{b_n}X^{m-n}$ şi

$r = r_1$, obţinem că există q şi r astfel încât $f = g \cdot q + r$ cu $grad(r) \langle grad(g) = n$.

Pentru a demonstra unicitatea polinoamelor q şi r, presupunem că există $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$ şi $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ astfel încât:

$f = g \cdot q_1 + r_1$, cu $grad(r_1) \langle grad(g)$

$f_1 = g \cdot q_2 + r_2$, cu $grad(r_2) \langle grad(g)$.

Prin scădere se obţine: $g(q_1-q_2) = r_2 - r_1$.
Dacă $q_1 - q_2 \neq 0$, atunci $grad(g) + grad(q_1 - q_2) = grad(r_2 - r_1)$ ceea ce indică o contradicţie deoarece $grad(g) \rangle grad(r_2 - r_1)$ întrucât $grad(g) \rangle grad(r_1),\ grad(g) \rangle grad(r_2)$,
aşadar $q_1 - q_2 = 0 \Leftrightarrow q_1 = q_2 \Rightarrow r_1 = r_2$.

Procedeul de descreştere repetată a gradului polinomului f la împărţirea cu g, întâlnită în cadrul demonstraţiei teoremei de mai sus şi descrisă de relaţia (1) ne dă ceea ce se cheamă algoritmul împărţirii cu rest, un algoritm ce ne permite să determinăm câtul şi restul împărţirii unui polinom f la alt polinom g.

Algoritmul împărţirii cu rest

a) Dacă $grad(f) \langle grad(g)$, atunci q = 0 şi r = f.
b) Fie $grad(f) \geq grad(g)$. Atunci,
- se aranjează polinoamele f şi g sub forma unei scheme, ca în cazul împărţirii a două numere;
- se determină primul termen al câtului prin împărţirea termenului de grad maxim lui f la termenul de grad maxim al lui g.
- se înmulţeşte aceasta cu g iar polinomul rezultat se trece cu semn schimbat sub f astfel încât termenii de acelaşi grad să fie unii sub alţii, după care se adună, obţinându-se primul rest parţial.

Dacă gradul acestuia este mai mare decât gradul împărţitorului, atunci se continuă procedeul până când apare primul rest parţial de grad strict mai mic decât gradul împărţitorului.

Exemplu:

$$\begin{array}{l|l} 4X^3+5X^2-2X+3 & X+2 \\ \hline -4X^3-8X^2 & 4X^2-3X+4 \\ \hline \quad -3X^2-2X+3 & \\ \quad \underline{3X^2+6X} & \\ \quad\quad 4X+3 & \\ \quad\quad \underline{-4X-8} & \\ \quad\quad\quad -5 & \end{array}$$

$c(X) = 4X^2 - 3X + 4,\ r(X) = -5.$

Etape:
$4X^3 : X = 4X^2$, aşadar se trece la cât $4X^2$
Se înmulţeşte $4X^2$ cu X+2, rezultatul trecându-se cu semn schimbat în stânga. Procedeul se repetă.
Se obţine câtul $4X^2-3X+4$ şi restul -5.

Câtul şi restul împărţirii unui polinom f la un polinom g se pot obţine şi prin metoda coeficienţilor nedeterminaţi. Pentru aceasta, se foloseşte Teorema împărţirii cu rest. În relaţia $f = g \cdot q + r$, se ia **q** un polinom cu coeficienţi nedeterminaţi şi de grad egal cu grad(**q**)= grad(**f**)- grad(**g**), iar r se ia la fel, drept polinom cu coeficienţi nedeterminaţi şi de grad mai mic ca o unitate decât gradul lui g.

După ce se desfac parantezele, se identifică coeficienţii termenilor de acelaşi grad din cei doi membrii ai egalităţii, obţinându-se un sistem de ecuaţii având drept soluţii, coeficienţii polinoamelor q şi r.

Exemplu:

Fie polinoamele $f=2X^3+7X^2+8X+3$ şi $g=2X^2+3X+1$, să se determine câtul şi restul împărţirii lui f la g, folosind metoda coeficienţilor nedeterminaţi.

Din relaţia $f = g \cdot q + r$, rezultă

$2X^3+7X^2+8X+3 = (2X^2+3X+1)(\mathbf{a}X+\mathbf{b}) + (\mathbf{c}X+\mathbf{d}) \Leftrightarrow$

$2X^3+7X^2+8X+3 = 2\mathbf{a}X^3+(2\mathbf{b}+3\mathbf{a})X^2+(\mathbf{a}+3\mathbf{b}+\mathbf{c})X+\mathbf{b}+\mathbf{d},$

Prin identificarea coeficienţilor termenilor de acelaşi grad, rezultă:

$2\mathbf{a}=2 \Rightarrow \mathbf{a}=1;$

$2\mathbf{b}+3=7 \Rightarrow \mathbf{b}=2;$

$1+6+\mathbf{c}=8 \Rightarrow \mathbf{c}=1;$

$2+\mathbf{d}=3 \Rightarrow \mathbf{d}=1$, aşadar $\mathbf{q}=X+2$ şi $\mathbf{r}=X+1$;

Exercitii rezolvate

1. Să se calculeze suma, diferenţa şi produsul polinoamelor f, g unde:

a) $f = 2X^3 - 4X^2 + 5X - 6,\ g = X - 2,\ f, g \in \mathbb{R}[X]$;

b) $f = -2X^2 - 8X + 3,\ g = 2X - 3,\ f, g \in \mathbb{R}[X]$;

Rezolvare:

a)
$$\begin{array}{r} f = 2X^3 - 4X^2 + 5X - 6 \quad (+) \\ g = \qquad\qquad X - 2 \\ \hline f + g = 2X^3 - 4X^2 + 6X - 8 \end{array} \quad , \qquad \begin{array}{r} f = 2X^3 - 4X^2 + 5X - 6 \quad (-) \\ g = \qquad\qquad X - 2 \\ \hline f - g = 2X^3 - 4X^2 + 4X - 4 \end{array} \quad ,$$

$$f \bullet g = (2X^3 - 4X^2 + 5X - 6) \bullet (X - 2) =$$
$$= 2X^4 - 4X^3 + 5X^2 - 6X \quad (+)$$
$$\underline{\qquad -4X^3 + 8X^2 - 10X + 12}$$
$$f \bullet g = 2X^4 - 8X^3 + 13X^2 - 16X + 12$$

b) $f=-2X^3-8X+3$ (+) $\quad g=2X-3$, $\quad f+g=-2X^3-6X$

$f=-2X^3-8X+3$ (–) $\quad g=2X-3$, $\quad f+g=-2X^3-10X+6$

$$f\bullet g=\left(-2X^3-8X+3\right)\bullet(2X-3)=$$
$$=-4X^4+6X^3 \quad (+)$$
$$-16X^2+24X$$
$$+6X-9$$
$$f\bullet g=-4X^4+6X^3-16X^2+30X-9$$

2. Să se determine cîtul și restul împărțirii polinomului f la g în următoarele cazuri:

a) $f=2X^3-4X^2+5X-6$, $g=X-2$, $f,g\in\mathbb{R}[X]$;

b) $f=3X^3+2X^2-4X+2$, $g=X^2-3X+2$, $f,g\in\mathbb{R}[X]$;

c) $f=X^3+3X^2-2X+1$, $g=2X+1$, $f,g\in\mathbb{R}[X]$;

Rezolvare:

a)
$$\begin{array}{l|l} 2X^3-4X^2+5X-6 & X-2 \\ \hline -2X^3+4X^2 & 2X^2+5 \\ \hline \quad 5X-6 & \\ \quad -5X+10 & \\ \hline \quad 4 & \end{array}$$

$c(X)=2X^2+5,\ r(X)=4$

b)
$$\begin{array}{l|l} 3X^3+2X^2-4X+2 & X^2-3X+2 \\ \hline -3X^3+9X^2-6X & 3X+11 \\ \hline \quad 11X^2-10X+2 & \\ \quad -11X^2+33X-22 & \\ \hline \quad 22X-20 & \end{array}$$

$c(X)=3X+11,\ r(X)=22X-20$

c)
$$\begin{array}{l|l} X^3+3X^2-2X+1 & 2X+1 \\ \hline -X^3-\frac{X^2}{2} & \frac{1}{2}X^2+\frac{5}{4}X-\frac{13}{8} \\ \hline / \quad \frac{5}{2}X^2-2X+1 & \\ -\frac{5}{2}X^2-\frac{5}{4}X & \\ \hline / \quad -\frac{13}{4}X+1 & \\ \frac{13}{4}X+\frac{13}{8} & \\ \hline / \quad \frac{21}{8} & \end{array}$$

$c(X)=\frac{1}{2}X^2+\frac{5}{4}X-\frac{13}{8},\ r(X)=\frac{21}{8}$

3. Se consideră polinoamele $f(X)=X^2+4X+3\in\mathbb{R}[X]$ **şi** $g(X)=(X+2)^{2010}+X+2\in\mathbb{R}[X]$**.**

a) Să se calculeze f(-1)+g(-1) ;

b) Să se calculeze suma coeficienţilor polinomului g ;

c) Să se calculeze restul împărţirii polinomului g la polinomul f.

Rezolvare:

a) f(-1)+g(-1)= 2 ;

b) Suma coeficienţilor polinomului g se determină calculând g(1) care este agal cu 3^{2010} + 3.

c) g(X)=f(X)q(X)+r(X), grad(f)=2, atunci grad(r)=1. Fie r(X)= aX+b.

$(X+2)^{2010}+X+2=(X^2+4X+3)\cdot q(X)+aX+b$. Dând valori lui X, convenabile se obţine :

$X=-3\Rightarrow -3a+b=0$

$X=-1\Rightarrow -a+b=2$. Din cele două relaţii rezultă că a =1 şi b =3. Aşadar, restul este X+3.

4. Determinați polinomul $f(X)\in\mathbb{R}[X]$ **știind că :**

a) $f\bullet(X^2-X)=X^4-3X^3+2X^2$**;**

b) $f\bullet(X^2+X+1)=X^3-1$**;**

c) $f\bullet(X-3)=X^2-9$**;**

d) $f\bullet(X-4)(X-2)=X^3-3X^2-10X+24$**;**

e) $(X+1)\bullet f=X^3+4X+5$**;**

Rezolvare:

a) Cum gradul polinomului din dreapta este 4 înseamnă că şi gradul polinomului din stânga este 4 aceasta înseamnă că gradul lui f este 2. Se va considera polinomul $f = X^2 + aX + b$ întrucât coeficientul termenului de gradul patru este 1.

Atunci, din $(X^2 + aX + b)\bullet(X^2 - X) = X^4 - 3X^3 + 2X^2 \Leftrightarrow$

$X^4 + (a-1)X^3 + (b-a)X^2 - bX = X^4 - 3X^3 + 2X^2 \Rightarrow a-1 = -3,\ b-a = 2,\ -b = 0 \Rightarrow$

$a = -2,\ b = 0$. Aşadar, $f = X^2 - 2X$.

b) Este chiar formula $(X-1)\bullet(X^2 + X + 1) = X^3 - 1$, aşadar, $f = X - 1$;

c) Este chiar formula $(X+3)\bullet(X-3) = X^2 - 9$, aşadar, $f = X + 3$;

d) Pentru ca polinomul din stânga să aibă gradul trei, se ia $f = X + a$, atunci

$(X+a)\bullet(X-4)(X-2) = X^3 - 3X^2 - 10X + 24 \Leftrightarrow$

$X^3 + (a-6)X^2 + (8-6a)X + 8a = X^3 - 3X^2 - 10X + 24$ de unde rezultă că a=3, aşadar, $f = X + 3$.

e) Cum gradul polinomului din dreapta este 3 rezultă că $grad[(X+1)\bullet f] = 3 \Rightarrow grad(f) = 2$.

Considerăm polinomul $f = X^2 + aX + b \in \mathbb{R}[X]$ cu coeficientul dominant 1 întrucât f înmulţit cu X+1 trebuie să dea un polinom care are termenul de grad 3 egal cu X^3.

$(X+1)\bullet f = X^3 + 4X + 5 \Leftrightarrow (X+1)\bullet(X^2 + aX + b) = X^3 + 4X + 5 \Leftrightarrow$

$X^3 + (a+1)X^2 + (b+a)X + b = X^3 + 4X + 5$.

Din identificarea coeficienţilor rezultă $a + 1 = 0 \Rightarrow a = -1,\ b + a = 4$ şi $b = 5$.

Aşadar, polinomul f care verifică relaţia dată este $f = X^2 - X + 5$.

5*. Să se determine coeficientul lui x^{2011} din expresia

$(1+x)^{2011} + x(1+x)^{2010} + x^2(1+x)^{2009} + ... + x^{2010}(1+x) + x^{2011}$.

Rezolvare. Cum din fiecare termen se obţine x^{2011} şi fiind în total 2012 termeni, atunci coeficientul lui x^{2011} este 2012.

6*. Să se determine restul împărţirii polinomului $f(X) = (X-3)^{2n} + (X-2)^n + 1$ la polinomul $g = X^2 - 5X + 6$;

Rezolvare : Cum gradul restului este mai mic decât gradul împărţitorului, putem scrie : $f(X) = (X^2 - 5X + 6)\cdot c(X) + aX + b.$

Cum 2 şi 3 sunt soluţii ale ecuaţiei X^2 -5X+6= 0, atunci, din f(2)= 2 şi f(3)= 2 rezultă 2a+b=2 respectiv 3a+b=2 adică a=0 şi b=2. Aşadar, restul este r(X)= 2.

7*. Fie polinomul $f(X) = X^7 + X^6 + X^5 + x^4 + X^3 + X^2 + X + 1,$

Să se determine restul împărţirii lui f la $X^3 - 3X^2 + 2X$.

Rezolvare :

$f(X) = X(X^2 - 3X + 2)\cdot c(X) + aX^2 + bX + c.$

f(0) = c= 1,

f(1) = a+b+c=11,

f(2) = 4a+2b+c = 255. Din rezolvarea acestui sistem, rezultă a=117, b=-107, c=1, adică restul împărţirii este r(X)= $117X^2$ -107X +1.

8. Să se determine restul împărţirii polinomului $f(X)=(X+1)^{2010}+3X^2+2$ la polinomul g = X² +3X +3.**

Rezolvare: $(X+1)^3=X^3+3X^2+3X+1=X\cdot g+1$, de unde rezultă că

$f(X)=(X+1)^{3\cdot 670}+3X^2+2=(X\cdot g+1)^{670}+3X^2+2=$

$=M_g+1+3X^2+2=M_g+3(X^2+3X+3)-9X-6=$

$=M_g-9X-6$, unde M_g este un multiplu de g.

Aşadar, restul împărţirii lui f la g este polinomul r(X)= -9X-6.

9. Fie polinomul $f(X)=(1-X^2+X^3)^{100}=a_0+a_1X+a_2X^2+...+a_{300}X^{300}$.**

a) Să se calculeze $a_0+a_1+a_2+...+a_{300}$;

b) Să se determine restul împărţirii lui f la X² – X +1 ;

Rezolvare : a) $a_0+a_1+a_2+...+a_{300}=f(1)=1;$

b) Restul împărţirii lui f la X² – X+1 este obligatoriu de forma aX+b , atunci

$f(X)=(X^2-X+1)\cdot c(X)+aX+b.$

Fie x_0 o rădăcină a lui X² – X +1= 0. Rezultă $x_0^3=-1$ şi $x_0^2=x_0-1$. Rezultă,

$f(x_0)=(1-x_0^2+x_0^3)^{100}=x_0^{200}=x_0^2=x_0-1.$ Pe de altă parte, $f(x_0)=ax_0+b$ şi din egalarea celor două relaţii se obţine : $ax_0+b=x_0-1\Rightarrow a=1,b=-1$, aşadar, restul împărţirii lui f la X² – X +1 este polinomul r(X) = X-1.

10. Fie polinomul $f\in\mathbb{R}[X]$ care verifică relaţia:**

$X\cdot f(X)+(X-1)f(X+1)=2X^2+4X-3$ şi $r\in\mathbb{R}[X]$, restul împărţirii lui f la X² +1. Să se calculeze r(0).

Rezolvare :

Deoarece grad(2X² +4X-3) = 2, pentru a avea egalitatea din enunţ trebuie ca gradul lui **f** să fie 1. Fie $f(X)=aX+b,\ a,b\in R\Rightarrow X\cdot(aX+b)+(X-1)(aX+a+b)=2X^2+4X-3$.

După desfacerea parantezelor rezultă: $2aX^2+2bX-b-a=2X^2+4X-3$, de unde se obţine că a = 1 şi b = 2. Aşadar, f(X) = X+2.

Cum $grad(f)\langle grad(X^2+1)$ rezultă că restul împărţirii lui **f** la X² +1 este r(X) = X+2, şi atunci se obţine că r(0) = 2.

11. Fie $f\in\mathbb{R}[X]$ astfel încât f(0)=0 şi**

$X\cdot f(X+2)-(X+1)f(X-1)=3X^2+X-3$. Să se calculeze $f(\frac{1}{2})$.

Rezolvare :

Fie $f(X)=a_nX^n+.....+a_1X+a_0\in\mathbb{R}[X],\ a_n\neq 0.$ Cum f(0)=0 rezultă că a_0 =0.

Observăm din relaţia dată în enunţ că gradul lui f trebuie să fie obligatoriu mai mare sau egal cu doi căci termenii de gradul cel mai mare au aceeaşi coeficienţi dominanţi, deci se anulează. Rezultă $n\geq 2$.

Dacă presupunem că $n\geq 3$ atunci rezultă

$X\cdot f(X+2)-(X+1)f(X-1)=$

$= X\cdot\left[a_n(X+2)^n + a_{n-1}(X+2)^{n-1} + ... + a_1(X+2)\right] - -(X+1)\left[a_n(X-1)^n + ... + a_1(X-1)\right] =$

$= 2na_nX^n + a_{n-1}X^n + ... - na_nX^n + ...$ polinom care are gradul mai mare sau egal cu trei, ceea ce este o contradicţie.

Aşadar, n = 2, prin urmare $f(X) = aX^2 + bX + c$. Rezultă, $X\cdot\left[a(X+2)^2 + b(X+2)\right] - (X+1)\left[a(X-1)^2 + b(X-1)\right] = 3X^2 + X - 3$ După desfacerea parantezelor se obţine:

$3aX^2 + 5aX + 2bX - a + b = 3X^2 + X - 3 \Rightarrow\ a = 1,\ b = -2.$

Astfel, se obţine că f(X) = X^2 -2X şi atunci $f(\frac{1}{2}) = -\frac{3}{4}.$

12. Să se afle restul împărţirii polinomului** $f = X^{2010} + 5X^{99} + 2X^{53} - X^{22} + 3X^{11} - 1$ **la polinomul** $g = X^5 + 1$**.**

Rezolvare :

Conform teoremei împărţirii cu rest , există polinoamele q(X) şi r(X) astfel încât f(X)=(X^5 +1)q(X) +r(X), cu $grad(r) \le 4$.

Să luăm $r(X) = aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX\ + e,\ a,b,c,d,e \in \mathbb{R}.$

Fie $\alpha \in \mathbb{R}$ o rădăcină a lui g adică $g(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha^5 = -1$ şi atunci putem scrie:

$f(\alpha) = r(\alpha) = a\alpha^4 + b\alpha^3 + c\alpha^2 + d\alpha\ + e,\ a,b,c,d,e \in R.$ (1)

Pe de altă parte,

$f(\alpha) = \alpha^{2010} + 5\alpha^{99} + 2\alpha^{53} - \alpha^{22} + 3\alpha^{11} - 1.$ (2)

Cum $\alpha^{2010} = (\alpha^5)^{402} = (-1)^{402} = 1,$

$\alpha^{99} = (\alpha^5)^{19}\cdot\alpha^4 = -\alpha^4,$

$\alpha^{53} = (\alpha^5)^{10}\cdot\alpha^3 = \alpha^3,$

$\alpha^{22} = (\alpha^5)^{10}\cdot\alpha^2 = \alpha^2,$

$\alpha^{11} = (\alpha^5)^{10}\cdot\alpha\ = \alpha$. Atunci, din relaţia (2) vom obţine:

$f(\alpha) = 1 - 5\alpha^4 + 2\alpha^3 - \alpha^2 + 3\alpha\ - 1 =$

$= -5\alpha^4 + 2\alpha^3 - \alpha^2 + 3\alpha$. (3).

Astfel, din relaţiile (1) şi (3) vom obţine:

$a\alpha^4 + b\alpha^3 + c\alpha^2 + d\alpha\ + e = -5\alpha^4 + 2\alpha^3 - \alpha^2 + 3\alpha,\ a,b,c,d,e \in R.$

În această ultimă relaţie alegem a = b = c = d = 1 iar valoarea lui **e** se calculează în aşa fel încât să verifice egalitatea de mai sus. Cum α a fost luat ca rădăcină arbitrară a lui g, aşadar, pentru fiecare din cele cinci rădăcini ale lui g se obţin egalităţi similare în care polinomul r(X) şi r'(X) = $-5X^4 + 2X^3 - X^2 + 3X$ coincid pentru cinci valori distincte ale nedeterminatei X.

În concluzie, r(X) = $-5X^4 + 2X^3 - X^2 + 3X$.

Exercitii propuse

1. Să se calculeze suma, diferenţa şi produsul polinoamelor f,g unde:

a) $f=X^3-2X^2+3X-2,\ g=X-2;\ f,g\in\mathbb{R}[X]$;

b) $f=X^3+4X^2-2X+1,\ g=X^2-3X+2;\ f,g\in\mathbb{R}[X]$;

c) $f=X^2+\hat{3}X+2,\ g=X^2+4X+\hat{1};\ f,g\in\mathbb{Z}_5[X]$;

d) $f=X^2+2X+\hat{1},\ g=X+2;\ f,g\in\mathbb{Z}_3[X]$;

e) $f=3X^2-5X-2,\ g=X^2-1,\ f,g\in\mathbb{R}[X]$;

2. Să se afle câtul şi restul împărţirii polinomului f la polinomul g:

a) $f=X^3+6X^2+2,\ g=X-3,\ f,g\in\mathbb{R}[X]$;

b) $f=-X^3+2X+5,\ g=X-1,\ f,g\in\mathbb{R}[X]$;

c) $f=2X^3+3X^2-4X+2,\ g=X+3,\ f,g\in\mathbb{R}[X]$;

d) $f=X^4-2X^3+X+5,\ g=X^2-4,\ f,g\in\mathbb{R}[X]$;

e) $f=2X^4-5X^3-8X+1,\ g=X-2;f,g\in\mathbb{R}[X]$;

f) $f=3X^3+2X^2-4X+2,\ g=X+1;f,g\in\mathbb{R}[X]$;

g) $f=X^4-2X^2+2,\ g=X^2-2X+2;\ f,g\in\mathbb{R}[X]$;

h) $f=X^4-6X^3-8X^2+1,\ g=X^3-X+1;\ f,g\in\mathbb{R}[X]$;

i) $f=X^5-2X^3+3X^2+1,\ g=X^2+3X+1;\ f,g\in\mathbb{R}[X]$;

j) $f=4X^4-3X^2-2X+3,\ g=X^2-3X+2;f,g\in\mathbb{R}[X]$;

k) $f=2X^3+\hat{3}X^2+4X+2,\ g=X+2,\ f,g\in\mathbb{Z}_5[X]$;

3. Se consideră polinoamele $f(X)=3-2X,\ g(X)=2X-2,\ f,g\in\mathbb{R}[X]$. Să se arate că $f^2+g^2+2f\bullet g=1$.

4. Se consideră polinoamele $f=1+X^2,\ g=X+X^3,\ f,g\in\mathbb{R}[X]$. Să se arate că $(f+g)\bullet(1-X)=1-X^4$.

5. Se consideră polinomul $f(X)=1+X+X^2+X^3+....+X^n\in\mathbb{R}[X],\ n\in\mathbb{N}$. Să se arate că $(X-1)\bullet f=X^{n+1}-1$.

6. Determinaţi polinomul $f(X)\in\mathbb{R}[X]$ ştiind că :

a) $f\bullet(X^3-4X+1)=2X^4+3X^3-8X^2-10X+3$;

b) $f\bullet(X^2+4)=X^4-16$;

c) $f\bullet(X+5)=X^2-25$;

d) $f\bullet(X-5)(X+2)=X^3-3X^2-X+30$

e) $f \bullet (X+4) = X^3 + 2X^2 - 7X + 4$;

7.** Fie polinomul $f(X) \in \mathbb{R}[X]$ cu proprietatea $f(X+1) - X \cdot f(X) = -X^3 + 5$.
Să se calculeze: $f(1) + f(2) + f(3) + ... + f(10)$.

8.** Fie polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$ care verifică relaţia:
$X \cdot f(X) + (X+1) f(X+1) = 2X^2 - 2X - 1$şi $r \in \mathbb{R}[X]$, restul împărţirii lui f la X +1.
Să se calculeze r(10).

9.** Fie polinomul
$f(X) = X^n + X^{n-1} - 2015X^{n-2} - 2015X^{n-3} + X^3 - 2015X + 2015, f \in \mathbb{R}[X]$**.**
Să se calculeze $f(\sqrt{2015})$.

10.** Se consideră polinomul $f = X^2(1 + X^2 + X^3)^{671} - X^{2014} + 1 \in \mathbb{R}[X]$ având forma algebrică $f = a_{2015}X^{2015} + a_{2014}X^{2014} + ... + a_1X + a_0$. Să se determine restul împărţirii lui f la polinomul $g = X^2 + X$.

11.** Se consideră funcţia polinomială $f(x) = x^{2014} - 6x^{2013} + x^2 - 6x + 2$. Să se calculeze $f(3 + 2\sqrt{2})$.

1.4 Teorema restului. Schema lui Horner

Teoremă **Teorema restului**

Dacă $f \in K[X], f \neq 0$ **şi** $a \in K$**, atunci restul împărţirii polinomului f prin binomul X-a este egal cu f(a).**

Exemplu: Să se determine $m \in \mathbb{R}$ **astfel încât restul împărţirii polinomului f = $4X^3-2X^2+5X-m$ la X-2 să fie 0.**

Rezolvare: Din Teorema restului, rezultă că valoarea lui m se determină din condiţia f(2) = 0 $\Leftrightarrow$ 34-m=0 $\Rightarrow$ m=34.

Observaţie: Teorema restului nu ne permite să determinăm şi câtul împărţirii.

Un procedeu de determinare şi a câtului şi a restului împărţirii unui polinom $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + ... + a_nX^n$, prin binomul X-a, ne este oferit de **schema lui Horner**.

Pentru aceasta se face un tabel în care sunt trecuţi pe primul rând, coeficienţii a_n, a_{n-1}, ...a_2, a_1, a_0, iar în stânga, soluţia ecuaţiei X-a=0.

Întodeauna se coboară coeficientul dominant a_n (coeficientul termenului de grad maxim).

	X^n	X^{n-1}	X^{n-2}	.....	X^2	X	a_0
	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}		a_2	a_1	a_0
x_1	a_n	b_{n-1}	b_{n-2}		b_2	b_1	$b_0=r$
X_2	a_n						

Coeficienţii câtului, a_n , b_{n-1},b_{n-2}, ...,b_1,b_0 se obţin astfel:

a_n este coeficientul dominant şi rămâne pe loc;

$b_{n-1} = x_1 \cdot a_n + a_{n-1}$;

$b_{n-2} = x_1 \cdot b_{n-1} + a_{n-2}$;

.....

$b_0 = x_1 \cdot b_1 + a_0$; dacă restul $b_0 = 0 \Rightarrow x_1$ este soluție ; dacă $b_0 \neq 0 \Rightarrow x_1$ nu este soluție și căutăm alt divizor al termenului liber;

Exemplu: Să se determine câtul şi restul împărţirii polinomului $f = 3X^3 - 4X + 2$ la polinomul $g = X - 1$

Rezolvare: Aplicăm **schema lui Horner**:

$| \; 3X^3 + 0X^2 - 4X + 2$

$| \; 3 \quad 0 \quad -4 \quad 2$, $\Rightarrow q = 3X^2 + 3x - 1 \;\; si \;\; r = 1$

$1 | \; 3 \quad 3 \quad -1 \quad | \; 1$

Activitate independentă	Răspuns
Să se determine cîtul şi restul împărţirii polinomului $f=\hat{3}X^3+X^2+4X+\hat{1}$ **la polinomul** , $g=X-2,$ **unde** $f,g\in\mathbb{Z}_5[X]$**.**	$c=\hat{3}X^2+2X+\hat{3}$ $r=2$.

Observaţie: Se poate arăta uşor că dacă $f\in C[X], f\neq 0$ şi $a,b\in C$ astfel încât $a\neq b$, atunci restul împărţirii lui f prin (X-a)(X-b) este $r(X)=\frac{f(a)-f(b)}{a-b}X+\frac{af(b)-bf(a)}{a-b}$.

Exercitii rezolvate

1. Să se determine câtul şi restul împărţirii polinomului $f(X)=X^4+2X^3-3X^2+4X-6\in\mathbb{R}[X]$ **la polinomul** $g(X)=X-2$**;**

Rezolvare :

$\begin{array}{l|lllll} & X^4+2X^3-3X^2+4X-6 & & & & \\ \hline & 1 & 2 & -3 & 4 & -6 \\ \hline 2 & 1 & 4 & 5 & 14 & 22 \end{array}$, $c(X)=X^3+4X^2+5X+14$, $r(X)=22$;

2. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ **astfel încât polinomul** $f(X)=X^4+mX^3+(m^2-1)X^2+mX+1$ **,** $f\in\mathbb{R}[X]$ **împărţit la polinomul** $g(X)=X+1$ **să dea restul 0;**

Rezolvare: Conform Teoremei restului rezultă $f(-1)=0\Leftrightarrow(-1)^4+m\cdot(-1)^3+(m^2-1)\cdot(-1)^2+m\cdot(-1)+1=0\Rightarrow m^2-2m+1=0\Rightarrow m=1$;

3. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ **astfel încât polinomul** $f(X)=-3X^3+mX^2-2X+6\in\mathbb{R}[X]$ **împărţit la polinomul** $g(X)=X-2$ **să dea restul 6;**

Rezolvare: Conform Teoremei restului rezultă

$f(2)=6\Leftrightarrow-3\cdot2^4+m\cdot2^3-2\cdot2+6=6\Rightarrow \quad 4m=28\Rightarrow m=7;;$

4. Să se determine câtul şi restul împărţirii polinomului f(X)=X⁴ -3X³ -2X² +X+1 la polinomul g(X) = (X-1)(X+2), prin mai multe metode.

Rezolvare :

Metoda I : Efectuăm împărţirea polinoamelor:

$\begin{array}{l|l} \mathbf{X^4-3X^3-2X^2+X+1} & \mathbf{X^2+X-2} \\ \mathbf{-X^4-X^3+2X^2} & \hline & X^2-4X+4 \\ \hline -4X^3+X+1 & \\ 4X^3+4X^2-8X & \\ \hline 4X^2-7X+1 & \\ -4X^2-4X+8 & \\ \hline -11X+9 & \end{array}$

Aşadar, câtul este q(X)= X^2 -4X+4 iar restul este r(X)= -11X+9.

Metoda a II-a :
Folosim formula :

Restul împărţirii unui polinom f la un polinom de forma **(X-a)(X-b)** este de forma :

$r(X)=\frac{f(a)-f(b)}{a-b}+\frac{af(b)-bf(a)}{a-b}$. Să demonstrăm acest lucru.

Conform teoremei împărţirii cu rest, putem scrie, $f(X)=(X-a)(X-b)\cdot q(X)+mX+n$, unde restul împărţirii este polinomul r(X)= mX+n. Aşadar, trebuiesc aflaţi m şi n.

$\begin{cases} f(a)=ma+n \\ f(b)=mb+n \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} bf(a)=mab+nb \\ -af(b)=-mab-na \end{cases}\Rightarrow n=\frac{af(b)-bf(a)}{a-b}$. Înlocuind n în prima ecuaţie, obţinem: $m=\frac{f(a)-f(b)}{a-b}$, adică ceea ce trebuia demonstrat.

În cazul nostrum, se fac înlocuirile: $r(X)=\frac{f(1)-f(-2)}{1+2}+\frac{f(-2)-(-2)f(1)}{1+2}=-11X+9$.

Pentru aflarea câtului vom proceda astfel:

$X^4-3X^3-2X^2+X+1=(X-1)(X+2)q(X)-11X+9$

$X^4-3X^3-2X^2+X+1=(X^2+X-2)(X^2+aX+4)-11X+9$

$X^4-3X^3-2X^2+X+1=X^4+(a+1)X^3+(a+2)X^2+(4-2a)X-8-11X+9$

După identificarea coeficienţilor, rezultă:

$\begin{cases} a+1=-3 \\ a+2=-2 \\ -7-2a=1 \end{cases}\Rightarrow a=-4$. Aşadar, câtul este q(X) = X^2 - 4X+4.

Metoda a III-a : Această metodă presupune utilizarea schemei lui Horner :

X	**1**	**-3**	**-2**	**1**	**1**	
1	**1**	**-2**	**-4**	**-3**	**-2**	**= r_1**
-2	**1**	**-4**	**4**	**-11**		**= r_2**

De aici se obţine foarte uşor câtul **q(X) = X^2 -4X+4** iar restul se obţine din **r(X) = r_2X +(r_1 –r_2), adică r(X)= -11X+9.**

5. Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ **astfel încât polinomul** $f(X)=X^4-5X^3+X^2+aX+b\in\mathbb{R}[X]$ **împărţit la polinomul** $g(X)=(X-1)\bullet(X-2)$ **să dea restul 0;**

Rezolvare :

Folosim Teorema împărțirii cu rest : $f(X)=g(X)\bullet c(X)+r(X),\quad r(X)=0$,

Cum $\begin{cases} f(1)=0 \\ f(2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-5+1+a+b=0 \\ 16-40+4+2a+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=3 \\ 2a+b=20 \end{cases} \Rightarrow a=17,\ b=-14$.

6. Să se determine $a\in\mathbb{R}$, astfel încât restul împărţirii polinomului $f(X)=2X^3-X^2+aX+2$ la X-2 să fie 2012 .

Rezolvare : Punând condiţia f(2)= 2012 se obţine 16 - 4+2a+2 = 2012 adică a = 999.

Exercitii propuse

1. Să se arate că restul împărțirii polinomului $f(X)=2X^3-4X^2-5X+3\in\mathbb{R}[X]$ la polinomul $g(X)=X+1$ este 2.

2. Să se arate că restul împărțirii polinomului $f(X)=3X^4-2\sqrt{2}X^3+5X^2-4\in\mathbb{R}[X]$ la polinomul $g(X)=X-\sqrt{2}$ este 10.

3. Să se determine cu ajutorul schemei lui Horner câtul şi restul împărțirii polinomului f la polinomul g în situațiile:

a) $f=X^3+6X^2+2,\ g=X-3,\ f,g\in\mathbb{R}[X]$;

b) $f=-X^3+2X+5,\ g=X-1,\ f,g\in\mathbb{R}[X]$;

c) $f=2X^3+3X^2-4X+2,\ g=X+3,\ f,g\in\mathbb{R}[X]$;

d) $f=X^4+5X^2-4,\ g=X-2,\ f,g\in\mathbb{R}[X]$;

e) $f=2X^3+\hat{3}X+4,\ g=X+\hat{1},\ f,g\in\mathbb{Z}_5[X]$;

f) $f=\hat{3}X^3+4X^2+2X+\hat{3},\ g=X+2,\ f,g\in\mathbb{Z}_5[X]$;

4. Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât restul împărţirii polinomului $f=2X^3-aX^2+X-7\in\mathbb{R}[X]$ la X-2 să fie 3;

5. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât restul împărțirii polinomului $f=2X^3-mX^2+(m+1)X-3\in\mathbb{R}[X]$ la polinomul $g=X-3,\ g\in\mathbb{R}[X]$ să fie 6.

6. Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ ştiind că polinomul $f=X^3-aX^2-bX+1\in\mathbb{R}[X]$ împărţit la
polinomul X-1 dă restul – 1 şi împărţit la polinomul X+1 dă restul 1;

7. Să se determine $a,b,c\in\mathbb{R}$ ştiind că polinomul $f=X^4+aX^3+bX+c\in\mathbb{R}[X]$ împărţit la
polinomul X-1 dă restul 5 iar f(-1) = f(2)= 3 ;

8. Să se determine câtul şi restul împărţirii polinomului $f=X^4-2X^3+3X^2-X+1\in\mathbb{R}[X]$ la polinomul $(X-1)(X-2)$ prin mai multe metode.

9. Să se determine restul împărțirii polinomului $f(X)=2X^4+3X^3-2X^2+X+4\in\mathbb{R}[X]$ la polinomul $g(X)=(X-2)\bullet(X+2)$.

10. Se consideră polinoamele $f=(X-3)^{2012}+2X-5\in\mathbb{R}[X]$ şi $g=X^2-6X+8\in\mathbb{R}[X]$. Să se determine restul împărţirii lui f la g.

11. Se consideră polinoamele $f=(X-2)^{2012}+X-2\in\mathbb{R}[X]$ şi $g=X^2-4X+3\in\mathbb{R}[X]$. Să se determine restul împărţirii lui f la g.

12. Fie $f=X^2+(a+\hat{3})X+2a+\hat{1}\in\mathbb{Z}_5[X]$. Determinaţi restul împărţirii lui f la polinomul $g=X+2\in\mathbb{Z}_5[X]$;

13. Fie $f(X)=X^5+X^4+X^3+X^2+X+1$ cu rădăcinile $x_k\in\mathbb{C},k=\overline{1,5}$.

a) Să se calculeze f(2) ;

b) Să se determine restul împărţirii lui f la X^3-2X^2+X.

14. Să se determine restul împărţirii polinomului $f=X^{2012}+X^{101}+X^{100}-3\in\mathbb{R}[X]$ la polinomul X^3-X.

15*. Să se determine restul împărţirii polinomului $f=X^{20}+X^5+X+1\in\mathbb{R}[X]$ la polinomul $(X-1)^2$.

16.** Împărțind polinomul $f(X)=X^m-X^n+8\in\mathbb{R}[X]$ la $X-3$, respectiv $X-9$, se obțin resturile 26, respectiv 656. Determinați câtul și restul împărțirii lui f la $X+5$.

2. Divizibilitatea polinoamelor

2.1 Divizibilitatea polinoamelor. Definiție

Definiție

Fie $f,g\in K[X]$. Spunem că **polinomul g divide polinomul f** şi scriem $g|f$ (sau polinomul **f este divizibil prin polinomul g** şi scriem $f\vdots g$), dacă există polinomul $h\in K[X]$astfel încât $f=g\cdot h$.

Observaţii:

a) Când g divide f, spunem că g este un divizor al lui f în inelul K[X] sau că f este un multiplu al lui g. Convenim să mai spunem în loc de **f este divizibil cu g**, că **f se divide cu g**.

b) Polinomul nul este singurul polinom care admite o infinitate de divizori;

c) Pentru $f,g\in K[X],g\neq 0$, **f se divide cu g** dacă şi numai dacă restul împărţirii lui f la g este zero.

d) Polinoamele constante nenule divid orice polinom şi $af|f,\forall f\in K[X],a\in K,a\neq 0$.

e) $f\vdots g\Leftrightarrow f-g\vdots g,\ \forall f,g\in K[X]$.

f) Dacă $f,g\in K[X]$, cu $g|f,f\neq 0$, atunci $g\neq 0$şi $grad(g)\leq grad(f)$.

Exemplu 1: Fie $f=X^5-1\in C[X]$, cum $f=(X-1)(X^4+X^3+X^2+X+1)$ rezultă că f este divizibil prin polinomul X-1. Aceasta se mai poate verifica efectuând împărţirea lui **f** la X-1.

Exemplu 2: Se consideră polinoamele

$f=X^4-X^3+6X^2-4X+8\in\mathbb{R}[X]$

şi $g=X^2+4\in\mathbb{R}[X]$.

Să se arate că f este divizibil cu g.

Rezolvare: Se va efectua împărţirea lui f la g şi se va observa că restul împărţirii este 0 adică f se împarte exact la g, ceea ce înseamnă că f este divizibil cu g.

$$\begin{array}{l|l} X^4-X^3+6X^2-4X+8 & \dfrac{X^2+4}{X^2-X+2} \\ \underline{-X^4-4X^2} & \\ \ /\ -X^3+2X^2-4X+8 & \\ \underline{-X^3+4X} & \\ \ /\ \ 2X^2+8 & \\ \underline{-2X-8} & \\ \ /\ \ / & \end{array}$$

Teoremă **Proprietăţile relaţiei de divizibilitate pe K[X]**

Relaţia de divizibilitate pe K[X] are următoarele proprietăţi:

1). este reflexivă $\Leftrightarrow f|f,\forall f\in K[X]$**;**

2). este tranzitivă $\Leftrightarrow f|g$ **şi** $g|h \Rightarrow f|h, \forall f,g,h \in K[X]$**;**

3). dacă $f|g$ **şi** $f|h$ **atunci** $f|ug+vh, \forall u,v,f,g,h \in K[X]$**;**

Teoremă **Teorema lui Bézout**

Fie K un corp comutativ şi f un polinom din K[X]. Elementul $a \in K$ **este o rădăcină a lui f dacă şi numai dacă X-a divide pe f.**

Observaţie: Acest rezultat este o consecinţă a **teoremei restului** şi indică faptul că rădăcinile unui polinom determină factorii săi de gradul întâi.

Exemplu 3 : Polinomul $f = X^3 + X^2 - 6X$ este de exemplu divizibil cu polinomul $g = X - 2$ întrucât numărul 2 este rădăcină a polinomului f, $f(2) = 0$. De asemenea , f este divizibil cu polinomul $g = X + 3$ deoarece numărul – 3 este rădăcină a polinomului f, $f(-3) = 0$.

În concluzie, **f este divizibil cu binomul** $g = X - a \Leftrightarrow f(a) = 0$**.**

Teoremă **Fie K un corp comutativ şi f un polinom din K[X]. Polinomul f este divizibil cu polinomul** $g = (X-a)(X-b) \Leftrightarrow f(a) = 0$ **şi** $f(b) = 0$**.**

Observaţie: Dacă polinomul g este trinomul de forma $g = aX^2 + bX + c$ **care se poate scrie de forma** $g = (X - x_1)(X - x_2)$ **atunci, f este divizibil cu g** $\Leftrightarrow f(x_1) = 0, f(x_2) = 0$**.**

Definiţie(Rădăcini multiple)

Fie $f \in K[X]$ un polinom nenul şi $a \in K$ o rădăcină a lui f. Un număr natural şi nenul **k**, se numeşte ordin de multiplicitate al rădăcinii **a** dacă $(X-a)^k | f$ şi $(X-a)^{k+1} \nmid f$. În aceste condiţii, **a se numeşte rădăcină multiplă de ordinul k al lui f**.

Pentru k = 1, **a** se numeşte rădăcină ***simplă*****;** Pentru k = 2, a se numeşte ***rădăcină dublă***, iar pentru k=3, rădăcina se numeşte ***triplă*****.**

Observaţii:

1. Conform teoremei lui **Bézout**, numărul $a \in K$ este o rădăcină multiplă de ordinul k a lui f dacă şi numai dacă există un polinom $g \in K[X]$ astfel încât $f = (X-a)^k \cdot g$ cu $g(a) \neq 0$.

2. Dacă $f, g \in K[X]$, astfel încât $a \in K$ este rădăcină multiplă de ordinul **m** a lui **f** şi de ordinul **n** a lui **g**, atunci **a** este rădăcină multiplă de ordinul **m+n** a produsului $f \cdot g$.

Teoremă : **Fie** $f \in K[X]$**, K unul din corpurile** $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ *sau* $\mathbb{C}$ **şi** $a \in K$**. Atunci, a este rădăcină multiplă de ordinul k a lui f dacă şi numai dacă** $f(a) = f'(a) = ... = f^{(k-1)}(a) = 0$ **şi** $f^{(k)}(a) \neq 0.$

Exemplu 4: Se consideră polinomul $f = X^4 - 3X^3 + 3X^2 - X \in \mathbb{R}[X]$. Să se determine ordinul de multiplicitate al rădăcinii 1.
Rezolvare: Asociem polinomului funcția polinomială $f(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x$.
Observăm că $f(1) = 1^4 - 3 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 1 = 0$;
$f'(x) = 4x^3 - 9x^2 + 6x - 1$, $f'(1) = 0$
$f''(x) = 12x^2 - 18x + 6$, $f''(1) = 0$
$f^{III}(x) = 24x - 18$, $f^{III}(1) = 6 \neq 0$. Rezultă că 1 este rădăcină multiplăă de ordinul 3.

Teoremă **Fie** $f, g \in K[X]$**. Polinomul f este divizibil prin polinomul g dacă şi numai dacă orice rădăcină a polinomului g este rădăcină şi a polinomului f având acelaşi ordin de multiplicitate.**

Activitate independentă		**Răspuns**
Se consideră polinoamele $f = X^4 + 5X^3 + -2X^2 - 24X \in \mathbb{R}[X]$ **şi** $g = X^2 + X - 6 \in \mathbb{R}[X]$**. Să se arate că f este divizibil cu g.**		Restul împărțirii este 0

Exercitii rezolvate

1. Să se arate că polinomul f este divizibil cu polinomul g unde:
a) $f(X) = X^4 - 3X^3 + 2X^2 - 5X + 5$, $g(X) = X - 1$ **;**
b) $f(X) = X^7 - 3X^6 + 2X^5 + 2X^4 - 2X^3 - 2X^2 + 3X - 1$, $g(X) = X^2 - 2X + 1$ **;**
c) $f(X) = (X^2 + X - 1)^{2n+1} - X$, $g(X) = X^2 - 1$ **;**
Rezolvare :
a) Conform **Teoremei lui Bézout**, $f \vdots (X - a) \Leftrightarrow f(a) = 0.$ În cazul nostru, f(1) = 1-3+2-5+5 = 0, rezultând astfel că f este divizibil cu X-1.
b) $f \vdots (X-1)^2 \Leftrightarrow f(1) = 0 \; si \; f'(1) = 0$ sau se poate folosi schema lui Horner.
$f'(X) = 7X^6 - 18X^5 + 10X^4 + 8X^3 - 6X^2 - 4X + 3$
Se verifică apoi că f(1)= 0 şi f '(1)=0.
c) $f \vdots (X^2 - 1) \Leftrightarrow f(1) = 0 \; si \; f(-1) = 0$.
f(1)= 1-1=0 şi f(-1) = $(-1)^{2n+1}$+1= -1+1=0, rezultă ceea ce trebuia demonstrat.

2. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ **astfel încât polinomul f să fie divizibil cu g :**
$f(X) = X^4 - 2X^3 + 2X^2 - mX + 4$, $g(X) = X - 2$ **;**

Rezolvare :

$f \vdots (X-2) \Leftrightarrow f(2)=0 \Leftrightarrow 16-16+8-2m+4=0 \Rightarrow$ m = 6.

3. Să se determine $a,b \in \mathbb{R}$ **astfel încât polinomul f să fie divizibil cu g :**

$f(X)=X^3-4X^2+aX+b$ **,** $g(X)=X^2-4X+3$ **;**

Rezolvare :

$g(X)=X^2-4X+3 \Rightarrow g(X)=(X-1)(X-3)$. Atunci,

$f \vdots (X-1)(X-3) \Leftrightarrow f(1)=0 \; si \; f(3)=0$

Rezultă a+ b -3 =0 şi 3a +b -9=0 de unde se obţin a = 3 şi b = 0 ;

4. Să se arate că polinomul $f(X)=X^{6n+5}+X^{3n+4}+1$ **este divizibil cu polinomul** $g(X)=X^2+X+1$

Rezolvare :

Un polinom **f** este divizibil cu un polinom **g** dacă orice rădăcină **a** lui **g** este rădăcină şi pentru **f** prin urmare, fie **a** o rădăcină a lui **g.** Rezultă, $a^2+a+1=0 \Rightarrow (a-1)(a^2+a+1)=0 \Rightarrow a^3-1=0$. Cum a =1 nu este rădăcină pentru polinomul **g** rezultă că $\mathbf{a^3=1}$ cu a diferit de 1.

$f \vdots g \Leftrightarrow f(a)=0 \Leftrightarrow (a^3)^{2n} \cdot a^5+(a^3)^n \cdot a^4+1=a^2+a+1=0$ cea ce arată că **f** este divizibil cu **g**.

5. Fie polinoamele $f,g \in \mathbb{R}[X]$, $f,g \neq 0$ **asfel încât polinomul** $f(X^2)+X^{2009}g(X^4)$ **să fie divizibil cu X-i. Să se calculeze suma** $f^2(-1)+g^2(1)$ **.**

Rezolvare :

Polinomul $h(X)=f(X^2)+X^{2009}g(X^4) \vdots (X-i) \Leftrightarrow h(i)=0 \Leftrightarrow f(i^2)+i^{2009}g(i^4)=0 \Leftrightarrow$ $f(-1)+i\,g(1)=0 \Rightarrow$ f(-1) = 0 şi g(1) = 0, aşadar $f^2(-1)+g^2(1)=0$.

6. Fie polinoamele $f,g \in \mathbb{R}[X]$, $f(X)=(1+X+X^2+...+X^n)^2-X^n$, $g(X)=1+X+X^2+...+X^{n-1}$ **. Să se arate că g divide pe f.**

Rezolvare :

$f(X)=(g+X^n)^2-X^n=g^2+2gX^n+X^{2n}-X^n=\; g^2+2gX^n+X^n(X^n-1) \vdots g$

7. Să se arate că polinomul $f(X)=X^n+X^2-(n+2)X+n$ **este divizibil cu polinomul** $g(X)=(X-1)^2$ **şi să se determine câtul împărţirii lui f la g.**

Rezolvare :

$$f(X)=X^n+X^2-(n+2)X+n=X(X^{n-1}-1)+X(X-1)-n(X-1)=$$
$$=(X-1)(X^{n-1}+X^{n-2}+...+X+X-n)=$$
$$=(X-1)[(X^{n-1}-1)+(X^{n-2}-1)+...+(X-1)+(X-1)]=$$
$$=(X-1)^2[(X^{n-2}+X^{n-3}+X^{n-4}+...+X+1+$$
$$+X^{n-3}+X^{n-4}+...+X+1+$$
$$+X^{n-4}+...+X+1+$$
$$+X+1+$$
$$+1+$$
$$+1+$$

$= (X-1)^2[X^{n-2}+2X^{n-3}+3X^{n-4}+...+(n-3)X^2+(n-2)X+n] =$

Aşadar, f este divizibil cu g, iar câtul împărţirii este polinomul

c(X)= $X^{n-2}+2X^{n-3}+3X^{n-4}+...+(n-3)X^2+(n-2)X+n$

9. Să se arate că polinomul $f(X)=(X^4-X-1)^{2n+1}+(X^4+X-1)^{2n+5}$ **este divizibil cu** X^2+1.

Rezolvare:

În astfel de probleme în care se cere ca un polinom **f** să fie divizibil cu polinomul

X^2+1 trebuie să fie îndeplinite condiţiile **f(i) = o** şi **f(-i) = 0** deoarece $X^2+1=(X-i)(X+i)$.

În cazul nostru se verifică acest fapt întrucât, f(i) = $(i^4 -i -1)^{2n+1} +(i^4 + i-1)^{2n+5}$ =

= $(-i)^{2n+1} +(i)^{2n+5}$ = $(-i)^{2n}(-i) +i^{2n}\, i^5$ = $i^{2n}\,(-i+i) = 0$. Analog, f(-i) = 0.

10. Fie $f,g\in\mathbb{R}[X]$, $f(X)=X^3+mX^2+nX+p$, $g(X)=X^2+X-2$.

a) Să se determine $p\in\mathbb{R}$ **astfel încât f(2) = 2(2m+n+9).**

b) Pentru p=10, să se determine $m,n\in\mathbb{R}$ **astfel încât f să se dividă prin g ;**

c) Pentru m= - 4, n= -7, şi p = 10, să se calculeze produsul

$f(0)\cdot f(1)\cdot f(2)\cdot.....\cdot f(2010)$.

Rezolvare:

a) Se calculează f(2) şi se egalează cu expresia dată în enunţ.

f(2)= 8+4m+2n+p = 2(2m+n+9) de unde rezultă că p=10.

b) Din $x^2+x-2=0$ rezultă $x_1=-2$ şi $x_2=1$.

$$f(X)\vdots g(X)=(X-1)(X+2)\Leftrightarrow\begin{cases}f(-2)=0\\f(1)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4m-2n=-2\\m+n=-11\end{cases}\Rightarrow$$

$m=-4,\ n=-7.$

c) Cum $f(X)=X^3-4X^2-7X+10=(X^2+X-2)(X-5)=$ $=(X+2)(X-1)(X-5)\Rightarrow$ f(1)=0 aşadar, produsul

$f(0)\cdot f(1)\cdot f(2)\cdot.....\cdot f(2010)$ îl conţine pe f(1) prin urmare este egal cu zero.

Exercitii propuse

1. Se consideră polinomul $f = X^3 - 2X^2 + X + a \in \mathbb{R}[X]$. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ ştiind că polinomul f admite rădăcina 1;

2. Să se determine $a,b \in \mathbb{R}$ astfel încât polinomul $f = X^3 - 3X^2 + aX + b \in \mathbb{R}[X]$ să fie divizibil cu polinomul X-2 iar restul împărţirii lui f la X-1 să fie 4;

3. Să se arate că polinomul f este divizibil cu polinomul g unde:

a) $f(X) = X^4 + X^2 + 1,\ g(X) = X^2 - X + 1$;

b) $f(X) = 2X^5 - 3X^4 + 2X^2 - 1,\ g(X) = X - 1$;

c) $f(X) = X^5 - 1,\ g(X) = X - 1$;

d) $f(X) = 3X^4 - X^3 - X^2 + X - 2,\ g(X) = X^2 - 1$;

e) $f(X) = X^{n+3} - (n+3)X + n + 2,\ g(X) = (X-1)^2$;

4. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât polinomul f să fie divizibil cu polinomul g unde:

a) $f(X) = X^3 - 3X^2 + 6X - m,\ g(X) = X - 2$;

b) $f(X) = 2X^5 - 3X^4 + mX^2 - 1,\ g(X) = X - 1$;

c) $f(X) = X^5 + mX^3 + 3X^2 - 2X + 8,\ g(X) = X + 2$;

5. Să se determine $a,b \in \mathbb{R}$ astfel încât polinomul f să fie divizibil cu polinomul g unde:

a) $f(X) = 3X^3 + aX^2 - 5X + b,\ g(X) = (X-1)(x+2)$;

b) $f(X) = aX^4 + (b+2)X^3 - X^2 + X - 2,\ g(X) = X^2 - 1$;

c) $f(X) = aX^4 + bX^3 - 3,\ g(X) = (X-1)^2$;

d) $f(X) = aX^{n+2} + bX^n + 2,\ g(X) = (X-1)^2$;

e) $f(X) = X^3 + aX^2 + 9X + b,\ g(X) = X^2 - 4X + 5$;

6. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât polinomul $f = X^3 - 2(m+1)X^2 + mX - 4 \in \mathbb{R}[X]$ să fie divizibil cu polinomul $g = x - 1$;

7. Să se determine $b \in \mathbb{R}$ în funcţie de „a” astfel încât polinomul $f = X^3 + aX^2 + 2X + b \in \mathbb{R}[X]$ să fie divizibil cu polinomul $g = x + 2$;

8. Să se determine $a,b \in \mathbb{R}$ astfel încât polinomul $f = X^3 + 3X^2 + aX + b \in \mathbb{R}[X]$ să fie divizibil cu polinomul $g = x^2 - 1$;

9. Să se arate că polinomul $f = X^n + X^2 - (n+2)X + n \in \mathbb{R}[X]$ se divide la polinomul $g = (x-1)^2$;

10. Să se arate că polinomul $f = (n-1)X^{n+1} - (n+1)X^n + (n+1)X - n + 1 \in \mathbb{R}[X]$ se divide cu $(x-1)^3$;

2.2 Cel mai mare divizor comun.
Cel mai mic multiplu comun

Definiţie

Fie $f,g \in K[X]$. Un polinom $d \in K[X]$ este un **cel mai mare divizor comun al polinoamelor f şi g** şi scriem **c.m.m.d.c(f,g)** dacă sunt verificate condiţiile:
a) $d|f$ şi $d|g$; b) dacă există $d' \in K[X]$ astfel încât $d'|f$ şi $d'|g$, atunci $d'|d$.

Pentru un **c.m.m.d.c(f,g)** se foloseşte şi notaţia **(f,g)** şi dacă există **este unic.**

Observaţii:
a) Notaţia **d=(f,g)** nu trebuie înţeleasă ca o egalitate propriu-zisă, căci ea prescurtează expresia „ ***d este un cel mai mare divizor comun al polinoamelor f şi g***”, întrucât şi orice alt polinom asociat în divizibilitate cu d este de asemenea un cel mai mare divizor comun al acestor polinoame. Printre polinoamele asociate în divizibilitate cu un polinom dat, există unul singur care are coeficientul dominant egal cu unu, numit polinom unitar.
b) $(f,g) = f \Leftrightarrow f|g$; c) $(f,0) = f$;

Teoremă **(Existenţa celui mai mare divizor comun a două polinoame)**
Fie K un corp comutativ. Pentru orice două polinoame f şi g din K[X] există un c.m.m.d.c. al lor. Mai mult, dacă d este un c.m.m.d.c. al lui f şi g, atunci există polinoamele u şi v din K[X] astfel încât $d = u \cdot f + v \cdot g$.

Un rezultat important ce ne permite ca la efectuarea împărţirii a două polinoame, să evităm coeficienţii fracţionari este dat de următoarea teoremă, care indică faptul că în cadrul algoritmului lui Euclid, nu contează câturile parţiale şi prin urmare, polinoamele pot fi amplificate cu constante nenule convenabile :

Teoremă **Fie $f,g \in K[X]$ şi $d = (f,g)$.**

a) Dacă $a \in K, a \neq 0$, atunci $a \cdot d = (f,g)$.

b) Dacă d' este un cel mai mare divizor comun al polinoamelor f şi g, atunci există elementul $a \in K, a \neq 0$ astfel încât $d' = a \cdot d$.

Exemplu 1: Să se determine c.m.m.d.c. al polinoamelor $f = X^4 - 3X^3 - 3X^2 + 7X + 6$ şi $g = X^2 + X - 6$, $f,g \in \mathbb{R}[X]$. Rezolvare:

$$\begin{array}{l|l} X^4 - 3X^3 - 3X^2 + 7X + 6 & X^2 + X - 6 \\ \hline -X^4 - X^3 + 6X^2 & X^2 - 4X + 7 = c_1 \\ \hline \quad -4X^3 + 3X^2 + 7X + 6 & \\ \quad 4X^3 + 4X^2 - 24X & \\ \hline \quad\quad 7X^2 - 17X + 6 & \\ \quad\quad -7X - 7X + 42 & \\ \hline \quad\quad -24X + 48 = r_1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} X^2 + X - 6 & X - 2 \\ \hline -X^2 + 2X & X + 3 = c_2 \\ \hline \quad 3X - 6 & \\ \quad -3X + 6 & \\ \hline \quad\quad / \Rightarrow r_2 = 0 & \end{array}$$

După ce s-a împărțit f la g s-a obținut restul $r_1 = -24X + 48$ care se va împărți cu – 24 pentru a se evita coeficienții fracționari în algoritmul lui Euclid la împărțirea lui g la restul de mai sus.

Cum ultimul rest este zero, atunci, ultimul rest nenul adică $r_1 = -24X + 48$ sau o asociere cu el în divizibilitate adică $r_1 = X + 2$ este cel mai mare divizor comun.

Exemplu 2: Să se determine c.m.m.d.c al polinoamelor $f, g \in \mathbb{C}[X]$, unde $f = X^3 - 7X + 6$ şi $g = X^2 - X - 2$.

Rezolvare: Aplicând algoritmul lui Euclid se obţine un cât $c_1 = X + 1$şi un rest $r_1 = -4X + 8$ după care se continuă împărţirea lui $X^2 - X - 2$ la X-2 după ce în prealabil s-a împărţit cu -4 restul obţinut mai înainte; se obţine aşadar mai departe câtul $c_2 = X+1$ şi restul $r_2 = 0$, aşadar ultimul rest nenul din şirul de împărţiri este X-2. Deci el va fi un cel mai mare divizor comun al polinoamelor f şi g.

Definiţie

Două polinoame f şi g din K[X] se numesc **prime între ele** (relativ prime) dacă cel mai mare divizor comun al lor este 1.

Notaţie: (f,g)=1.

Altfel spus, două polinoame f şi g sunt prime între ele dacă singurii divizori comuni sunt polinoamele constante nenule, adică **ultimul rest din algoritmul lui Euclid este un polinom constant nenul.**

Exemplu 3: Să se arate că c.m.m.d.c. al polinoamelor $f = X^4 + 3X^3 - X^2 - 3X$ și $g = X^2 - 4$ este 1, adică polinoamele sunt prime între ele.

Rezolvare: Se împarte f la g și se obține cîtul $c_1 = X^2 + 3X + 3$ și restul $r_1 = 9X + 12$.

$$\begin{array}{l|l} X^4 + 3X^3 - X^2 - 3X & X^2 - 4 \\ \hline -X^4 + 4X^2 & X^2 + 3X + 3 = c_1 \\ \hline \quad 3X^3 + 3X^2 - 3X & \\ \quad -3X^3 + 12X & \\ \hline \quad\quad 3X^2 + 9X & \\ \quad\quad -3X + 12 & \\ \hline \quad\quad 9X + 12 = r_1 & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 9X^2 - 36 & 9X + 12 \\ \hline -9X^2 - 12X & X - \frac{12}{9} = c_2 \\ \hline \quad -12X - 36 & \\ \quad 12X + 16 & \\ \hline \quad\quad -20 = r_2 & \end{array}$$

Mai departe, conform algoritmului lui Euclid, se împarte $g = X^2 - 4$ la restul obținut mai sus, $r = 9X + 12$. Pentru a evita coeficienții fracționari, se poate înmulți g cu 9.

Cum ultimul rest nenul este polinomul constant **-20** rezultă că cele două polinoame sunt prime între ele.

Definiţie

Fie $f,g\in K[X]$. Un polinom $m\in K[X]$ este un **cel mai mic multiplu comun al polinoamelor f şi g**, şi scriem **c.m.m.m.c(f,g)** dacă sunt verificate condiţiile:

a) $f|m \ si \ g|m$; b) $\forall m'\in K[X]$ astfel încât $f|m' \ si \ g|m'$, rezultă $m|m'$.

Pentru cel mai mic multiplu comun al polinoamelor f şi g se mai foloseşte notaţia **[f,g].**

Teoremă **Fie** $f,g\in K[X]$ **astfel încât** $f\neq 0$ **sau** $g\neq 0$**. Dacă** $d=(f,g)$ **este un cel mai mare divizor comun al lor, atunci** $[f,g]\cdot(f,g)=f\cdot g$**.**

Observaţie: Cel mai mic multiplu comun a două polinoame este polinomul cu gradul cel mai mic care se împarte exact la polinoamele date. El este unic determinat până la o asociere în divizibilitate.

Exemplu 4: Să se determine **c.m.m.m.c** al polinoamelor $f,g\in C[X]$, unde $f=X^3-7X+6$ şi $g=X^2-X-2$.

Rezolvare: Aplicând formula de mai sus, obţinem:

$$[f,g]=\frac{f\cdot g}{(f,g)}=\frac{(X^3-7X+6)\cdot(X^2-X-2)}{X-2}=(X^3+3X^2-X-3)(X-2)=$$

$$=X^4+X^3-7X^2-X+6$$

Exercitii rezolvate

1. Să se determine c.m.m.d.c. şi c.m.m.m.c al polinoamelor :

a) $f=3(X-1)^2(X+1)^3(X-2),\ \ g=(X-1)(X+1)^2(X-2)^3,\ \ f,g\in\mathbb{R}[X]$;

b) $f=3X(X-1)^2(2X-5),\ \ g=15X^3(X-1)(2X-5)^3,\ \ f,g\in\mathbb{R}[X]$;

c) $f=2X^2(X-1)^3(X+4),\ \ g=8X(X-1)(X+3)^2,\ \ f,g\in\mathbb{R}[X]$;

Rezolvare:

a) $(f,g)=(X-1)(X+1)^2(X-2),\quad [f,g]=3(X-1)^2(X+1)^3(X-2)^3.$

b) $(f,g)=3X(X-1)(2X-5),\quad [f,g]=15X^3(X-1)^2(2X-5)^3.$

c) $(f,g)=2X(X-1),\quad [f,g]=8X^2(X-1)^3(X+4)(X+3)^2.$

2. Să se arate că polinoamele $f=X^4-2X^3+X^2, g=X+3,\ f,g\in\mathbb{R}[X]$ **sunt prime între ele.**

Rezolvare: Se împarte f la g şi se obţine câtul $c_1 = X^3 - 5X^2 + 16$ iar restul $r_1 = -48$. Cum acesta este un polinom constant nenul, conform definiţiei rezultă că c.m.m.d.c este 1 adică cele două polinoame sunt prime între ele.

3. **Să se determine c.m.m.d.c. şi c.m.m.m.c al polinoamelor :**
$f = X^4 - 2X^3 - 5X^2 + 6X,\ g = X^2 + 3X + 2,\ f, g \in \mathbb{R}[X]$**.**

Rezolvare: Se împarte f la g şi se obţine câtul $c_1 = X^2 - 5X + 8$ iar restul $r_1 = -8X - 16$.

Mai departe, conform algoritmului lui Euclid, se împarte împărţitorul $g = X^2 + 3X + 2$, (după ce se înmulţeste cu – 8 ca să se evite coeficienţii fracţionari) la restul obţinut mai sus rezultând câtul $c_2 = X + 1$şi restul $r_2 = 0$. Prin urmare, ultimul rest nenul este cel mai mare divizor comun adică $(f, g) = X + 2$. S-a luat polinomul asociat în divizibilitate cu $-8X - 16$.

4*. Să se găsească cel mai mare divizor comun al polinoamelor: $f = X^{77} - 1$ şi $g = X^{91} - 1$.

Rezolvare: Cum **(77,91) = 7**, atunci **(f,g) = X^7 -1**. Aceasta provine din teorema:
“ Fie a şi b numere naturale şi d = (a,b). Atunci, X^d -1 = (X^a -1 , X^b -1) “.
Demonstraţie: Fie d=(a,b), atunci rezultă că $a = b \cdot q + r,\ r \neq 0$. De aici rezultă mai departe că, $X^a - 1 = X^{bq+r} - 1 =$ $= X^{bq+r} - X^r + X^r - 1 =$
$= X^r (X^{bq} - 1) + X^r - 1 =$
$= X^r (X^b - 1)(X^{b(q-1)} + X^{b(q-2)} + ... + X^b + 1) + X^r - 1 =$ $= (X^b - 1)Q(X) + X^r - 1.$
Dacă r este restul împărţirii lui a la b, atunci se observă că X^r -1 este restul împărţirii lui X^a -1 la X^b -1. Aşadar, din algoritmului lui Euclid dacă **d=(a,b)** atunci **X^d -1 = (X^a -1 ,X^b -1).**

Exercitii propuse

1. Să se determine **c.m.m.d.c**. şi **c.m.m.m.c** al polinoamelor :
a) $f = (X+3)^3 (X+2)^2 (X+1),\ g = (X+3)(X+2)^2 (X+1)^3,\ f, g \in \mathbb{R}[X]$;
b) $f = 21X^2 (X-2)^3 (X+1)^4,\ g = 7X(X-2)(X+1)^2 (X+3),\ f, g \in \mathbb{R}[X]$;
c) $f = 3X(2X+1)(X-3)^2,\ g = 9X^2 (2X+1)^3 (X-3),\ f, g \in \mathbb{R}[X]$;

2. Să se determine **c.m.m.d.c**. şi **c.m.m.m.c** al polinoamelor :
a) $f = 2X^3 - 6X^2 + X - 3,\ g = X^2 - 2X - 3,\ f, g \in \mathbb{R}[X]$;
b) $f = X^3 + 2X^2 + 5X + 10,\ g = X^3 + 2X^2 + X + 2,\ f, g \in \mathbb{R}[X]$;
c) $f = X^4 - X^3 - X + 1,\ g = X^2 + X - 2,\ f, g \in \mathbb{R}[X]$.

3*. Să se găsească cel mai mare divizor comun al polinoamelor:
a) $f = X^{13} - 1$ şi $g = X^{17} - 1$; **b**) $f = X^{15} - 1$ şi $g = X^{33} - 1$; **c**) $f = X^{99} - 1$ şi $g = X^{143} - 1$;

3. Rădăcinile polinoamelor

3.1 Ecuații polinomiale

Definiție

Fie K un corp comutativ şi $f \in K[X]$ un polinom în nedeterminata X cu coeficienți în K. Se numește **ecuație polinomială** sau algebrică, orice ecuație de forma $f(x)=0$.

Numărul $a \in \mathbb{R}$ se numește **rădăcină a polinomului f** dacă și numai dacă $f(a)=0$, altfel spus numărul **„ a ”** este soluție a ecuației asociate polinomului.

Exemplu 1: Să se arate că numărul $x=-3$ este rădăcină a polinomului $f=X^3+3X^2-X-3\in\mathbb{R}[X]$.

Rezolvare: Deoarece $f(-3)=(-3)^3+3\bullet(-3)^2-(-3)-3=-27+27+3-3=0$ rezultă că -3 este rădăcină a polinomului dat.

Teoremă Fie $f=a_0+a_1X+a_2X^2+a_3X^3+.....+a_nX^n$ un polinom cu coeficienţi întregi; Dacă **f** admite ca rădăcină un număr întreg **a**, atunci aceasta se află printre divizorii termenului liber, a_0.

Exemplu 2: Să se determine rădăcinile polinoamelor:

a) $f=2X-6\in\mathbb{R}[X]$;

b) $f=X^2-6X+8\in\mathbb{R}[X]$;

c) $f=X^3+2X^2-3X-6\in\mathbb{R}[X]$;

a) A determina rădăcinile polinoamelor înseamnă să rezolvăm ecuațiile asociate polinoamelor, $f(x)=0$. Din $2x-6=0\Rightarrow 2x=6\Rightarrow x=3$;

b) $x^2-6x+8=0\Rightarrow\Delta=b^2-4ac=36-32=4$ iar $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{6\pm2}{2}\Rightarrow \quad x\in\{2;4\}$.

c) Pentru a determina soluțiile ecuațiilor de grad mai mare decât doi putem folosi schema lui Horner:

- Se scriu pe prima linie a tabelului coeficienții ecuației respectiv polinomului: 1, 2 -3, 6;
- Se determină divizorii termenului liber: $D_6=\{\pm1,\pm2,\pm3,\pm6\}$
- Se verifică care dintre acești divizori sunt soluții pentru ecuația dată respectând procedeul din schema lui Horner, adică se coboară în tabel coeficientul dominant, 1, și se înmulțește divizorul ales astfel: $-2\bullet1+2=0,\ -2\bullet0+(-3)=-3,\ -2\cdot(-3)+-6=0$.

Cum sub termenul liber s-a obținut 0 înseamnă că numărul – 2 este soluție a ecuației. Numerele din fața lui 0 sunt coeficienții unei ecuații de grad mai mic cu o unitate decît a ecuației inițiale, adică de gradul doi.

$\quad | \; X^3+2X^2-3X-6$

$\quad | \; 1 \quad 2 \quad -3 \quad -6$

$-2 | \; 1 \quad 0 \quad -3 \quad | \; 0 \quad \Rightarrow x_1=-2$

Numerele, 1, 0, -3 sunt coeficienții ecuației de gradul doi $x^2-3=0 \Rightarrow x_{2,3}=\pm\sqrt{3}$.

Teoremă **Fie** $f \in K[X]$**. Atunci, a este rădăcină multiplă de ordinul** $k \geq 2,\ k \in \mathbb{N}$ **a lui f dacă şi numai dacă** $f(a)=f'(a)=.....=f^{(k-1)}(a)=0$ **şi** $f^{(k)}(a) \neq 0.$

Astfel, numărul **a** este rădăcină multiplă de ordinul doi sau **rădăcină dublă** pentru polinomul f dacă $f(a)=0$ și $f'(a)=0$ iar $f''(a) \neq 0$.

Numărul **a** este rădăcină multiplă de ordinul trei sau **rădăcină triplă** pentru polinomul f dacă $f(a)=0$, $f'(a)=0$ și $f''(a)=0$ iar $f'''(a) \neq 0$.

Exercitii rezolvate

1. Să se rezolve ecuaţiile în $\mathbb{R}$ **:**

a) $5x+8=13$**;** **b)** $2x^2-3x-5=0$**;** **c)** $x^2=81$**;**

d) $2x^2+8x=0$**;** **e)** $x^2-6x+9=0$**;** **f)** $x^3+2x^2+x=0$**;**

Rezolvare:

a) Metoda rezolvării ecuației de gradul întâi cere separarea termenilor adică trecerea termenilor fără x în partea dreaptă a egalului, prin urmare, $5x+8=13 \Rightarrow 5x=13-8 \Rightarrow 5x=5 \,|:5 \Rightarrow x=1$.

b) Rezolvarea ecuației de gradul doi presupune identificarea coeficienților ecuației, calculul discriminantului ecuației $\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\cdot 2\cdot(-5)=9+40=49$ şi determinarea soluțiilor ecuației, $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{3\pm 7}{2\cdot 2} \Rightarrow x_1=-1,\ x_2=\dfrac{5}{2}$;

c) Ecuația de gradul doi de forma $x^2=a,\ a\geq 0$are soluțiile $x_{1,2}=\pm\sqrt{a}.$ În cazul nostru, $x^2=81 \Rightarrow x=\pm\sqrt{81}=\pm 9.$

d) Ecuațiile de gradul doi care sunt cazuri particulare se rezolvă mult mai uşor utilizând metoda factorului comun sau formulele de calcul prescurtat.

$2x^2+8x=0 \Leftrightarrow 2x(x+4)=0 \Rightarrow x_1=0,\ x_2=-4.$

e) $x^2-6x+9=0\Leftrightarrow (x-3)^2=0\Rightarrow x_1=x_2=3.$

f) Chiar dacă avem ecuații de gradul trei, și acestea se pot rezolva cu schema lui Horner, este mult mai util să folosim metode de calcul algebric cum ar fi metoda factorului comun.

$x^3+2x^2+x=0\Leftrightarrow x(x^2+2x+1)=0\Leftrightarrow x(x+1)^2=0\Rightarrow x_1=0,\ x_2=x_3=-1.$

2. Folosind schema lui Horner să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $x^3+x^2-4x-4=0$**;** **b)** $x^3-13x+12=0$**;**

c) $x^4+3x^3-x^2-9x-6=0$**;** **d)** $x^4+x^3-8x^2-2x+12=0$**;**

Rezolvare:

a)

	1	1	−4	−4
−1	1	0	−4	0

$\Rightarrow x_1=-1$. Din ecuația $x^2-4=0\Rightarrow x_{2,3}=\pm 2$.

b)

	1	0	−13	12
1	1	1	−12	0

$\Rightarrow x_1=1$. Din ecuația $x^2+x-12=0\Rightarrow x_2=-4,\ x_3=-3.$

c)

	1	3	−1	−9	−6
−1	1	2	−3	−6	0
−2	1	0	−3	0	

$\Rightarrow x_1=-1$. Din ecuația $x^2-3=0\Rightarrow x_{3,4}=\pm\sqrt{3}.$ $\Rightarrow x_2=-2$

d)

	1	1	−8	−2	12
2	1	3	−2	−6	0
−3	1	0	−2	0	

$\Rightarrow x_1=2$. Din ecuația $x^2-2=0\Rightarrow x_{3,4}=\pm\sqrt{2}.$ $\Rightarrow x_2=-3$

3. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuațiile bipătrate:

a) $x^4-6x^2+5=0$**;** **b)** $4x^4-x^2-3=0$**.**

Rezolvare:

a) Folosind notația $x^2=t$, rezultă ecuația de gradul doi în **t** : $t^2-6t+5=0$ cu soluțiile $t_1=1,\ t_2=5$.

Din $x^2=1\Rightarrow x=\pm 1$, și din $x^2=5\Rightarrow x=\pm\sqrt{5}.$

b) Folosind notația $x^2=t$, rezultă ecuația de gradul doi în **t** : $4t^2-t-3=0$ cu soluțiile $t_1=1,\ t_2=-\frac{3}{4}$.

Din $x^2=1\Rightarrow x=\pm 1$, și din $x^2=-\frac{3}{4}\Rightarrow x\notin\mathbb{R}$.

4. Să se arate că ecuația $3x^4+4x^2+1=0$ nu are soluții reale.

Rezolvare :

Este evident că funcția din partea stângă este pozitivă pentru orice număr real , deci niciodată nu poate fi egală cu 0, așadar, ecuația asociată nu are rădăcini reale. Altfel, ecuația este una bipătrată și se folosește notația $x^2=t$**.**

Atunci, ecuaţia devine : $3t^3+4t+1=0\Rightarrow t_{1,2}=\frac{-4\pm 2}{6}\Rightarrow t_1=-1,\ t_2=-\frac{1}{3}$**.**

Mai departe, din $x^2=-1\Rightarrow x_{1,2}=\pm i;\ \ x^2=-\frac{1}{3}\Rightarrow x_{3,4}=-\frac{\sqrt{3}}{3}i.$

5. Se consideră polinomul $f=\hat{3}X^3+mX^2+4X+\hat{3}\in\mathbb{Z}_5[X],\ m\in\mathbb{R}$. Să se determine $m\in\mathbb{Z}_5$ știind că f admite rădăcina $\hat{3}$.

Rezolvare:

$\hat{3}$ **este rădăcina polinomului f rezultă** $f(\hat{3})=\hat{0}\Leftrightarrow\hat{3}\cdot\left(\hat{3}\right)^3+m\cdot\left(\hat{3}\right)^2+4\cdot\hat{3}+\hat{3}=\hat{0}\Rightarrow$

$\hat{1}+4\cdot m=\hat{0}\Rightarrow 4\cdot m=-\hat{1}\Rightarrow 4\cdot m=4\Rightarrow m=\hat{1}$.

6. Se consideră polinomul $f=X^3+(m-2)X^2-(m+1)X-4\in\mathbb{R}[X],\ m\in\mathbb{R}$ Să se determine rădăcinile polinomului f știind că acesta admite rădăcina 2.

Rezolvare.

Dacă polinomul f admite rădăcina 2 aceasta înseamnă conform definiției că $f(2)=0$. De aici rezultă , $8+4(m-2)-2(m+1)-4=0\Rightarrow 2m=6\Rightarrow m=3.$ Pentru m = 3, se obține polinomul $f=X^3+X^2-4X-4$ căreia îi găsim rădăcinile cu ajutorul schemei lui Horner:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 1 & -4 & -4 \\ \hline 2 & \underbrace{1} & \underbrace{3} & \underbrace{2} & 0 \\ & & {\scriptstyle x^2+3x+2=0} & & \end{array}\Rightarrow x_1=2.$$ Din ecuația $x^2+3x+2=0\Rightarrow x_2=-1,\ x_3=-2$.

7. Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât $x=1$ și $x=-1$ să fie rădăcinile polinomului

$f = X^4 + 2X^3 + aX^2 + bX + 4 \in \mathbb{R}[X],\ a,b \in \mathbb{R}$.

Rezolvare: $\begin{cases} f(1) = 0 \\ f(-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+2+a+b+4 = 0 \\ 1-2+a-b+4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b = -7 \\ a-b = -3 \end{cases} \Rightarrow a = -5,\ b = -2$.

8. Să se determine $a,b \in \mathbb{R}$ **astfel încât** $x = -2$ **să fie rădăcină dublă pentru polinomul** $f = X^3 - 5X^2 + aX + b \in \mathbb{R}[X],\ a,b \in \mathbb{R}$.

Rezolvare:

Numărul – 2 este rădăcină dublă pentru polinomul f adică $x_1 = x_2 = -2$, aceasta înseamnă că $f(-2) = 0,\ \ f'(-2) = 0.$

Se derivează funcția polinomială asociată polinomului rezultând, $f'(x) = 3x^2 - 10x + a$. Atunci, $\begin{cases} f(-2) = 0 \\ f'(-2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a + b = 28 \\ a = -32 \end{cases} \Rightarrow b = 28 + 2(-32) = -36.$

9*. Să se arate că $x = 1$ **este rădăcină dublă pentru polinomul** $f = nX^{n+2} - (n+2)X^n + 2 \in \mathbb{R}[X], n \in \mathbb{N}.$

Rezolvare: Deoarece $f(1) = n - (n+2) + 2 = 0,\ \ f'(1) = n(n+2) - (n+2)n = 0$ rezultă că $x = 1$ este rădăcină dublă.

10*. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ **știind că ecuația** $x^3 + mx^2 - 4 = 0$ **admite o soluție dublă.**

Rezolvare: Fie a soluția dublă . Atunci, dacă $f(x) = x^3 + mx^2 - 4$ este funcția polinomială asociată ecuației rezultă conform definiției că $\begin{cases} f(a) = 0 \\ f'(a) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^3 + ma^2 - 4 = 0 \\ 3a^2 + 2am = 0 \end{cases} \Rightarrow m = -\frac{3a}{2}$. Înlocuind în prima ecuație rezultă $a^3 = -8 \Rightarrow a = -2$. Mai departe se află $m = -\frac{3a}{2} = 3$. Așadar, ecuația $x^3 + 3x^2 - 4 = 0$ are soluția dublă $x_1 = x_2 = -2$.

Exercitii propuse

1. Să se rezolve ecuaţia $x^3 - 6x^2 + (2m-1)x - m = 0,\ m \in \mathbb{R}$ştiind că admite soluţia 2;
2. Se consideră polinomul $f = X^3 - 2X^2 + aX + b \in \mathbb{R}[X]$. Să se determine $a,b \in \mathbb{R}$ ştiind că polinomul f admite rădăcinile 1 şi 2;

3. Se consideră polinomul $f = X^3 + aX^2 + bX + c \in \mathbb{Q}[X]$. Să se determine a, b, c ştiind că are rădăcinile $x_1 = x_2 = 1$şi $x_3 = -2$;

4. Să se rezolve ecuaţiile în $\mathbb{R}$:

a) $x - 6 = 0$; **b)** $2x - 3 = x + 5$; **c)** $x^2 = 36$;
d) $2x^2 = 128$; **e)** $x^2 - 8x + 12 = 0$; **f)** $-x^2 + 8x - 7 = 0$;
g) $x^3 - 1 = 0$; **h)** $x^3 - 27 = 0$; **i)** $x^3 + 8 = 0$;
j) $x^4 - 1 = 0$; **k)** $x^4 - 64 = 0$; **l)** $x^3 - 3x + 2 = 0$;
m) $x^3 - 3x - 2 = 0$; **n)** $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$; **o)** $x^3 - 5x^2 - 2x + 10 = 0$;
p) $x^4 - 6x^2 + 8x - 3 = 0$; **q)** $x^4 + x^3 + x^2 + 3x + 2 = 0$; **r)** $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$;
s) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$; **t)** $x^3 + 3x^2 - 6x - 8 = 0$; **u)** $x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12 = 0$;
v) $x^4 + 3x^3 - 6x - 4 = 0$; **x)** $x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12 = 0$; **y)** $x^5 - 4x^3 - x^2 + 4 = 0$;

5. Să se rezolve ecuaţiile bipătrate:

a) $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$; **b)** $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$; **c)** $3x^4 + 4x^2 + 1 = 0$;
d) $4x^4 - x^2 - 3 = 0$; **e)** $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$; **f)** $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$;

6. Să se afle rădăcinile polinoamelor :

a) $f = X^3 - 3X + 2$; **b)** $f = X^3 - 3X - 2$;
c) $f = X^3 - 6X^2 + 11X - 6$; **d)** $f = X^3 - 5X^2 - 2X + 10$;
e) $f = X^4 - 6X^2 + 8X - 3$; **f)** $f = X^4 + X^3 + X^2 + 3X + 2$;
g) $f = X^5 - 5X^4 + 5X^3 + 10X^2 - 20X + 8$;

7. Determinaţi ordinul de multiplicitate al rădăcinii indicate pentru polinoamele:

a) $X^4 - 2X^3 + 4X^2 - 6X + 3 = 0, \quad x_0 = 1$;
b) $X^4 + X^3 - 3X^2 - 5X - 2 = 0, \quad x_0 = -1$;
c) $X^5 + 6X^4 + 11X^3 + 2X^2 - 12X - 8 = 0, \quad x_0 = -2$;
d) $X^4 - 3X^3 + X^2 + 4 = 0, \quad x_0 = 2$;

8. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ ştiind că polinomul $f = X^3 - 4X^2 + aX + b$ admite rădăcina dublă x = 1 ;

9. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât polinomul $f = X^4 + aX^3 + bX^2 - 2X + 4$ să admită rădăcina dublă x= 2 ;

10*. Să se determine parametrii reali a şi b astfel încât polinomul $f = X^4 + (a-1)X^3 + (b+2)X^2 + X + c - 3$ să admită rădăcina triplă x=1.

11*. Determinaţi multiplicitatea rădăcinii indicate pentru polinoamele :

a) $f = X^5 - 5X^4 + 7X^3 - 2X^2 + 4X - 8$; $x_0 = 2$;
b) $f = X^6 - 6X^5 + 12X^4 - 9X^3 + 6X^2 - 12X + 8$. $x_0 = 2$;
c) $f = X^5 - 3X^4 - X^3 + 11X^2 - 12X + 4, \ x_0 = 1$;

12*. Să se arate că x = 1 este rădăcină multiplă de ordinul 2 pentru polinomul :

a) $f = X^{n+1} - X^{n-2} - 3X + 3$; **b)** $f = nX^{n+2} - (n+1)X^{n+1} + X$.

13*. Să se determine a şi b reali astfel încât x =1 să fie rădăcină dublă pentru polinomul : **a)** $f = aX^4 + bX^3 - 3$; **b)** $f = aX^{n+2} + bX^n + 2$.

3.2 Descompunerea polinoamelor

Definiţie

Fie K un corp comutativ şi $f \in K[X]$ un polinom astfel încât $grad(f) = n \geq 1$. Spunem că **f** este un **polinom reductibil peste K** dacă se scrie ca produsul unor polinoame de grad inferior cu coeficienţi în K. În caz contrar f se numeşte **polinom ireductibil peste K.**

Aşadar, **f se numeşte reductibil în inelul K[X] dacă există** $f_1, f_2 \in K[X]$ **a. î.** $f = f_1 \cdot f_2$, $grad(f_i) \langle n, \ \forall i \in \{1,2\}$.

Exemplu 1: **Să se descompună peste** $\mathbb{R}$ **polinoamele:**

a) $f = X^2 - 9$**;** **b)** $f = X^3 - 27$**;** **c)** $f = X^3 - 7X^2 + 10X$**.**

Rezolvare:

a) Putem utiliza formulele de calcul prescurtat. $f = X^2 - 9 = (X-3)(X+3)$;

b) $f = X^3 - 27 = (X-3)(X^2+3X+9)$;

c) $f = X^3 - 7X^2 + 10X = X(X^2 - 7X + 10) = X(X^2 - 5X - 2X + 10) = X\left[X(X-5) - 2(X-5)\right] =$
$= X(X-5)(X-2).$

Teoremă **Teorema fundamentală a algebrei**

Orice polinom cu coeficienţi complecşi de grad mai mare sau egal cu 1 are cel puţin o rădăcină complexă.

Teoremă **Fie K un corp şi f un polinom nenul din K[X]. Dacă** $x_1, x_2, x_3, ..., x_n \in K$ **sunt rădăcini distincte ale lui f, având ordinele de multiplicitate respectiv** $k_1, k_2, k_3, ..., k_n$**, atunci f se poate scrie sub forma** $f = (X - x_1)^{k_1} (X - x_2)^{k_2} (X - x_3)^{k_3} .....(X - x_n)^{k_n} \cdot g$**, unde** $g \in K[X]$**.**

Exemplu 2 :

a) Să se descompună în factori ireductibili peste $\mathbb{Q}$**, polinomul f=X⁴ + X³ -6X²-5X+5.**

Rezolvare:

Trebuie observat că f se poate scrie de forma f= $X^4 - 5X^2 + X^3 - 5X - X^2 + 5$ după care dând factor comun obţinem: f= $X^2(X^2-5) + X(X^2-5) - (X^2-5) =$

$= (X^2-5)(X^2+X-1)$. Cum X^2-5 şi X^2+X-1 sunt polinoame ireductibile peste $\mathbb{Q}$, rezultă că

f=$(X^2-5)(X^2+X-1)$ este o descompunere în factori ireductibili peste $\mathbb{Q}$.

b) Să se descompună în factori ireductibili în inelul $\mathbb{Z}_5[X]$ polinomul $f = X^4 + X^3 + \hat{3}X^2 + X + \hat{2}$.

Rezolvare: Se asociază polinomului **f** , funcţia polinomială $f(x) = x^4 + x^3 + \hat{3}x + x + \hat{2}$ şi se determină valorile lui f în fiecare punct **x** din Z_5 : f($\hat{0}$)=$\hat{2}$, $f(\hat{0}) = 2, f(\hat{1}) = \hat{3}, f(2) = \hat{0}, f(\hat{3}) = \hat{0}, f(4) = 4.$ Conform teoremei lui Bezout, se observă că x=$\hat{2}$ şi x=$\hat{3}$ sunt rădăcinile polinomului lui **f** iar pentru a determina descompunerea lui **f** în factori ireductibili vom aplica schema lui Horner, sau vom împărţi direct la polinomul (X-$\hat{2}$)(X-$\hat{3}$) . Cum restul împărţirii lui **f** la (X-$\hat{2}$)(X-$\hat{3}$) este $X^2 + X + \hat{2}$ care este un polinom ireductibil în $\mathbb{Z}_5[X]$ atunci **f** se descompune de forma: $f = (X - \hat{2})(X - \hat{3})(X^2 + X + \hat{2})$ sau $f = (X + \hat{3})(X + \hat{2})(X^2 + X + \hat{2})$ întrucât $-\hat{2} = \hat{3}$ şi $-\hat{3} = \hat{2}$.

Teoremă Orice polinom $f \in K[X]$ cu $grad(f) \geq 1$ se descompune în mod unic într-un produs finit de polinoame ireductibile peste K de forma $f = f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n$.

Teoremă Singurele polinoame ireductibile din $\mathbb{C}[X]$ sunt cele de gradul întâi.

Teoremă Dacă un polinom are rădăcini în corpul K atunci f este reductibil în K[X]. Reciproc nu este adevărat.

Exemplu 3 : Polinomul $f = X^4 + X^2 + \hat{1} \in \mathbb{Z}_5[X]$ este reductibil în $\mathbb{Z}_5[X]$ dar nu are rădăcini în $\mathbb{Z}_5$ deoarece admite descompunerea $f = X^4 + X^2 + \hat{1} = (X^2 + X + \hat{1})(X^2 - X + \hat{1})$ dar cele două polinoame nu au nicio rădăcină în $\mathbb{Z}_5$.

Activitate independentă		**Răspuns**
Se consideră polinomul $f = X^4 + X^2 + \hat{1} \in \mathbb{Z}_3[X]$. Să se arate că f se poate descompune de forma $f = \left(X^2 + 2\right)^2$, sau $f = (X + \hat{1})^2 (X + 2)^2$.		

Exercitii rezolvate

1. Să se descompună în factori ireductibili peste $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ polinoamele :

a) $f(X) = X^3 - 3X + 2$ **;** **b)** $f(X) = X^4 + 15X^2 - 16$ **;** **c)** $f(X) = X^3 + X^2 - 4X + 2$

Rezolvare :

a) $f(X) = X^3 - 3X + 2 = X^3 - X^2 + X^2 - X - 2X + 2 =$

$= X^2(X-1) + X(X-1) - 2(X-1) = (X-1)(X^2 + X - 2) =$

$= (X-1)(X+2)(X-1) = (X-1)^2(X+2)$ **-** descompunerea în factori ireductibili peste $\mathbb{Z}$**,** respectiv peste $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

b) $f(X)=X^4+15X^2-16=X^4-X^2+16X^2-16=$

$=X^2(X^2-1)+16(X^2-1)=(X-1)(X+1)(X^2+16)$ **-** descompunerea în factori ireductibili peste $\mathbb{Z}$**.** respectiv peste $\mathbb{Q},\mathbb{R}$.

f = $(X-1)(X+1)(X-4i)(X+4i)$ - descompunerea în factori ireductibili peste $\mathbb{C}$.

c) $f(X)=X^3+X^2-4X+2=X^3-X^2+2X^2-2X-2X+2=$

$=X^2(X-1)+2X(X-1)-2(X-1)=(X-1)(X^2+2X-2)$ -reprezintă descompunerea în factori ireductibili peste $\mathbb{Z},\mathbb{Q}$.

$f(X)=(X-1)(X+1-\sqrt{2})(X+1+\sqrt{2})$ - reprezintă descompunerea în factori ireductibili peste $\mathbb{R}$ respectiv $\mathbb{C}$.

2. Să se descompună în factori ireductibili în $\mathbb{C}[X]$ polinomul f = $2X^4+3X^3+X^2+X+1$.

Rezolvare:

Nu vom încerca să rezolvăm ecuaţia ci vom folosi metoda factorului comun, încercând astfel să grupăm termenii în aşa fel încât să se poată da factor comun mai departe:

f= $2X^3(X+1)+X^2(X+1)+X+1=$

$=(X+1)(2X^3+X^2+1)=$

$=(X+1)[X^2(X+1)+(X+1)(X^2-X+1)]=$

$=(X+1)^2(2X^2-X+1)=$

$=(X+1)^2\left(x-\frac{1-i\sqrt{7}}{4}\right)\left(x-\frac{1+i\sqrt{7}}{4}\right)$.

3. Să se arate că polinomul $f=X^5+X^2+\hat{1}\in\mathbb{Z}_2[X]$ este ireductibil peste $\mathbb{Z}_2$.

Rezolvare:

Cum $f(\hat{0})=f(\hat{1})=\hat{1}\neq\hat{0}\Rightarrow$că f nu poate avea în descompunerea sa factori de gradul întâi.

Să presupunem că f se poate descompune în produsul a două polinoame, atunci unul din ele va avea gradul doi iar celălalt gradul trei.

Atunci f va fi de forma $f=(X^3+aX^2+bX+\hat{1})(X^2+cX+\hat{1})$, deoarece coeficientul dominant al lui trebuie să fie 1 şi de asemenea termenul liber trebuie să fie 1.

După desfacerea parantezelor şi identificarea termenilor din membrul drept cu cei din membrul stâng rezultă:

$X^5+X^2+\hat{1}=X^5+(a+c)X^4+(ac+b+\hat{1})X^3+(a+bc+\hat{1})X^2+(b+c)X+\hat{1}\Rightarrow$

$\begin{cases}c+a=\hat{0}\\ac+b+\hat{1}=\hat{0}\\a+bc+\hat{1}=\hat{1}\\b+c=\hat{0}\end{cases}$ Din ecuaţiile a doua şi a treia rezultă că $(a+b)(c+\hat{1})=\hat{1}$. (*)

Din prima ecuaţie şi a patra rezultă: $a+b+2c=\hat{0}\Rightarrow a+b=\hat{0}$ şi înlocuind în ecuaţia (*) rezultă că $\hat{0}=\hat{1}$ ceea ce este o contradicţie. Rezultă că presupunerea făcută este falsă prin urmare, f este un polinom ireductibil în $\mathbb{Z}_2[X]$.

4. Să se descompună în factori ireductibili în $\mathbb{Z}_5[X]$ polinomul:

$f(X)=X^4+X^3+\hat{3}X^2+X+\hat{2}\in\mathbb{Z}_5[X]$.

Rezolvare:

Se asociază polinomului **f** , funcţia polinomială $f(x)=x^4+x^3+\hat{3}x+x+\hat{2}$ şi se determină valorile lui f în fiecare punct **x** din Z_5 : f($\hat{0}$)=$\hat{2}$, $f(\hat{0})=2, f(\hat{1})=\hat{3}, f(\hat{2})=\hat{0}, f(\hat{3})=\hat{0}, f(4)=4.$ Conform teoremei lui Bezout, se observă că x=$\hat{2}$ şi x=$\hat{3}$ sunt rădăcinile polinomului lui **f** iar pentru a determina descompunerea lui **f** în factori ireductibili vom aplica schema lui Horner, sau vom împărţi direct la polinomul (X-$\hat{2}$)(X-$\hat{3}$) . Cum restul împărţirii lui **f** la (X-$\hat{2}$)(X-$\hat{3}$) este $X^2+X+\hat{2}$ care este un polinom ireductibil în $\mathbb{Z}_5[X]$ atunci **f** se descompune de forma: $f=(X-\hat{2})(X-\hat{3})(X^2+X+\hat{2})$ sau $f=(X+\hat{3})(X+\hat{2})(X^2+X+\hat{2})$ întrucât -$\hat{2}$=$\hat{3}$ şi -$\hat{3}$=$\hat{2}$.

5. Să se descompună în factori ireductibili polinomul
$f(X)=X^4+X^3-6X^2-5X++5\in\mathbb{Z}[X]$ **peste** $\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R}$.

Rezolvare :

Observăm că polinomul f nu admite nicio rădăcină număr întreg prin urmare f nu admite factori liniari în descompunerea sa. Grupând termenii convenabil obţinem : $f(X)=(X^2-5)(X^2+X-1)\in\mathbb{Q}[X]$. Cum cei doi factori de gradul doi nu admit nicio rădăcină număr raţional, atunci aceasta este descompunerea în factori ireductibili ai lui f peste $\mathbb{Q}$.

După ce aflăm rădăcinile celor două polinoame de gradul doi, putem face afirmaţiile :

$f(X)=(X-\sqrt{5})(X+\sqrt{5})(X-\frac{-1-\sqrt{5}}{2})(X-\frac{-1+\sqrt{5}}{2})\in R[X]$ este descompunerea în factori ireductibili peste $\mathbb{R}$.

6. Se consideră polinomul $f=X^3+X+1\in\mathbb{R}[X]$, cu rădăcinile $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{C}$.

Să se calculeze $(2-x_1)(2-x_2)(2-x_3)$;

Rezolvare: Cum polinomul f se descompune de forma $f=(X-x_1)(X-x_2)(X-x_3)$rezultă că dacă în loc de X punem numărul 2 se obține tocmai produsul cerut. Prin urmare, $(2-x_1)(2-x_2)(2-x_3)=f(2)=11.$

7. Se consideră polinomul $f=X^3+1\in\mathbb{R}[X]$, cu rădăcinile $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{C}$.

Să se calculeze:

a) $(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)$**;** **b)** $x_1^6+x_2^6+x_3^6$**.**

Rezolvare:

a) Cum polinomul f se descompune de forma $f=(X-x_1)(X-x_2)(X-x_3)$rezultă că dacă în loc de X punem numărul -1 se obține tocmai produsul cerut după ce la fiecare paranteză se dă factor comun -1. Prin urmare, $f(-1)=(-1-x_1)(-1-x_2)(-1-x_3)=-(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)$. Pe de altă parte $f(-1)=0$, aşadar, $(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)=0.$

b) Din $x^3+1=0\Rightarrow x^3=-1\Rightarrow x_1^3=-1,x_2^3=-1,x_3^3=-1.$

Aşadar, $x_1^6 + x_2^6 + x_3^6 = \left(x_1^3\right)^2 + \left(x_2^3\right)^2 + \left(x_3^3\right)^2 = 1+1+1 = 3.$

8. Să se descompună în fracţii simple, fracţia : $\frac{2X+4}{(X-1)(X^2-7X+10)}$**.**

Rezolvare :

În general, dacă avem o fracţie de forma : $\frac{f(X)}{g(X)} = \frac{f(X)}{(X-a)(X-b)....(X-t)}$**,** unde cele n elemente a,b,c,…,t sunt distincte, iar f(X) este un polinom de grad mai mic decât n şi care nu se anulează pentru niciunul din numerele a,b,c,…,t, atunci descompunerea în fracţii simple este de forma : $\frac{f(X)}{g(X)} = \frac{A}{X-a} + \frac{B}{X-b} + ... + \frac{T}{X-t}$.

În cazul nostru, observăm că $X^2 - 7X + 10 = (X-2)(X-5)$, aşadar, $\frac{2X+4}{(X-1)(X-2)(X-5)} = \frac{A}{X-1} + \frac{B}{X-2} + \frac{C}{X-5}$. După ce aducem la acelaşi numitor, vom da valori lui X pentru a determina pe A, B, C.

$2X+2 = A(X-2)(X-5) + B(X-1)(X-5) + C(X-1)(X-2)$

$X \to 2 \Rightarrow 6 = -3B \Rightarrow B = -2;$

$X \to 1 \Rightarrow 4 = 4A \Rightarrow A = 1;$

$X \to 5 \Rightarrow 12 = 12C \Rightarrow C = 1;$ O dată aflate A, B, C obţinem descompunerea în fracţii simple: $\frac{2X+4}{(X-1)(X-2)(X-5)} = \frac{1}{X-1} - \frac{2}{X-2} + \frac{1}{X-5}$.

9*. Să se descompună în fracţii simple, fracţia : $\frac{2X+6}{(X-2)^3}$

Rezolvare :

În general, în cazul fracţiilor polinomiale de forma $\frac{f(X)}{g(X)}$, unde f este un polinom de grad mai mic ca n şi g(X) este un polinom de forma $(X-a)^n$, vom avea următoarea descompunere în fracţii simple : $\frac{f(X)}{g(X)} = \frac{f(X)}{(X-a)^n} = \frac{A}{X-a} + \frac{B}{(X-a)^2} + ... + \frac{T}{(X-a)^n}$.

În cazul nostru, scriem, $\frac{2X+6}{(X-2)^3} = \frac{A}{X-2} + \frac{B}{(X-2)^2} + \frac{C}{(X-2)^3}$.

După ce aducem la acelaşi numitor, se dă valori lui X :

$2X+6 = A(X-2)^2 + B(X-2) + C$

$X \to 2 \Rightarrow 10 = C$

$X = 0 \Rightarrow 6 = 4A - 2B + 10 \Rightarrow 2A - B = -2.$

$X = 1 \Rightarrow 8 = A - B + 10 \Rightarrow A - B = -2.$ Se obţin: **A=0 , B=2, C=10** şi descompunerea în fracţii simple este următoarea : $\frac{2X+6}{(X-2)^3} = \frac{2}{(X-2)^2} + \frac{10}{(X-2)^3}$.

Altfel, se putea face notaţia X-2=Y, în ideea de a scrie numărătorul în funcţie de numitor şi de a putea efectua împărţirea :

Cum 2X+6=2(X-2)+10, rezultă : $\frac{2X+6}{(X-2)^3}=\frac{2Y+10}{Y^3}=\frac{2}{Y^2}+\frac{10}{Y^3}$, adică tocmai relaţia la care s-a ajuns şi mai înainte.

Exercitii propuse

1. Să se arate că polinomul $f=X^4+4\in\mathbb{R}[X]$ se descompune de forma $f=(X^2-2X+2)(X^2+2X+2)$.

2. Să se arate că polinomul $f=X^4+1\in\mathbb{R}[X]$ se descompune de forma $f=(X^2-\sqrt{2}X+1)(X^2+\sqrt{2}X+1)$.

3. Să se arate că polinomul $f=X^3-2X^2-5X+6\in\mathbb{R}[X]$ se descompune de forma $f=(X-1)(X-3)(X+2)$.

4. Să se arate că polinomul $f=X^3-2X^2-7X-4\in\mathbb{R}[X]$ se descompune de forma $f=(X+1)^2(X-4)$.

5. Să se arate că polinomul $f=X^4-X^2-5X-12\in\mathbb{R}[X]$ se descompune de forma $f=(X^2+3)(X-2)(X+2)$.

6. Se consideră polinomul $f=2X^3-5X^2+X+1\in\mathbb{R}[X]$ cu rădăcinile $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{C}$.

a) Să se calculeze $(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)$.

b) Să se arate că $5(x_1^2+x_2^2+x_3^2)-(x_1+x_2+x_3)-3=2(x_1^3+x_2^3+x_3^3)$.

7. Să se descompună polinoamele peste $\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$.

a) X^2-5 **b**) X^2+1 **c**) $3X^2-6X$
d) $X^2-8X+15$ **e**) $5X^2-4X-1$ **f**) X^3-1
g) X^3+27 **h**) X^3-X^2+X-1 **i**) $X^3-2X^2-9X+18$
j) X^4+X^2+1 **k**) X^4-X^2+1 **l**) X^4-4X^2+3
m) X^4+X^3-X-1 **n**) $X^4+3X^3+3X^2+X$ **o**) X^6-1
p) X^8-1

8. Să se arate că următoarele polinoame sunt ireductibile în $\mathbb{Z}_5[X]$.

a) $f=X^2+2\in\mathbb{Z}_5[X]$; **b**) $f=X^2+2X+4\in\mathbb{Z}_5[X]$; **c**) $f=X^3+X+\hat{3}\in\mathbb{Z}_5[X]$.

9. Să se descompună în factori ireductibili în $\mathbb{Z}_3[X]$ polinoamele :

a) $f=X^3+2X^2+X+2\in\mathbb{Z}_3[X]$; **b**) $f=X^4+X^3+X^2+2X+\hat{1}\in\mathbb{Z}_3[X]$.

10. Pentru m= -1 , să se descompună polinomul $f=mX^3+X^2+X+m\in\mathbb{R}[X]$ în factori ireductibili în $\mathbb{R}[X]$.

11. Să se descompună polinomul $f=X^4-12X^2+35\in\mathbb{R}[X]$ în factori ireductibili în $\mathbb{R}[X]$.

12. Să se descompună polinomul $f=X^3-4X^2-8X+32\in\mathbb{R}[X]$ în factori ireductibili în $\mathbb{R}[X]$.

13. Pentru $a=2$, să se descompună polinomul $f=X^3+2X^2+aX+\hat{1}\in\mathbb{Z}_3[X]$ în factori ireductibili peste $\mathbb{Z}_3$.

14. Pentru $a=2$, să se descompună $f=X^3+(2a+1)X+a+4\in\mathbb{Z}_6[X]$ în factori ireductibili peste $\mathbb{Z}_6$.

15*. Fie $f=X^6+mX+\hat{5}\in\mathbb{Z}_7[X]$. Să se arate că f este reductibil peste $\mathbb{Z}_7$, $\forall m\in\mathbb{Z}_7$.

3.3 Relaţiile lui Viète

Relaţiile lui Viète în cazul n=2;

Aceste relaţii permit aflarea rădăcinilor trinomului de gradul al doilea $f = aX^2 + bX + c$ cu ajutorul relaţiilor ce se stabilesc între rădăcinile şi coeficienţii polinomului.

Aşadar, fie K un corp comutativ ($K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ *sau* $\mathbb{Z}_p$) $f = aX^2 + bX + c \in K[X], a_2 \neq 0,$ cu rădăcinile x_1, x_2. Atunci, **f** se poate scrie $f = a(X - x_1)(X - x_2) = a[X^2 - (x_1 + x_2)X + x_1x_2]$. De aici rezultă:

$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$, **f** se mai poate scrie şi sub forma $f = a(X^2 - SX + P), a \in K \setminus \{0\}$,

unde $S = x_1 + x_2$, şi $P = x_1x_2$.

În exerciţii este utilă şi formula: $\boxed{x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}$

Deci, cu ajutorul **relaţiilor lui Viète**, dacă cunoaştem coeficienţii trinomului de gradul al doilea, putem afla uşor suma respectiv produsul rădăcinilor polinomului şi prin urmare, fiecare rădăcină în parte; Reciproc, dacă cunoaştem rădăcinile polinomului de gradul doi, atunci putem obţine forma algebrică a acestuia.

Relaţiile lui Viète în cazul n=3;

Pentru polinomul de gradul trei, $f = aX^3 + bX^2 + cX + d \in K[X], a \neq 0$, fie x_1, x_2, x_3 rădăcinile acestuia, şi următoarele forme de scriere a sa:

$$f = a(X - x_1)(X - x_2)(X - x_3) = a[X^3 - (x_1 + x_2 + x_3)X^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) - x_1x_2x_3].$$

De aici, obţinem **relaţiile lui Viète**:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 = \dfrac{c}{a} \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\dfrac{d}{a} \end{cases}$$

f se mai poate scrie şi sub forma $f = a(X^3 - S_1X^2 + S_2X - S_3), a \in K \setminus \{0\}$, unde

$S_1 = x_1 + x_2 + x_3$,

$S_2 = x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3$,

$S_3 = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$

În exerciţii sunt utile şi formulele:

1. $\boxed{x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)}$;

2. $\boxed{x_1^3+x_2^3+x_3^3=(x_1+x_2+x_3)^3-3(x_1+x_2+x_3)(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)+3x_1x_2x_3}$ sau

3. $\boxed{x_1^3+x_2^3+x_3^3=(x_1+x_2+x_3)(x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_1x_2-x_2x_3-x_1x_3)+3x_1x_2x_3}$

Exemplu : Pentru polinomul $f\in\mathbb{R}[X],\ f(X)=X^3+2X^2-3X+1$ să se scrie relaţiile lui Viète şi să se calculeze sumele : $\sum_{i=1}^{3}x_i^2$; $\sum_{i=1}^{3}x_i^3$ unde x_1,x_2,x_3 sunt rădăcinile polinomului.

Rezolvare :

$$\sum_{i=1}^{3}x_i^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)=(-2)^2-2(-3)=4+6=10$$

$$\sum_{i=1}^{3}x_i^3=x_1^3+x_2^3+x_3^3=(x_1+x_2+x_3)^3-3(x_1+x_2+x_3)(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)+3x_1x_2x_3=$$

= -8-3(-2)(-3) +3(-1) = -8 -18 -3 = -29 ;

Relaţiile lui Viète în cazul n=4;

Fie $f=aX^4+bX^3+cX^2+dX+e\in K[X], a\neq 0$ şi x_1,x_2,x_3,x_4 rădăcinile lui f. Atunci, din identitatea $f=a(X-x_1)(X-x_2)(X-x_3)(X-x_4)$ după desfacerea parantezelor se obţine:

$f=a[X^2-(x_1+x_2)X+(x_1x_2)][X^2-(x_3+x_4)X+x_3x_4]=$

$=a[X^4-(x_1+x_2+x_3+x_4)X^3+(x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4)X^2-$

$(x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4)X+x_1x_2x_3x_4]$ şi după identificarea coeficienţilor din cei doi membri rezultă relaţiile lui **Viète.**

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=-\dfrac{b}{a} \\ x_1\cdot x_2+x_1\cdot x_3+x_1\cdot x_4+x_2\cdot x_3+x_2\cdot x_4+x_3\cdot x_4=\dfrac{c}{a} \\ x_1\cdot x_2\cdot x_3+x_1\cdot x_2\cdot x_4+x_1\cdot x_3\cdot x_4+x_2\cdot x_3\cdot x_4=-\dfrac{d}{a} \\ x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4=\dfrac{e}{a} \end{cases}$$

Reciproc**,** polinomul de gradul patru cu rădăcinile x_1,x_2,x_3,x_4 se mai poate scrie şi sub forma $f=a(X^4-S_1X^3+S_2X^2-S_3X+S_4), a\in K\setminus\{0\}$, unde

$S_1=x_1+x_2+x_3+x_4$,

$S_2=x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4$,

$S_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4$

$S_4 = x_1x_2x_3x_4$

Relaţiile lui Viète se scriu convenabil şi astfel:

$$\begin{cases} (x_1+x_2)+(x_3+x_4) = -\dfrac{b}{a} \\ (x_1+x_2)(x_3+x_4)+x_1\cdot x_2+x_3\cdot x_4 = \dfrac{c}{a} \\ (x_1+x_2)x_3x_4 + x_1\cdot x_2\cdot(x_3+x_4) = -\dfrac{d}{a} \\ (x_1\cdot x_2)\cdot(x_3\cdot x_4) = \dfrac{e}{a} \end{cases}$$

Activitate independentă		**Răspuns**
Se consideră polinomul $f = X^3+3X^2-X+m \in \mathbb{R}[X]$. **Să se determine** $m \in \mathbb{R}$ **astfel încât rădăcinile** x_1, x_2, x_3 **să verifice relaţia** $x_1+x_2 = x_3-1$**.**		$m = -3$

Exercitii rezolvate

1. Se consideră polinomul $f(X) = X^2+X+1 \in \mathbb{C}[X]$ cu rădăcinile $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$.

a) Să se calculeze $x_1+x_2+x_1\cdot x_2$ **;**

b) Să se determine restul împărţirii polinomului X^3-1 **la f ;**

c) Să se calculeze suma $1+x_1+x_1^2+x_1^3+....+x_1^{21}$ **unde** x_1 **este rădăcina polinomului f ;**

Rezolvare :

a) Conform relaţiilor lui Viete, $x_1+x_2+x_1\cdot x_2 = -1+1 = 0$;

b) Observăm că $X^3-1 = (X-1)(X^2+X+1)$, rezultând că restul este polinomul nul.

c) Asociem polinomului ecuaţia de gradul al doilea $x^2+x+1=0$ cu soluţiile x_1, x_2.

Cum x_1 verifică ecuaţia dată rezultă $x_1^2+x_1+1=0$. Atunci, $1+x_1+x_1^2+x_1^3+....+x_1^{21} =$

$= (1+x_1+x_1^2)+x_1^3(1+x_1+x_1^2)+...x_1^{18}(1+x_1+x_1^2)+x_1^{21} = x_1^{21} = \left(x_1^3\right)^{21} = 1$ deoarece din punctul b)

$X^3-1 = (X-1)(X^2+X+1)$ rezultă că x_1 este soluţie şi pentru ecuaţia

$X^3-1 = 0 \Rightarrow X^3 = 1 \Rightarrow x_1^3 = 1$

2. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} x_1 & x_3 & x_2 \\ x_2 & x_1 & x_3 \\ x_3 & x_2 & x_1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$ **unde** x_1, x_2, x_3 **sunt rădăcinile ecuaţiei** $x^3-3x^2+3x+7=0$**. Să se arate că A nu este inversabilă .**

Rezolvare :
Pentru a arăta că A nu este inversabilă este suficient să arătăm că det(A)=0.
$\det(A) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1x_2x_3$. Înlocuind x_1, x_2, x_3 în ecuaţia dată, după ce însumăm relaţiile rezultă : $\sum_{i=1}^{3} x_i^3 = 3\sum_{i=1}^{3} x_i^2 - 3\sum_{i=1}^{3} x_i - 21 = 3(3^2 - 2\cdot 3) - 3\cdot 3 - 21 = -21$. Atunci, $\det(A) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1x_2x_3 = -21 - 3\cdot(-7) = 0$ adică A nu este inversabilă.

Altfel, se putea folosi formula : $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz)$.

3. Se consideră determinantul $\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$**, unde** $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ **sunt soluţiile**

ecuaţiei x^3 - 4x+3=0.
a) Să se calculeze $x_1 + x_2 + x_3$;
b) Să se arate că $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -9$;
c) Să se calculeze valoarea determinatului Δ**.**
Rezolvare:
a) Conform relaţiilor lui Viete, rezultă $x_1 + x_2 + x_3 = 0$;
b) Cum $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ sunt soluţiile ecuaţiei x^3 -4x+3=0 atunci verifică această ecuaţie:

$$x_1^3 = 4x_1 - 3$$
$$x_2^3 = 4x_2 - 3$$
$$x_3^3 = 4x_3 - 3$$

$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 4(x_1 + x_2 + x_3) - 9$ sau $S_3 = 4S_1 - 9$. Rezultă $S_3 = -9$, unde $S_3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$.

c) Cum $\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix} = 3x_1x_2x_3 - (x_1^3 + x_2^3 + x_3^3)$, rezultă $\Delta = -9 - (-9) = 0$.

4. Se consideră determinantul $\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$**, unde** $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ **sunt soluţiile**

ecuaţiei x^3 - 5x^2+2x+1=0.
a) Să se calculeze $x_1 + x_2 + x_3$;
b) Să se calculeze $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.
c) Să se calculeze valoarea determinatului Δ**.**
Rezolvare:
a) Conform relaţiilor lui Viete, rezultă $x_1 + x_2 + x_3 = 5$;
b) Se cunoaşte formula $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$ s
de unde rezultă că $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 5^2 - 2\cdot 2 = 25 - 4 = 21$.

c) Cum $\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix} = 3x_1x_2x_3 - (x_1^3 + x_2^3 + x_3^3)$, rezultă

$\Delta = 3\cdot(-1) - (5S_2 - 2S_1 - 3) = 3\cdot(-1) - (5\cdot 21) - 2\cdot 5 - 3 = -3 - 92 = -95.$

5. Se dă polinomul $f = X^3 - 2X^2 - X + 3 \in \mathbb{R}[X]$ cu rădăcinile x_1 , x_2, x_3 . Se cere :

a) Să se calculeze $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$;

b) Să se calculeze $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$;

c) Să se calculeze determinantul $\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$ unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile ecuaţiei f(x)=0;

d) Să se scrie un polinom de gradul trei având rădăcinile

$y_1 = x_2x_3;\ y_2 = x_1x_3;\ y_3 = x_1x_2$ **.**

Rezolvare : **a**) Mai întâi se scriu relaţiile lui Viete pentru polinomul f.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1\cdot x_2 + x_1\cdot x_3 + x_2\cdot x_3 = -1 \\ x_1\cdot x_2\cdot x_3 = -3 \end{cases}$$ de unde se calculează

$$\sum_{i=1}^{3} x_i^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3) = 2^2 - 2(-1) = 4 + 2 = 6\,.$$

b) $\sum_{i=1}^{3} x_i^3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = (x_1 + x_2 + x_3)^3 - 3(x_1 + x_2 + x_3)(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3) + 3x_1x_2x_3 = 5$

Ultima sumă se mai putea calcula uşor utilizând faptul că cele trei rădăcini verifică ecuaţia polinomială asociată de unde însumând relaţiile se obţinea valoarea respectivă.

c) Valoarea determinantului este egală cu $\Delta = 3x_1x_2x_3 - (x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) = 3\cdot(-3) - 5 = -14.$

d) Polinomul cu rădăcinile $y_1 = x_2x_3;\ y_2 = x_1x_3;\ y_3 = x_1x_2$ are forma

$g = X^3 - AX^2 + BX - C$ unde

$$\begin{cases} A = y_1 + y_2 + y_3 = x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = -1 \\ B = y_1\cdot y_2 + y_1\cdot y_3 + y_2\cdot y_3 = x_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3) = -6 \\ C = y_1\cdot y_2\cdot y_3 = (x_1x_2x_3)^2 = 9 \end{cases}$$

Aşadar, $g = X^3 + X^2 - 6X - 9$.

6. Se consideră ecuaţia $x^3 - 3x^2 + x - 1 = 0$ cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$. Să se scrie ecuaţia în y care are rădăcinile:

a) $y_1 = x_2 + x_3,\ y_2 = x_1 + x_3,\ y_3 = x_1 + x_2$ **;**

b) $y_1 = x_2\cdot x_3,\ y_2 = x_1\cdot x_3,\ y_3 = x_1\cdot x_2$ **;**

c) $y_1 = -x_1 + x_2 + x_3,\ y_2 = -x_2 + x_1 + x_3,\ y_3 = -x_3 + x_1 + x_2$

d) $y_1 = 1 + \frac{1}{x_1},\ y_2 = 1 + \frac{1}{x_2},\ y_3 = 1 + \frac{1}{x_3}$ **;**

e) $y_1 = 2x_1 + x_2 + x_3,\ y_2 = x_1 + 2x_2 + x_3,\ y_3 = x_1 + x_2 + 2x_3$**;**

f) $y_1 = x_1^2,\ y_2 = x_2^2,\ y_3 = x_3^2$**.**

Rezolvare:

a) Cum $y_1 + x_1 = x_1 + x_2 + x_3,\ y_2 + x_2 = x_1 + x_2 + x_3,\ y_3 + x_3 = x_1 + x_2 + x_3$, şi din relaţiile lui Viete se cunoaşte că $x_1 + x_2 + x_3 = 3 \Rightarrow$ se efectuează notaţia $y + x = 3 \Rightarrow x = 3 - y$ după care se înlocuieşte în ecuaţia dată în x şi se obţine o ecuaţie în y, ecuaţie ce are rădăcinile y_1, y_2, y_3:

$(3-y)^3 - 3(3-y)^2 + 3 - y - 1 = 0 \Rightarrow y^3 - 6y^2 + 10y - 2 = 0$;

b) Din $y_1 \cdot x_1 = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3,\ y_2 \cdot x_2 = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3,\ y_3 \cdot x_3 = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$ şi din relaţiile lui Viete $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 1 \Rightarrow$ se efectuează notaţia $y = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{y}$ şi se înlocuieşte în ecuaţia dată în x şi se obţine ecuaţia în y care are rădăcinile y_1, y_2, y_3:

$\left(\frac{1}{y}\right)^3 - 3\left(\frac{1}{y}\right)^2 + \frac{1}{y} - 1 = 0 \Rightarrow y^3 - y^2 + 3y - 1 = 0$;

c) Din $y_1 + x_1 = -x_1 + x_1 + x_2 + x_3,\ y_2 + x_2 = -x_2 + x_1 + x_2 + x_3,\ y_3 + x_3 = -x_3 + x_1 + x_2 + x_3$ şi din relaţiile lui Viete $x_1 + x_2 + x_3 = 3 \Rightarrow$ se efectuează notaţia

$y + x = -x + 3 \Rightarrow y = -2x + 3 \Rightarrow x = \frac{3-y}{2}$

Rezultă ecuaţia : $\left(\frac{3-y}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{3-y}{2}\right)^2 + \left(\frac{3-y}{2}\right) - 1 = 0$, etc.

d) Se efectuează notaţia $y = 1 + \frac{1}{x}$;

e) Se efectuează notaţia $y = x + 3$;

f) Se folosesc relaţiile lui Viete:

$$A = \sum_{i=1}^{3} y_i = \sum_{i=1}^{3} x_i^3 = \left(\sum_{i=1}^{3} x_i\right)^2 - 2\sum_{i=1}^{3} x_i x_j = 3^2 - 2 \cdot 1 = 7;$$

$$B = \sum_{i=1}^{3} y_i y_j = \left(x_1 x_2\right)^2 + \left(x_1 x_3\right)^2 + \left(x_2 x_3\right)^2 = \left(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3\right)^2 - 2x_1 x_2 x_3 (x_1 + x_2 + x_3) = -1$$

$C = y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 = (x_1 x_2 x_3)^2 = 1$.

Ecuaţia în y are forma: $y^3 - Ay^2 + By - C = 0 \Rightarrow y^3 - 7y^2 - y - 1 = 0$

7. Să se rezolve ecuaţia $X^3 - 6X^2 + aX + 8 = 0$ şi să se determine $a \in \mathbb{R}$ ştiind că soluţiile ecuaţiei sunt în progresie aritmetică

Rezolvare:

Fie x_1, x_2, x_3 soluţiile ecuaţiei luate în progresie aritmetică. Atunci, le putem lua de forma, $x_1 = u - v$, $x_2 = u$, $x_3 = u + v$ unde $u, v \in \mathbb{R}$. Din relaţiile lui Viete se obţin următoarele relaţii:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{3} x_i = u - v + u + u + v = 6 & \Rightarrow 3u = 6 \Rightarrow u = 2 \\ \sum_{1 \le i < j \le 3} x_i x_j = (u - v)u + u(u + v) + u^2 - v^2 = a & \\ x_1 x_2 x_3 = (u^2 - v^2)u = -8 & \Rightarrow (4 - v^2)2 = -8 \Rightarrow \end{cases}$$

$\Rightarrow v^2 = 8 \Rightarrow v = \pm 2\sqrt{2}$. Atunci, soluţiile ecuaţiei sunt:

$$\begin{cases} x_1 = 2 - 2\sqrt{2} \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 2 + 2\sqrt{2} \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} x_1 = 2 + 2\sqrt{2} \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 2 - 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Pentru x = 2 se obţine 8-24+2a+8= 0 de unde **a = 4**.

8. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ şi să se rezolve ecuaţia $2x^3-21x^2+ax-54=0$, ştiind că soluţiile ecuaţiei sunt în progresie geometrică.

Rezolvare:

Dacă soluţiile unei ecuaţii de gradul trei sunt în progresie geometrică atunci pentru a lucra simplificat vom face următoarele notaţii:

$x_1 = \frac{u}{v};\ x_2 = u;\ x_3 = u \cdot v$ unde $u, v \in R.$ În continuare, se aplică Relaţiile lui Viete:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{3} x_i = \frac{21}{2} & \Leftrightarrow \frac{u}{v} + u + u \cdot v = \frac{21}{2} \\ \sum_{1 \le i < j \le 3} x_i x_j = \frac{a}{2} & \\ x_1 x_2 x_3 = \frac{54}{2} & \Leftrightarrow \frac{u}{v} \cdot u \cdot uv = \frac{54}{2} \Rightarrow u = 3 \end{cases}$$

S-a găsit astfel că $x_2=3$, prin urmare 3 verifică ecuaţia dată, de unde se obţine că a= 63 iar pentru a afla celelalte soluţii, se înlocuiesc $x_1 = \frac{3}{v};\ x_2 = 3;\ x_3 = 3v$ în prima din relaţiile lui Viete: $\frac{3}{v} + 3 + 3v = \frac{21}{2} \Leftrightarrow 2v^2 - 5v + 2 = 0$ de unde se obţin valorile $v_1 = \frac{1}{2};\ v_2 = 2.$ Pentru ambele valori, soluţiile ecuaţiei sunt: $x_1 = \frac{3}{2};\ x_2 = 3;\ x_3 = 6.$

Exercitii propuse

1. Să se determine suma rădăcinilor polinomului f în cazurile:

a) $f = 3X^2 - 9X + 1 \in \mathbb{Z}[X]$;

b) $f = 2X^3 - \frac{2}{3}X^2 + 5x - 2 \in \mathbb{Q}[X]$;

c) $f = 3X^3 - X + 5 \in \mathbb{Z}[X]$;

d) $f = 8X^4 + 2X^3 - \sqrt{5}X + \sqrt{2} \in \mathbb{R}[X]$;

2. Se consideră polinomul $f = X^3 - 4X^2 + mX + 3 \in \mathbb{R}[X]$. Știind că $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 8$ să se arate că m = 4.

3. Se consideră polinomul $f = X^4 - 3X^2 + 5 \in \mathbb{R}[X]$ cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$. Să se calculeze $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$.

4. Se consideră polinomul $f = X^4 + mX^3 - 2X^2 \in \mathbb{R}[X]$ cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$.

a) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3$;

b) Pentru m = -3 , să se arate că

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = 3(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3) + 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2).$$

5. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ ştiind că suma a două rădăcini ale ecuaţiei $2x^3 - 4x^2 - 7x + a = 0$ este egală cu 1;

6. Fie ecuaţia $x^3 - 6x^2 + x + 2 = 0$ cu soluţiile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$. Să se calculeze expresia $E = \frac{x_2 + x_3}{x_1} + \frac{x_1 + x_3}{x_2} + \frac{x_1 + x_2}{x_3}$;

7. Să se rezolve ecuaţia $x^3 + ax^2 - 3x - 6 = 0$ ştiind că produsul a două rădăcini este -3;

8. Să se calculeze determinantul $d = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$ ştiind că x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului $f \in \mathbb{R}[X]$:

a) $f = X^3 - 2X + 1$; **b)** $f = X^3 - 3X^2 + 4X + 1$; **c)** $f = X^3 + 2X - 3$;

d) $f = X^3 + 4X^2 - 2$; **e)** $f = 2X^3 - 4X^2 + 6X - 3$; **f)** $f = 3X^3 - 6X^2 - 3$;

g) $f = 3X^3 - 6X^2 + 6X - 3$; **h)** $f = 2X^3 - 4X^2 - 6X - 2$; **i)** $f = 2X^3 - 4X^2 + 8X - 6$;

9. Fie x_1, x_2, x_3 soluţiile ecuaţiei $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = m + 2$

10. Se consideră ecuația $x^3 + x^2 + 2x + 1 = 0$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3. Să se arate că $(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2 + 4(x_1 + x_2 + x_3) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$.

11. Se consideră ecuația $x^3 + 2x + 1 = 0$ cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$. Să se calculeze suma:

$$\frac{x_1^2 + 2x_1}{x_2 x_3} + \frac{x_2^2 + 2x_2}{x_1 x_3} + \frac{x_3^2 + 2x_3}{x_1 x_2}.$$

12. Să se determine $a, b, c \in \mathbb{R}$ ştiind că polinomul $f = X^4 + 3X^3 + aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}[X]$ admite rădăcina triplă $x = -1$;

13. Se dă polinomul $f = X^3 - 2X^2 + X + 1$. Să se calculeze suma $x_1^5 + x_2^5 + x_3^5$ unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

14. Fie polinomul $f = X^3 + 3X^2 - 5X + 1$ având rădăcinile x_1, x_2, x_3. Să se determine polinomul g de gradul 3 care are rădăcinile: $y_1 = x_2 x_3$, $y_2 = x_3 x_1$, $y_3 = x_1 x_2$.

15. Se consideră ecuaţia $x^3+3x^2-4x+1=0$ cu rădăcinile $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{C}$. Să se scrie ecuaţia în y care are rădăcinile:

a) $y_1=x_2+x_3,\ y_2=x_1+x_3,\ y_3=x_1+x_2$**;**

b) $y_1=x_2\cdot x_3,\ y_2=x_1\cdot x_3,\ y_3=x_1\cdot x_2$**;**

c) $y_1=-x_1+x_2+x_3,\ y_2=-x_2+x_1+x_3,\ y_3=-x_3+x_1+x_2$

d) $y_1=1+\frac{1}{x_1},\ y_2=1+\frac{1}{x_2},\ y_3=1+\frac{1}{x_3}$**;**

e) $y_1=2x_1+x_2+x_3,\ y_2=x_1+2x_2+x_3,\ y_3=x_1+x_2+2x_3$**;**

f) $y_1=x_1^2,\ y_2=x_2^2,\ y_3=x_3^2$**.**

16. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ şi să se rezolve ecuaţiile date ştiind că au rădăcinile în progresie aritmetică:

a) $x^3-3x^2-mx+8=0$**;** **b)** $x^3-3x^2-13x+m=0$**;** **c)** $x^3-3x^2+mx+1=0$**;**

d) $x^3-9x^2+mx-15=0$**;** **e)** $x^3+3x^2-6x-m=0$**;** **f)** $x^3-3x^2-2x+m=0$**.**

17. Se consideră ecuaţia $x^{2012}+3x-1=0$ cu rădăcinile $x_1,x_2,.....,x_{2012}\in\mathbb{C}$. Să se calculeze suma $S=\sum_{i=1}^{2012}\frac{1}{x_i}$;

18. Să se determine suma rădăcinilor polinomului $f=(X-2)^{2015}+(X+2)^{2015}\in\mathbb{R}[X]$.

19. Se consideră polinomul $f=X^2+X+1\in\mathbb{R}[X]$, cu rădăcinile $x_1,x_2\in\mathbb{C}$.

Să se calculeze $x_1^{2015}+x_2^{2015}$.

21. Se consideră polinomul $f=X^3+2X^2+mX+6\in\mathbb{R}[X]$.

a) Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât f să fie divizibil cu polinomul X + 2 ;

b) Pentru m = 3 să se determine câtul şi restul împărţirii lui f la polinomul X-3 ;

c) Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât f să verifice relaţia

$(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2+(x_1+x_3)^2=6$;

3.4 Polinoame cu coeficienți în $\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R}$

- **Polinoame cu coeficienţi întregi**

Teoremă Fie $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + ... + a_nX^n$ un polinom cu coeficienţi întregi; Dacă f admite ca rădăcină un număr întreg a, atunci aceasta se află printre divizorii termenului liber, a_0.

Teoremă **Fie** $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + ... + a_nX^n$ **un polinom cu coeficienţi întregi; Dacă f admite ca rădăcină un număr raţional** $\frac{p}{q}, q \neq 0,\ (p,q) = 1$**, atunci** $p|a_0$ **şi** $q|a_n$ **.**

Observaţii:

1) Pentru polinoamele cu cel puţin un coeficient care nu este număr întreg, teorema nu mai este valabilă;
2) Dacă un polinom cu coeficienţi întregi are coeficientul dominant $a_n = \pm 1$, şi dacă nu are rădăcini întregi, atunci el nu are nici rădăcini raţionale;
Observaţia 2) poate fi enunţată şi altfel: Dacă un polinom monic cu coeficienţi întregi admite o rădăcină raţională, atunci aceasta este număr întreg.
Exemplu: Să se determine rădăcinile întregi ale polinomului $f = X^4 - X^3 - 7X^2 + X + 6$.

Rezolvare**:**

	1	**-1**	**-7**	**1**	**6**
1	**1**	**0**	**-7**	**-6**	**0**
-1	**1**	**-1**	**-6**	**0**	
3	**1**	**2**	**0**		
-2	**1**	**0**			

Aplicând **schema lui Horner**, se caută rădăcinile întregi printre divizorii termenului liber şi anume 6; Se găsesc soluţiile: -2; -1; 1; 3.

- **Polinoame cu coeficienţi raţionali**

Teoremă **Fie** $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + ... + a_nX^n$ **un polinom cu coeficienţi raţionali; Dacă f admite ca rădăcină un număr iraţional de forma**

$a+\sqrt{b},\ a,b\in\mathbb{Q},\ b\rangle 0,\ \sqrt{b}\notin\mathbb{Q}$**, atunci admite ca rădăcină şi conjugata acesteia,** $a-\sqrt{b}$**, ambele rădăcini având acelaşi ordin de multiplicitate.**

Observaţie: Rădăcinile pot fi şi de forma $a+b\sqrt{c}, a-b\sqrt{c}$, cu $a,b,c\in\mathbb{Q},\ c\rangle 0,\ \sqrt{c}\notin\mathbb{Q}$.

- **Polinoame cu coeficienţi reali**

Teoremă **Fie** $f=a_0+a_1X+a_2X^2+a_3X^3+.....+a_nX^n$ **un polinom cu coeficienţi reali; Dacă f admite ca rădăcină un număr complex de forma** $a+ib,\ a,b\in\mathbb{R},$ **atunci admite ca rădăcină şi conjugata acesteia,** $a-ib$**, ambele rădăcini având acelaşi ordin de multiplicitate.**

Observaţii:

1) Orice polinom cu coeficienţi reali, de grad impar, are cel puţin o rădăcină reală;

2) Pentru polinoamele cu cel puţin un coeficient din $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, teorema nu mai rămâne valabilă.

Teoremă **Fie** $f(X)\in\mathbb{R}[X]$ **un polinom cu coeficienţi reali; Dacă funcţia polinomială asociată are proprietatea că** $f(x)\rangle 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ **rezultă că f nu are nicio rădăcină reală.**

Exemplu: Fie $f(X)=X^4-2X^2+2\in\mathbb{R}[X]$. Să se arate că f nu are rădăcini reale.

Rezolvare: $f(x)=\left(x^2-1\right)^2+1\geq 1\Rightarrow$ f nu are nicio rădăcină reală.

Exercitii rezolvate

1. Să se determine un polinom cu coeficienţi reali de grad minim ştiind că admite rădăcina dublă -2 şi rădăcina simplă i.

Rezolvare: Dacă polinomul admite rădăcina dublă **-2** şi rădăcina simplă **i** atunci polinomul se scrie f=(x-2)(x-2)(x-i), rezultă $f=x^3-ix^2-4x+4i$

2. Să se determine rădăcinile raţionale ale polinomului
$f=4X^4+4X^3+3X^2-X-1\in\mathbb{R}[X]$**.**

Rezolvare:

$$\begin{array}{r|cccc|c} & 4 & 4 & 3 & -1 & -1 \\ \hline -\frac{1}{2} & 4 & 2 & 2 & -2 & 0 \end{array} \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{2}\ .$$

$$\begin{array}{r|\underbrace{4\quad 4\quad 4}_{4X^2+4X+4=0}|c} \frac{1}{2} & & 0 \end{array} \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2}$$

Celelalte rădăcini, care sunt complexe se determină rezolvând ecuația

$4X^2 + 4X + 4 = 0 \Rightarrow x_{3,4} = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

3. Dacă ecuația $x^3 - 6x^2 + 21x - 26 = 0$ admite rădăcina $x_1 = 2 - 3i$, să se calculeze $x_2 \cdot x_3$.

Rezolvare Ecuația admite și rădăcina conjugată $x_2 = 2 - 3i$ și cum $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 26$, rezultă că $x_3 = 2$. Așadar, $x_2 \cdot x_3 = 4 + 6i$.

4. Să se arate că polinomul $f = X^3 + X^2 + X - 3 \in \mathbb{R}[X]$ nu are toate rădăcinile reale.

Rezolvare: Se descompune polinomul în factori de forma

$f = X^3 + X^2 + X - 3 = X^3 - 1 + X^2 - 1 + X - 1 =$

$= (X-1)(X^2 + 2X + 3)$. Cum discriminantul ecuației de gradul doi asociată trinomului de gradul doi este negativ, rezultă că polinomul nu are toate toate rădăcinuile reale.

Altfel, se pot folosi relațiile lui Viete,

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = S_1^2 - 2S_2 = (-1)^2 - 2 \cdot 1 = 1 - 2 = -1 \langle 0$. Cum suma pătratelor rădăcinilor este negativă, rezultă că polinomul are și rădăcini complexe.

5. Fie polinomul $f = X^3 - 2X^2 + mX + 1 \in \mathbb{R}[X]$. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât polinomul f să nu admită toate rădăcinile reale.

Rezolvare:

Pentru a demonstra că nu toate rădăcinile polinomului sunt reale, e suficient să impunem condiția $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \langle 0$, de unde rezultă $4 - 2m \langle 0 \Rightarrow m \rangle 2$. Așadar, polinomul nu are toate rădăcinile reale pentru $m \in (2; \infty)$.

6. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ știind că polinomul $f = X^3 - 3X^2 + 3X + m \in \mathbb{R}[X]$ are rădăcini reale.

Rezolvare: Din

$(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_1 - x_3)^2 = 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = 2(3^2 - 2 \cdot 3) - 2 \cdot 3 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 1$ deoarece $\sum_{i=1}^{3} x_i = 3$.

Pentru că x=1 este rădăcină a polinomului, rezultă $f(1) = 0 \Rightarrow m = -1$.

7. Să se rezolve ecuaţia $x^4-6x^3+8x^2-6x-9=0$, ştiind că admite rădăcina $x_1=2-\sqrt{7}$.

Rezolvare: Acest exerciţiu presupune cunoaşterea teoremei cu privire la existenţa rădăcinilor reale conjugate pentru polinoamele cu coeficienţi raţionali. Dacă $f(x)= x^4-6x^3+8x^2-6x-9 \in Q[X]$ admite rădăcina $x_1=2-\sqrt{7}$, atunci, admite şi conjugata acesteia $x_2=2+\sqrt{7}$, întrucât este un polinom cu coeficienţi raţionali.

Mai departe se caută, fie să se împartă polinomul dat, la trinomul format cu cele două soluţii găsite deja pentru a le afla şi pe celelalte din egalarea câtului cu zero, fie se scrie sub forma de descompunere $(x^2-4x-3)(x^2+ax+b)$, şi se încearcă găsirea lui a şi b, intuitiv sau prin identificarea coeficienţilor. Ecuaţia dată este echivalentă cu $(x^2-4x-3)(x^2-2x+3)=0$, de unde rezultă şi celelalte soluţii. $x_{3,4}=1\pm i\sqrt{2}$.

8. Determinaţi $m,n\in\mathbb{R}$ şi rezolvaţi ecuaţia $x^4-3x^3+8x^2-mx+n=0$ ştiind că admite rădăcina 1+3i.

Rezolvare: Deoarece ecuaţia cu coeficienţi reali admite rădăcina complexă $\mathbf{x_1 = 1+3i}$ atunci obligatoriu admite şi rădăcina $\mathbf{x_2=1-3i}$. Cum polinomul format cu rădăcinile x_1 şi x_2 este trinomul

X^2-SX+P adică $X^2-2X+10$ întrucât $S=x_1+x_2 = 2$ şi $P = x_1x_2 = 10$, nu ne rămâne decât să împărţim polinomul asociat $X^4-3X^3+8X^2-mX+n$ la polinomul $X^2-2X+10$ din care ne rezultă un cât din care vom afla si celelalte soluţii ale ecuaţiei, dacă vom pune condiţia ca restul împărţirii celor două polinoame să fie zero.

$$\begin{array}{l|l} X^4-3X^3+8X^2-mX+n & X^2-2X+10 \\ \underline{-X^4+2X^3-10X^2} & \\ -X^3-2X^2-mX+n & X^2-X-4 \\ \underline{X^3-2X^2+10X} & \\ -4X^2+(10-m)X+n & \\ \underline{4X^2-8X+40} & \\ (2-m)X+40+n & \end{array}$$

Aşadar, din $(2-m)X+40+n=0$ rezultă **m=2** şi **n= -40**. În aceste condiţii, din $X^2-X-4=0$ rezultă că celelalte soluţii ale ecuaţiei date sunt $x_{3,4}=\frac{1\pm\sqrt{17}}{2}$.

9.** *Fie* $f,g\in R[X], f=X^3-2X-a,\ g=X^3-aX^2-2(a-1)X+a$ şi $A=\{a\in R \mid f \text{ şi } g \text{ au cel putin o radacina comuna}\}$. Dacă $S=\sum_{a\in A} a$, atunci să se calculeze S.

Rezolvare: Se procedează prin a nota cu α rădăcina comună celor două ecuaţii. Rezultă:

$\begin{cases}\alpha^3-2\alpha=a\\ \alpha^3-a\cdot\alpha^2-2(a-1)\cdot\alpha+a=0\end{cases}$; Cum rădăcina comună a două polinoame se regăseşte şi în polinomul rezultat din diferenţa celor două polinoame, rezultă

$a(-\alpha^2-2\alpha+3)=0\Rightarrow$

$a=0$ *sau* $-\alpha^2-2\alpha+3=0$.

Daca $a=0\Rightarrow x^3-2x=0\Leftrightarrow x(x^2-2)=0\Rightarrow x_1=0, x_{2,3}=\pm\sqrt{2}.$

Dacă $-\alpha^2-2\alpha+3=0\Rightarrow -(\alpha-1)(\alpha+3)=0\Rightarrow$

daca $\alpha=1\Rightarrow a=-1$; *daca* $\alpha=-3\Rightarrow a=-21$ Atunci, $S=\sum_{a\in A}a=0+(-1)+(-21)=-22.$

10**. Fie polinomul $P(X)=X^n+2X-1$, cu rădăcinile $x_1,x_2,...x_n$. Să se calculeze $\sum_{k=1}^{n}\frac{x^2{}_k+1}{x_k-1}$.

Rezolvare: $\sum_{k=1}^{n}\frac{x^2{}_k+1}{x_k-1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{(x_k-1)(x_k+1)+2}{x_k-1}=\sum_{k=1}^{n}(x_k+1)+2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k-1}=$

$=x_1+x_2+...+x_n+n-2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1-x_k}=n-2\frac{n+2}{2}=-2$, deoarece suma $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1-x_k}$ se calculează după formula : $\frac{P'(X)}{P(X)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X-x_i}$, unde $P[X]\in R[X]$.

Exercitii propuse

1. Să se arate că următoarele polinoame nu au nicio rădăcină reală:

a) $f(X)=X^4+5X^2+1\in\mathbb{R}[X]$. b)

$f(X)=(X-1)^2\cdot X^2\cdot(X+1)^2+1\in\mathbb{R}[X]$.

c) $f(X)=X^4+2X^3-3X^2-4X+5\in\mathbb{R}[X]$.

2. Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuaţia $x^4-2x^3-x^2-2x-2=0$ ştiind că admite rădăcina $1-\sqrt{3}$;

3. Se dă polinomul $f=X^4+2X^3+mX^2+nX+p$ unde m, n, p sunt numere reale. Determinaţi m,n, p astfel încât restul împărţirii lui f la X-1 să fie 15, iar polinomul f să admită rădăcina -1+i.

4. Fie polinomul $f=X^4+(a+1)X^3+(a^2+2)X^2+(a-1)X+2\in\mathbb{R}[X]$**.** Să se arate că polinomul are cel mult două rădăcini reale.

5. Să se arate că polinomul $f=X^4+(1-2m)X^2+2mX+2m^2+3\in\mathbb{R}[X]$ nu poate avea rădăcini reale, oricare ar fi m număr real.

6. Să se determine valorile lui $a\in\mathbb{R}$ astfel încât ecuaţia $x^3+(a+2)x^2+(2a+1)x+2=0$ să admită o singură rădăcină reală.

7. Se consideră polinomul $f=(X^2-1)(X^2-4)-1\in\mathbb{R}[X]$ cu rădăcinile x_1,x_2,x_3,x_4.

a) Să se arate că polinomul are toate rădăcinile reale;

b) Să se arate că $x_1^{2015}+x_2^{2015}+x_3^{2015}+x_4^{2015}\in\mathbb{N}$.

8*. Se consideră polinomul $f = X^3 - 2X^2 + 4X - 1 \in \mathbb{R}[X]$ cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$.

Să se calculeze suma $\sum_{k=1}^{3} \frac{1}{1-x_k}$.

9*. Se consideră polinomul $f = X^3 - 3X^2 + 2X - 2 \in \mathbb{R}[X]$ cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$.

Să se calculeze suma $\sum_{k=1}^{3} \frac{x_k + 1}{x_k - 1}$.

10.** Să se determine rădăcinile polinomului
$f(X) = X^3 - (\sqrt{3}+1)X^2 + (\sqrt{3}-2)X + 2\sqrt{3} \in \mathbb{R}[X]$ știind că admite o rădăcină reală.

3.5. Exerciții recapitulative

1. Se consideră polinomul $f = X^3 - X^2 - 5X + 2 \in \mathbb{C}[X]$ cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$.

a) Să se calculeze $f(-1) + f(\frac{1}{2})$;

b) Să se determine câtul şi restul împărţirii lui f la polinomul X+2;

c) Să se calculeze determinantul $d = \begin{vmatrix} x_1 & x_3 & x_2 \\ x_2 & x_1 & x_3 \\ x_3 & x_2 & x_1 \end{vmatrix}$, unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f;

2. Se consideră polinomul $f = (X+1)^3 - 3X + 2 \in \mathbb{R}[X]$ cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$.

a) Să se calculeze $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$;

b) Să se determine câtul şi restul împărţirii lui f la polinomul X + 2 ;

c) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia f(x) = 5 ;

3. Se consideră polinomul $f = X^3 + 6X^2 + mX + 6 \in \mathbb{R}[X]$.

a) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ ştiind că $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 14$ unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f;

b) Pentru m = 1 să se calculeze câtul şi restul împărţirii lui f la polinomul $g = X + 2$;

c) Pentru m = 11 să se rezolve ecuaţia f (x) = 0 ;

4. Se consideră polinomul $f = \left(X^2+1\right)^2 - \left(X+1\right)^2 \in \mathbb{R}[X]$ având forma algebrică $f = aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e \in \mathbb{R}[X]$.

a) Să se calculeze suma coeficienţilor polinomului f ;

b) Să se arate că f este divizibil cu polinomul $g = X - 1$;

c) Să se determine câtul şi restul împărţirii lui f la polinomul $g = X^2 - X + 1$;

5. Se consideră polinomul $f = X^3 - 5X^2 + 9X + m \in \mathbb{R}[X]$

a) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ ştiind că suma a două rădăcini este egală cu 3 ;

b) Pentru m = -6 să se determine câtul şi restul împărţirii lui f la polinomul $g = X^2 - 3X + 3$;

c) Pentru m = - 6 să se calculeze expresia $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$;

6. Se consideră polinomul $f = 4X^4 - 15X^2 - 5X + 6 \in \mathbb{R}[X]$.

a) Să se calculeze $f(-1) + f(-\frac{1}{2})$;

b) Să se arate că f este divizibil cu polinomul $g = X^2 - X - 2$;

c) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia f(x) = 0 ;

7. Se consideră polinoamele $f = X^3 - X^2 - X - 2 \in \mathbb{R}[X],\ g = X^2 + X + 1 \in \mathbb{R}[X]$;

a) Să se arate că polinomul f este divizibil cu polinomul g ;

b) Să se determine câtul şi restul împărţirii lui f la polinomul $g = X - 2$;

c) Să se calculeze determinantul $d = \begin{vmatrix} x_1 & x_3 & x_2 \\ x_2 & x_1 & x_3 \\ x_3 & x_2 & x_1 \end{vmatrix}$, unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f;

8. Se consideră polinomul $f = X^3 - 2X^2 + 2X + a \in \mathbb{R}[X]$.

a) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care polinomul f are rădăcina $x_1 = 1$;

b) Pentru a = -1 să se determine câtul şi restul împărţirii lui f la polinomul $g = X + 2$;

c) Pentru a = 3 să se calculeze $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$ unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f;

9. Se consideră polinoamele $f = X^3 + 2X^2 - 2X + 3 \in \mathbb{R}[X],\ g = X + 3 \in \mathbb{R}[X]$;

a) Să se determine câtul şi restul împărţirii lui f la polinomul g ;

b) Să se calculeze expresia $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$ unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f;

c) Să se calculeze $(2 - x_1)(2 - x_2)(2 - x_3)$, x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f;

10. Se consideră polinomul $f(X) = X^3 + 2X^2 + aX + b \in \mathbb{R}[X]$, cu rădăcinile x_1, x_2, x_3.

a) Pentru a= **- 5**, b= **- 6**, să se determine x_1, x_2, x_3 ;

b) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 6$;

c) Să se calculeze expresia $(1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3)$ în funcţie de a şi b .

11. Se consideră polinomul $f(X) = X^3 - mX^2 + 3X + m + 5 \in \mathbb{R}[X]$.

a) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât f să fie divizibil cu X+2 ;

b) Să se calculeze produsul $(1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3)$ unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f în cazul în care m = -3.

c) Pentru polinomul f găsit la punctul a) să se arate că polinomul g(X)=f(X-1) nu are toate rădăcinile reale.

12. Se consideră polinomul $f(X) = X^3 - 3X^2 + a \in \mathbb{R}[X]$.

a) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care f are rădăcina x=3;

b) Să se determine valorile lui $a \in \mathbb{R}$ pentru care f admite o soluţie dublă în $\mathbb{Z}$;

c) Să se calculeze suma $S = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$ unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f pentru a=3.

13. Se consideră polinomul $f(X) = (X^2 + X + 1)^2$ având forma algebrică $f(X) = a_4X^4 + a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0,\ a_i \in \mathbb{R},\ \forall i = \overline{0,4}$.

a) Să se determine coeficientul lui X^3;

b) Să se rezolve ecuaţia $f(x) - 2(x-1)^3 + 4(x-9) = 0$;

c) Dacă x_1, x_2, x_3, x_4 sunt rădăcinile polinomului f să se calculeze $x_1^{2010} + x_2^{2010} + x_3^{2010} + x_4^{2010}$.

14. Se consideră polinomul $f(X) = X^4 + 5X^2 + 6 \in \mathbb{R}[X]$, cu rădăcinile x_1, x_2, x_3, x_4.

a) Să se arate că f nu are rădăcini reale ;

b) Să se calculeze suma $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}$;

c) Să se determine restul împărţirii polinomului $g(X) = X(X^4 + 5X^2 + 6)^{100} - X + 1$ la polinomul $h(X) = X^2 + X$.

15. Se consideră polinomul $f(X) = X^4 - 8X^2 + 15 \in \mathbb{R}[X]$.

a) Să se arate că $f(X) = (X^2 - 4)^2 - 1$;

b) Să se demonstreze că f nu are rădăcini întregi ;

c) Să se descompună polinomul f în produs de factori ireductibili în $\mathbb{R}[X]$.

16. Se consideră polinoamele $f, g \in \mathbb{R}[X],\ f(X) = X^4 + X^3 - X + 1,\ g(X) = X^3 + 2X^2 + 2X + 1$.

a) Să se demonstreze că $f(X) = g(X) \cdot (X-1) + 2$;

b) Să se determine rădăcinile reale ale polinomului g ;

c) Ştiind că a este o rădăcină a polinomului g, să se arate că $f(a) \in \mathbb{N}$.

17. Se consideră polinoamele $f = X^4 + X^2 + \hat{1} \in \mathbb{Z}_3[X],\ g = aX + \hat{b} \in \mathbb{Z}_3[X]$;

a) Să se determine rădăcinile din $\mathbb{Z}_3$ ale polinomului f ;

b) Să se arate că $f = \left(X^2 + 2\right)^2$;

c) Să se arate că $f(\hat{0}) + f(\hat{1}) + f(2) + 2 = g(\hat{0}) + g(\hat{1}) + g(2), \forall a, b \in \mathbb{Z}_3[X]$;

18. Se consideră polinoamele $f = X^3 + aX^2 + 2 \in \mathbb{Z}_3[X],\ g = X + 2 \in \mathbb{Z}_3[X]$;

a) Să se determine $a \in \mathbb{Z}_3$ astfel încât polinomul f să fie divizibil cu g ;

b) Pentru $a = 2$, să se calculeze $f(\hat{1}) + f(2)$; **c**) Pentru $a = \hat{1}$, să se rezolve ecuaţia $f(x) = \hat{1}$;

19. Se consideră polinoamele $f, g \in \mathbb{Z}_4[X],\ f(X) = X^4 + \hat{2}X^3 + X^2,\ g(X) = \hat{m}X + \hat{3}$.

a) Să se determine rădăcinile din $\mathbb{Z}_4[X]$ ale polinomului f ;

b) Să se arate că $f(X) = (X^2 + X + \hat{2})^2$;

c) Să se determine $m \in \mathbb{Z}_4$ astfel încât $g(\hat{0}) + g(\hat{1}) + g(\hat{2}) + g(\hat{3}) = \hat{2}$.

20. Fie polinomul $f \in \mathbb{Z}_3[X],\ f = X^{2010} + (X + \hat{1})^{2010} + (X + \hat{2})^{2010}$ care are forma algebrică $f = a_{2010}X^{2010} + a_{2009}X^{2009} + ... + a_1X + a_0,\ a_i \in \mathbb{Z}_3$.

a) Să e calculeze $a_0 + a_1 + ... + a_{2010}$;

b) Să se arate că f este ireductibil în $\mathbb{Z}_3[X]$;

c) Să se determine restul împărţirii lui f la polinomul $g(X)=X^2+\hat{2}$.

21. Fie polinomul $f(X)=X^3+(\hat{3}a+\hat{1})X+a+\hat{4}\in\mathbb{Z}_6[X]$.

a) Să se arate că $a^3=a,\ \forall a\in\mathbb{Z}_6$;

b) Să se determine $a\in\mathbb{Z}_6$ astfel încât $f(\hat{3})=\hat{0}$;

c) Pentru $a=\hat{5}$ să se descompună polinomul f în produs de factori ireductibili în $\mathbb{Z}_6[X]$.

22. Se consideră polinomul $f\in\mathbb{Z}_5[X]$, $f=X^2+(a+\hat{2})X+\hat{3}a+\hat{2}$.

a) Determinaţi $a\in\mathbb{Z}_5$, ştiind că $f(\hat{1})=\hat{1}$;

b) Pentru $a=\hat{2}$ rezolvaţi ecuaţia $f(x)=\hat{4}$ în $\mathbb{Z}_5$;

c) Pentru $a=\hat{2}$, să se arate că polinomul f este divizibil cu $X+\hat{3}$.

23.Se consideră polinomul $f=X^2-X+1\in\mathbb{C}[X]$ cu rădăcinile $x_1,x_2\in\mathbb{C}$.

a) Să se calculeze $x_1^{\,2}+x_2^{\,2}+x_1\cdot x_2$;

b) Să se determine restul împărţirii polinomului X^3+1 la f ;

c) Să se calculeze suma $1+x_1+x_1^{\,2}+x_1^{\,3}+....+x_1^{\,21}$ unde x_1 este rădăcina polinomului f ;

24. Se consideră polinomul $f(X)=X^4-X^3+aX^2+aX+b\in\mathbb{R}[X],\ a,b\in\mathbb{R}$.

a) Să se arate că restul împărțirii polinomului f la polinomul $g(X)=X+1$ nu depinde de a;

b) Să se determine a și b astfel încât restul împărțirii polinomului f la polinomul X^2-X să fie X;

c) Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât polinomul f să fie divizibuil cu polinomul $(X-1)^2$.

25. Se consideră polinomul $f(X)=X^4-2X^3-4X^2+aX+b\in\mathbb{R}[X],\ a,b\in\mathbb{R}$.

a) Să se determine a și b știind că polinomul f este divizibil cu polinomul $g(X)=(X-1)(X-3)$

b) Pentru a = 2 și b = 3, să se rezolve ecuația $f(x)=0$;

c) Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât polinomul f să fie divizibil cu polinomul X-2 și restul împărțirii lui f la X+2 să fie 3;

26. Se consideră polinomul $f(X)=(X-1)^{10}+(X+1)^{10}-2^{10}\in\mathbb{R}[X]$,care are forma algebrică $f(X)=a_{10}X^{10}+a_9X^9+...+a_1X+a_0$.

a) Să se calculeze $f(-20)+f(-19)+....+f(-1)+f(0)+f(1)+....+f(19)+f(20)$;

b) Să se calculeze suma $a_0+a_1+a_2+.....a_{10}$;

c) Să se arate că polinomul f este divizibil cu polinomul $g(X)=X^2-1$.

27. Se consideră polinomul $f(X)=(X+1)^{2014}+(X-1)^{2014}\in\mathbb{R}[X]$,care are forma algebrică $f(X)=a_{2014}X^{2014}+a_{2013}X^{2013}+...+a_1X+a_0$.

a) Să se calculeze $a_{2014}+a_{2013}$;

b) Să se calculeze suma $a_0+a_1+a_2+.....a_{2014}$;

c) Să se determine restul împărțirii polinomului f la polinomul $g(X)=X^2-1$.

28. Se consideră polinomul $f(X)=X^n+X^2-(n+2)X+n\in\mathbb{R}[X], n\in\mathbb{N}$.

a) Pentru n=3, să se calculeze $f(-2)+f(-3)$;

b) Pentru n=3, să se rezolve ecuația $f(x)=0$;

c) Să se arate că polinomul f este divizibil cu polinomul $g(x)=(X-1)^2$.

29. Se consideră polinoamele

$f(X)=X^3+(a+1)X^2+bX+2\in\mathbb{R}[X],\ g(X)=X^2-4X+3\in\mathbb{R}[X]$.

a) Pentru $a=-1,b=0,$ să se calculeze $f\cdot g$;

b) Pentru $a=0,b=2,$ să se rezolve ecuația $f(x)=0$;

c) Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât polinomul f să fie divizibil cu polinomul g.

30. Se consideră polinomul $f(X)=X(1-X^2+X^3)^{671}-X^{2015}+1\in\mathbb{R}[X],$ care are forma algebrică $f(X)=a_{2014}X^{2015}+a_{2013}X^{2013}+...+a_1X+a_0$.

a) Să se determine a_0+a_1;

b) Să se calculeze $a_0+a_1+a_2+.....+a_{2014}$;

c) determinați restul împărțirii polinomului f la polinomul X^2-X.

31. Se consideră polinoamele $f(X)=X^3+aX+b\in\mathbb{R}[X],\ g(X)=X^2+3X+2\in\mathbb{R}[X]$.

a) Pentru $a=-7,b=-6,$ să se calculeze $f(0)\cdot f(1)\cdot f(2)\cdot f(3)\cdot....\cdot f(2015);$;

b) Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ știind că $f(-2)=0$ și că restul împărțirii polinomului f la polinomul $X-2$ este 8;

c) Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ știind că polinomul f este divizibil cu polinomul g.

32. Se consideră polinomul $f(X)=2X^4+X^3-14X^2+5X+6\in\mathbb{R}[X]$.

a) Să se determine restul împărțirii polinomului f la polinomul $g(X)=X-2\in\mathbb{R}[X]$.

b) Să se arate că $f(X)=(2X^2-x-1)(X^2+X-6)$;

c) Să se descompună polinomul f în factori ireductibili peste $\mathbb{R}$.

33. Se consideră polinomul $f(X)=X^3-5X+3\in\mathbb{R}[X]$ având rădăcinile $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}$

a) Să se calculeze $f(-\frac{1}{2})+f(-1);$

b) Să se calculeze $x_1^2+x_2^2+x_3^2;$

c) Să se calculeze $(2-x_1)(2-x_2)(2-x_3)$;

34. Se consideră polinomul $f(X)=X^3-aX^2+X+3\in\mathbb{R}[X]$ având rădăcinile $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{C}$.

a) Să se determine $a\in\mathbb{R}$ știind că polinomul f are rădăcina 2;

b) Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât f să fie divizibil cu polinomul $X+3$;

c) Pentru a=3 să se calculeze $x_1^3+x_2^3+x_3^3$.

35. Se consideră polinomul $f(X)=X^3+(m-2)X^2-mX-3\in\mathbb{R}[X]$ având rădăcinile $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{C}$.

a) Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât polinomul f să fie divizibuil cu polinomul $X-2$

b) Pentru $m=3$ să se rezolve ecuația $f(x)=0$;

c) Pentru m=4 să se calculeze $x_1^2+x_2^2+x_3^2$.

36. Se consideră polinomul $f(X)=2X^3+(a+2)X^2+\hat{1}\in\mathbb{Z}_3[X]$ având rădăcinile $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{C}$.

a) Să se determine $a\in\mathbb{Z}_3$ astfel încât $f(\hat{1})=\hat{0}$; **b**) Pentru $a=2$, să se rezolve ecuația $f(x)=\hat{0}$;

c) Să se determine $a\in\mathbb{Z}_3$ astfel încât polinomul f să fie divizibil cu polinomul $X+\hat{1}$.

37. Se consideră polinoamele $f(X)=X^3+2X^2+aX+\hat{1}\in\mathbb{Z}_3[X], g(X)=X+\hat{1}\in\mathbb{Z}_3[X]$.

a) Să se calculeze $f(\hat{1})+f(2)\cdot f(\hat{1})$ pentru $a=\hat{1}$.

b) Să se determine $a\in\mathbb{Z}_3$ astfel încât f să fie divizibil cu g;

c) Pentru $a=2$, să se descompună f în factori ireductibili;

38. Se consideră polinomul $f(X)=X^6+aX+\hat{5}\in\mathbb{Z}_7[X], a\in\mathbb{Z}_7$.

a) Să se verifice că pentru orice $b\in\mathbb{Z}_7, b\neq 0$, avem $b^6=\hat{1}$.

b) Să se determine $a\in\mathbb{Z}_7$, astfel încât restul împărțirii polinomului f la polinomul $X+2$, să dfie egal cu $\hat{1}$;

c) Să se determine $a\in\mathbb{Z}_7$, astfel încât f să fie divizibil cu polinomul $X+\hat{5}$.

Partea a II-a .
ANALIZĂ MATEMATICĂ

I. Primitive
II. Integrala definită
III. Metode de integrare
IV. Aplicații ale integralei definite

I. Primitive

1. Primitive. Funcţii care admit primitive

Pe parcursul capitolului, **I** este un interval din $\mathbb{R}$;

Definiţie:

Fie f, F: I → R. Spunem că F este o primitivă a lui f dacă:
a) F este derivabilă pe I; b) F'(x) =f(x), $\forall x \in I$ **.**

Exemplu:
a) Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=6x^5$. Atunci, funcţia $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ F(x)=x^6$ este o primitivă a funcţiei f deoarece F este derivabilă şi $(x^6)'=6x^5$;

b) Fie funcţia $f:\mathbb{R}-\{3\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{x-3}$. Atunci, funcţia $F:(3;\infty)\to\mathbb{R},\ F(x)=\ln(x-3)$ este o primitivă a funcţiei f deoarece F este derivabilă şi $(\ln(x-3))'=\frac{1}{x-3}$;

O condiţie des utilizată prin care se poate determina dacă o funcţie admite primitive este dată de următoarea teoremă:

Teoremă Orice funcţie continuă definită pe un interval admite primitive pe acel interval.

Exemplu: Să se arate că următoarele funcţii admit primitive:

a). $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, f(x) = $\begin{cases} x^3+2x+4, x\langle 0 \\ e^x+3, x\geq 0 \end{cases}$; b). $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, f (x) = $\begin{cases} \frac{1}{2x-3}, x\leq 0 \\ \sqrt{x}-\frac{1}{3}, x\rangle 0 \end{cases}$;

În ambele cazuri funcţia f este continua pe $\mathbb{R}$ întrucât este continuă pe $(-\infty;0)\cup(0;\infty)$ deoarece restricţiile sunt funcţii elementare şi sunt continue şi în 0 deoarece $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = f(0)$.

Aşadar, f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

Teorema ***Fie f : I → R. Dacă*** $F_1, F_2 : I \to R$ ***sunt două primitive ale funcţiei f, atunci există o constantă c*** $\in$ ***R astfel încât*** $F_1(x) = F_2(x) + c, \forall x \in I$.

Demonstraţie : Dacă F_1, F_2 sunt primitive atunci F_1, F_2 sunt derivabile $\Rightarrow F_1'(x) = F_2'(x) = f(x) \quad \forall$ x ε I $\Leftrightarrow (F_1 - F_2)'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = 0$, x ε I. $\Rightarrow F_1(x) - F_2(x) = c$, c= constantă

Observaţii :

1. Fiind dată o primitivă F_0 a unei funcţii atunci orice primitivă F a lui f are forma $F = F_0 + c$, c= constantă $\Rightarrow$ f admite o infinitate de primitive.

2. Teorema nu mai rămâne adevărată dacă I este o reuniune disjunctă de intervale

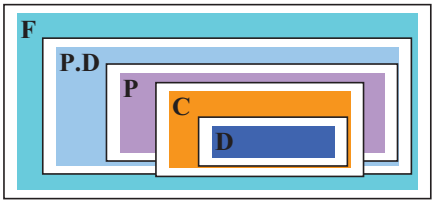
Exemplu : $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$, f(x) = x²

F = $\frac{x^3}{3}$, G= $\begin{cases} \frac{x^3}{3} + 1 \\ \frac{x^3}{3} + 2 \end{cases}$ F, G sunt primitive ale lui f dar F-G nu e constantă .

Contradicţie cu teorema.

3. Orice funcţie care admite primitive are **Proprietatea lui Darboux**.

Se ştie că derivata oricărei funcţii are P. lui Darboux , rezultă că f are P lui Darboux**. F' =f.**



4. Dacă I este interval şi f(I) $\underline{\underline{def}}\{f(x)/x \in I\}$ nu este interval atunci f nu admite primitive.

Dacă presupunem că f admite primitive atunci din OBS 3 rezultă că f are Proprietatea lui Darboux, rezultă f(I) este interval ceea ce este o contradicţie.

Exemplu : Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} -2, x \in (-\infty;0] \\ x^2 + 1, x \in (0;\infty) \end{cases}$ nu admite primitive pe $\mathbb{R}$ deoarece imaginea funcţiei este $\text{Im } f = \{-2\} \cup (1;\infty)$ adică funcţia f nu transformă un interval tot într-un interval;

Teorema **Dacă funcția $f:I\to\mathbb{R}$ nu are proprietatea lui Darboux pe I atunci f nu admite primitive pe I:**

Exemplu :

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}0, x\in(-\infty;0]\\ x^2+1, x\in(0;\infty)\end{cases}$. Să se arate că f nu admite primitive pe $\mathbb{R}$.

Rezolvare:

Imaginea funcției este $\text{Im}\, f=\{0\}\cup(1;\infty)$ care nu este interval, deci f nu are proprietatea lui Darboux, aşadar, f nu admite primitive pe $\mathbb{R}$.

Activitate independentă		**Răspuns**
Se consideră funcţiile $f,F:(0;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=(3x^2+12x+6)\cdot e^x$, $F(x)=(3x^2+6x)e^x$. Să se arate că F e o primitivă a lui f.		$F^I(x)=f(x)$

Exercitii rezolvate

1. Se consideră funcțiile $f,F:I\to\mathbb{R}$. Să se arate că F(x) este o primitivă a funcției f(x) în cazurile:

a) $f(x)=3x^2+2,\ F(x)=x^3+2x+5$;

b) $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2},\ F(x)=\ln x+\frac{1}{x}$;

c) $f(x)=2\cos 2x-3\sin 3x,\ F(x)=\sin 2x+\cos 3x$.

Rezolvare:

a) Cum F(x) este derivabilă şi $F^I(x)=(\sin 2x+\cos 3x)^I=2\cos 2x-3\sin 3x=f(x)$, rezultă, conform definiției că F este o primitivă a lui f.

b) Cum F(x) este derivabilă şi $F^I(x)=\left(\ln x+\frac{1}{x}\right)^I=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=f(x)$, rezultă, conform definiției că F este o primitivă a lui f.

c) Cum F(x) este derivabilă şi $F^I(x)=\left(\ln x+\frac{1}{x}\right)^I=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=f(x)$, rezultă, conform definiției că F este o primitivă a lui f.

2. Aflaţi funcţia f a cărei primitivă este funcţia $F:D\to\mathbb{R}$ în cazurile:

a) $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ F(x)=\frac{5^x}{\ln 5}+\frac{x^6}{6}$;

b) $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ F(x)=\frac{2^{x^2+x}}{\ln 2}+3$

c) $F:(-2;\infty)\to\mathbb{R},\ F(x)=\ln\frac{x+3}{x+2}+5$;

d) $F:[-3;\infty)\to\mathbb{R},\ F(x)=e^{2x}\cdot\sqrt{x+3}$;

Rezolvare:

a) F este o primitivă a funcţiei f pe un interval I dacă $F'(x)=f(x),\ \forall x\in I$;

În cazul nostru, cum $F'(x)=5^x+x^5$ rezultă că F este primitiva funcţiei $f(x)=5^x+x^5$;

b) $F'(x)=\left(\frac{2^{x^2+x}}{\ln 2}+3\right)'=(2x+1)\cdot 2^{x^2+x} \Rightarrow f(x)=(2x+1)\cdot 2^{x^2+x}$;

c)

$$F'(x)=\left(\ln\frac{x+3}{x+2}+5\right)'=\frac{1}{\frac{x+3}{x+2}}\cdot\left(\frac{x+3}{x+2}\right)'=\frac{x+2}{x+3}\cdot\frac{-1}{(x+2)^2}=-\frac{1}{x^2+5x+6}\Rightarrow f(x)=-\frac{1}{x^2+5x+6};$$

d) $F'(x)=\left(e^{2x}\cdot\sqrt{x+3}\right)'=2e^{2x}\sqrt{x+3}+e^{2x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+3}}=\frac{e^{2x}(4x+13)}{2\sqrt{x+3}}\Rightarrow f(x)=\frac{e^{2x}(4x+13)}{2\sqrt{x+3}}$;

3. Determinaţi $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât funcţia F să fie o primitivă a funcţiei f unde $f:(-3;\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{2x+6}$, $F:(-3;\infty)\to\mathbb{R},\ F(x)=(ax+b)\sqrt{2x+6}$;

Rezolvare:

Cum F este o primitivă a lui f rezultă $F'(x)=f(x),\forall x\in(-3;\infty)$;

$a\sqrt{2x+6}+(ax+b)\frac{1}{\sqrt{2x+6}}=\sqrt{2x+6}\Rightarrow$ **prin aducerea la acelaşi numitor că** $x(3a-2)+6a+b-6=0\Rightarrow 3a-2=0$ **şi** $6a+b-6=0$ de unde se obţin $a=\frac{2}{3},b=2$;

4. Să se arate că următoarele funcţii admit primitive pe domeniul dat:

a). f: R→ R, f(x) = $\begin{cases}x^2+3, x<0\\ e^x+2, x\geq 0\end{cases}$

b). f: R→ R, f (x) = $\begin{cases}\frac{1}{x^2+4}, x\leq 0\\ \frac{1}{4}-\sqrt{x}, x>0\end{cases}$

c). f:[0,∞)→R, f(x) = $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}, x\in[0,1)\\ \frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}, x\geq 1\end{cases}$

Rezolvare:

a) În general, pentru a arăta că o funcţie admite primitive pe un interval este suficient să arătăm că funcţia este continuă pe domeniul dat;

În cazul nostru f este continuă pe $(-\infty;0)\cup(0;\infty)$ deoarece restricţiile sunt funcţii elementare continue. Mai rămâne să se verifice continuitatea în punctul 0:

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}f(x)=f(0)\Leftrightarrow\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}(x^2+3)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(e^x+2)=f(0)=3\Rightarrow$ f este continuă în 0 deci şi pe $\mathbb{R}$ aşadar, f admite primitive pe $\mathbb{R}$;

b) Analog, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{1}{x^2+4}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(\frac{1}{4}-\sqrt{x})=f(0)=\frac{1}{4}\Rightarrow$ f este continuă în 0 deci şi pe $\mathbb{R}$ aşadar, f admite primitive pe $\mathbb{R}$;

c) Analog, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}})=f(1)=2\Rightarrow$ f este continuă în 1 deci şi pe $[0;\infty)$ aşadar, f admite primitive pe $\mathbb{R}$;

5. Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât următoarele funcţii să admită primitive pe domeniul dat:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}x^3+\dfrac{1}{x^3}-a, x\le 1\\ (x+2)\ln x, x\rangle 1\end{cases}$; **b)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\sqrt{a-2x}, x\le 2\\ \dfrac{1}{3x-5}, x\rangle 2\end{cases}$;

c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}x^2-3x+3, x\langle 1\\ \ln(x+a), x\ge 1\end{cases}$.

Rezolvare:

a) f admite primitive pe $\mathbb{R}$ dacă şi numai dacă f este continuă pe $\mathbb{R}$. Din condiţia de continuitate a lui f în 0 rezultă $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\langle 1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\rangle 1}} f(x)=f(1)\Rightarrow 2-a=0\Rightarrow a=2.$

b) f admite primitive pe $\mathbb{R}$ dacă şi numai dacă f este continuă pe $\mathbb{R}$. Din condiţia de continuitate a lui f în 2 rezultă $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x\langle 2}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x\rangle 2}} f(x)=f(2)\Rightarrow \sqrt{a-4}=1\Rightarrow a-4=1\Rightarrow$

$a=5.$

c) f admite primitive pe $\mathbb{R}$ dacă şi numai dacă f este continuă pe $\mathbb{R}$. Din condiţia de continuitate a lui f în 1 rezultă $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\langle 1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\rangle 1}} f(x)=f(1)\Rightarrow 1=\ln(a+1)\Rightarrow a+1=e\Rightarrow a=e-1.$

6. Să se determine o primitivă a funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definită prin $f(x)=x+1+\sqrt{x^2-6x+9}$.

Rezolvare:

f(x) se mai scrie $f(x)=x+1+|x-3|=\begin{cases}4, x\langle 3\\ 2x-2, x\ge 3\end{cases}$.

Cum $l_s(3)=\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x\langle 3}} f(x)=4;\ l_d(3)=\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x\rangle 3}} f(x)=4=f(3)\Rightarrow$ f este continuă pe $\mathbb{R}$, rezultă că f admite primitive. Fie F o primitivă a sa. $F(x)=\begin{cases}4x+c_1, x\langle 3\\ x^2-2x+c_2, x\ge 3\end{cases}$. Cum F este continuă în 3 rezultă

$l_s(3)=l_d(3)=F(3)\Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x\langle 3}} F(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x\rangle 3}} F(x)=F(3)\Rightarrow 12+c_1=9-6+c_2$. Dacă notăm pe c_2 cu c atunci se obţine că $c_1=-9$ iar primitiva lui f este $F(x)=\begin{cases}4x-9, x\langle 3\\ x^2-2x+c, x\ge 3\end{cases}$, unde $c\in\mathbb{R}$.

7*. Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât funcţia $F:(0;\infty)\to\mathbb{R},\ F(x)=\begin{cases}\ln^2 x, x\in(0;e]\\ ax+b, x\rangle e\end{cases}$ să fie primitiva unei funcţii f.

Rezolvare:

Conform definiţiei primitivei unei funcţii se impun condiţiile de continuitate şi derivabilitate ale lui F în punctul **e**.

$\lim\limits_{\substack{x\to e\\ x\langle e}} F(x)=\lim\limits_{\substack{x\to e\\ x\rangle e}} F(x)=F(e)=1\Rightarrow a\cdot e+b=1$; $F'(x)=\begin{cases}\dfrac{2\ln x}{x}, x\in(0;e)\\ a\quad ,x\rangle\ e\end{cases}$ şi din $\lim\limits_{\substack{x\to e\\ x\langle e}} F'(x)=\lim\limits_{\substack{x\to e\\ x\rangle e}} F'(x)\Rightarrow\dfrac{2}{e}=a$. Din cele două relaţii rezultă: $a=\dfrac{2}{e}, b=-1$;

8*. Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ **astfel încât funcţia** $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ F(x)=\begin{cases}x^2+(a-1)x+3, x\langle 0\\ e^{x^2}-5x+b, x\geq\ 0\end{cases}$ **să fie primitiva unei funcţii f.**

Rezolvare: Ca F să fie primitiva unei funcţii trebuie ca F să fie derivabilă.
Se pune mai întâi condiţia de continuitate a lui F, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\langle 0}} F(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\rangle 0}} F(x)=F(0)=1+b\Rightarrow 1+b=3$,
şi apoi condiţia de derivabilitate a lui F, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\langle 0}} F'(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\rangle 0}} F'(x)=-5\Rightarrow a-1=-5$.

Rezultă a = - 4, b = 2;

Exercitii propuse

1. Se consideră funcţiile $f,F:(0;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x+\dfrac{1}{x}$, $F(x)=e^x+\ln x$. Să se demonstreze că F este primitiva lui f.

2. Se consideră funcţiile $f,F:(0;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{3-\sqrt{x}}{x^2}$, $F(x)=\dfrac{2\sqrt{x}-3}{x}$. Să se demonstreze că F este primitiva lui f.

3. Se consideră funcţiile $f,F:(0;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{-2x-2}{x^3}$, $F(x)=\dfrac{2x^2+x}{x^3}$. Să se demonstreze că F este primitiva lui f.

4. Fie $f:\mathbb{R}-\{-3;-2\}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{2x+5}{(x+2)(x+3)}$; Să se arate că orice primitivă F a lui f este concavă pe $\mathbb{R}$.

5. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(x+1)^3-3x-1$; Să se arate că orice primitivă F a lui f este convexă pe $[0;\infty)$.

6. Să se arate că orice primitivă a funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^{x^{2012}}$ este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

7. Să se arate că orice primitivă a funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2\cdot e^x$ este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

8. Aflaţi funcţia **f** a cărei primitivă este funcţia $F:D\to\mathbb{R}$ în cazurile:

a) $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ F(x)=\ln(x^2+2)+3$;

b) $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ F(x)=(2x-1)^{2012}+5$;

c) $F:[-1;0]\cup[1;\infty)\to\mathbb{R},\ F(x)=\sqrt{x^3-x}$;

d) $F:(-\infty;-3)\cup(1;\infty)\to\mathbb{R},\ F(x)=\sqrt{x^2+2x-3}$;

e) $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ F(x)=arctgx+2x$;

f) $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ F(x)=\ln\sqrt{x^2+4}+2$;

9. Determinaţi $a,b,c\in\mathbb{R}$ astfel încât funcţia F să fie o primitivă a funcţiei **f** unde

a) $f:(4;\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{x-4}$, $F:(4;\infty)\to\mathbb{R},\ F(x)=(ax+b)\sqrt{x-4}$;

b) $f:(0;\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=e^{-x}\cdot(x^2+x-1)$, $F:(0;\infty)\to\mathbb{R},\ F(x)=e^{-x}(ax^2+bx+c)$;

c) $f:(-1;\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{2x}{(x+1)(x^2+1)}$,

$F:(0;\infty)\to\mathbb{R},\ F(x)=a\cdot\ln(x+1)+b\cdot\ln(x^2+1)+c\cdot arctgx$

d) $f:(\frac{1}{2};\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=x\sqrt{2x-1}$, $F:(\frac{1}{2};\infty)\to\mathbb{R},\ F(x)=(ax^2+bx+c)\sqrt{2x-1}$;

10*. Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât F să fie primitiva unei funcţii f:

a) $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R},F(x)=\begin{cases}\ln(ax+b),x\rangle 1\\ \dfrac{x+1}{x^2+1},x\le 1\end{cases}$;

b) $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R},F(x)=\begin{cases}2a\cdot e^{3x}+b,x\le 0\\ \sqrt{2x^2-4x+1},x\rangle 0\end{cases}$;

c) $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R},F(x)=\begin{cases}\dfrac{ax+b}{x^2+1},x\le 0\\ \sqrt{x^2-6x+9},x\rangle 0\end{cases}$;

d) $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R},F(x)=\begin{cases}a\cdot e^{2x}+2bx+1,x\le 0\\ \dfrac{3x+a}{x^2+2},x\rangle 0\end{cases}$;

e) $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R},F(x)=\begin{cases}x^2+ax+b,x\rangle 0\\ \sin x+3\cos x,x\le 0\end{cases}$;

f) $F:[1;e^2]\to\mathbb{R},F(x)=\begin{cases}1+\ln^2 x,x\in[1,e)\\ (2a-3)x+b^2,x\in[e,e^2]\end{cases}$;

11. Să se arate că următoarele funcţii admit primitive pe domeniul dat:

a). $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}x\cdot e^x,x\le 0\\ \dfrac{x^2}{1+x},x\rangle 0\end{cases}$;

b). $f:[-\frac{1}{2};0)\to\mathbb{R}\ \ f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},x\in[-\frac{1}{2};0)\\ \dfrac{x^2+2^x+e^x}{2},x\ge 0\end{cases}$;

c). $f:[0;\infty)\to\mathbb{R},f(x)=\begin{cases}(\sqrt[3]{x}+1)^2,x\in[0,1)\\ \sqrt[3]{5x+59},x\ge 1\end{cases}$;

d). $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}(x^2-3x+2)\cdot e^x,x\le 1\\ (x+1)\ln x,x\rangle 1\end{cases}$;

e). $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}(x^2-x+1)\cdot e^x, x\le 0\\ x\ln x+1, x\rangle 0\end{cases}$;

f). $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}2x-1, x\langle 0\\ e^x-2, x\ge 0\end{cases}$;

g) $f:[0;\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+5x+2}, x\in[0;2]\\ \dfrac{9x+14}{8}, x\in(2;\infty)\end{cases}$;

h) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}3x^2-\cos x, x\langle 0\\ \sin x+2x-1, x\ge 0\end{cases}$;

12. Să se arate că $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+3}{x},\ x\le 1\\ \sqrt{25x^2-9},\ x\rangle 1\end{cases}$ admite primitive pe $\mathbb{R}$.

13. Să se arate că $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 3x}{x},\ x\langle 0\\ 2^{x+1}+e^x,\ x\ge 0\end{cases}$ admite primitive pe $\mathbb{R}$.

14. Să se arate că următoarele funcţii nu admit primitive pe domeniul dat:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\sin x, x\ne 0\\ 2,\quad x=0\end{cases}$ **b)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}-1, x\langle 0\\ 1,\quad x\ge 0\end{cases}$;

15. Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât următoarele funcţii să admită primitive pe domeniul dat:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}a\cdot e^x, x\le 0\\ x^2+5, x\rangle 0\end{cases}$; **b)** $f:[0;\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+x^4}, x\in[0;1]\\ x+a, x\in(1;\infty)\end{cases}$;

c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}a\cdot e^x, x\le 0\\ \dfrac{\sqrt{1+x}-6}{x+1}, x\rangle 0\end{cases}$; **d)** $f:(0;\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}a\cdot\sqrt{x^2+3x}, x\rangle 1\\ 2+\ln x, 0\langle x\le 1\end{cases}$;

2. Monotonia şi convexitatea funcţiilor care admit primitive

Definiţie:

Fie f, F: I → R, unde F este o primitivă a lui f . Spunem că:

a) Orice primitivă F a lui f este crescătoare pe I dacă şi numai dacă $F^I(x)\geq 0,\ \forall x\in I$ **;**

b) Orice primitivă F a lui f este descrescătoare pe I dacă şi numai dacă $F^I(x)\leq 0,\ \forall x\in I$ **;**

c) Orice primitivă F a lui f este convexă pe I dacă şi numai dacă $F^{II}(x)\geq 0,\ \forall x\in I$ **;**

d) Orice primitivă F a lui f este concavă pe I dacă şi numai dacă $F^{II}(x)\leq 0,\ \forall x\in I$ **;**

Exemple:

a) Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2+4x+4$**. Să se arate că orice primitivă a funcţiei f este crescătoare pe** $\mathbb{R}$**.**

Rezolvare: Pentru orice primitivă F a lui f avem că $F^I(x)=f(x)=x^2+4x+4=(x+2)^2\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$, aşadar, F este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

b) Să se arate că orice primitivă a funcţiei $f:(0;\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=x^5-\frac{1}{x}+5^x$ este convexă pe $(0;\infty)$.

Rezolvare: Pentru orice primitivă F a lui f avem că $F^{II}(x)=f^I(x)=\left(x^5-\frac{1}{x}+5^x\right)^I=5x^4+\frac{1}{x^2}+5^x\ln 5\rangle 0,\ \forall x\in(0;\infty)$, aşadar, F este convexă pe $\mathbb{R}$.

Activitate independentă		**Răspuns**
Se consideră funcţia $f:(-2;\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{x+2}$. Să se arate că orice primitivă a lui f este concavă pe $(-2;\infty)$.		

Exercitii rezolvate

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=(x+2)^3-x^3$. **Să se arate că orice primitivă a funcţiei f este strict crescătoare pe** $\mathbb{R}$**.**

Rezolvare:

Cum $F^I(x)=f(x)=x^3+6x^2+12x+8-x^3=6x^2+12x+8$ este o funcţie de gradul al doilea care are $\Delta=b^2-4ac=144-192=-48\langle 0\Rightarrow$ F este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$.

2. Se consideră funcția $f:(0;\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$. **Să se arate că orice primitivă a funcției f este strict crescătoare pe** $(1;\infty)$**.**

Rezolvare: Cum $F^{I}(x)=f(x)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}\ \rangle\ 0,\ \forall x\in(1;\infty)\Rightarrow F$ este crescătoare pe $(1;\infty)$**.**

3. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x^2-3}{x^2+3}$**. Să se arate că orice primitivă F a funcției f este convexă pe** $(0;\infty)$**.**

Rezolvare: $F^{II}(x)\ =f^{I}(x)=\dfrac{(x^2-3)^{I}\cdot(x^2+3)-(x^2-3)(x^2+3)^{I}}{(x^2+3)^2}=\dfrac{12x}{(x^2+3)^2}\rangle\ 0,\forall x\in(0;\infty)$**.**

Exercitii propuse

1. Să se arate că orice primitivă a funcțiilor de mai jos sunt crescătoare pe domeniile date, D:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2+6x+9,\ \ D=(-3;\infty)$;

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3-6x^2+12x-8,\ \ D=(2;\infty)$;

c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^{2017}+2017^x,\ \ D=\mathbb{R}$;

d) $f:(0;\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{(x+1)^2},\ \ D=(0;\infty)$;

2. Să se arate că orice primitivă a funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^{x^{2012}}$ este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

3. Să se arate că orice primitivă a funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2\cdot e^x$ este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

4. Să se arate că orice primitivă a funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{x^2+2017}$ este crescăt. pe $(0;\infty)$;.

5. Fie $f,F:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=1+x+x^2+x^3,\ F(x)=\int_0^x f(t)dt$**.** Să se arate că F este crescătoare pe $\mathbb{R}$**.**

6. Fie $f:\mathbb{R}\setminus\{-3;-2\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{2x+5}{(x+2)(x+3)}$. Să se arate că orice primitivă a lui f e concavă pe $\mathbb{R}$.

7. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}x^3-3x+2, & x\le 1\\ \ln x, & x\ \rangle\ 1\end{cases}$**.** S. s. a.că orice primitivă a lui f este convexă pe $(1;\infty)$.

8. Fie $f,F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definite prin $f(x)=e^{-x},\ F(x)=\int_0^x f(t)dt$. Să se arate că $h(x)=F(x)-f(x)$ este concavă pe $\mathbb{R}$.

9. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=(x^2+1)\cdot e^x$. Să se arate că orice primitivă a lui f este convexă pe $\mathbb{R}$.

10. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3-3x^2-9x+1$. Să se demonstreze că orice primitivă a lui f este convexă pe $(0;\infty)$.

11. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{x^2+2017}$. Arătați că orice primitivă a lui f este convexă pe $(0;\infty)$.

12. Fie $f:\mathbb{R}-\{-3;-2\}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{2x+5}{(x+2)(x+3)}$; Să se arate că orice primitivă F a lui f este concavă pe $\mathbb{R}$.

13. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(x+1)^3-3x-1$; Să se arate că orice primitivă F a lui f este convexă pe $[0;\infty)$.

3. Integrala nedefinită

Definiţie:

Fie f: I $\to \mathbb{R}$ o funcţie care admite primitive. Mulţimea tuturor primitivelor lui f se numeşte **integrala nedefinită** a funcţiei f şi se notează prin simbolul $\int f(x)$ dx. Operaţia de calculare a primitivelor unei funcţii(care admite primitive) se numeşte **integrare**.

Fie F(I)= $\{f : I \to \mathbb{R}\}$ Pe această mulţime se introduc operaţiile :

(f+g)(x) =f(x)+ g(x) ,

(αf)(x)=α.f(x) $\forall \quad x \in \mathbb{R}$,α constantă

$C = \left\{ f : I \to \mathbb{R} \middle| f = functie\ cons\tan ta \right\}$ - clasa tuturor funcţiilor constante pe I.

$\int f(x)dx = \left\{ F \in F(I) \middle| F \ \ primitiva\ lui\ \ f \right\} + C$, **unde** $F(I) = \{F : I \to \mathbb{R}\}$.

REGULI DE INTEGRARE

Teorema atunci: **Dacă** $f, g : I \to \mathbb{R}$ **sunt funcţii care admit primitive pe I şi** $a \in \mathbb{R}^*$

1. $\int (f \pm g)dx = \int fdx + \int gdx$; **2.** $\int afdx = a\int fdx$;

3. $\int \left(a \cdot f(x) + b \cdot g(x)\right)dx = a \cdot \int f(x)dx + b \cdot \int g(x)dx.$.

De asemenea, $\int f^I(x)dx = f(x) + C$, $\left(\int f(x)dx\right)^I = f(x) + C$.

Primitivele funcţiilor continue simple

1. $\boxed{\int adx = ax + C,\ a \in \mathbb{R}}$

Exemple : a) $\int 6dx = 6x + C$; **b)** $\int \sqrt{3}dx = \sqrt{3}x + C$; **c)** $\int \frac{1}{3}dx = \frac{1}{3}x + C$;

2. $\boxed{\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C}$, $n \in \mathbb{N}$.

Exemple : a) $\int x^{10}dx = \frac{x^{11}}{11} + C$; **b)** $\int x^{2014}dx = \frac{x^{2015}}{2015} + C$; **c)** $\int 7 \cdot x^{25}dx = 7 \cdot \frac{x^{26}}{26} + C$.

3. $\boxed{\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C}$, $a \in \mathbb{Q}$.

Exemple : a) $\int x^{-10}dx = \frac{x^{-10+1}}{-10+1} + C = \frac{x^{-9}}{-9} + C = -\frac{1}{9x_9} + C$;

b) $\int \frac{1}{x^5}dx = \int x^{-5}dx = \frac{x^{-4}}{-4} + C = -\frac{1}{4}x^4 + C$;

c) $\int \sqrt[3]{x}dx = \int x^{\frac{1}{3}}dx = \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + C = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{4}\cdot\sqrt[3]{x^4} + C$;

4. $\boxed{\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C}$

Exemple: **a)** $\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$; **b)** $\int 5^x dx = \frac{5^x}{\ln 5} + C$; **c)** $\int 9^x dx = \frac{9^x}{\ln 9} + C$;

Un caz particular al formulei de mai sus este pentru funcția exponențială :

5. $\boxed{\int e^x dx = e^x + C}$;

Pentru funcțiile trigonometrice avem următoarele formule:

6. $\boxed{\int \sin x dx = -\cos x + C}$ **7.** $\boxed{\int \cos x dx = \sin x + C}$

8. $\boxed{\int tgx dx = -\ln|\cos x| + C}$ **9.** $\boxed{\int ctgx dx = \ln|\sin x| + C}$

10. $\boxed{\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -ctgx + C}$ **11.** $\boxed{\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tgx + C}$

Pentru funcții raționale avem următoarele formule:

12. $\boxed{\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C}$ **13.** $\boxed{\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C}$

14. $\boxed{\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C}$

Exemple: **a)** $\int \frac{1}{x^2 + 5^2} dx = \frac{1}{5} arctg \frac{x}{5} + C$; **b)** $\int \frac{1}{x^2 + 49} dx = \int \frac{1}{x^2 + 7^2} dx = \frac{1}{7} arctg \frac{x}{7} + C$;

15. $\boxed{\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C}$

Exemple : a) $\int \frac{1}{x^2 - 25} dx = \frac{1}{10} \ln\left|\frac{x-5}{x+5}\right| + C$;

b) $\int \frac{1}{x^2 - 49} dx = \int \frac{1}{x^2 - 7^2} dx = \frac{1}{2\cdot 7} \ln\left|\frac{x-7}{x+7}\right| + C$.

Pentru funcții iraționale avem următoarele formule:

16. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = \ln(x+\sqrt{a^2+x^2})+C$ **Exemplu :** $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+4^2}}dx = \ln(x+\sqrt{4^2+x^2})+C$.

17. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C$ **Exemplu :** $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-49}}dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2-49}\right|+C$.

18. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \arcsin\frac{x}{a}+C$ **Exemplu:** $\int \frac{1}{\sqrt{16-x^2}}dx = \arcsin\frac{x}{4}+C$.

19. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = \sqrt{x^2+a^2}+C$ **Exemplu :** $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+25}}dx = \sqrt{x^2+5^2}+C$.

20. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = \sqrt{x^2-a^2}+C$ **Exemplu :** $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-36}}dx = \sqrt{x^2-36}+C$.

21. $\int \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = -\sqrt{a^2-x^2}+C$ **Exemplu :** $\int \frac{x}{\sqrt{25-x^2}}dx = -\sqrt{25-x^2}+C$.

22. $\int \sqrt{x^2+a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+C$

Exemplu : $\int \sqrt{x^2+7}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+7}+\frac{7}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+7}\right|+C$.

23. $\int \sqrt{x^2-a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C$

Exemplu : $\int \sqrt{x^2-9}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-9}-\frac{9}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-9}\right|+C$.

24. $\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C$

Exemplu : $\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C$.

Teorema Fie $f, F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, unde F este primitiva lui f. Atunci, $\int f(x)dx = F(x)+C$, unde C este o familie infinită de constante.
Pentru determinarea lui F într-un caz particular scriem, $F(x)=\int f(x)dx+c,\ \ c\in\mathbb{R}$.

Exemplu:
Fie $f, F:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^{2018}+x+1$**. Să se determine primitiva F a lui f știind că F(1) =** $\frac{3}{2}$**.**

Rezolvare:

$F(x)=\int(x^{2018}+x+1)dx=\frac{x^{2019}}{2019}+\frac{x^2}{2}+x+c.$ Din

$F(1)=\frac{3}{2}\Rightarrow\frac{1}{2019}+\frac{1}{2}+1+c=\frac{3}{2}\Rightarrow c=-\frac{1}{2019}\Rightarrow$

$F(x)=\frac{x^{2019}}{2019}+\frac{x^2}{2}+x-\frac{1}{2019}$.

Activitate independentă	**Răspuns**
Determinaţi numărul real a, ştiind că $\int_0^a(x+2)dx=\int_0^{6-a}(x-2)dx$.	**a=1**

Exercitii rezolvate

1. a). $\int 10dx=10\cdot x+C$;

b). $\int x^4dx=\frac{x^{4+1}}{4+1}=\frac{x^5}{5}+C;$

c). $\int(2x^3+6x-5)dx=\frac{2\cdot x^4}{4}+\frac{6\cdot x^2}{2}-5x+C;$

d). $\int(x+3)^2dx=\int(x^2+6x+9)dx=\frac{x^3}{3}+^3\cancel{6}\cdot\frac{x^2}{\cancel{2}}+9x+C$;

e). $\int(x+3)(x-1)dx=\int(x^2+2x-3)dx=\frac{x^3}{3}+\cancel{2}\cdot\frac{x^2}{\cancel{2}}-3x+C;$

2. a). $\int x^{\frac{1}{4}}dx=\frac{x^{\frac{1}{4}+1}}{\frac{1}{4}+1}=\frac{x^{\frac{5}{4}}}{\frac{5}{4}}=\frac{4}{5}\cdot x^{\frac{5}{4}}+C$;

b). $\int x^{-8}dx=\frac{x^{-8+1}}{-8+1}=\frac{x^{-7}}{-7}=\frac{-1}{7}\cdot x^{-7}+C$;

c). $\int\left(\frac{1}{x^6}-\frac{1}{x^3}\right)dx=\int\left(x^{-6}-x^{-3}\right)dx=\frac{x^{-6+1}}{-6+1}-\frac{x^{-3+1}}{-3+1}=-\frac{1}{5}x^{-5}+\frac{1}{2}x^{-2}+C=-\frac{1}{5x^5}+\frac{1}{2x^2}+C$;

d). $\int\sqrt[3]{x^2}dx=\int x^{\frac{2}{3}}dx=\frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1}=\frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}=\frac{3}{5}\cdot\sqrt[3]{x^5}+C$;

e). $\int\frac{x^4-5x+3}{x}dx=\int(x^3-5+\frac{3}{x})=\frac{x^4}{4}-5x+3\ln|x|+C.$

3a). $\int 5^xdx=\frac{5^x}{\ln 5}+C$;

b). $\int 3\cdot 10^x dx = 3\cdot\frac{10^x}{\ln 10}+C$ **;**

c). $\int 2^x\cdot 5^x dx = \int 10^x dx = \frac{10^x}{\ln 10}+C$ **;**

d). $\int (8\cdot e^x - 9\cdot 2^x)dx = 8\cdot e^x - 9\cdot\frac{2^x}{\ln 2}+C$ **;**

e). $\int \frac{12^x-6^x}{3^x}dx = \int (4^x-2^x) = \frac{4^x}{\ln 4}-\frac{2^x}{\ln 2}+C$ **.**

4. a) . $\int \frac{1}{x^2-4}dx = \frac{1}{2\cdot 2}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+C;$

b). $\int \frac{1}{x^2+4}dx = \frac{1}{2}arctg\frac{x}{2}+C;$

c) . $\int \frac{1}{x^2-81}dx = \frac{1}{2\cdot 9}\ln\left|\frac{x-9}{x+9}\right|+C;$

d). $\int \frac{1}{x^2+49}dx = \frac{1}{7}arctg\frac{x}{7}+C;$

e). $\int \frac{7}{2x^2+72}dx = 7\cdot\int\frac{1}{2(x^2+6^2)}dx = 7\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}arctg\frac{x}{6}+C$ **.**

5. a). $\int (5\cdot\sin x + 2\cos x)dx = 5\cos x - 2\sin x + C;$

b). $\int (\sin^2 x+\cos^2 x)dx = \int 1dx = x+C;$

c). $\int \frac{\cos^{4x}-\sin^4 x}{\cos 2x}dx = \int \frac{\cancel{(\cos^2 x-\sin^2 x)}(\cos^2 x+\sin^2 x)}{\cancel{\cos 2x}} = \int 1dx = x+C$ **.**

6. Să se calculeze:

a) $\int (3x^5-2x^3+3x-2)dx,\ x\in\mathbb{R};$

b) $\int \frac{2x^3-4x^2+5x-3}{x^2}dx;$

c) $\int (x-1)(x-2)dx,\ x\in\mathbb{R};$

d) $\int (3^x+x^3)dx,\ x\in\mathbb{R};$

e) $\int (2\sqrt{x}-x\sqrt{x})dx,\ x\in[0;+\infty);$

f) $\int (\sqrt[3]{x^2}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}})dx,\ x\in I\subset\mathbb{R}-\{0\};$

g) $\int\left(\frac{3+2x}{x}\right)^2 dx, x\in I\subset\mathbb{R}-\{0\}$ **;**

Rezolvare: **a)** $\int (3x^5-2x^3+3x-2)dx = 3\frac{x^6}{6}-2\frac{x^4}{4}+\frac{3x^2}{2}-2x+C;$

b) $\int \frac{2x^3-4x^2+5x-3}{x^2}dx=\int\left(2x-4+5\cdot\frac{1}{x}-3\cdot\frac{1}{x^2}\right)dx=\frac{\cancel{2}x^{\cancel{2}}}{\cancel{2}}-4x+5\ln|x|-3\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)+C=$

$=x^2-4x+5\ln|x|+\frac{3}{x}+C.$

c) $\int(x-1)(x-2)dx=\int(x^2-3x+2)dx=\frac{x^3}{3}-3\frac{x^2}{2}+2x+C$;

d) $\int(3^x+x^3)dx=\frac{3^x}{\ln 3}+\frac{x^4}{4}+C$;

e) $\int(2\sqrt{x}-x\sqrt{x})dx=\int(2x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{3}{2}})dx=2\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}=\frac{4}{3}x\sqrt{x}-\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+C$;

f) $\int(\sqrt[3]{x^2}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}})dx=\int(x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{-1}{3}})dx=\frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}+\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+C$,

g) $\int\left(\frac{3+2x}{x}\right)^2dx=\int\frac{9+12x+4x^2}{x^2}dx=\int\left(\frac{9}{x^2}+\frac{12}{x}+4\right)dx=-9\cdot\frac{1}{x}+12\ln|x|+4x+C$;

7. Să se calculeze:

a) $\int(3\sin x+2\cos x)dx$; $x\in\mathbb{R}$;

b) $\int\frac{1}{x^2-9}dx$, $x\in I\subset(-\infty;-3)\cup(3;\infty)$, I interval;

c) $\int\frac{1}{4x^2-25}dx$; $x\in I\subset(-\infty;-\frac{5}{2})\cup(\frac{5}{2};\infty)$, I interval;

d) $\int\frac{1}{x^2+16}dx$, $x\in\mathbb{R}$;

e) $\int\frac{1}{x^2+5}dx$, $x\in\mathbb{R}$;

Rezolvare: **a)** $\int(3\sin x+2\cos x)dx=-3\cos x+2\sin x+C$;

b) $\int\frac{1}{x^2-9}dx=\int\frac{1}{x^2-3^2}dx=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|+C$;

c) $\int\frac{1}{4x^2-25}dx=\frac{1}{4}\int\frac{1}{x^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2}dx=\frac{1}{20}\ln\left|\frac{x-\frac{5}{2}}{x+\frac{5}{2}}\right|=\frac{1}{20}\ln\left|\frac{2x-5}{2x+5}\right|+C$;

d) $\int\frac{1}{x^2+16}dx=\int\frac{1}{x^2+4^2}dx=\frac{1}{4}arctg\frac{x}{4}+C$;

e) $\int\frac{1}{x^2+5}dx=\int\frac{1}{x^2+\left(\sqrt{5}\right)^2}dx=\frac{1}{\sqrt{5}}arctg\frac{x}{\sqrt{5}}+C$;

8. Să se calculeze:

a) $\int \sqrt{x^2-16}\,dx$, $x\in[4;\infty)$; **b)** $\int \sqrt{x^2+3}\,dx$, $x\in\mathbb{R}$;

Rezolvare: a) $\int \sqrt{x^2-16}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-16}-\frac{16}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-16}\right|+C$;

b) $\int \sqrt{x^2+3}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+3}+\frac{3}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+3}\right)+C$.

9. Fie $f,F:(0;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+\frac{1}{x^3}$. Să se determine primitiva F a lui f știind că F(1) = 0.

Rezolvare:

$F=\int f(x)dx=\int(x^3+\frac{1}{x^3})dx=\frac{x^4}{4}-\frac{1}{2x^2}+C$. Cum F(1)=0 rezultă $\frac{1}{4}-\overset{2)}{}\frac{1}{2}+C=0\Rightarrow C=\frac{1}{4}$.

Așadar, primitiva lui f este $F=\frac{x^4}{4}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{4}$.

Exercitii propuse

1. Să se calculeze:

a) $\int(4x^3-3x^2+5)dx$, $x\in\mathbb{R}$; b) $\int(2x^2-4x+3)dx$, $x\in\mathbb{R}$; c) $\int(x^4-6x^2+2)dx$, $x\in\mathbb{R}$;

d) $\int(x^3-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2})dx$, $x\in I\subset\mathbb{R}-\{0\}$, I interval; e) $\int(2x+\frac{5}{x}-\frac{4}{x^2})dx$, $x\in I\subset\mathbb{R}-\{0\}$;

f) $\int(1+x^{-2}+x^{-4})dx$, $x\in I\subset\mathbb{R}-\{0\}$; g) $\int x(x-3)dx$, $x\in\mathbb{R}$; h) $\int(x+2)(2x-1)dx$, $x\in\mathbb{R}$;

i) $\int(x^5+5^x)dx$, $x\in\mathbb{R}$; j) $\int(e^x+\frac{1}{e^x})dx$, $x\in\mathbb{R}$; k) $\int(2x+1)^2dx$, $x\in\mathbb{R}$;

l) $\int(3x-2)^2dx$, $x\in\mathbb{R}$; m) $\int(x+3)^3dx$, $x\in\mathbb{R}$; n) $\int(x-2)^3dx$, $x\in\mathbb{R}$;

o) $\int\left(\frac{5+4x}{x}\right)^2dx$, $x\in I\subset\mathbb{R}-\{0\}$; p) $\int\frac{(x+2)^3}{x^3}dx$, $x\in I\subset\mathbb{R}-\{0\}$; q) $\int 3^x\cdot5^x dx$, $x\in\mathbb{R}$;

2. Să se calculeze:

a) $\int(2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x})dx$, $x\in(0;\infty)$; b) $\int(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)dx$, $x\in(0;\infty)$;

c) $\int(\frac{1}{x\sqrt{x}}+x\sqrt[3]{x^2})dx$, $x\in(0;\infty)$; d) $\int\left(\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$, $x\in(0;\infty)$;

3. Să se calculeze:

a) $\int \frac{1}{x^2+25}dx,\ x\in\mathbb{R};$ b) $\int \frac{1}{x^2+36}dx,\ x\in\mathbb{R};$

c) $\int \frac{1}{x^2+8}dx,\ x\in\mathbb{R};$ d) $\int \frac{1}{9x^2+4}dx,\ x\in\mathbb{R};$

e) $\int \frac{1}{x^2-49}dx,\ x\in I\subset(-\infty;-7)\cup(7;\infty)$, I interval; f) $\int \frac{1}{x^2-100}dx,$

$x\in I\subset(-\infty;-10)\cup(10;\infty);$

g) $\int \frac{1}{x^2-8}dx,\ x\in I\subset(-\infty;-2\sqrt{2})\cup(2\sqrt{2};\infty);$ h) $\int \frac{1}{16x^2-9}dx,$

$x\in I\subset(-\infty;-\frac{3}{4})\cup(\frac{3}{4};\infty);$

4. Să se calculeze:

a) $\int(5\sin x-4\cos x)dx, x\in\mathbb{R};$ b) $\int(tgx+ctgx)dx,\ x\in(0;\frac{\pi}{2});$

c) $\int\frac{1+\cos^2 x}{\cos 2x+1}dx, x\in(0;\frac{\pi}{2});$ d) $\int\frac{1}{\sin^2 x+\cos^2 x}dx, x\in\mathbb{R};$

e) $\int\frac{1}{\cos 2x+\sin^2 x}dx, x\in(0;\frac{\pi}{2});$ f) $\int\frac{1}{\sin x\cdot\cos x}dx, x\in(0;\frac{\pi}{2});$

g) $\int\frac{1}{\sin 2x}dx, x\in(0;\frac{\pi}{2});$ h) $\int(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2})^2dx,\ x\in\mathbb{R};$

i) $\int\frac{\sin 2x}{\sin x}dx,\ x\in(0;\frac{\pi}{2});$ j) $\int\frac{1}{\cos 2x-1}dx,\ x\in(0;\frac{\pi}{2});$

5. Fie $f,F:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=e^x+3x^2$. Să se determine primitiva F a lui f știind că F(0) = 2.

6. Fie $f,F:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2\sin x+\cos x$. Să se determine primitiva F a lui f știind că $F(\pi)=0.$

7. Fie $f,F:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{x^2+16}$. Să se determine primitiva F a lui f știind că $F(4)=\frac{\pi}{16}..$

8. Fie $f,F:(0;\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{x}-2017.$ Să se determine primitiva F a lui f știind că $F(1)=0.$

9. Fie $f,F:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x(x+2)(x-2).$ Să se determine primitiva F a lui f știind că $F(1)=\frac{1}{4}.$

10. Fie $f,F:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{x}{x^2+1}.$ Să se determine primitiva F a lui f știind că $F(1)=\ln\sqrt{2}.$

11. Fie $f,F:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=e^x+3x^2$. Să se determine primitiva F a lui f știind că F(0) = 2.

12. Fie $f, F:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2\sin x+\cos x$. Să se determine primitiva F a lui f știind că $F(\pi)=0.$

13. Fie $f, F:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1}{x^2+16}$. Să se determine primitiva F a lui f știind că $F(4)=\dfrac{\pi}{16}.$

14*. Să se calculeze:

a) $\int\sqrt{x^2-25}\ dx, x\in I\subset(-\infty;-5)\cup(5;\infty)$;

b) $\int\sqrt{x^2-7}\ dx,\ x\in(\sqrt{7};\infty)$;

c) $\int\sqrt{x^2+9}\ dx,\ x\in\mathbb{R}$;

d) $\int\sqrt{x^2+3}\ dx, x\in\mathbb{R}$;

e) $\int\sqrt{9-x^2}\ dx,\ x\in(-3;3)$;

f) $\int\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx, x\in\mathbb{R}$;

g) $\int\dfrac{1}{\sqrt{x^2+9}}dx, x\in\mathbb{R}$;

h) $\int\dfrac{1}{\sqrt{x^2-9}}dx\ x\in I\subset(-\infty;-3)\cup(3;\infty)$;

i) $\int\dfrac{1}{\sqrt{x^2-5}}dx;\ x\in(\sqrt{5};\infty)$;

j) $\int\dfrac{1}{\sqrt{49-x^2}}dx,\ x\in(-7;7)$;

k) $\int\dfrac{1}{\sqrt{6-x^2}}dx,\ x\in(-\sqrt{6};\sqrt{6})$;

l) $\int\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}dx,$

$x\in I\subset(-\infty;-1)\cup(1;\infty)$; m) $\int\dfrac{x^2+3}{\sqrt{x^2+2}}dx,\ x\in\mathbb{R}$;

4. Integrarea funcţiilor raţionale

Definiţie:

O funcţie f:I→R , I interval, se numeşte **raţională** dacă R(x)= $\frac{f(x)}{g(x)}, g(x)\neq 0, x\in I,$ unde f,g sunt funcţii polinomiale.

Dacă grad f ≥grad g, atunci se efectuează împărţirea lui f la g ⇒f=gq+r, 0≤grad r<grad g şi deci $R(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=q(x)+\frac{r(x)}{g(x)}$. Pentru $\frac{r(x)}{g(x)}$ se face scrierea ca sumă de fracţii rationale simple.

Atunci, $\int\frac{f(x)}{g(x)}dx=\int\left(c(x)+\frac{r(x)}{g(x)}\right)dx$ **unde c(x) şi respectiv r(x) sunt câtul şi respectiv restul împărţirii lui f(x) la g(x).**

Reamintim câteva dintre formulele din lecţiile anterioare:

1. $\int\frac{1}{ax+b}dx=\frac{1}{a}\ln|ax+b|+C$ **Exemplu** $\int\frac{1}{2x-7}dx=\frac{1}{2}\ln|2x-7|+C$

2* $\int\frac{1}{(ax+b)^n}dx=-\frac{1}{(n-1)(ax+b)^{n-1}}\cdot\frac{1}{a}+C$ **Exemplu:** $\int\frac{1}{(3x+8)^7}dx=-\frac{1}{6(3x+8)^6}\cdot\frac{1}{3}+C$

3. $\int\frac{1}{x^2+a^2}dx=\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+C$ **Exemplu:** $\int\frac{1}{x^2+5^2}dx=\frac{1}{5}arctg\frac{x}{5}+C$

4. $\int\frac{1}{x^2-a^2}dx=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$ **Exemplu:** $\int\frac{1}{x^2-25}dx=\frac{1}{10}\ln\left|\frac{x-5}{x+5}\right|+C$

5*. $\int\frac{1}{(x^2+a^2)^2}dx=\frac{1}{a^2}\int\frac{x^2+a^2-x^2}{\left(x^2+a^2\right)^2}+C=\frac{1}{a^2}\int\frac{1}{x^2+a^2}dx-\frac{1}{a^2}\int x\cdot\left(\frac{-1}{2\left(x^2+a^2\right)}\right)'dx$

Exemplu:

$$\int\frac{1}{(x^2+16)^2}dx=\int\frac{x^2+16-x^2}{\left(x^2+16\right)^2}+C=\frac{1}{16}\int\frac{1}{x^2+16}dx-\frac{1}{16}\int x\cdot\left(\frac{-1}{2\left(x^2+16\right)}\right)'dx=$$

$$=\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{4}arctg\frac{x}{4}-\frac{1}{16}[-\frac{x}{2x^2+32}+\int\frac{1}{2(x^2+4^2)}]$$

6. $\boxed{\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx = \begin{cases} \int \frac{1}{a[(x+\frac{b}{2a})^2-(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a})^2]}dx, & \Delta\rangle 0 \\ \int \frac{1}{a[(x+\frac{b}{2a})^2+(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a})^2]}dx, & \Delta\langle 0 \end{cases}}$

Exemplu:

$$\int \frac{1}{4x^2-5x+1}dx = \int \frac{1}{4\left[\left(x-\frac{5}{8}\right)^2-\left(\frac{3}{8}\right)^2\right]}dx = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2\cdot\frac{3}{8}}\ln\left|\frac{x-\frac{5}{8}-\frac{3}{8}}{x-\frac{5}{8}+\frac{3}{8}}\right|+C = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{8x-8}{8x-2}\right|+C$$

Exemplu: $\int \frac{1}{x^2+4x+5}dx = \int \frac{1}{(x+2)^2+1}dx = arctg(x+2)+C$

7. $\boxed{\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx = \ln\left|ax^2+bx+c\right|+C}$ **Exemplu:**

$$\int \frac{8x-6}{4x^2-6x+7}dx = \ln\left|4x^2-6x+7\right|+C$$

8*. $\boxed{\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx = \int \frac{m(2ax+b)+n}{ax^2+bx+c}dx = m\cdot\ln\left|ax^2+bx+c\right|+n\cdot\int\frac{1}{ax^2+bx+c}dx}$

Exemplu:

$$\int \frac{3x+4}{2x^2+5x-4}dx = \int \frac{\frac{3}{4}\cdot(4x+5)+4-\frac{15}{4}}{2x^2+5x-4}dx = \frac{3}{4}\ln\left|2x^2+5x-4\right|+\frac{1}{4}\int\frac{1}{2x^2+5x-4}dx =$$

$$= \frac{3}{4}\ln\left|2x^2+5x-4\right|+\frac{1}{4}\int \frac{1}{2\left[\left(x+\frac{5}{4}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{57}}{4}\right)^2\right]}dx = \frac{3}{4}\ln\left|2x^2+5x-4\right|+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot\frac{\sqrt{57}}{4}}\ln\left|\frac{4x+5-\sqrt{57}}{4x+5+\sqrt{57}}\right|+C$$

Integrarea funcțiilor raționale cînd $grad(f)\langle grad(g)$

Să se calculeze integralele din funcţii raţionale utilizând descompunerea în fracţii simple:

a) $\int \frac{x+1}{(x+2)\cdot(x+5)}dx$**; b)** $\int \frac{x}{x^2-8x+7}dx$**; c)** $\int \frac{x-2}{x(x+1)\cdot(x+3)}dx$**;**

Rezolvare:

a) În general dacă numitorul are doi factori liniari atunci fracţia se va descompune în două fracţii simple: $\frac{x+1}{(x+2)\cdot(x+5)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x+5}$. După ce se aduce la acelaşi numitor se obţine:

$x+1=(x+5)A+(x+2)B$, după care vom da valori lui x pentru a afla mai uşor pe A şi B.

$x\to -2\Rightarrow -1=3A\Rightarrow A=-\frac{1}{3}$; $\quad x\to -5\Rightarrow -4=-3B\Rightarrow B=\frac{4}{3}$.

Aşadar, $\int\frac{x+1}{(x+2)\cdot(x+5)}dx=\int\left(-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+2}+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{x+5}\right)dx=-\frac{1}{3}\ln|x+2|+\frac{4}{3}\ln|x+5|+C$;

b) Dacă numitorul se poate descompune în factori liniari cum este cazul nostru $x^2-8x+7=(x-1)(x-7)$ atunci descompunerea în fracţii simple are forma:

$\frac{x}{x^2-8x+7}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-7}$; După aducerea la acelaşi numitor rezultă:

$x=(x-7)A+(x-1)B$.

Pentru a afla pe A şi B se dau valori lui x:

$x\to 1\Rightarrow 1=-6A\Rightarrow A=-\frac{1}{6}$, $\quad x\to 7\Rightarrow 7=6B\Rightarrow B=\frac{7}{6}$;

Aşadar, $\int\frac{x}{x^2-8x+7}dx=\int\left(-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x-1}+\frac{7}{6}\cdot\frac{1}{x-7}\right)=-\frac{1}{6}\ln|x-1|+\frac{7}{6}\ln|x-7|+C$;

c) $\frac{x-2}{x(x+1)\cdot(x+3)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x+3}\Rightarrow x-2=(x+1)(x+3)A+x(x+3)B+x(x+1)C$

$x\to 0\Rightarrow -2=3A\Rightarrow A=-\frac{2}{3}$, $\quad x\to -1\Rightarrow -3=-2B\Rightarrow B=\frac{3}{2}$, $\quad x\to -3\Rightarrow -5=6C\Rightarrow C=-\frac{5}{6}$

$\int\frac{x-2}{x(x+1)\cdot(x+3)}dx=-\frac{2}{3}\int\frac{1}{x}dx+\frac{3}{2}\int\frac{1}{x+1}dx-\frac{5}{6}\int\frac{1}{x+3}dx=-\frac{2}{3}\ln|x|+\frac{3}{2}\ln|x+1|-\frac{5}{6}\ln|x+3|+C$

Integrarea funcţiilor raţionale când $grad(f)\ \geq\ grad(g)$

Definiţie:

Dacă grad f ≥ grad g, atunci se efectuează împărţirea lui f la g ⇒ f=gq+r, 0≤ grad r < grad g şi deci $R(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=q(x)+\frac{r(x)}{g(x)}$. Pentru $\frac{r(x)}{g(x)}$ se face scrierea ca sumă de fracţii raţionale simple.

Să se calculeze integralele din funcţii rationale:

a) $\int\frac{(x+1)^2}{x-1}dx$; **b)** $\int\frac{x^2-3x+2}{x+2}dx$; **c)** $\int\frac{x^3+2x+4}{x-1}dx$; **d)** $\int\frac{2x^2-4x+3}{x+1}dx$;

Rezolvare:

În general când nu se pot folosi descompunerile se fac împărţirile polinoamelor:

a) $\int \frac{(x+1)^2}{x-1}dx = \int \frac{x^2+2x+1}{x-1}dx = \int\left(x+3+\frac{4}{x-1}\right)dx = \frac{x^2}{2}+3x+4\ln|x-1|+C$; S-a efectuat împărţirea polinomului X^2+2X+1 la X- 1;

b) $\int \frac{x^2-3x+2}{x+2}dx = \int\left(x-5+\frac{12}{x+2}\right)dx = \frac{x^2}{2}-5x+12\ln|x+2|+C$;

c) $\int \frac{x^3+2x+4}{x-1}dx = \int\left(x^2+x+3+\frac{7}{x-1}\right)dx = \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+3x+7\ln|x-1|+C$;

d) $\int \frac{2x^2-4x+3}{x+1}dx = \int\left(2x-6+\frac{9}{x+1}\right)dx = x^2-6x+9\ln|x+1|+C$;

Exercitii rezolvate

1. $\int \frac{1}{2x-7}dx = \frac{1}{2}\ln|2x-7|+C$;

2. $\int \frac{1}{(3x+8)^7}dx = -\frac{1}{6(3x+8)^6}\cdot\frac{1}{3}+C$;

3. $\int \frac{1}{x^2+5^2}dx = \frac{1}{5}arctg\frac{x}{5}+C$;

4. $\int \frac{1}{x^2-25}dx = \frac{1}{10}\ln\left|\frac{x-5}{x+5}\right|+C$;

5. $\int \frac{8x-6}{4x^2-6x+7}dx = \ln|4x^2-6x+7|+C$;

6. $\int \frac{1}{4x^2-5x+1}dx = \int \frac{1}{4\left[\left(x-\frac{5}{8}\right)^2-\left(\frac{3}{8}\right)^2\right]}dx = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2\cdot\frac{3}{8}}\ln\left|\frac{x-\frac{5}{8}-\frac{3}{8}}{x-\frac{5}{8}+\frac{3}{8}}\right|+C = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{8x-8}{8x-2}\right|+C$;

7. Să se calculeze integralele din funcţii raţionale:

a) $\int \frac{x+3}{x-4}dx$; **b)** $\int \frac{x^2-2}{x^2-16}dx$; **c)** $\int \frac{1}{(x+3)(x+5)}dx$; **d)** $\int \frac{1}{x^2-8x+12}dx$;

Rezolvare: La unele integrale unde este posibil se poate scrie numărătorul în funcţie de numitor, integrala calculându-se mult mai uşor după ce se efectuează împărţirea:

a) $\int \frac{x+3}{x-4}dx = \int \frac{x-4+7}{x-4}dx = \int (1+\frac{7}{x-4})dx = x+7\ln|x-4|+C$;

b) $\int \frac{x^2-2}{x^2-16}dx = \int \frac{x^2-16+14}{x^2-16}dx = \int (1+\frac{14}{x^2-16})dx = x+14\cdot\frac{1}{8}\ln\left|\frac{x-4}{x+4}\right|+C$;

c)

$$\int \frac{1}{(x+3)(x+5)}dx = \int \frac{1}{2}\cdot\frac{(x+5)-(x+3)}{(x+3)(x+5)}dx = \frac{1}{2}\left(\int \frac{1}{x+3}dx - \int \frac{1}{x+5}dx\right) = \frac{1}{2}\left(\ln|x+3|-\ln|x+5|\right) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+3}{x+5}\right|+C$$

d) Dacă numărătorul este o constantă iar numitorul se poate descompune în factori liniari atunci fără a aplica formula se va descompune fracţia în fracţii simple după cum urmează:

$$\int \frac{1}{x^2-8x+12}dx = \int \frac{1}{(x-2)(x-6)}dx = \int \frac{1}{4}\cdot\frac{(x-2)-(x-6)}{(x-2)(x-6)}dx = \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{x-6}-\frac{1}{x-2}\right)dx = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-6}{x-2}\right|+C$$

8*.

$$\int \frac{3x+4}{2x^2+5x-4}dx = \int \frac{\frac{3}{4}\cdot(4x+5)+4-\frac{15}{4}}{2x^2+5x-4}dx = \frac{3}{4}\ln\left|2x^2+5x-4\right| + \frac{1}{4}\int \frac{1}{2x^2+5x-4}dx =$$

$$= \frac{3}{4}\ln\left|2x^2+5x-4\right| + \frac{1}{4}\int \frac{1}{2\left[\left(x+\frac{5}{4}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{57}}{4}\right)^2\right]}dx = \frac{3}{4}\ln\left|2x^2+5x-4\right| + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot\frac{\sqrt{57}}{4}}\ln\left|\frac{4x+5-\sqrt{57}}{4x+5+\sqrt{57}}\right| + C$$

9*. $$\int \frac{1}{(x^2+16)^2}dx = \int \frac{x^2+16-x^2}{\left(x^2+16\right)^2} + C = \frac{1}{16}\int \frac{1}{x^2+16}dx - \frac{1}{16}\int x\cdot\left(\frac{-1}{2\left(x^2+16\right)}\right)'dx =$$

$$= \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{4}\,arctg\,\frac{x}{4} - \frac{1}{16}\left[-\frac{x}{2x^2+32} + \int \frac{1}{2(x^2+4^2)}\right]$$

Exercitii propuse

1. Să se calculeze:

a) $\int \frac{1}{2x-8}dx$; **b)** $\int \frac{1}{3x+6}dx$; **c)** $\int \frac{1}{(2x+7)^6}dx$; **d)** $\int \frac{1}{(x-4)^9}dx$;

e) $\int \frac{1}{(2x+3)^{2012}}dx$; **f)** $\int \frac{x}{x+4}dx$; **g)** $\int \frac{x-5}{x+3}dx$; **h)** $\int \frac{2x+3}{2x+1}dx$;

i) $\int \frac{x+10}{x+6}dx$; **j)** $\int \frac{1-3x}{2x+3}dx$; **k)** $\int \frac{1}{x^2-9}dx$; **l)** $\int \frac{1}{x^2+4}dx$;

m) $\int \frac{1}{2x^2+50}dx$; **n)** $\int \frac{1}{3x^2-48}dx$ **o).** $\int \frac{1}{3x^2+5}dx$; **p).** $\int \frac{x^2}{x^2-2}dx$;

q). $\int \frac{x^2}{x^2+1}dx$; **r)** $\int \frac{x^2-5}{x^2-4}dx$; **s)** $\int \frac{5x-2}{x^2+4}dx$;

2. Să se calculeze:

a) $\int \frac{1}{3x^2+x+1}dx$; **b)** $\int \frac{1}{x^2-2x+5}dx$; **c)** $\int \frac{1}{x^2-3x+3}dx$; **d)** $\int \frac{1}{2x^2-4x+1}dx$;

e) $\int \frac{4x-3}{2x^2-3x+1}dx$; **f)** $\int \frac{6x-2}{3x^2-2x+5}dx$; **g)** $\int \frac{x+1}{x^2+2x+10}dx$; **h)** $\int \frac{2x+4}{x^2+4x+8}dx$;

3. Să se calculeze:

a) $\int \frac{x^3}{x-2}dx$; **b)** $\int \frac{x^4}{x+3}dx$; **c)** $\int \frac{x^3+1}{x+1}dx$; **d)** $\int \frac{x^3-8}{x-2}dx$;

e) $\int \frac{x^2+3}{x+2}dx$; **f)** $\int \frac{x^3+5}{x-2}dx$; **g)** $\int \frac{x^2+1}{x-1}dx$; **h)** $\int \frac{x^2+5x+7}{x+3}dx$;

i) $\int \frac{x^4+x+1}{x-1}dx$; **j)** $\int \frac{2x^3-3x+1}{x+1}dx$;

4. Să se calculeze utilizând descompunerea în fracţii simple:

a) $\int \frac{1}{x(x+2)}dx$; **b)** $\int \frac{1}{(x+1)(x+2)}dx$; **c)** $\int \frac{1}{(x-1)(x-2)}dx$; **e)** $\int \frac{1}{(x+2)\cdot(x+5)}dx$;

f) $\int \frac{1}{x(x+1)(x+2)}dx$; **g)** $\int \frac{x-4}{(x-2)\cdot(x-3)}dx$; **h)** $\int \frac{x}{(x+1)(x+3)(x+5)}dx$; **i)** $\int \frac{1}{x^2-2x}dx$;

j) $\int \frac{1}{x^2+4x}dx$; **k)** $\int \frac{x^2+x+2}{(x+1)(x^2+1)}dx$; **l)** $\int \frac{x}{x^2-6x+5}dx$; **m)** $\int \frac{(x+1)^3}{x^2-x}dx$;

n) $\int \frac{1}{x^2-3x+2}dx$; **o)** $\int \frac{1}{2x^2-x-3}dx$; **p)** $\int \frac{3x-2}{x^2-5x+6}dx$; **q)** $\int \frac{1}{6x^3-7x^2-3x}dx$;

r) $\int \frac{x^2-3x+2}{x^3+2x^2+x}dx$; **s)** $\int \frac{x^3-2x^2+4}{x^2(x-2)^2}dx$; **t)** $\int \frac{1}{x^4-x^2}dx$;

II. Integrala definită.

1. Integrala definită. Formula Leibniz – Newton

Definiţie: Formula Leibniz – Newton

Fie $f:[a;b]\to\mathbb{R},\ a<b$**, f continuă şi** $F:[a;b]\to\mathbb{R}$ **o primitivă a sa.**

Numărul $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$ **se numeşte integrala definită a funcţiei f.**

Integralele definite din funcţii continue

1. $\int cdx = c\cdot x + C,\ \ c\in R$ $\qquad \int_0^1 8dx = 8x\Big|_0^1 = 8;$

2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ $\qquad \int_1^2 x^6 dx = \frac{x^7}{7}\Big|_1^2 = \frac{2^7}{7} - \frac{1^7}{7} = \frac{127}{7};$

3. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ $\qquad \int_0^1 \sqrt{x}dx = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{2}{3};$

$\int_1^2 \frac{1}{x^4}dx = \int_1^2 x^{-4}dx = \frac{x^{-3}}{-3}\Big|_1^2 = -\frac{1}{24} + \frac{1}{3} = \frac{7}{24};$

4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ $\qquad \int_1^2 5^x dx = \frac{5^x}{\ln 5}\Big|_0^1 = \frac{5}{\ln 5} - \frac{1}{\ln 5} = \frac{4}{\ln 5};$;

5. $\int e^x dx = e^x + C$ $\qquad \int_0^1 e^x dx = e^x\Big|_0^1 = e^1 - e^0 = e-1;$

6. $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$ $\qquad \int_1^e \frac{1}{x}dx = \ln|x|\Big|_1^e = \ln e - \ln 1 = 1;$

7. $\int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x} + C$ $\qquad \int_1^2 \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x}\Big|_1^2 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2};$

8. $\int \sin x dx = -\cos x + C$ $\qquad \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x dx = -\cos x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = -\cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2};$

9. $\int \cos x dx = \sin x + C$ $\qquad \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos x dx = \sin x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{2};$

10. $\boxed{\int tgxdx = -\ln|\cos x| + C}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} tgxdx = -\ln|\cos x|\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = -\left(\ln(\cos\frac{\pi}{3}) - \ln(\cos 0)\right) = -(\ln\frac{1}{2} - \ln 1) = -\ln\frac{1}{2} = \ln 2$$

11. $\boxed{\int ctgxdx = \ln|\sin x| + C}$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} ctgxdx = \ln|\sin x|\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} = \ln(\sin\frac{\pi}{6}) - \ln(\sin\frac{\pi}{2}) = \ln\frac{1}{2} - \ln 1 = -\ln 2\,;$$

12. $\boxed{\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -ctgx + C}$ $\quad \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin^2 x}dx = -ctgx\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} = -ctg\frac{\pi}{4} + ctg\frac{\pi}{2} = -1 + 0 = -1\,;$

13. $\boxed{\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = tgx + C}$ $\quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}dx = tgx\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = tg\frac{\pi}{4} - tg0 = 1 - 0 = 1\,;$

14. $\boxed{\int \frac{1}{x^2 + a^2}dx = \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a} + C}$ $\quad \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 5^2}dx = \frac{1}{5}arctg\frac{x}{5}\Big|_0^1 = \frac{1}{5}arctg\frac{1}{5}\,;$

15. $\boxed{\int \frac{1}{x^2 - a^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C}$ $\quad \int_0^1 \frac{1}{x^2 - 25}dx = \frac{1}{10}\ln\left|\frac{x-5}{x+5}\right|\Big|_0^1 = \frac{1}{10}\ln\frac{4}{6} - \frac{1}{10}\ln 1 = \frac{1}{10}\ln\frac{2}{3}\,;$

16. $\boxed{\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C}$ $\quad \int_0^1 \frac{1}{3x+7}dx = \frac{1}{3}\ln|3x+7|\Big|_0^1 = \frac{1}{3}(\ln 10 - \ln 7) = \frac{1}{3}\ln\frac{10}{7}\,;$

17. $\boxed{\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx = \ln|ax^2+bx+c| + C}$ $\quad \int_0^1 \frac{6x+5}{3x^2+5x+8}dx = \ln|3x^2+5x+8|\Big|_0^1 = \ln 16 - \ln 8 = \ln 2$

18. $$\boxed{\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx = \begin{cases} \displaystyle\int \frac{1}{a[(x+\frac{b}{2a})^2 - (\frac{\sqrt{\Delta}}{2a})^2]}dx, & \Delta > 0 \\ \displaystyle\int \frac{1}{a[(x+\frac{b}{2a})^2 + (\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a})^2]}dx, & \Delta < 0 \end{cases}}$$

$$\int \frac{1}{2x^2+x+2}dx = \int \frac{1}{2[(x+\frac{1}{4})^2 + (\frac{\sqrt{15}}{4})^2]}dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{\sqrt{15}}arctg\frac{x+\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{15}}{4}} + C\,;$$

Activitate independentă	**Răspuns**
Să se calculeze $\int_0^3 \frac{x^2+10}{x^2+9}dx$.	$3 + \frac{\pi}{12}$

Exercitii rezolvate

1. $\int 10dx = 10\cdot x + C$; $\int_0^1 10dx = 10x\Big|_0^1 = 10\cdot 1 - 10\cdot 0 = 10$;

2. $\int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + C$; $\int_0^1 x^4 dx = \frac{x^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{1^5}{5} - \frac{0^5}{5} = \frac{1}{5}$;

3. $\int (2x^3 + 6x - 5)dx = \frac{2\cdot x^4}{4} + \frac{6\cdot x^2}{2} - 5x + C$;

$\int_0^1 (2x^3 + 6x - 5)dx = (\frac{\cancel{2}\cdot x^4}{\cancel{4}_2} + \frac{\cancel{6}\cdot x^2}{\cancel{2}} - 5x)\Big|_0^1 = \frac{1^4}{2} + 3\cdot 1^2 - 5\cdot 1 = \frac{1}{2} - 2 = \frac{-3}{2}$.

4. $\int (x+3)^2 dx = \int (x^2 + 6x + 9)dx$;

$\int_0^1 (x+3)^2 dx = \int_0^1 \left(x^2 + 6x + 9\right)dx = \left(\frac{x^3}{3} + \cancel{3}\cdot\frac{x^2}{\cancel{2}} + 9x\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3} + 3\cdot 1^2 + 9\cdot 1 = \frac{1}{3} + {}^{3)}12 = \frac{37}{3}$

5. $\int x^{\frac{1}{4}} dx = \frac{x^{\frac{1}{4}+1}}{\frac{1}{4}+1} = \frac{x^{\frac{5}{4}}}{\frac{5}{4}} = \frac{4}{5}\cdot x^{\frac{5}{4}} + C$; $\int_0^1 x^{\frac{1}{4}} dx = \frac{x^{\frac{1}{4}+1}}{\frac{1}{4}+1}\Big|_0^1 = \frac{x^{\frac{5}{4}}}{\frac{5}{4}}\Big|_0^1 = \frac{4}{5}\cdot x^{\frac{5}{4}}\Big|_0^1 = \frac{4}{5}$;

6. $\int x^{-8} dx = \frac{x^{-8+1}}{-8+1} = \frac{x^{-7}}{-7} = \frac{-1}{7}\cdot x^{-7} + C$;

$\int_1^2 x^{-8} dx = \frac{x^{-8+1}}{-8+1}\Big|_1^2 = \frac{x^{-7}}{-7}\Big|_1^2 = \frac{-1}{7}\cdot(2^{-7} - 1^{-7}) = -\frac{1}{7\cdot 128} + \frac{1}{7} = \frac{127}{7\cdot 128}$.

7. $\int\left(\frac{1}{x^6} - \frac{1}{x^3}\right)dx = \int\left(x^{-6} - x^{-3}\right)dx = \frac{x^{-6+1}}{-6+1} - \frac{x^{-3+1}}{-3+1} = -\frac{1}{5}x^{-5} + \frac{1}{2}x^{-2} + C = -\frac{1}{5x^5} + \frac{1}{2x^2} + C$;

$\int_1^2\left(\frac{1}{x^6} - \frac{1}{x^3}\right)dx = \left(-\frac{1}{5x^5} + \frac{1}{2x^2}\right)\Big|_1^2 = -\frac{1}{5\cdot 32} + {}^{20)}\frac{1}{2\cdot 4} = \frac{19}{160}$.

8. $\int \sqrt[3]{x^2}dx = \int x^{\frac{2}{3}}dx = \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} = \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5}\cdot\sqrt[3]{x^5} + C$. $\int_0^1 \sqrt[3]{x^2}dx = \frac{3}{5}\cdot\sqrt[3]{x^5}\Big|_0^1 = \frac{3}{5}$.

9. $\int 5^x dx = \frac{5^x}{\ln 5} + C$; $\int_0^1 5^x dx = \frac{5^x}{\ln 5}\Big|_0^1 = \frac{5^1}{\ln 5} - \frac{5^0}{\ln 5} = \frac{4}{\ln 5}$;

10. $\int 2^x\cdot 5^x dx = \int 10^x dx = \frac{10^x}{\ln 10} + C$; $\int_0^1 2^x\cdot 5^x dx = \frac{10^x}{\ln 10}\Big|_0^1 = \frac{10-1}{\ln 10} = \frac{9}{\ln 10}$.

11. $\int (8\cdot e^x - 9\cdot 2^x)dx = 8\cdot e^x - 9\cdot\frac{2^x}{\ln 2} + C$;

$\int_0^1 (8\cdot e^x - 9\cdot 2^x)dx = (8\cdot e^x - 9\cdot\frac{2^x}{\ln 2})\Big|_0^1 = 8(e^1 - e^0) - \frac{9}{\ln 2}(2^1 - 2^0) = 8(e-1) - \frac{9}{\ln 2}$.

12 . $\int \frac{1}{x^2-4}dx = \frac{1}{2\cdot 2}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C; \qquad \int_3^4 \frac{1}{x^2-4}dx = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|\Big|_3^4 = \frac{1}{4}\left(\ln\frac{1}{3} - \ln\frac{1}{5}\right);$

13.. $\int \frac{1}{x^2-81}dx = \frac{1}{2\cdot 9}\ln\left|\frac{x-9}{x+9}\right| + C; \quad \int_1^2 \frac{1}{x^2-81}dx = \frac{1}{2\cdot 9}\ln\left|\frac{x-9}{x+9}\right|\Big|_1^2 = \frac{1}{18}(\ln\frac{7}{11} - \ln\frac{8}{10});$

14. $\int \frac{1}{x^2+49}dx = \frac{1}{7}arctg\frac{x}{7} + C;$

$\int_0^7 \frac{1}{x^2+49}dx = \frac{1}{7}arctg\frac{x}{7}\Big|_0^7 = \frac{1}{7}\cdot(arctg1 - arctg0) = \frac{1}{7}\cdot\frac{\pi}{4}$

15.

$\int_1^6 \frac{7}{2x^2+72}dx = 7\cdot\int_1^6 \frac{1}{2(x^2+6^2)}dx = 7\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}arctg\frac{x}{6}\Big|_1^6 = \frac{7}{12}\cdot\left(arctg1 - arctg\frac{1}{6}\right) = \frac{7}{12}\cdot(\frac{\pi}{4} - arctg\frac{1}{6})$

16. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x dx = -\cos x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = -\cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$

17. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} tgxdx = -\ln|\cos x|\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = -\left(\ln(\cos\frac{\pi}{3}) - \ln(\cos 0)\right) = -(\ln\frac{1}{2} - \ln 1) = -\ln\frac{1}{2} = \ln 2$

18.

$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin^2 x}dx = -ctgx\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} = -ctg\frac{\pi}{4} + ctg\frac{\pi}{2} = -1 + 0 = -1$;

19. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}dx = tgx\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = tg\frac{\pi}{4} - tg0 = 1 - 0 = 1$

20. Să se calculeze:

a) $\int_1^2 (x^2-3x+2)dx = \left(\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + 2x\right)\Big|_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{12}{2} + 4 - \frac{1}{3} + \frac{3}{2} - 2 = -\frac{1}{6};$

b) $\int_1^2 (3x-2)(x+2)dx = \int_1^2 (3x^2+4x-4)dx = \left(3\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2} - 4x\right)\Big|_0^1 = 1 + 2 - 4 = -1;$

c) $\int_1^2 \frac{x^3+2x-3}{x^2}dx = \int_1^2 \left(x + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}\right)dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2\ln|x| + 3\frac{1}{x}\right)\Big|_1^2 = 2 + 2\ln 2 + \frac{3}{2} - \frac{1}{2} - 3 = \ln 4;$

d) $\int_0^1 (3^x + 4^x)dx = \left(\frac{3^x}{\ln 3} + \frac{4^x}{\ln 4}\right)\Big|_0^1 = \frac{3}{\ln 3} + \frac{4}{\ln 4} - \frac{1}{\ln 3} - \frac{1}{\ln 4} = \frac{2}{\ln 3} + \frac{3}{\ln 4};$

e) $\int_0^1 (x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{2}})dx = \left(\frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \right)\Big|_0^1 = (\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}})\Big|_0^1 = \frac{3}{5} + \frac{2}{3} = \frac{19}{15}$;

f) $\int_0^1 (4\sqrt[3]{x} - 5\sqrt[3]{x^2}) = \int_0^1 \left(4 \cdot \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} - 5\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} \right) dx = (3\sqrt[3]{x^4} - 3\sqrt[3]{x^5})\Big|_0^1 = 0$;

g) $\int_0^1 \frac{1}{x^2-4}dx = \frac{1}{2\cdot 2}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|\Big|_0^1 = \frac{1}{4}\ln\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\ln 1 = \frac{1}{4}\ln\frac{1}{3}$;

h) $\int_0^1 \frac{1}{3x^2-27}dx = \int_0^1 \frac{1}{3(x^2-3^2)}dx = \frac{1}{3\cdot 6}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|\Big|_0^1 = \frac{1}{18}(\ln\frac{1}{2} - \ln 1) = \frac{1}{18}\ln\frac{1}{2}$;

i) $\int_0^1 \frac{1}{x^2+5}dx = \frac{1}{\sqrt{5}}arctg\frac{x}{\sqrt{5}}\Big|_0^1 = \frac{1}{\sqrt{5}}arctg\frac{1}{\sqrt{5}}$;

j) $\int_0^1 \frac{1}{2x^2+8}dx = \int_0^1 \frac{1}{2(x^2+2^2)}dx = \frac{1}{4}arctg\frac{x}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{4}arctg\frac{1}{2}$;

j) $\int_0^1 \frac{1}{5x+1}dx = \frac{1}{5}\ln|5x+1|\Big|_0^1 = \frac{1}{5}\ln 6 - \frac{1}{5}\ln 1 = \frac{1}{5}\ln 6$;

k) $\int_2^6 \frac{1}{x^2+4x+20}dx = \int_2^6 \frac{1}{(x+2)^2+4}dx = \frac{1}{4}arctg\frac{x+2}{4}\Big|_2^6 = \frac{1}{4}arctg 2 - \frac{1}{4}arctg 1 = \frac{1}{4}arctg 2 - \frac{\pi}{16}$;

l) $\int_3^4 \frac{1}{x^2+2x-8}dx = \int_3^4 \frac{1}{(x+1)^2-3^2}dx = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x+1-3}{x+1+3}\right|\Big|_3^4 = \frac{1}{6}\ln\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\ln\frac{1}{7} = \frac{1}{6}\ln\frac{7}{4}$;

m) $\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+6}dx = \ln|x^2+x+6|\Big|_0^1 = \ln 8 - \ln 6 = \ln\frac{4}{3}$;

Exercitii propuse

1. Folosind formulele $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \in \mathbb{N},\quad \int adx = ax + C$, **să se calculeze:**

a) $\int_0^1 x^6 dx$; **b)** $\int_0^1 4x^3 dx$; **c)** $\int_1^2 5x^2 dx$; **d)** $\int_0^1 (9x^2 - 2x + 3)dx$;

e) $\int_0^1 x(x^2 - 3x)dx$; **f)** $\int_0^1 (3x-4)(x-3)dx$; **g)** $\int_0^1 (2x-1)^2 dx$; **h)** $\int_0^1 (x+2)^3 dx$;

2. Folosind formula $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C,\ a \in \mathbb{Q}$, **să se calculeze:**

a) $\int_0^1 x^{\frac{2}{5}}dx$; **b)** $\int_1^2 \frac{1}{x^4}dx$; **c)** $\int_1^2 \left(x^{-3}+x^{-2}\right)dx$; **d)** $\int_1^2 \left(\frac{4}{x^3}-\frac{2}{x^2}\right)dx$; **e)** $\int_1^2 \frac{2x^3+3x}{x^5}dx$;

f) $\int_1^2 \left(3\sqrt{x}+4\sqrt[3]{x}\right)dx$; **g)** $\int_0^1 x\cdot\sqrt{x}dx$; **h)** $\int_0^1 x\cdot\sqrt[3]{x}dx$; **i)** $\int_0^1 \left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x}}\right)dx$; **j)** $\int_0^1 \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}}dx$;

3. Folosind formula $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}+C,\ a\in\mathbb{R}_+ *.$

a) $\int_0^1 8^x dx$; **b)** $\int_0^1 (4^x+2^x)dx$; **c)** $\int_0^1 e^x dx$; **d)** $\int_0^1 3^x\cdot 2^x dx$; **e)** $\int_0^1 (6^x-4^x)\cdot 3^x dx$;

4. Folosind formulele $\int \frac{1}{x}dx = \ln x+C,\ \int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b|+C,$ **să se calculeze:**

a) $\int_1^2 \frac{1}{x}dx$; **b)** $\int_0^1 \frac{1}{x+4}dx$; **c)** $\int_0^1 \frac{1}{2x+6}dx$; **d)** $\int_{-2}^2 \frac{1}{3x-9}dx$; **e)** $\int_0^1 \frac{x+3}{x+2}dx$;

f) $\int_0^1 \frac{x-5}{x+3}dx$; **g)** $\int_1^2 \frac{(x-3)^2}{x^2}dx$; **h)** $\int_0^1 \frac{(x-2)(x+3)}{x^2-4}dx$;

5. Folosind formulele $\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+C$ **,** $\int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$ **să se calculeze:**

a) $\int_0^2 \frac{1}{x^2+4}dx$; **b)** $\int_0^1 \frac{1}{x^2+9}dx$; **c)** $\int_0^1 \frac{1}{x^2+5}dx$; **d)** $\int_0^4 \frac{1}{2x^2+32}dx$; **e)** $\int_0^1 \frac{1}{x^2-4}dx$;

f) $\int_0^4 \frac{x^2-16}{x^2+16}dx$; **g)** $\int_0^1 \frac{x^2+3}{x^2-9}dx$;

6. Folosind formula $\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx = \ln|ax^2+bx+c|+C$ **să se calculeze:**

a) $\int_0^1 \frac{2x+4}{x^2+4x+5}dx$; **b)** $\int_0^1 \frac{4x-5}{2x^2-5x+2}dx$; **c)** $\int_0^1 \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx$; **d)** $\int_0^3 \frac{2x}{x^2-8}dx$;

7. Folosind formulele $\int \sin x dx = -\cos x+C,\ \int \cos x dx = \sin x+C,$ **să se calculeze:**

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$; **b)** $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$; **c)** $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos x dx$; **d)** $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$; **e)** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (2\sin x+4\cos x)dx$;

8. Să se calculeze:

a) $\int_0^1 (2x^3-4x+5)dx$; **b)** $\int_2^4 (x+\frac{3}{x^2})dx$; **c)** $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2+9}dx$; **d)** $\int_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{x^2}dx$; **e)** $\int_1^3 \frac{(\sqrt{x}+2)^2}{x}dx$;

f) $\int_1^2 \frac{x^4-2x^2+1}{x^3}dx$; **g)** $\int_0^1 (3x+2)^2 dx$; **h)** $\int_0^1 (4x-3)(3-2x)dx$; **i)** $\int_0^1 (\sqrt[3]{x}-2^x)dx$;

j) $\int_0^1 (\sqrt[3]{x^2}-5^x)dx$; **k)** $\int_1^2 (\frac{1}{2\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{x}+\sqrt{x})dx$; **l)** $\int_0^1 \frac{1}{x^2-100}dx$; **m)** $\int_3^4 \frac{1}{4x^2-9}dx$;

n) $\int_1^2 (\frac{4}{x^3}-\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x})dx$; **o)** $\int_0^1 (4e^x+5^x+\sqrt{x})dx$; **p)** $\int_1^2 \frac{(x^2-1)^2}{x^3}dx$; **q)** $\int_0^{\frac{\pi}{3}} (6\cos x-3\sin x)dx$;

9. Să se determine $a\in\mathbb{R}_+$ **astfel încât** $\int_0^a (3x^2-4x+2)dx=4$;

10. Să se determine $a\in\mathbb{R},\ a\rangle 1$ **dacă** $\int_1^a (2x-a)dx=a^2-a-4$;

11. Să se rezolve inecuaţia $\int_0^a (4-2x)dx\geq 3$;

12. Să se calculeze:

a). $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\sin x}dx$; **b)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^2 x+\cos^2 x}dx$; **c).** $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}dx$;

d) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos 2x}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}dx$; **e).** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} tg^2 x dx$; **f).** $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2x}{\sin^2 x}dx$;

g). $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x\cdot\cos x}dx$; **h).** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\sin 2x}{\sin x+\cos x}dx$; **i).** $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin 2x}dx$;

j). $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)dx$; **k).** $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\cos 2x+\sin^2 x}dx$; **l).** $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \frac{1}{\cos 2x-1}dx$;

m). $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}dx$.

13). Să se determine $n\in\mathbb{N}^*$ **astfel încât** $\int_n^{n+1} \frac{6}{x^2-9}dx=\ln\frac{7}{4},\ n\rangle 3.$

2. Proprietăţi ale integralei definite

Proprietatea 1.

Fie $f:[a;b]\to\mathbb{R},\ a\le b$**, f continuă . Atunci,** $\int_a^a f(x)dx=0$ **şi** $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$

Proprietatea 2.

Fie $f:[-a;a]\to\mathbb{R}$ **o funcţie continuă. Atunci** $\int_{-a}^{a} f(x)dx=\begin{cases}0, & f\ impara\\ 2\int_0^a f(x)dx, & f\ para\end{cases}$

Exemple: a) $\int_{-1}^{1}|x|\cdot e^{x^2}dx=2\int_0^1 x\cdot e^{x^2}dx=e^{x^2}\Big|_0^1=e-1$ după ce s-a făcut notaţia

$x^2=t\Rightarrow 2xdx=dt.$

b) $\int_{-1}^{1}\frac{x^3}{1+x^2}dx=0$ deoarece funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{x^3}{1+x^2}$ este impară.

Proprietatea 3. (Proprietatea de liniaritate a integralei)

Fie $f,g:[a;b]\to\mathbb{R}$**, funcţii continue şi** $m,n\in\mathbb{R}$**. Atunci are loc relaţia:**

$\int_a^b\left(mf(x)+ng(x)\right)dx=m\int_a^b f(x)dx+n\int_a^b g(x)dx$**.**

Exemplu: $\int_1^2(2x^3+4x-3)dx=2\int_1^2 x^3dx+4\int_1^2 xdx-3\int_1^2 dx=2\frac{x^4}{4}\Big|_1^2+4\frac{x^2}{2}\Big|_1^2-3x\Big|_1^2=\frac{21}{2}$;

Proprietatea 4. (Proprietatea de aditivitate a integralei)

Fie $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ **o funcţie continuă şi** $c\in(a;b)$**. Atunci**

$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$**.**

Exemplu: $\int_{-1}^{3}|x-2|dx=\int_{-1}^{2}(-x+2)dx+\int_2^3(x-2)dx=(-\frac{x^2}{2}+2x)\Big|_{-1}^{2}+(\frac{x^2}{2}-2x)\Big|_2^3=0$. S-a explicitat mai întâi modulul. În cazul nostru c = 2;

Proprietatea 5.

Fie $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ **o funcţie continuă şi** $f(x)\ge 0,\ \forall x\in[a;b]$**. Atunci** $\int_a^b f(x)dx\ge 0$

Exemplu: $\int_{-3}^{-1}(2x^2-4x+5)dx\rangle 0$ deoarece determinantul ecuaţiei $2x^2-4x+5=0$ este $\Delta=-26\langle 0$ aceasta însemnând că funcţia $f:[-3;-1]\to\mathbb{R},\ f(x)=2x^2-4x+5\rangle 0$ este pozitivă.

Proprietatea 6. (Proprietatea de monotonie a integralei)

Fie $f,g:[a;b]\to\mathbb{R}$**, funcţii continue şi** $f(x)\le g(x),\ \forall x\in[a;b]$**. Atunci** $\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx$**.**

Exemplu: $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 xdx\le\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 xdx$. Cum $\sin x\langle 1,\ \forall x\in[0;\frac{\pi}{2}]$ se înmulţeşte cu $\sin^3$ x si se integrează.

Proprietatea 7.

Fie $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ **o funcţie continuă şi** $m\le f(x)\le M,\ \forall x\in[a;b]$**.**

Atunci $m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$**.**

Exemplu: $0\le\int_1^2\frac{x-1}{x+2}dx\le\frac{1}{4}$;

Se ia funcţia $f:[1;2]\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{x-1}{x+2}$. Cum f '(x) este pozitivă rezultă că f este strict crescătoare pe [1;2]. Din $1\le x\le 2\Rightarrow f(1)\le f(x)\le f(2)\Rightarrow 0\le f(x)\le\frac{1}{4}$. După care se integrează inegalitatea conform proprietăţii 5. $0\le\int_1^2 f(x)dx\le\int_1^2\frac{1}{4}dx=\frac{1}{4}$;

Proprietatea 8.

Fie $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ **o funcţie continuă. Atunci** $\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\int_a^b|f(x)|dx$**.**

Exemplu: $\left|\int_0^1\frac{\sin x}{1+x}dx\right|\le\ln 2$ deoarece din $\sin x\langle 1\Rightarrow\frac{\sin x}{1+x}\langle\frac{1}{1+x}$ rezultă $\int_0^1\frac{\sin x}{1+x}dx\langle\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\ln|1+x|\Big|_0^1=\ln 2$**.**

Exercitii rezolvate

1). Fie $f:(0;\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln x$**. Folosind, eventual, faptul că** $x^2\le x$**, pentru orice** $x\in[0;1]$**, să se demonstreze că** $\int_1^e f^2(x)dx\le 1$**;**

Rezolvare:

Din $x^2\le x,\ \forall x\in[0;1]$ şi din faptul că $\ln x\in[0;1],\ \forall x\in[1;e]$ rezultă $\ln^2 x\le\ln x$. Prin integrare rezultă $\int_1^e\ln^2 xdx\le\int_1^e\ln xdx=1$, unde

$$\int_1^e\ln xdx=\int_1^e x^1\cdot\ln xdx=x\cdot\ln x\Big|_1^e-\int_1^e x\cdot\frac{1}{x}dx=x\cdot\ln x\Big|_1^e-x\Big|_1^e=1.$$

2). Fie $f:(0;2)\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{2x-x^2}$. **Să se demonstreze că** $0\le\int_0^1 f(x)dx\le\sqrt{2}.$

Rezolvare: Cum $0\le x\le 1\Rightarrow 0\le x^2\le 1\Rightarrow -1\le -x^2\le 0$ și $0\le 2x\le 2$ de unde, prin adunarea lor rezultă $-1\le 2x-x^2\le 2$ adică $0\le\sqrt{2x-x^2}\le\sqrt{2}\Rightarrow$ $0\le\int_0^1 f(x)dx\le\int_0^1\sqrt{2}\ dx=\sqrt{2}x\Big|_0^1=\sqrt{2}.$

3). Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+4}$. **Să se arate că** $-\dfrac{1}{4}\le\int_0^1 f(x)\ dx\ \le 0$.

Rezolvare: Cum $\dfrac{-1}{4}\le\dfrac{x^2-1}{x^2+4}\langle 0\Rightarrow\int_0^1\dfrac{-1}{4}dx\le\int_0^1\dfrac{x^2-1}{x^2+4}dx\langle\int_0^1 0dx\Rightarrow\dfrac{-1}{4}\le\int_0^1 f(x)dx\le 0.$

4). Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sin^2 x$. **Să se arate că** $0\le\int_0^{\frac{\pi}{6}} f(x)\le\dfrac{\pi}{24}.$

Rezolvare: $0\le x\le\dfrac{\pi}{6}$, și cum sin x este crescătoare, rezultă $\sin 0\le\sin x\le\sin\dfrac{\pi}{6}\Rightarrow$

$0\le\sin x\le\dfrac{1}{2}\Rightarrow 0\le\sin^2 x\le\dfrac{1}{4}\Rightarrow\quad 0\le\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin^2 x\le\int_0^{\frac{\pi}{6}}\dfrac{1}{4}dx=\dfrac{x}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=\dfrac{\pi}{24}.$

5. Să se arate că $0\le\int_0^1\sqrt{x^2+3x}dx\le 2$**;**

Rezolvare: Deoarece $\left(\sqrt{x^2+3x}\right)'=\dfrac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x}}\rangle 0,\ \forall x\in[0;1]\Rightarrow$ funcţia de sub integrală este crescătoare pe [0;1], atunci din $0\le x\le 1\Rightarrow f(0)\le f(x)\le f(1)\Leftrightarrow 0\le\sqrt{x^2+3x}\le 2\Rightarrow$ $\int_0^1 0dx\le\int_0^1\sqrt{x^2+3x}dx\le\int_0^1 2dx$, mai departe rezultă inegalitatea dată.

6. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}2x+4, & x\le 0\\ \dfrac{1}{3x+1}+3, & x\rangle 0\end{cases}$**. Să se calculeze** $\int_{-1}^1 f(x)dx$**;**

Rezolvare: $\int_{-1}^1 f(x)dx=\int_{-1}^0(2x+4)dx+\int_0^1(\dfrac{1}{3x+1}+3)dx=6+\dfrac{1}{3}\ln 4.$

7. Să se arate că $0\le\int_0^1\ln(1+x^2)dx\le\ln 2$;

Raspuns: $x\in[0;1]\Rightarrow 1\le 1+x^2\le 2\Rightarrow\ln 1\le\ln(1+x^2)\le\ln 2$ după care se integrează pe [0;1];

8*. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3-2x^2+3x-4$**. Să se calculeze** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^4}\int_0^x f(t)dt$**;**

Rezolvare: Se aplică regula lui l'Hospital:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^4}\int_0^x f(t)dt=\lim_{x\to\infty}\frac{\int_0^x(t^3-2t^2+3t-4)dt}{x^4}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{t^4}{4}-2\frac{t^3}{3}+3\frac{t^2}{2}-4t\right)\Big|_0^x}{x^4}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{x^4}{4}-2\frac{x^3}{3}+3\frac{x^2}{2}-4x\right)}{x^4}=\frac{1}{4}$$

9*. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\int\limits_1^x e^{2t^2}dt\right)$**;**

Rezolvare: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\int\limits_1^x e^{2t^2}dt\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\int\limits_1^x e^{2t^2}dt}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{F(x)-F(1)}{x}$. Suntem în cazul $\frac{\infty}{\infty}$ şi se aplică regula

lui l'Hospital: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{F(x)-F(1)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(F(x)-F(1)\right)'}{1}=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-0)=\lim\limits_{x\to\infty}e^{2x^2}=\infty$ unde F este o primitivă a lui f.

10*. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{x^2+8x-5}{x^2+1}$**. Să se arate că** $-7\le\int\limits_0^1 f(x)dx\le 3$**;**

Rezolvare: Cum $f'(x)=\left(\frac{x^2+8x-5}{x^2+1}\right)'=-\frac{8x^2+12x+8}{(x^2+1)^2}$ studiind semnul lui **f '** se observă că f este crescătoare pe $[-\frac{1}{2};2]$ aşadar din $-\frac{1}{2}\le x\le 2\Rightarrow f(-\frac{1}{2})\le f(x)\le f(2)$ după care se integrează inegalitatea pe [0;1] : $-7\le f(x)\le 3\Rightarrow\int\limits_0^1(-7)dx\le\int\limits_0^1 f(x)\le\int\limits_0^1 3dx$ rezultând relaţia dată.

Exercitii propuse



1. Să se arate că $\int\limits_{-1}^1\frac{x^3}{1+x^2}dx=0$;

2. Să se verifice că următoarele integrale sunt egale cu zero:

a) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\cdot\cos x dx$**;** **b)** $\int\limits_{-7}^{7}\frac{x^7}{x^2+9}dx$**;** **c)** $\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{x^2}\sin x dx$**;**

d) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2 x+x^4)\sin x dx$**;** **e)** $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cdot\cos 2x dx$**;** **f)** $\int\limits_{-1}^{1}(e^x+e^{-x})\cdot tgx dx$**;**

3. Să se calculeze:

a) $\int\limits_{-1}^{3}|x-2|dx$**;** **b)** $\int\limits_{-2}^{4}|2x-6|dx$**;** **c)** $\int\limits_{-1}^{1}(x-1)|x|dx$**;**

d) $\int\limits_{1}^{4}\frac{|x-3|}{x^2+4}dx$**;** **e)** $\int\limits_{-2}^{2}|x^2-1|dx$**;** **f)** $\int\limits_{-5}^{3}|x^2-3x+2|dx$**;**

g) $\int_{-2}^{3}\left|x-\left|x-2\right|\right|dx$; **h)** $\int_{\frac{1}{e}}^{e}\left|\ln x\right|dx$;

4. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x^2-4x+5$. Fără a calcula integrala, să se arate că $\int_{-3}^{-1}f(x)dx\rangle 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$;

5. Să se arate că $0\le\int_{0}^{1}\sqrt{x^2+3x}dx\le 2$;

6. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{x^2+8x-5}{x^2+1}$. Să se arate că $-7\le\int_{0}^{1}f(x)dx\le 3$;

7. Să se arate că $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 xdx\le\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 xdx$.

8. Să se arate că $0\le\int_{1}^{2}\frac{x-1}{x+2}dx\le\frac{1}{4}$;

9. Fără a calcula integralele să se arate că :

a) $\int_{1}^{e}(e^x-1)dx\le\int_{1}^{e}xe^x dx$; **b)** $\int_{0}^{1}(e^x-x)dx\ge 1$;

c) $\sqrt{3}\le\int_{2}^{5}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx\le\sqrt{6}$; **d)** $\int_{0}^{1}\frac{x}{x+1}dx\langle\int_{0}^{1}\ln(1+x)dx$;

e) $\int_{0}^{1}\ln(x+1)dx\le\frac{5}{12}$; **f)** $\frac{1}{e}\le\int_{0}^{1}(e^{-x^2}-1)dx\le\frac{\pi}{4}$;

g) $\int_{0}^{1}e^{x^2}dx\ge\frac{4}{3}$; **h)** $\int_{0}^{1}(e^x-1)dx\ge\int_{0}^{1}\ln(1+x)dx$;

i) $\left|\int_{0}^{1}\frac{\cos x}{1+x^2}dx\right|\le\frac{\pi}{4}$; **j)** $\left|\int_{1}^{2}\frac{2}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx\right|\le\frac{1}{2}$;

k) $\frac{1}{3}\le\int_{0}^{1}\frac{x-3}{x+5}dx\le 1$; **l)** $0\le\int_{0}^{1}\frac{x^{1006}}{1+x^{2012}}dx\le\frac{1}{1007}$;

10. Să se arate că $\left|\int_{0}^{1}\frac{\sin x}{1+x}dx\right|\le\ln 2$;

11. Fie $f:[0;1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{x+8}$. Dacă $\sqrt{x+8}\le 3$, $\forall x\in[0;1]$ atunci $\int_{0}^{1}x^{2011}\cdot f(x)dx\le\frac{3}{2012}$;

12. Să se arate că $0\le\int_{0}^{1}\ln(1+x^2)dx\le\ln 2$;

13. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}e^x+2, & x\le 0\\ x^2+x+3, & x\rangle 0\end{cases}$. Să se calculeze $\int_{-1}^{1}f(x)dx$;

14. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}2x+4, & x\le 0\\ \dfrac{1}{3x+1}+3, & x\rangle 0\end{cases}$. Să se calculeze $\int_{-1}^{1} f(x)dx$;

15. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sin x+x\cdot\cos x$. Să se arate că $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx\ge 0,\ \forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

16. Fie $f:\mathbb{R}\setminus\{-5\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x-3}{x+5}$. Să se arate că $0\le\int_{3}^{5}\dfrac{x-3}{x+5}\,dx\le\dfrac{2}{5}$.

17. Se consideră funcția $f:[-2;3]\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{9-x^2}$; Să se demonstreze că $\int_{0}^{1} f(x)dx\le 3,\ \forall x\in(0;1)$.

18. Să se arate că $\sqrt{3}\le\int_{2}^{5}\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}\,dx\le\sqrt{6}$.

19. Fie $f,g:(0;\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{\ln x}{x},\ g(x)=\dfrac{1}{2}\ln^2 x.$ Folosind, eventual, faptul că $\dfrac{\ln x}{x}\le\dfrac{1}{e},\ \forall x\in[1;e]$, să se demonstreze că $\int_{1}^{e} f(x)dx\le 1-\dfrac{1}{e}$.

III. Metode de integrare

1. Metoda integrării prin părți

Teorema **Dacă f,g:R→R sunt funcţii derivabile cu derivatele continue, atunci funcţiile fg, f 'g, fg ' admit primitive şi are loc relaţia:**

$\int f^I(x)\bullet g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)\bullet g^I(x)dx$

Demonstraţie: f,g derivabile $\Rightarrow$f,g continue $\Rightarrow$f'g,fg,fg' continue şi deci admit primitive. Cum **(fg)'=f'g+g'f** rezultă prin integrare ceea ce trebuia de demonstrat.

Dintre multitudinea de tipuri de integrări cu ajutorul acestei formule, se disting trei modele mai importante:

Model 1. Integrări care conțin funcția logaritmică $f:(0;\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln x$.

Exemple:

1. $\int \ln x dx = \int x'\ln x dx = x\cdot\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C$;

2.

$$\int (2x+1)\ln x dx = \int (2\cdot\frac{x^2}{2}+x)\bullet\ln x dx = x^2\cdot\ln x - \int \left(x^2+x\right)\cdot(\ln x)^I dx = x^2\cdot\ln x - \int \left(x^2+x\right)\cdot\frac{1}{x}dx =$$

$$= x^2\cdot\ln x - \int (x+1)dx = x^2\cdot\ln x - \frac{x^2}{2} - x + C.$$

Observaţie: La integralele care conţin funcţia logaritmică **nu se umblă la lnx** ci se scriu celelalte funcţii ca f '(x). Aşadar, avem următoarea regulă de integrare:
$\int f(x)\bullet\ln x dx = \int F^I(x)\bullet\ln x dx$ unde $F^I(x)=f(x)$, F fiind o primitivă a lui f(x).

Model 2. Integrări care conțin funcția exponențială $f:\mathbb{R}\to(0;\infty),\ f(x)=e^x$.

Exemple:

1. $\int xe^x dx = \int (e^x)'\cdot x dx = e^x\cdot x - \int e^x\cdot x' dx = e^x\cdot x - e^x + C$

2. $\int x^2\bullet e^x dx = \int \left(e^x\right)^I\bullet x^2 dx = e^x\bullet x^2 - \int e^x\cdot\left(x^2\right)^I dx = e^x\bullet x^2 - \int e^x\cdot 2x dx =$

$= e^x\bullet x^2 - 2\bullet\int e^x\cdot x dx = e^x\bullet x^2 - 2(e^x\bullet x - e^x) + C$. Pentru ultima integrală s-a folosit rezultatul de la exemplul 1.

Observaţie: La integralele unde apare funcţia exponenţială , se va scrie aceasta ca f '(x). Aşadar, avem următoarea regulă de integrare:
$\int g(x)\bullet e^x dx = \int (e^x)'\cdot g(x)dx = e^x\bullet g(x) - \int e^x\bullet g^I(x)dx$.

Model 3. Integrări care conţin funcţiile trigonometrice $\sin x:\mathbb{R}\to[-1;1]$, $\cos x:\mathbb{R}\to[-1;1]$.

Exemple:

1. $\int x\cdot\sin x dx=\int x\cdot(-\cos x)'dx=-x\cos x+\int\cos x dx=-x\cos x+\sin x+C$
2. $\int x\bullet\cos x dx=\int(\sin x)'\cdot x dx=x\bullet\sin x-\int\sin x\cdot x'dx=x\bullet\sin x-\int\sin x dx=x\bullet\sin x+\cos x+C.$

Observaţie: La integralele care conţin funcţii polinomiale şi funcţii trigonometrice nu se va umbla la funcţiile polinomiale ci doar la funcţiile trigonometrice care se vor scrie ca f '(x).

Aşadar, avem următoarea regulă de integrare: $\int g(x)\bullet\begin{cases}\sin x\\ \cos x\end{cases}dx=\int\begin{cases}(-\cos x)^I\bullet g(x)dx\\ (\sin x)^I\bullet g(x)dx\end{cases}$.

În cazul utilizării integralei definite, formula se scrie astfel:

$$\int_a^b f^I(x)\bullet g(x)dx=f(x)g(x)\Big|_a^b-\int_a^b f(x)\bullet g^I(x)dx$$

Activitate independentă		**Răspuns**
Să se calculeze $\int_0^1(4x+2)e^x dx$.		4

Exercitii rezolvate

1. Să se calculeze:

a) $\int x\cdot\ln x dx$**;** **b)** $\int\frac{1}{x}\cdot\ln x dx$**;** **c)** $\int(4x+3)\ln x dx$;

Rezolvare:

a) $\int x\cdot\ln x dx=\int\left(\frac{x^2}{2}\right)'\ln x dx=\frac{x^2}{2}\cdot\ln x-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{2}\int x dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{4}x^2+C$;

b)

$\int\frac{1}{x}\ln x dx=\int(\ln x)'\ln x dx=(\ln x)^2-\int\ln x\cdot\frac{1}{x}dx\Rightarrow 2\int\ln x\cdot\frac{1}{x}dx=(\ln x)^2\Rightarrow\int\frac{1}{x}\ln x dx=\frac{1}{2}(\ln x)^2+C$;

c) $\int(4x+3)\ln x dx=\int(4\frac{x^2}{2}+3x)'\cdot\ln x dx=(2x^2+3x)\ln x-\int\left(2x^2+3x\right)\cdot(\ln x)'dx=$

$=(2x^2+3x)\ln x-\int\left(2x^2+3x\right)\cdot\frac{1}{x}dx=(2x^2+3x)\ln x-\int(2x+3)dx=$

$=(2x^2+3x)\ln x-\left(2\frac{x^2}{2}+3x\right)+C$.

2. Să se calculeze:

a) $\int x^2 e^x dx$; **b)** $\int (4x+3)e^x dx$; **c)** $\int e^x \cdot \sin x dx$;

Rezolvare:

a) $\int x^2 \cdot e^x dx = \int x^2 \left(e^x\right)' dx = x^2 e^x - \int 2x \cdot e^x dx = x^2 e^x - 2\int x \cdot \left(e^x\right)' dx = x^2 e^x - 2[x \cdot e^x - \int e^x dx] =$

$= x^2 e^x - 2x \cdot e^x + 2e^x + C = e^x \left(x^2 - 2x + 2\right) + C$

b) $\int (4x+3)e^x dx = \int (e^x)' \cdot (4x+3) dx = e^x \cdot (4x+3) - \int e^x \cdot (4x+3)' dx = e^x \cdot (4x+3) - 4e^x + C$

c)

$\int e^x \cdot \sin x dx = \int \left(e^x\right)' \sin x dx = e^x \sin x - \int e^x \cdot \cos x dx = e^x \sin x - [e^x \cdot \cos x - \int e^x \cdot (-\sin x) dx] \Rightarrow$

Notând cu I integrala $\int e^x \cdot \sin x dx$ rezultă:

$I = e^x \sin x - e^x \cos x - I \Rightarrow I = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C$;

3. Să se calculeze:

a) $\int x \cdot \sin x dx$; **b)** $\int x^2 \cdot \cos x dx$; **c)** $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$;

Rezolvare:

Se vor calcula utilizând metoda integrării prin părţi:

a) $\int x \cdot \sin x dx = \int x \cdot \left(-\cos x\right)' dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C$;

b) $\int x^2 \cdot \cos x dx = \int x^2 \cdot \left(\sin x\right)' dx = x^2 \sin x - \int 2x \cdot \sin x dx = x^2 \sin x - 2(-x \cos x + \sin x) + C$;

c) $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx = \int (tgx)' \cdot x dx = x \cdot tgx - \int tgx dx = x \cdot tgx - (-\ln|\cos x|) = x \cdot tgx + \ln|\cos x| + C$;

Exercitii propuse

1. Să se calculeze:

a) $\int_0^1 x \cdot e^x dx$; **b)** $\int_0^2 (x+1) \cdot e^x dx$; **c)** $\int_0^1 x^2 \cdot e^x dx$;

d) $\int_0^2 x^3 \cdot e^x dx$; **e)** $\int_0^1 (x^2 - 2x) \cdot e^x dx$; **f)** $\int_0^1 (2x^2 - 4x + 3) \cdot e^x dx$;

g) $\int_0^1 x^2 \cdot 2^x dx$; **h)** $\int_0^1 x \cdot e^{-x} dx$ **i)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cdot \sin x dx$;

j) $\int_0^{\pi} e^x \cdot \cos x dx$; **k)** $\int_0^{\pi} e^x \cdot \sin 2x \ dx$; **l)** $\int_0^{\pi} e^x \cdot \cos 2x \ dx$

2. Să se calculeze:

a) $\int_1^e \ln x dx$; **b)** $\int_1^e x \ln x dx$; **c)** $\int_1^e x^3 \cdot \ln x dx$;

d) $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$; **e)** $\int_1^e (4x-3)\ln x dx$; **f)** $\int_e^{e^2} \ln^3 x dx$;

g) $\int_1^2 x \cdot \log_2 x dx$; **h)** $\int_0^1 \ln(1+x^2) dx$; **i)** $\int_1^e \left(x^2-2x+3\right)\ln x \ dx$;

j) $\int_1^e \frac{\ln(\ln x))}{x} dx$; **k)** $\int_1^e \sqrt{x} \cdot \ln x \ dx$; **l)** $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x^2} dx$;

m) $\int_1^e \ln(1+x^2) \ dx$;

3. Să se calculeze:

a) $\int_0^{\pi} x \cdot \sin x \ dx$; **b)** $\int_0^{\pi} x \cdot \cos x \ dx$; **c)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (4x-3) \cdot \sin x \ dx$;

d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x+4) \cdot \cos x \ dx$; **c)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x+5) \cdot \sin x \ dx$; **d)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3x-1) \cdot \cos x \ dx$;

e) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cdot \sin x \ dx$; **f)** $\int_0^{\pi} x^2 \cdot \cos x \ dx$; **g)** $\int_0^{\pi} \sin^2 x \ dx$;

h) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \ dx$;

4*. Să se calculeze:

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \sin^2 x \ dx$; **b)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos^2 x \ dx$; **c)** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx$;

d) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\sin^2 x} dx$; **e)** $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x \cdot \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$; **f)** $\int_0^{\pi} x^2 \cdot \sin 2x \ dx$;

g) $\int_0^{\pi} x^2 \cdot \cos 2x \ dx$; **h);** $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} tg^3 x \ dx$; **i)** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cdot tg^2 x \ dx$;

j) $\int_0^1 x \cdot arctg^2 x \ dx$; **k)** $\int_0^1 (\arcsin x)^2 \ dx$ **l)** $\int_1^{\sqrt{1}} x \cdot \arccos \frac{1}{x} dx$

2. Metoda schimbării de variabilă sau metoda substituției

Teorema Fie I,J intervale din R şi $\varphi: I \to J, f: J \to R,$ funcţii cu proprietăţile:
1) φ este derivabilă pe I;
2) f admite primitive. (Fie F o primitivă a sa.)
Atunci funcţia (f o φ) φ ' admite primitive, iar funcţia F o φ este o primitivă a lui (f o φ) φ ' adică:

$$\boxed{\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt = Fo\varphi + C}$$

Exemple:

1. $\int (3x-2)^7\,dx = \int t^7 \frac{dt}{3} = \frac{t^8}{24} + C = \frac{(3x-2)^8}{24} + C$ unde 3x-2=t $\Rightarrow$3dx=dt;

2. $\int x(3x-1)^6\,dx = \int \frac{t+1}{3}\cdot t^6 dt = \frac{1}{3}\int (t^7+t^6)dt = \frac{t^8}{24} + \frac{t^7}{21} + C = \frac{(3x-1)^8}{24} + \frac{(3x-1)^7}{21} + C$ unde s-a notat cu 3x-1= t$\Rightarrow$3dx=dt;

3. $\int x\cdot 4^{x^2}dx = \int 4^t \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\frac{4^t}{\ln 4} + C = \frac{1}{2}\frac{4^{x^2}}{\ln 4} + C, unde\ x^2 = t,\ 2xdx = dt$

4. $\int \frac{e^x}{e^x+1}dx$. Notăm: $e^x + 1 = t \Rightarrow e^x dx = dt \Rightarrow$

$$\int \frac{e^x}{e^x+1}dx = \int \frac{1}{t}dt = \ln t + C = \ln(e^x+1) + C$$

5. $\int \sqrt{4x+1}dx$ Notăm: $\sqrt{4x+1} = t\ sau\ 4x+1 = t^2 \Rightarrow 4dx = 2tdt \Rightarrow 2dx = tdt$

$$\int \sqrt{4x+1}dx = \frac{1}{2}\int t\cdot tdt = \frac{t^3}{6} + C = \frac{\sqrt{4x+1}^3}{6} + C;$$

6. $\int \frac{\ln\sqrt{x}}{x}dx = \int \frac{\ln t}{t^2}\cdot 2tdt = 2\int \frac{\ln t}{t}dt = 2\int zdz$ deoarece

$x = t^2 \Rightarrow dx = 2tdt, \ln t = z \Rightarrow \frac{1}{t}dt = dz \Rightarrow$

$$\int \frac{\ln\sqrt{x}}{x}dx = 2\frac{z^2}{2} = (\ln t)^2 = \left(\ln\sqrt{x}\right)^2 + C$$

7. $\int \sqrt{x^2+4x-5}dx = \sqrt{(x+2)^2-3^2} = \frac{x+2}{2}\sqrt{x^2+4x-5} - \frac{9}{2}\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x-5}\right| + C$

deoarece:

$$\boxed{\begin{array}{l} ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right] daca\ \Delta\rangle 0\ sau \\ ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2\right] daca\ \Delta\langle 0 \end{array}}$$

8. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+5}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+2^2}}dx = \ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+5})+C$;

Integrarea funcţiilor trigonometrice

Calculul integralelor trigonometrice se poate face fie folosind **formula integrării prin părţi**, fie **metoda substituţiei**. În acest caz se pot face substituţiile:
1. Dacă funcţia este impară în sin x, R(-sin x,cos x)= -R(sin x,cos x) atunci cos x=t.
2. Dacă funcţia este impară în cos x, R(sin x,-cos x)= -R(sin x,cos x) atunci sin x=t.
3. Dacă funcţia este pară în raport cu ambele variabile R(-sin x,-cos x) atunci tg x=t.
4. Dacă o funcţie nu se încadrează în cazurile 1,2,3,atunci se utilizează substituţiile universale:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad unde\ t = tg\frac{x}{2}$$

5. Se mai pot folosi şi alte formule trigonometrice:

$$\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x, \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

Exemple:

a) $\int \sin(4x+2)dx = \int \sin t \cdot \frac{dt}{4} = \frac{1}{4}\cdot(-\cos t) = -\frac{\cos(4x+2)}{4}+C$;

b) $\int \sin^6 x \cdot \cos x dx = \int t^6 dt = \frac{t^7}{7}+C = \frac{1}{7}\sin^7 x + C$.

Exercitii rezolvate

1. Să se calculeze:

a). $\int (ax+b)^n dx = \int t^n \frac{dt}{a} = \frac{1}{a}\frac{t^{n+1}}{n+1}+C = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)}+C$ unde ax+b=t $\Rightarrow$ adx=dt dx=$\frac{dt}{a}$

b). $\int (2x-1)^9 dx = \int t^9 \frac{dt}{2} = \frac{t^{10}}{20}+C = \frac{(2x-1)^{10}}{20}+C$ unde 2x-1=t $\Rightarrow$ 2dx=dt

c). $\int x(2x-1)^9 dx = \int \frac{t+1}{2}\cdot t^9 dt = \frac{1}{2}\int (t^{10}+t^9)dt = \frac{t^{11}}{22}+\frac{t^{10}}{20}+C = \frac{(2x-1)^{11}}{22}+\frac{(2x-1)^{10}}{20}+C$

d). $\int x(5x^2-3)^7 dx = \int t^7 \cdot \frac{dt}{10} = \frac{1}{10}\cdot\frac{t^8}{8}+C = \frac{(5x^2-3)^8}{80}+C, unde 5x^2-3=t \Rightarrow 10xdx=dt$

e). $\int x\cdot 7^{x^2}dx = \int 7^t \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\frac{7^t}{\ln 7}+C = \frac{1}{2}\frac{7^{x^2}}{\ln 7}+C, unde\ x^2=t,\ 2xdx=dt$

f). $\int \sqrt{2x+5}dx$ Notăm: $\sqrt{2x+5}=t\ sau\ 2x+5=t^2 \Rightarrow 2dx=2tdt \Rightarrow dx=tdt$

$$\int \sqrt{2x+5}dx = \int t \cdot tdt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{\sqrt{2x+5}^3}{3} + C$$

g). $\int \sqrt{x^2-6x-7}dx = \sqrt{(x-3)^2 - \left(\frac{8}{2}\right)^2} = \frac{x-3}{2}\sqrt{x^2-6x-7} - \frac{16}{2}\ln\left|x-3+\sqrt{x^2-6x-7}\right| + C$

deoarece:

$$ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right] daca\ \Delta\rangle 0\ sau$$

$$ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2\right] daca\ \Delta\langle 0$$

h). $\int \frac{1}{\sqrt{-x^2+3x+4}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(x-\frac{3}{2}\right)^2}}dx = \arcsin\frac{x-\frac{3}{2}}{\frac{5}{2}} + C = \arcsin\frac{2x-3}{5} + C,$

i). $\int \sin^3 x \cdot \cos x dx = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{\sin^4 x}{4} + C$; Am notat sin x=t $\Rightarrow$cosx dx= dt

j) $\int \cos^3 x \cdot \sin 2x dx = \int \cos^3 x \cdot 2\sin x\cos x dx = 2\int \cos^4 x \sin x dx = -2\int t^4 dt = -2\cdot\frac{t^5}{5} + C = -\frac{2}{5}\cdot\cos^5 x + C$

Am notat cos x=t $\Rightarrow$- sin x dx=dt;

k) $\int \sin^3 x dx = \int \sin x \sin^2 x dx = \int \sin x(1-\cos^2 x)dx = -\int (1-t^2)dt = -t + \frac{t^3}{3} + C = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C$

l). $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ Notăm cu t pe arcsin x $\Rightarrow (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = dt \Rightarrow$

$$\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int tdt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{(\arcsin x)^2}{2} + C$$

2. Să se calculeze:

a) $\int_{-1}^{2} \sqrt{2x+5}dx$; **b)** $\int_0^1 x \cdot 7^{x^2}dx$; **c)** $\int_0^1 x(5x^2-3)^7 dx$;

Rezolvare: Se va calcula mai întâi integrala nedefinită cu ajutorul metodei substituţiei după care se va aplica formula lui Leibniz-Newton.

a) $\int \sqrt{2x+5}dx = \frac{\sqrt{2x+5}^3}{3} + C \Rightarrow \int_{-1}^{2} \sqrt{2x+5}dx = \frac{\sqrt{2x+5}^3}{3}\Big|_{-1}^{2} = 9 - \sqrt{3}$;

b) $\int x \cdot 7^{x^2}dx = \frac{7^{x^2}}{2\ln 7} + C \Rightarrow \int_0^1 x \cdot 7^{x^2}dx = \frac{7^{x^2}}{2\ln 7}\Big|_0^1 = \frac{3}{\ln 7}$;

c) $\int x(5x^2-3)^7 dx = \frac{(5x^2-3)^8}{80} + C \Rightarrow \int_0^1 x(5x^2-3)^7 dx = \frac{(5x^2-3)^8}{80}\Big|_0^1 = -\frac{6305}{80}$.

3. Să se calculeze:

a) $\int \frac{1}{(4x+5)^8}dx$; **b)** $\int \frac{x^2}{x^6-3}dx$; **c)** $\int \frac{x^3}{1+x^8}dx$; **d)** $\int \frac{x^3}{(x-1)^{12}}dx$; **e)** $\int \frac{x}{(x-1)^{10}}dx$;

Rezolvare: Pentru funcţiile raţionale date se aplică metoda substituţiei:

a) Facem notaţia $4x+5=t \Rightarrow 4dx=dt$

$\Rightarrow \int \frac{1}{(4x+5)^8}dx=\frac{1}{4}\int \frac{1}{t^8}dt=\frac{1}{4}\int t^{-8}dt=\frac{1}{4}\cdot\frac{t^{-7}}{-7}=-\frac{1}{21}\cdot\frac{1}{(4x+5)^7}+C;$

b). Din $x^3=t\Rightarrow 3x^2dx=dt\Rightarrow$

$\int \frac{x^2}{x^6-3}dx=\int \frac{1}{t^2-3}\cdot\frac{dt}{3}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}}\right|+C=\frac{1}{6\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x^3-\sqrt{3}}{x^3+\sqrt{3}}\right|+C$

c). Din $x^4=t\Rightarrow 4x^3dx=dt\Rightarrow \int \frac{x^3}{1+x^8}dx=\int \frac{1}{t^2+1}\cdot\frac{dt}{4}=\frac{1}{4}\cdot arctg\ \ t+C=\frac{1}{4}arctg\ \ x^4+C$

d). Din $x-1=t\Rightarrow dx=dt$ şi din $x=t+1\Rightarrow$

$\int \frac{x^3}{(x-1)^{12}}dx=\int \frac{(t+1)^3}{t^{12}}dt=\int \frac{t^3+3t^2+3t+1}{t^{12}}dt=\int (t^{-9}+3t^{-10}+3t^{-11}+t^{-12})dt=\frac{t^{-8}}{-8}+3\frac{t^{-9}}{-9}+3\frac{t^{-10}}{-10}+\frac{t^{-11}}{-11}+C$

$=-\frac{1}{8(x-1)^8}-\frac{1}{3(x-1)^9}-\frac{3}{10(x-1)^{10}}-\frac{1}{11(x-1)^{11}}+C$

e). Din $x-1=t\Rightarrow dx=dt$ şi din $x=t+1\Rightarrow$

$\int \frac{x}{(x-1)^{10}}dx=\int \frac{t+1}{t^{10}}dt=\int t^{-9}dt+\int t^{-10}dt=\frac{t^{-8}}{-8}+\frac{t^{-9}}{-9}+C=-\frac{1}{8(x-1)^8}-\frac{1}{9(x-1)^9}+C;$

Exercitii propuse

1. Să se calculeze:

a) $\int_0^1 (2x+1)^3\,dx$; **b)** $\int_0^1 (2x-1)^5\,dx$; **c)** $\int_0^1 (3x-2)^{10}\,dx$; **d)** $\int_0^1 (4x-3)^8\,dx$;

e) $\int_0^1 x\cdot(5x^2-3)^7\,dx$; **f)** $\int_0^1 x^2(x^3+1)^4\,dx$; **g)** $\int_0^1 x(4x-2)^6\,dx$; **h)** $\int_0^1 x(2x-1)^9\,dx$;

2. Să se calculeze:

a) $\int_0^1 2^{3x-2}\,dx$; **b)** $\int_0^1 e^{4x+1}\,dx$; **c)** $\int_0^1 x\cdot 7^{x^2}\,dx$; **d)** $\int_1^2 x\cdot 3^{x^2-1}\,dx$;

e) $\int_0^2 x\cdot e^{3x^2-1}\,dx$; **f)** $\int_0^1 x^2\cdot e^{x^3+1}\,dx$; **g)** $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$;

3. Să se calculeze:

a) $\int_{-1}^2 \sqrt{2x+5}\,dx$; **b)** $\int_0^1 \sqrt{8x+1}\,dx$; **c)** $\int_1^5 x\sqrt{x-1}\,dx$; **d)** $\int_{-2}^1 x\sqrt{x+3}\,dx$;

e) $\int_{-3}^{-2} \sqrt[3]{2x+5}\,dx$; **f)** $\int_0^1 3x\sqrt[3]{x+8}\,dx$; **g)** $\int_0^1 2x\sqrt{x^2+8}\,dx$; **h)** $\int_0^2 x\sqrt{2x^2+1}\,dx$;

i) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2-x}}\,dx$; **j)** $\int_1^{\sqrt{2}} \frac{x}{\sqrt{x^2+7}}\,dx$; **k)** $\int_0^7 \frac{x}{\sqrt[3]{x+1}}\,dx$; **l)** $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^4+1}}\,dx$;

4. Să se calculeze:

a) $\int_{e}^{e^2} \frac{1}{x\ln x}dx$; **b)** $\int_{e}^{e^2} \frac{\ln x}{x}dx$; **c)** $\int_{1}^{e} \frac{\ln^2 x}{x}(2+\ln x)dx$; **d)** $\int_{e}^{e^2} \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx$;

e) $\int_{1}^{e} \frac{1}{x(1+\ln x)}dx$; **f)** $\int_{1}^{e} \frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x}dx$; **g)** $\int_{1}^{e} \frac{1}{x(\ln^2 x+81)}dx$; **h)** $\int_{1}^{e} \frac{1}{x(\ln^2 x-16)}dx$;

i) $\int_{1}^{4} \frac{\ln\sqrt{x}}{x}dx$; **j)** $\int_{1}^{e} \frac{1}{x(\ln x+2011)^{2012}}dx$; **k)** $\int_{2}^{3} x^2\cdot\ln(x^6-1)\,dx$; **l)** $\int_{1}^{e} \frac{\ln x}{x(1-\ln^2 x)}\,dx$;

m) $\int_{1}^{e} \frac{1}{x(1+\ln x)^2}\,dx$; **n)** $\int_{1}^{e} \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,dx$; **o)** $\int_{1}^{e} \frac{1}{x\sqrt{\ln^2 x+2}}\,dx$; **p)** $\int_{1}^{e} \frac{1}{x\sqrt{3-\ln^2 x}}\,dx$;

5. Să se calculeze:

a) $\int_{0}^{1} \frac{1}{(x-2)^4}\,dx$; **b)** $\int_{0}^{1} \frac{1}{(2x-1)^8}\,dx$; **c)** $\int_{0}^{1} \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx$; **d)** $\int_{1}^{e} \frac{\ln x}{x(1-\ln^2 x)}\,dx$;

e) $\int_{0}^{1} \frac{4x^3}{1+x^8}\,dx$; **f)** $\int_{0}^{1} \frac{x}{x^4-16}\,dx$; **g)** $\int_{0}^{1} \frac{2x}{x^2-16}\,dx$; **h)** $\int_{0}^{1} \frac{x}{(x^2+16)^4}\,dx$; **i)** $\int_{1}^{2} \frac{e^x}{e^x-1}\,dx$;

6. Să se calculeze:

a) $\int_{0}^{\pi} \sin 5x dx$; **b)** $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos x}\sin x dx$; **c)** $\int_{0}^{\pi} \sin^3 x\cdot\cos^4 x dx$; **d)** $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\cdot\cos^6 x dx$;

e) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\cdot\cos^3 x dx$; **f)** $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}dx$; **g)** $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^5 x}{\cos^2 x}dx$; **h)** $\int_{0}^{1} \frac{e^{arctgx}}{x^2+1}dx$;

i) $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} \frac{arctgx}{x^2+1}dx$; **j)** $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x+5)\,dx$; **k)** $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}\,dx$; **l)** $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\sin^2 x-3}\,dx$;

m) $\int_{0}^{\pi} \frac{\sin x}{\cos^2 x-4}\,dx$; **n)** $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin 2x}{\sin^2 x+4}\,dx$; **o)** $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\cdot\cos x\,dx$; **p)** $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \left(tg^3 x+tgx\right)dx$;

3. Integrarea funcţiilor raţionale

Definiţie: O funcţie f:I→R , I interval, se numeşte **raţională** dacă R(x)= $\frac{f(x)}{g(x)}, g(x)\neq 0, x\in I,$ unde f,g sunt funcţii polinomiale.

Dacă grad f ≥ grad g, atunci se efectuează împărţirea lui f la g ⇒f=gq+r, 0≤ grad r<grad g şi deci $R(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=q(x)+\frac{r(x)}{g(x)}$. Pentru $\frac{r(x)}{g(x)}$ se face scrierea ca sumă de fracţii rationale simple.

1. $\int \frac{1}{x}dx=\ln|x|+C;\ x\in\mathbb{R}$. **2.** $\int \frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}+C;$ **3.** $\int \frac{1}{ax+b}dx=\frac{1}{a}\ln|ax+b|+C;$

4. $\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx=\ln|ax^2+bx+c|+C;$

5. $\int \frac{1}{x^2+a^2}dx=\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+C$ **6.** $\int \frac{1}{x^2-a^2}dx=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$

7*. $\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx=\int \frac{1}{a\left[(x+\frac{b}{2a})^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right]}=\frac{1}{a}\int\frac{1}{t^2-u^2}dt,\ \Delta\rangle 0$, **sau**

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx=\int \frac{1}{a\left[(x+\frac{b}{2a})^2+\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2\right]}=\frac{1}{a}\int\frac{1}{t^2+u^2}dt,\ \Delta\langle 0.$$

În general, dacă avem o fracţie de forma : $\frac{f(X)}{g(X)}=\frac{f(X)}{(X-a)(X-b)....(X-t)}$, unde cele n elemente a,b,c,…,t sunt distincte, iar f(X) este un polinom de grad mai mic decât n şi care nu se anulează pentru niciunul din numerele a,b,c,…,t, atunci descompunerea în fracţii simple este de forma :

$$\frac{f(X)}{g(X)}=\frac{A}{X-a}+\frac{B}{X-b}+...+\frac{T}{X-t}.$$

Exemplu : Să se descompună în fracţii simple, fracţia : $\frac{2X+4}{(X-1)(X^2-7X+10)}$.

Rezolvare :
În cazul nostru, observăm că $X^2-7X+10=(X-2)(X-5)$, aşadar,
$\frac{2X+4}{(X-1)(X-2)(X-5)}=\frac{A}{X-1}+\frac{B}{X-2}+\frac{C}{X-5}$. După ce aducem la acelaşi numitor, vom da valori lui X pentru a determina pe A, B, C.
$2X+2=A(X-2)(X-5)+B(X-1)(X-5)+C(X-1)(X-2)$
$X\to 2\Rightarrow 6=-3B\Rightarrow B=-2;$
$X\to 1\Rightarrow 4=4A\Rightarrow A=1;$
$X\to 5\Rightarrow 12=12C\Rightarrow C=1;$ O dată aflate A, B, C obţinem descompunerea în fracţii simple:
$$\frac{2X+4}{(X-1)(X-2)(X-5)}=\frac{1}{X-1}-\frac{2}{X-2}+\frac{1}{X-5}$$

În general, dacă avem o fracţie de forma : $\frac{f(x)}{g(x)}$, unde $grad\ f(x)\geq grad\ g(x)$, se efectuează împărțirea lui f(x) la g(x).

Atunci, $\int\frac{f(x)}{g(x)}dx=\int\left(c(x)+\frac{r(x)}{g(x)}\right)dx$ unde c(x) și respectiv r(x) sunt câtul și respectiv restul împărțirii lui f(x) la g(x).

Exercitii rezolvate

1. Să se calculeze:

a. $\int_1^e\frac{1}{x}dx=\ln|x|\Big|_1^e=\ln e-\ln 1=1$

b. $\int_1^2\frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}\Big|_1^2=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$

c. $\int_0^1\frac{1}{x^2+5^2}dx=\frac{1}{5}arctg\frac{x}{5}\Big|_0^1=\frac{1}{5}arctg\frac{1}{5}$

d. $\int_0^1\frac{1}{x^2-25}dx=\frac{1}{10}\ln\left|\frac{x-5}{x+5}\right|\Big|_0^1=\frac{1}{10}\ln\frac{4}{6}-\frac{1}{10}\ln 1=\frac{1}{10}\ln\frac{2}{3}$

e. $\int_0^1\frac{1}{3x+7}dx=\frac{1}{3}\ln|3x+7|\Big|_0^1=\frac{1}{3}(\ln 10-\ln 7)=\frac{1}{3}\ln\frac{10}{7}$

f. $\int_0^1\frac{6x+5}{3x^2+5x+8}dx=\ln|3x^2+5x+8|\Big|_0^1=\ln 16-\ln 8=\ln 2$

g.

$$\int_0^1\frac{1}{2x^2+x+2}dx=\int_0^1\frac{1}{2\left[(x+\frac{1}{4})^2+\left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2\right]}dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{\sqrt{15}}arctg\frac{x+\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{15}}{4}}\Big|_0^1=\frac{2}{\sqrt{15}}\left(arctg\frac{5}{\sqrt{15}}-arctg\frac{1}{\sqrt{15}}\right)$$

2. Să se calculeze:

a) $\int_2^3 \frac{1}{4x^2-5x+1}\,dx$; **b)** $\int_0^1 \frac{1}{x^2+4x+5}\,dx$;

Rezolvare: a)

$$\int \frac{1}{4x^2-5x+1}dx = \int \frac{1}{4\left[\left(x-\frac{5}{8}\right)^2-\left(\frac{3}{8}\right)^2\right]}dx = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2\cdot\frac{3}{8}}\ln\left|\frac{x-\frac{5}{8}-\frac{3}{8}}{x-\frac{5}{8}+\frac{3}{8}}\right|+C = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{8x-8}{8x-2}\right|+C$$

$$\int_2^3 \frac{1}{4x^2-5x+1}\,dx = \frac{1}{3}\left(\ln\frac{16}{22}-\ln\frac{8}{14}\right);$$

b). $\int \frac{1}{x^2+4x+5}dx = \int \frac{1}{(x+2)^2+1}dx = arctg(x+2)+C$, $\int_0^1 \frac{1}{x^2+4x+5}\,dx = arctg3-arctg2$;

3. Să se calculeze integralele din funcţii raţionale utilizând descompunerea în fracţii simple:

a) $\int_0^1 \frac{x+1}{(x+2)(x+5)}\,dx$; **b)** $\int_2^3 \frac{x}{x^2-8x+7}\,dx$; **c)** $\int \frac{x-2}{x(x+1)\cdot(x+3)}dx$;

Rezolvare:

a) În general dacă numitorul are doi factori liniari atunci fracţia se va descompune în două fracţii simple: $\frac{x+1}{(x+2)\cdot(x+5)} = \frac{A}{x+2}+\frac{B}{x+5}$. După ce se aduce la acelaşi numitor se obţine:

$x+1=(x+5)A+(x+2)B$, după care vom da valori lui x pentru a afla mai uşor pe A şi B.

$x\to -2 \Rightarrow -1=3A \Rightarrow A=-\frac{1}{3}$; $\quad x\to -5 \Rightarrow -4=-3B \Rightarrow B=\frac{4}{3}$.

Aşadar, $\int \frac{x+1}{(x+2)\cdot(x+5)}dx = \int\left(-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+2}+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{x+5}\right)dx = -\frac{1}{3}\ln|x+2|+\frac{4}{3}\ln|x+5|+C$;

b) Dacă numitorul se poate descompune în factori liniari cum este cazul nostru $x^2-8x+7=(x-1)(x-7)$ atunci descompunerea în fracţii simple are forma:

$\frac{x}{x^2-8x+7} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-7}$; După aducerea la acelaşi numitor rezultă: $x=(x-7)A+(x-1)B$.

Pentru a afla pe A şi B se dau valori lui x:

$x\to 1 \Rightarrow 1=-6A \Rightarrow A=-\frac{1}{6}$, $\quad x\to 7 \Rightarrow 7=6B \Rightarrow B=\frac{7}{6}$;

Aşadar, $\int \frac{x}{x^2-8x+7}dx = \int\left(-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x-1}+\frac{7}{6}\cdot\frac{1}{x-7}\right) = -\frac{1}{6}\ln|x-1|+\frac{7}{6}\ln|x-7|+C$;

c) $\frac{x-2}{x(x+1)\cdot(x+3)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x+3}\Rightarrow x-2=(x+1)(x+3)A+x(x+3)B+x(x+1)C$

$x\to 0\Rightarrow -2=3A\Rightarrow A=-\frac{2}{3},\quad x\to -1\Rightarrow -3=-2B\Rightarrow B=\frac{3}{2},\quad x\to -3\Rightarrow -5=6C\Rightarrow C=-\frac{5}{6}$

$\int\frac{x-2}{x(x+1)\cdot(x+3)}dx=-\frac{2}{3}\int\frac{1}{x}dx+\frac{3}{2}\int\frac{1}{x+1}dx-\frac{5}{6}\int\frac{1}{x+3}dx=-\frac{2}{3}\ln|x|+\frac{3}{2}\ln|x+1|-\frac{5}{6}\ln|x+3|+C.$

4. Să se calculeze integralele din funcţii raţionale utilizând împărţirea polinoamelor:

a) $\int_1^2\frac{8x^2-6x+2}{x}\,dx=\left(4x^2-6x+2\ln|x|\right)\Big|_1^2$; **b)** $\int_1^2\frac{4x^3-5x+3}{x^2}\,dx=\left(2x^2-5\ln|x|-\frac{3}{x}\right)\Big|_1^2$;

c) $\int_2^3\frac{x^4-1}{x^2-1}\,dx=\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\Big|_2^3$; **d)** $\int_0^1\frac{x^2-9}{x-3}\,dx=\left(\frac{x^2}{2}+3x\right)\Big|_0^1$;

e) $\int_0^1\frac{x^2-25}{x+5}\,dx=\left(\frac{x^2}{2}-5x\right)\Big|_0^1$; **f)** $\int_0^1\frac{x^3-3x}{x^2-3}\,dx=\frac{x^2}{2}\Big|_0^1$;

g) $\int_0^1\frac{x^{2015}+2x^{2014}}{x+2}\,dx=\frac{x^{2015}}{2015}\Big|_0^1$; **h)** $\frac{19}{24}$; **h)**

$\int_0^1\frac{x^3}{x+2}\,dx=\int_0^1\left(x^2-2x+4-\frac{8}{x+2}\right)dx$;

i) $\int_0^1\frac{x^3+5}{x-2}\,dx=\left(\frac{x^3}{3}+x^2+4x+13\ln|x-2|\right)\Big|_0^1$;

j) $\int_0^1\frac{x^3+x^2-4x-3}{x^2-4}\,dx=\int_0^1\left(x+1+\frac{1}{x^2-4}\right)dx=\frac{3}{2}+\frac{1}{4}\ln\frac{1}{3}$.

k) $\int_0^3\frac{x^3+9x+1}{x^2+9}\,dx=\int_0^3\left(x+\frac{1}{x^2+9}\right)dx=\frac{9}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{4}$.

l) $\int_0^1\frac{2x^2-4x+3}{x+1}dx=\int_0^1(2x-6+\frac{9}{x+1})dx=\left[x^2-6x+9\ln|x+1|\right]\Big|_0^1=-5+9\ln 2$.

Exercitii propuse

1. Să se calculeze:

a) $\int_0^1\frac{1}{7x+3}\,dx$; **b)** $\int_0^1\frac{x+4}{x-2}\,dx$; **c)** $\int_3^4\frac{2x-8}{x-2}\,dx$; **d)** $\int_0^3\frac{1}{x^2+9}\,dx$;

e) $\int_0^2\frac{1}{2x^2+8}\,dx$; **f)** $\int_0^4\frac{1}{x^2-100}\,dx$; **g)** $\int_0^1\frac{1}{3x^2-12}\,dx$; **h)** $\int_0^1\frac{x^2-8}{x^2-9}\,dx$;

i) $\int_0^4 \frac{x^2+20}{x^2+16}\,dx$;

2. Să se calculeze:

a) $\int_2^3 \frac{1}{4x^2-5x+1}\,dx$; **b)** $\int_0^1 \frac{1}{x^2+4x+5}\,dx$; **c)** $\int_0^1 \frac{1}{x^2-3x+1}\,dx$; **d)** $\int_1^2 \frac{1}{x^2-2x+2}\,dx$;

e) $\int_0^1 \frac{1}{x^2+6x+5}\,dx$; **f)** $\int_2^3 \frac{1}{2x^2-5x+3}\,dx$;

3. Să se calculeze integralele din funcţii raţionale utilizând descompunerea în fracţii simple:

a) $\int_0^1 \frac{x+1}{(x+2)(x+5)}\,dx$; **b)** $\int_2^3 \frac{x}{x^2-8x+7}\,dx$; **c)** $\int_0^1 \frac{1}{(x-3)(x-2)}\,dx$; **d)** $\int_2^3 \frac{1}{(x-1)(x+2)}\,dx$;

e) $\int_0^1 \frac{x+1}{(x+2)(x+3)}\,dx$; **f)** $\int_{-1}^0 \frac{2x+1}{(x-3)(x-1)}\,dx$; **g)** $\int_1^2 \frac{3x-1}{x^2+2x}\,dx$; **h)** $\int_1^2 \frac{4x-1}{x^2-3x}\,dx$;

i) $\int_2^3 \frac{3x+4}{x^2-5x+6}\,dx$; **j)** $\int_0^1 \frac{4x-2}{x^2+6x+8}\,dx$;

4. Să se calculeze:

a) $\int_1^2 \frac{8x^2-6x+2}{x}\,dx$; **b)** $\int_1^2 \frac{4x^3-5x+3}{x^2}\,dx$; **c)** $\int_2^3 \frac{x^4-1}{x^2-1}\,dx$; **d)** $\int_0^1 \frac{x^2-9}{x-3}\,dx$;

e) $\int_0^1 \frac{x^2-25}{x+5}\,dx$; **f)** $\int_0^1 \frac{x^3-3x}{x^2-3}\,dx$; **g)** $\int_0^1 \frac{x^{2015}+2x^{2014}}{x+2}\,dx$; **h)** $\int_1^2 \frac{3x^2-5x+4}{x^4}\,dx$;

5. Să se calculeze:

a) $\int_0^1 \frac{x^3}{x+2}\,dx$; **b)** $\int_0^1 \frac{x^3+5}{x-2}\,dx$; **c)** $\int_0^1 \frac{4x^3-8x+3}{2x+4}\,dx$; **d)** $\int_0^1 \frac{3x^2-5x+4}{3x-1}\,dx$;

e) $\int_0^1 \frac{x^3+x^2-4x-3}{x^2-4}\,dx$; **f)** $\int_0^3 \frac{x^3+9x+1}{x^2+9}\,dx$;

6. Să se calculeze:

a) $\int_0^1 \frac{x}{x^4+1}\,dx$; **b)** $\int_3^7 \frac{1}{2x^2+2x+5}\,dx$; **c)** $\int_0^1 \frac{2x}{x^2-4}\,dx$; **d)** $\int_0^2 \frac{x+5}{x^2+5x+6}\,dx$;

e) $\int_{-2}^0 \frac{3x^2-2x+1+5}{x^3-x^2+x-1}\,dx$; **f)** $\int_1^2 \frac{5x-1}{x^2+4x}\,dx$; **g)** $\int_2^3 \frac{2x^2+3x-1}{x-1}\,dx$; **h)** $\int_1^2 \frac{3x^2-5x+4}{x^4}\,dx$;

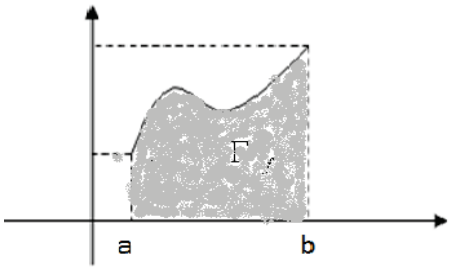
i) $\int_1^2 \frac{1}{x(x^7+1)}\,dx$; **j)** $\int_1^e \frac{1}{x(\ln^2 x+1)\ln x}\,dx$; **k)** $\int_0^1 \frac{x^2-3}{x^2+4x+5}\,dx$; **l)** $\int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x^2+4)}\,dx$;

IV. Aplicații ale integralei definite

1. Aria subgraficului unei funcţii

Definiţie:

Fie $f:[a,b]\to[0,\infty)$ o funcţie continuă. Mulţimea $\Gamma_f=\{(x,y)|a\le x\le b, 0\le y\le f(x)\}$ se numeşte subgraficul lui f şi reprezintă mulţimea punctelor din plan cuprinse între graficul lui f, axa Ox şi dreptele verticale x = a, x = b.



Teoremă

Dacă $f:[a,b]\to[0,\infty)$ **este o funcţie continuă atunci** $Aria(\Gamma_f)=\int_a^b f(x)dx$.

Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ **este o funcţie continuă atunci** $Aria(\Gamma_f)=\int_a^b |f(x)|dx$.

Exemple:

1). Să se calculeze aria suprafeţei mărginită de graficul funcţiei, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=6x-2$, de axa OX şi dreptele de ecuaţii x= 0 şi x= 1.

Rezolvare: $A=\int_a^b |f(x)|dx=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 (6x-2)dx=(3x^2-2x)\Big|_0^1=1$.

2). Să se calculeze aria suprafeţei mărginită de graficul funcţiei $f:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x-1}{x^2}$, de axa OX şi dreptele de ecuaţii x= 1 şi x= e .

Rezolvare: $A=\int_1^e \frac{x-1}{x^2}dx=\int_1^e\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx=(\ln x+\frac{1}{x})\Big|_1^e=\frac{1}{e}$;

Activitate independentă		**Răspuns**
Fie $f:[1;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x(1+\ln x)}$. Să se determine $a\in(1;e^2)$ astfel încât aria suprafeței determinată de graficul funcției f, axa OX și dreptele de ecuații x = a și $x=e^2$. să fie egală cu ln3.		a = e

Exercitii rezolvate

1. Pentru orice număr $n \in \mathbb{N}^*$, se consideră funcțiile $f_n : [0;1] \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \frac{x^n}{x+3}$.

Să se determine aria suprafeței cuprinse între graficul funcției $f_2(x)$, axa Ox și dreptele de ecuații x= 0 și x= 1;

Rezolvare: $A = \int_0^1 \frac{x^2}{x+3} dx = \int_0^1 (x-3+9\cdot\frac{1}{x+3})dx = -\frac{5}{2} + 9\ln\frac{4}{3};$

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x^2 + \frac{1}{x^2} - 2, & x\langle 1 \\ (x+3)\ln x, & x \geq 1 \end{cases}$.

Să se calculeze aria suprafeței determinată de graficul funcției $f(x)$, axa Ox și dreptele x=1 și x=e;

Rezolvare: $A = \int_1^e (x+3)\ln x dx = \left(\frac{x^2}{2} + 3x\right)\ln x \Big|_1^e - \int_1^e (\frac{x^2}{2} + 3x)\cdot\frac{1}{x} dx = \frac{e^2}{2} + 3e - \int_1^e (\frac{x}{2} + 3)dx =$

$\frac{e^2}{2} + 3e - \left(\frac{x^2}{4} + 3x\right)\Big|_1^e = \frac{e^2+13}{4}.$

3. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+4}$.

Să se calculeze aria suprafeței cuprinsă între graficul funcției f(x), axa Ox și între dreptele de ecuații x=0 și x=2;

Rezolvare: $A = \int_0^1 \frac{x^2-1}{x^2+4} dx = \int_0^1 (1-5\cdot\frac{1}{x^2+4})dx = \left(x - \frac{5}{2} arctg\frac{x}{2}\right)\Big|_0^1 = 1 - \frac{5}{2} arctg\frac{1}{2};$

4. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 2^x - 1, & x \leq 0 \\ x^2 \cdot e^x, & x\langle 0 \end{cases}$.

Să se determine $a\langle 0$ astfel încât aria suprafeței plane cuprinsă între graficul funcție f(x), axa Ox și dreptele de ecuații x = 0 și x= a să fie egală cu e - 2;

Rezolvare: $\int_0^a x^2 \cdot e^x dx = e-2 \Rightarrow e^x \cdot x^2 \Big|_0^a - \int_0^a e^x \cdot 2x dx = e-2 \Rightarrow$

$e^a(a^2 - 2a + 2) - 2 = e - 2 \Rightarrow a = 1.$

5. Fie $f : \mathbb{R} \setminus \{-5\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x-3}{x+5}$.

Să se calculeze aria suprafeței cuprinsă între graficul funcției f(x), axa Ox și între dreptele de ecuații x=1 și x=2;

Rezolvare: $A = \int_0^1 \frac{x-3}{x+5} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{8}{x+5}\right)dx = \left(x - 8\ln|x+5|\right)\Big|_0^1 = 1 - 8\ln\frac{6}{5};$

6. Fie $f, F : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 4x - 3,\ F(x) = 2x^2 - 3x + 5$.

b) Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției $g(x)=\frac{F(x)}{x+1}$, axa Ox și între dreptele de ecuații x=0 și x=2;

Rezolvare: $A=\int_0^2 \frac{2x^2-3x+5}{x+1}dx=\int_0^2 (2x-5=10\cdot\frac{1}{x+1})dx=-6+10\ln 3;$

Exercitii propuse

1. Calculaţi aria suprafeţei mărginite de graficul funcţiei $f:[a;b]\to\mathbb{R},$, axa OX şi dreptele de ecuaţii x=a, x=b:

a) $f:[0;1]\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2+3x+1$**;**

b) $f:\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R},\ f(x)=\sin x$**,**

c) $f:[0;2]\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{x^2+4}$**;**

d) $f:[0;2]\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{x}{x+3}$**;**

e) $f:[0;1]\to\mathbb{R},\ f(x)=xe^x$**;**

f) $f:[0;2]\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{x^2+1}{x+2}$**;**

g) $f:\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R},\ f(x)=e^x\sin x$

h) $f:[0;2]\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{x^2-16}$**;**

2. Volumul unui corp de rotaţie

Teoremă.

Dacă $f:[a,b]\to[0,\infty)$ este o funcţie continuă atunci volumul corpului obţinut prin rotirea graficului funcţiei f în jurul axei OX (numit corp de rotaţie) este:

$Vol\left(C_f\right)=\pi\int_a^b f^2(x)dx$.

Exemple:

1). Să se determine volumul corpului de rotaţie determinat de graficul funcţiei $f:[0;1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+9}$ între dreptele de ecuaţii x = 0, x = 1.

Rezolvare: $V=\pi\int_0^1 f^2(x)dx=\pi\int_0^1\sqrt{x^2+9}^2dx=\pi\int_0^1(x^2+9)dx=\pi(\frac{x^3}{3}+9x)\Big|_0^1=\frac{28\pi}{3}$.

2). Să se determine volumul corpului de rotaţie determinat de graficul funcţiei $f:[0;\pi]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{\sin x}$ între dreptele de ecuaţii x = 0, x = π.

Rezolvare: $V=\pi\int_0^1 f^2(x)dx=\pi\int_0^\pi\sqrt{\sin x}^2dx=\pi\int_0^1\sin xdx=\pi\cdot(-\cos x)\Big|_0^\pi=\pi+1$.

Activitate independentă		**Răspuns**
Să se determine volumul corpului de rotaţie determinat de graficul funcţiei $f:[1;2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{2x^3+3x}$ între dreptele de ecuaţii x = 1, x = 2.		**V=12π.**

Exercitii rezolvate

1. Fie $f:[3;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x-3}$.

Să se calculeze volumul corpului de rotație obținut prin rotirea graficului funcției f(x) în jurul axei Ox și a dreptelor x= 3 și x= 4;

Rezolvare: $V(C_f)=\pi\int_3^4\left(\sqrt{x-3}\right)^2dx=\pi\int_3^4(x-3)\,dx=\pi\left(\frac{x^2}{2}-3x\right)\Big|_3^4=\frac{\pi}{2}$.

2. Fie $f:(0;2)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{2x-x^2}$.

Să se calculeze volumul corpului de rotație obținut prin rotirea graficului funcției $f:[0;1]\to\mathbb{R}$ în jurul axei Ox și între dreptele x=0 și x=1;

Rezolvare: $V(C_f)=\pi\int_0^1 f^2(x)dx=\pi\int_0^1\left(2x-x^2\right)\,dx=\pi\left(\frac{2x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1=\frac{2\pi}{3}.$

3. Pentru orice număr $n\in\mathbb{N}$, se consideră funcțiile $f_n:[0;1]\to\mathbb{R},\ f_n(x)=\frac{x^n}{\sqrt{x+1}}$ și $g(x)=2\sqrt{x+1}$.

Să se calculeze volumul corpului de rotație obținut prin rotirea graficului funcției $f_1:[0;1]\to\mathbb{R}$ în jurul axei Ox și între dreptele x=0 și x=1;

Rezolvare:

$V(C_{f_1})=\pi\int_0^1 f_1^2(x)dx=\pi\int_0^1\left(\frac{x}{\sqrt{x+1}}\right)^2 dx=\pi\int_0^1\frac{x^2}{x+1}dx=\pi\int_0^1\left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)dx=(\ln 2-\frac{1}{2})\cdot\pi$;

4. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{x^2+3x}.$

Să se calculeze volumul corpului de rotație obținut prin rotirea graficului funcției $f(x)$ în jurul axei Ox și între dreptele x=0 și x=1;

Rezolvare: $V(C_f)=\pi\int_0^1 f^2(x)dx=\pi\int_0^1\left(\sqrt{x^2+3x}\right)^2 dx=\pi\int_0^1(x^2+3x)dx=\frac{-7\pi}{6}$;

5. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\sqrt{3-2x}, & x\le 1\\ \frac{1}{2x-1}, & x\rangle 1\end{cases}$.

Să se calculeze volumul corpului de rotație obținut prin rotirea graficului funcției $f(x)$ în jurul axei Ox și între dreptele de ecuații x=0 și x=1;

Rezolvare: $V(C_f)=\pi\int_0^1 f^2(x)dx=\pi\int_0^1\left(\sqrt{3-2x}\right)^2 dx=\pi\int_0^1(3-2x)dx=\pi.$

6. Fie $f:[-2;2]\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{4-x^2}.$

Să se calculeze volumul corpului de rotație obținut prin rotirea graficului funcției $f(x)$ în jurul axei Ox și între dreptele de ecuații x=0 și x=1;

Rezolvare: $V=\pi\int_0^1 f^2\,(x)dx=\pi\int_0^1(4-x^2)dx=\frac{11}{3}\pi.$

7. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}x^3-3^x, & x\langle\ 0\\ \sqrt{x}-1, & x\ge 0\end{cases}$.

Să se calculeze volumul corpului de rotație determinat de graficul funcției $g:[0;1]\to\mathbb{R},\ g(x)=f(x)$, în jurul axei Ox și între dreptele de ecuații x=0 și x=1;

Rezolvare: $V=\pi\int_0^1 f^2\,(x)dx=\pi\int_0^1(\sqrt{x}-1)^2dx=\pi\int_0^1(x-2\sqrt{x}+1)dx=\frac{1}{6};$

8. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{x^n+nx+1}{x^2-1}$.

Pentru n = 1 să se calculeze volumul corpului de rotație determinat de graficul funcției $g:\left[0;\frac{1}{2}\right]\to\mathbb{R},\ g(x)=(x^2-1)\cdot f(x)$ **în jurul axei Ox.**

Rezolvare: $V=\pi\int_0^{\frac{1}{2}} g^2(x)dx=\pi\int_0^{\frac{1}{2}}(4x^2+4x)+1dx=\frac{7}{6}\pi;$

Exercitii propuse

1. Calculaţi volumul corpului de rotaţie determinat de graficul funcţiei $f:[a;b]\to\mathbb{R},$ **între dreptele de ecuaţii x=a, x=b;**

a) $f:[0;1]\to\mathbb{R},\ f(x)=2x+1$**;**

b) $f:[1;e]\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln x$**;**

c) $f:[0;2]\to\mathbb{R},\ f(x)=x\cdot e^x$**;**

d) $f:[0;1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{x+1}$**;**

e) $f:\left[1;\sqrt{3}\right]\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$**;**

f) $f:[0;1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{2x+4}(x^2+4x)$**;**

g) $f:[1;e]\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$**;**

h) $f:[0;2]\to\mathbb{R},\ f(x)=x\sqrt{2-x}$**;**

i) $f:[0;1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{\frac{x+2}{x+1}}$**;**

3. *Alte aplicaţii ale integralei definite*

3.1 Limite de șiruri de integrale

Exemple de șiruri cărora li se calculează limita cu ajutorul integralei definite

Fie f o funcție definită și mărginită pe intervalul închis $\left[a\ ;\ b\right]$, care se împarte în n intervale parțiale, formând ceea ce se numește diviziune a intervalului $\Delta_n = (a = x_0 \langle x_1 \langle x_2 \langle ..... \langle x_{n-1} \langle x_n = b)$.

Se va nota cu $\| \Delta \|$, norma diviziunii $\Delta_n = (x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n)$, adică lungimea celui mai mare interval $\left[x_{k-1}\ ;\ x_k\right]$, iar pentru fiecare interval se va lua un punct arbitrar c_k.

Numărul $\sigma_{\Delta n}(f, c_k) = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)(x_k - x_{k-1})$ se numește suma integrală a funcției f, corespunzătoare diviziunii Δ și a sistemului de puncte intermediare $(c_k)_{k=\overline{1,n}}$.

Dacă $\| \Delta \| \underset{n\to\infty}{\to} 0$ pentru orice alegere a punctelor intermediare $c_k \in \left[x_{k-1}, x_k\right]$ și dacă există limita

$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)(x_k - x_{k-1}) \in \mathbb{R}$ atunci rezultă că f este integrabilă în sens Riemann și că $\sigma_{\Delta n}(f, c_k) \underset{n\to\infty}{\to} \int_a^b f(x)dx$.

În general, intervalul închis $\left[a\ ;\ b\right]$ se împarte în n intervale parțiale, $\frac{b-a}{n}$ având aceeași lungime, așadar, $\| \Delta \| = x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n} \underset{n\to\infty}{\to} 0$ și atunci, $\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} f(a + k \cdot \frac{b-a}{n}) = \int_a^b f(x)dx.$

În concluzie, pentru intervalul $\left[a\ ;\ b\right] = \left[0\ ;\ 1\right]$ rezultă $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}) = \int_0^1 f(x)dx.$

Exemple:

1). Să se calculeze: $\lim_{n\to\infty} n \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2 + k^2}$.

Rezolvare: $a_n = n \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2 + k^2} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2} \underset{n\to\infty}{\to} \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx = arctgx \Big|_0^1 = arctg1 = \frac{\pi}{4}$.

2). $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n + 8k}{n^2 + 4k^2}$;

Rezolvare: $a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{n+8k}{n^2+4k^2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{1}{n}+8\cdot\frac{k}{n^2}}{1+4\cdot\frac{k^2}{n^2}}=\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1+8\cdot\frac{k}{n}}{1+4\cdot\left(\frac{k}{n}\right)^n}=\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}f(\frac{k}{n})$.

Fie $f:[0;1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1+8x}{1+4x^2}$ o funcție continuă și deci integrabilă pe $[0\ ;\ 1]$. Alegem diviziunea $\Delta_n=\left(0;\frac{1}{n};\frac{2}{n};\frac{3}{n};.....;\frac{n}{n}=1\right)$, cu norma diviziunii $\|\ \Delta_n\ \|=\frac{1}{n}\underset{n\to\infty}{\to}0$ și sistemul de puncte intermediare $c_k\in\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]$. Atunci,

$$\sigma_{\Delta n}(f,c_k)\ =\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1+8\cdot\frac{k}{n}}{1+4\left(\frac{k}{n}\right)^2}\ \underset{n\to\infty}{\to}\ \int_0^1\frac{1+8x}{1+4x^2}dx\,.$$

$$\int_0^1\frac{1+8x}{1+4x^2}dx=\int_0^1\frac{1}{1+4x^2}dx+\int_0^1\frac{8x}{1+4x^2}dx=\frac{1}{4}\int_0^1\frac{1}{x^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}dx+\int_0^1\frac{8x}{4x^2+1}dx=$$

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}}arctg2x\Big|_0^1+\ln(4x^2+1)\Big|_0^1=\frac{arctg2}{2}+\ln 5\,.$$

3). $\lim_{n\to\infty}\ \frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}$**.**

Rezolvare: $a_n\ =\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}=\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\sin\pi\left(\frac{k}{n}\right)\ \underset{n\to\infty}{\to}\ \int_0^1\sin\pi x dx=-\frac{1}{\pi}\cos\pi x\Big|_0^1=\frac{2}{\pi}$.

Rezolvă singur

1). Să se calculeze: $\lim_{n\to\infty}\ \frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{4n^2-k^2}$**.**

2). Să se calculeze $\lim_{n\to\infty}\ \sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+k^2}$**.**

3). Să se calculeze: $\lim_{n\to\infty}\ \frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^2+k^2}$**.**

4). Să se calculeze: $\lim_{n\to\infty}\ \frac{1}{n^2}\cdot\sum_{k=1}^{n}\sqrt{n^2-k^2}$.

5). Să se calculeze: $\lim_{n\to\infty}\ \frac{1}{n^2}\cdot\sum_{k=1}^{n}k\cdot\sqrt[n]{2^k}$.

6). Să se calculeze: $\lim_{n\to\infty}\ n\cdot\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{(2n+k)^2}$.

7). Să se calculeze: $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\cdot\sum_{k=1}^{n}k^2\cdot\sqrt[3]{2k^3+n^3}$.

3.2 Limite cu integrale

Definiţie. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\int_a^x f(t)dt}{g(x)}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{F(t)\Big|_a^x}{g(x)}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{F(x)-F(a)}{g(x)}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{F^I(x)}{g^I(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g^I(x)}$.

Exemple:

1). Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ **Să se calculeze** $\lim\limits_{x\to\infty}\int_0^x f(t)dt$.

Rezolvare:

$\int_0^x f(t)dt=\int_0^x\dfrac{1}{t^2+1}dt=arctgt\Big|_0^x=arctgx-arctg0=arctgx$. $\lim\limits_{x\to\infty}\int_0^x f(t)dt=\lim\limits_{x\to\infty}arctgx=\dfrac{\pi}{2}$.

2

2). Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^{2017}+x^2+1.$ **Să se calculeze** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\int_0^x f(t)dt}{x^{2018}}$.

Rezolvare:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\int_0^x f(t)dt}{x^{2018}}=\lim_{x\to\infty}\frac{F(t)\Big|_0^x}{x^{2018}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(F(x)-F(0)\right)^I}{\left(x^{2018}\right)^I}=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{2018x^{2017}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{2017}+x^2+1}{2018x^{2017}}=\frac{1}{2018}.$$

3). Fie $f:[0;1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}.$ **Să se calculeze** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2} f(t)dt}{x^2}$.

Rezolvare:

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{F(t)\Big|_0^{x^2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(F(x^2)-F(0)\right)^I}{\left(x^2\right)^I}=\lim_{x\to 0}\frac{F^I(x^2)\cdot\left(x^2\right)^I}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x^2)\cdot 2x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^2+1}=0.$$

4). Fie $f:[0;2]\to\mathbb{R},\ f(x)=x\cdot\sqrt{4-x^2}$ **Să se calculeze** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(t)dt}{x^2}$.

Rezolvare:

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{F(t)\Big|_0^x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(F(x)-F(0)\right)^I}{\left(x^2\right)^I}=\lim_{x\to 0}\frac{F^I(x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}\sqrt{4-x^2}}{2\cancel{x}}=\frac{\sqrt{4}}{2}=1.$$

Rezolvă singur:

1). Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=3x^2+4x+1$ **Să se calculeze** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\int_0^x f(t)dt}{x^3}$.

2). Fie $f:(1;\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ **Să se calculeze** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}\cdot\int_1^x f(t)dt$.

3) Fie $f:[1;\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$. **Să se calculeze** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\int_1^x f(t)dt}{x^{2018}}$.

4). Fie $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f_0(x)=x\cdot e^x$ **,** $f_{n+1}(x)=\int_0^x f_n(t)dt,\ n\rangle 0$ **Să se calculeze** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f_2(x)}{x}$.

5). Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}x\cdot e^x,\ x\le 0\\ \sin x,\ x\rangle 0\end{cases}$ **. Să se calculeze** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(t)dt}{x^2}$.

6) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2+x+1$**. Să se calculeze** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\int_0^x f(t)dt}{x^3+1}$.

7). **Fie** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x\cdot\sqrt{9x^2+10}$ **. Să se calculeze** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\int_0^x f(t)dt}{x^3}$.

8). Fie $f:(0;\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1}{x(x+1)}$ **. Să se calculeze** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\int_1^x (t+1)f(t)dt}{x}$.

9). Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=(x+2)^3$ **. Să se calculeze** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^4}\cdot\int_0^x f(t)dt$.

10). Fie $f:(-1;\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=x-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{3}x^3-\ln(1+x)$**. Să se calculeze** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F(x)}{x^5}$**, unde** $F(x)=\int_0^x f(t)dt.$

3.3 Derivarea integralelor

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție care admite primitive. Fie F o primitivă a lui f. Dacă $g(x)=\int_a^{u(x)} f(t)dt \Rightarrow g^I(x)=\left(F(t)\Big|_a^{u(x)}\right)^I = F^I(u(x))\cdot u^I(x)-F^I(a)$, iar $F^I(a)=0$.

Exemple:

1). Fie $f:\mathbb{R}\to(0;\infty),\ f(x)=e^x$. Dacă $g(x)=\int_0^{x^2} f(t)dt$, să se calculeze $g^I(x)$.

Rezolvare:

$$g^I(x)=\left(F(t)\Big|_0^{x^2}\right)^I=\left(F(x^2)-F(0)\right)^I=f(x^2)\cdot(x^2)^I=f(x^2)\cdot 2x=e^{x^2}\cdot 2x.$$

2). Fie $f:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R},\ f(x)=\int_0^{arctgx} e^{tg^2t}dt$.. Să se calculeze $f^I(x)$.

Rezolvare:

$$f^I(x)=\left(F(t)\Big|_0^{arctgx}\right)^I=\left(F(arctgx)-F(0)\right)^I=f(arctgx)\cdot(arctgx)^I=e^{(tgarctgx)^2}\cdot(arctgx)^I=e^{x^2}\cdot\frac{1}{x^2+1}$$

3). Fie $f:\mathbb{R}\to(0;\infty),$, $f(x)=\int_0^{x^3} e^{t^2}\,dt$ Să se calculeze, $f^I(x)$.

Rezolvare:

Cum primitive funcției e^{x^2} nu se poate exprima cu ajutorul funcțiilor elementare, fie F o primitivă a lui f. Atunci,

$$f^I(x)=\left(F(t)\Big|_0^{x^3}\right)^I=\left(F(x^3)-F(0)\right)^I=f(x^3)\cdot(x^3)^I=f(x^3)\cdot 3x^2=e^{x^6}\cdot 3x^2.$$

Rezolvă singur:

1). Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\int_{x^2}^{x^3}\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$. Să se calculeze $f^I(x)$.

2). Fie $f:[1;\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\int_x^{x^2}\sqrt{(1-t)^3}\,dt$. Să se calculeze $f^I(x)$.

3). Fie $f:[-1;1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\int_0^x e^{\arcsin t}dt$. Să se calculeze $f^I(x)$.

4). Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\int_0^x e^{t^2}(t^2-3t+2)dt$. Să se calculeze $f^I(x)$.

5). Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\arcsin x}\ln(1+\sin^2 t)dt$. Să se calculeze $f^I(x)$.

3.4 Șiruri de integrale

Definiție: Fie $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **un șir de funcții care admit primitive pe** $[a;b]$, $n\in\mathbb{N}$ **. Numim șir de integrale, un șir de forma** $I_n=\int_a^b f_n(x)dx$.

Exemple:

1). Pentru orice număr $n\in\mathbb{N}^*$, se consideră integralele $I_n=\int_0^1 \frac{x^n}{x+2017}dx$;

Folosind, eventual, faptul că $\frac{x^n}{2018}\le\frac{x^n}{x+2017}\le\frac{x^n}{2017}$, $\forall x\in[0;1], n\in\mathbb{N}^*$ să se demonstreze că $\frac{1}{2018}\le 2017\cdot I_{2017}\le\frac{1}{2017}$.

Rezolvare: Se integrează inegalitatea dată rezultând: $\int_0^1 \frac{x^n}{2018}dx\le\int_0^1 \frac{x^n}{x+2017}dx\le\int_0^1 \frac{x^n}{2017}dx$, $\forall x\in[0;1], n\in\mathbb{N}^*$. Pentru n = 2017, rezultă $\frac{x^{2018}}{2018^2}\Big|_0^1\le I_{2017}\le\frac{x^{2018}}{2017\cdot 2018}\Big|_0^1$ și înlocuind rezultă ceea ce trebuia demonstrat.

2). Pentru orice număr $n\in\mathbb{N}$**, se consideră funcțiile** $f_n:[0;1]\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\frac{x^n}{\sqrt{x+1}}$**.**

Să se demonstreze că $\int_0^1 f_{2017}(x)dx\le\frac{1}{2018}$.

Rezolvare: Cum $\frac{x^{2017}}{\sqrt{x+1}}\le x^{2017}$, $\forall x\in(0;1)\Rightarrow\int_0^1 f_{2017}(x)dx\le\int_0^1 x^{2017}dx=\frac{x^{2018}}{2018}\Big|_0^1=\frac{1}{2018}$.

3). Să se arate că $\int_0^1\sqrt[n]{\frac{2x}{(1+x^2)^{n+1}}}dx\ \langle\ \frac{(n-1)\pi+2}{4n}$, $n\in\mathbb{N}$

Rezolvare:

Se aplică inegalitatea mediilor

$$\int_0^1\frac{1}{(1+x^2)}\sqrt[n]{\frac{2x}{(1+x^2)}\cdot 1\cdot 1\cdot.....\cdot 1}\,dx\ \le\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\ \frac{\frac{2x}{1+x^2}+n-1}{n}dx=$$

$$=-\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+x^2}\Big|_0^1+\frac{n-1}{n}arctgx\Big|_0^1=\frac{(n-1)\pi+2}{4n}.$$

Rezolvă singur:

1). Pentru orice număr $n\in\mathbb{N}^*$, se consideră funcțiile $f_n:[0;1]\to\mathbb{R},\ f_n(x)=\frac{x^n}{x+3}$. Să se arate că $\int_0^1 f_{2018}(x)dx\le\ln\frac{4}{3}$.

2). Se consideră integralele $I_n=\int_0^1\frac{x^n+1}{x+1}dx,\ \forall n\in\mathbb{N}$. Folosind eventual faptul că $0\le x^2\le x,\ \forall x\in[0;1]$. Să se demonstreze că $I_{2018}\le I_{2017}$;

3). Fie $f_n(x)=(4-x)^n,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$. Să se arate că $3^n\le\int_0^1 f_n(x)dx\le 4^n$.

4). Fie $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f_n(x)=\frac{x^n}{x^2+1}$. Să se arate că $\frac{1}{2(n+1)}\le\int_0^1 f_n(x)\le\frac{1}{n+1}$.

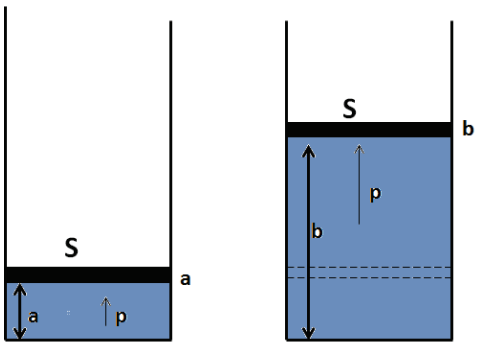
5). Se consideră integralele $I_n=\int_2^3\frac{x^n+1}{x^2-1}dx,\ \forall n\in\mathbb{N}$. Să se arate că $I_{n+2}-I_n=\frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{n+1}$;

6). Fie $I_n=\int_2^3\frac{x^n}{x^2-1}dx,\ \forall n\in\mathbb{N}$. Să se arate că $I_{n+2}-I_n=\frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{n+1},\ \forall n\in\mathbb{N}$.

7). Fie $f:(0;\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{\ln x}{x}+x$. Să se determine rația progresiei aritmetice având termenul general $I_n=\int_{e^n}^{e^{n+1}}(f(x)-x)dx$.

4. *Aplicaţii practice ale integralei definite*

1. Un gaz aflat într-un cilindru exercită asupra unui piston de arie S o forță $F = p \cdot S$ unde p este presiunea gazului. Admițând faptul că, gazul se supune legii Boyle-Mariotte, $p \cdot V = const.$, să se determine lucrul mecanic efectuat de gaz pentru deplasarea pistonului pe distanța de la a la b față de fundul cilindrului. (a este poziția inițială a pistonului, b este poziția finală a pistonului). Dacă luăm cazul particular, atunci când forța gazului este de 10 N, să se determine lucrul mecanic efectuat pentru deplasarea pistonului pe distanța x de la a=10 cm la b=30 cm.



Rezolvare: $p \cdot V = K,\ K = const. \Rightarrow p = \frac{K}{V}$, iar $F = p \cdot S = \frac{K}{V} \cdot S$, unde $V = S \cdot x$. Aşadar, considerăm forța ca funcție în x rezultând $F(x) = \frac{K}{V(x)} \cdot S$. Cum lucrul mecanic este $L = \int_a^b F(x)dx$, rezultă în cazul nostru,

$$L = \int_a^b F(x)dx = \int_a^b \frac{K \cdot S}{V(x)}dx = \int_a^b \frac{K \cdot S}{S \cdot x}dx = \int_a^b \frac{K}{x}dx = K \cdot \ln x \Big|_a^b = k(\ln b - \ln a).$$

Pentru cazul particular rezultă

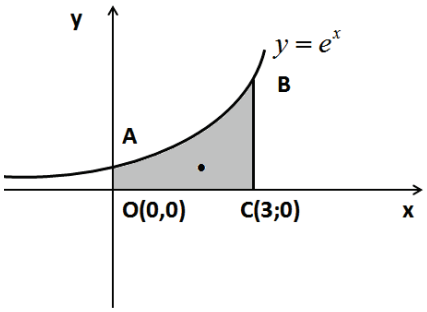
$$L = \int_{10}^{30} 10dx = 10x \Big|_{10}^{30} = 10N \cdot (30-10)cm = 10N \cdot 20cm = 10N \cdot 0,2m = 2J.$$

(Joulul este unitatea de măsură pentru lucrul mecanic, $1J = 1N \cdot m$).

2. Să se determine coordonatele centrului de greutate ale unei plăci omogene OABC a cărei suprafață este mărginită de graficul funcției $f:[0;3] \to \mathbb{R}_+,\ f(x) = e^x$, de dreptele de ecuații $x = 0,\ x = 3$ și de axa Ox.

Rezolvare:

Coordonatele centrului de greutate sunt date de formulele $x_G = \frac{\int_a^b x \cdot f(x)dx}{\int_a^b f(x)dx}$, $y_G = \frac{1}{2} \cdot \frac{\int_a^b f^2(x)dx}{\int_a^b f(x)dx}$.

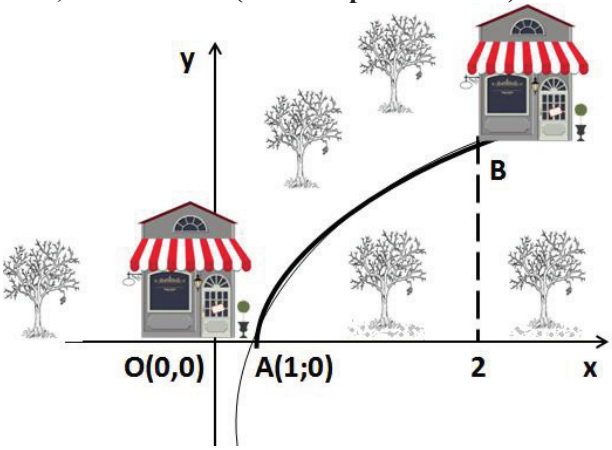


Atunci,

$$x_G=\frac{\int_0^3 x\cdot f(x)dx}{\int_0^3 f(x)dx}=\frac{\int_0^3 x\cdot e^x dx}{\int_0^3 e^x dx}=\frac{x\cdot e^x\Big|_0^3-e^x\Big|_0^3}{e^x\Big|_0^3}=\frac{2e^3+1}{e^3-1};$$

$$y_G=\frac{1}{2}\cdot\frac{\int_0^3 f^2(x)dx}{\int_0^3 f(x)dx}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\int_0^3 e^{2x}dx}{\int_0^3 e^x dx}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{e^{2x}}{2}\Big|_0^3}{e^3-1}=\frac{1}{4}\cdot\frac{e^6-1}{e^3-1}=\frac{1}{4}(e^3+1).$$

3. Se știe că drumul dintre două magazine arată ca în figura alăturată, fiind o curbă al cărei grafic este dat de funcția $f:[1;\infty)\to[0;\infty)$, $f(x)=\ln x$. Să se calculeze lungimea drumului AB, dacă $1\le x\le 2$ (x este exprimat în km).



Rezolvare: A calcula lungimea acestui drum, înseamnă să calculăm lungimea arcului de curbă AB a cărui formulă este $l=\int_a^b\sqrt{1+\left[f^I(x)\right]^2}dx$ unde $a\le x\le b$.

În cazul nostru, $f^I(x)=\left(\ln x\right)^I=\frac{1}{x}$ și atunci, $l=\int_1^2\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}dx=\int_1^2\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}dx=\int_1^2\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}dx$.

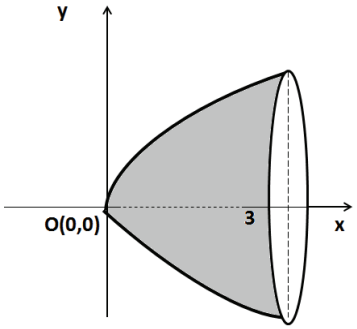
Utilizând metoda substituției, $\sqrt{x^2+1}=t|()^2\Rightarrow x^2+1=t^2\Rightarrow\quad 2xdx=2tdt\Rightarrow dx=\frac{t}{x}dt$, integrala care se obține este

$\int\frac{t^2}{t^2-1}dt=\int\frac{t^2-1+1}{t^2-1}dt=\int\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt=t+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|$. Așadar, integrala cerută este

$$l=\int_1^2\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}dx=\left(\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}\right|\right)\Big|_1^2=\sqrt{5}-\sqrt{2}+\frac{1}{2}\left(\ln\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}-\ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right).$$

4. Un meșter vrea să construiască un clopot înalt de 3m iar forma sa să fie cea a unui corp de rotație, obținut prin rotirea graficului funcției $f:[0;\infty)\to[0;\infty)$,

$f(x)=\sqrt{x}$ **în jurul axei Ox. Să se calculeze aria suprafeței clopotului pentru a ști de cât material este nevoie ca să-l construiască.**



Rezolvare: Aria suprafeței clopotului este aria suprafeței corpului de rotație pentru $0\le x\le 3$, x fiind exprimat în metri. Atunci, conform formulei care dă aria suprafeței unui corp de rotație $A=2\pi\int_a^b f(x)\cdot\sqrt{1+(f'(x))^2}dx$

În cazul nostru, $A=2\pi\int_0^3\sqrt{x}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2}dx=2\pi\int_0^3\sqrt{x}\cdot\sqrt{\frac{4x+1}{4x}}dx=\pi\int_0^3\sqrt{4x+1}dx$. Se utilizează mai departe metoda substituției, $\sqrt{4x+1}=t\Rightarrow 4x+1=t^2\Rightarrow 4dx=2tdt$. Atunci,

$\pi\int\sqrt{4x+1}dx=\pi\int t\cdot t\frac{dt}{2}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{t^3}{3}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sqrt{4x+1}^3}{3}+C$.

Așadar, $A=\pi\int_0^3\sqrt{4x+1}dx=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sqrt{4x+1}^3}{3}\Big|_0^3=\frac{\pi}{6}\left(13\sqrt{13}-1\right)=24m^2$.

5. Căldura specifică a unui kilogram de apă variază în funcție de temperatura t, după legea $f(t)=1+2\cdot10^{-4}t+9\cdot10^{-6}t^2$. Să se determine cantitatea de căldură necesară pentru a încălzi 1m^3 de apă de la 10^0 la 50^0.

Rezolvare: Dacă pentru un kilogram de apă căldura specifică e modelată după legea $f(t)=1+\frac{2}{10^4}t+\frac{9}{10^6}t^2$, atunci, pentru un m^3, căldura specifică e modelată după legea $f_1(t)=1000+\frac{2}{10}t+\frac{9}{10^3}t^2=1000+0,2t+0,009t^2$. Căldura specifică se determină derivând cantitatea de căldură Q(t) în raport cu t. $\frac{dQ(t)}{dt}=1000+0,2t+0,009t^2$. Rezultă,

$Q=\int_{10}^{50}f(t)dt=\int_{10}^{50}(1000+0,2t+0,009t^2)dt=\left(1000t+0,2\frac{t^2}{2}+0,009\frac{t^3}{3}\right)\Big|_{10}^{50}=$

$=40000+250-10+375-2=40613\ Kcal$.

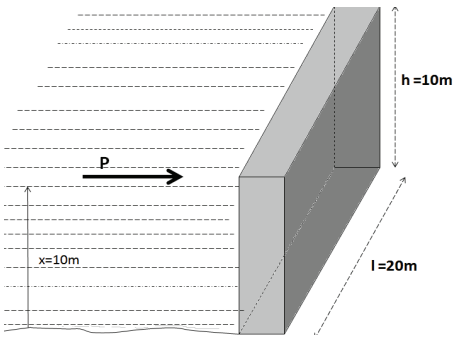
6. Un baraj are lățimea l= 20m și înălțimea h = 10m. Să se calculeze forța cu care acționează presiunea apei asupra stăvilarului știind că nivelul maxim al apei atinge fața superioară a barajului.

Rezolvare: Presiunea apei care acționează asupra barajului poate fi exprimată prin forma $P=P_a+\rho gh$, unde P_a este presiunea atmosferică care este egală cu $P_a=10^5\ N/m^2$ iar densitatea apei este $\rho_{apa}=1000\ Kg/m^3$, g este accelerația gravitațională pe care o aproximăm cu $g\approx 10\ m/s^2$.

Cum presiunea se definește ca fiind derivata Forței în raport cu suprafața , avem relațiile:

$P=\frac{dF}{dS}\Rightarrow dF=P\cdot dS$. Dar, aria suprafeței este aria barajului luat ca suprafață dreptunghiulară și anume, $S=h\cdot l\Rightarrow dS=l\cdot dh$. Atunci, $dF=P\cdot l\cdot dh$. Integrând, obținem, $F=\int_0^h P\cdot ldh=\int_0^h\left(P_a+\rho gh\right)\cdot ldh=P_a\cdot l\cdot h\Big|_0^h+\rho gl\cdot\frac{h^2}{2}\Big|_0^h=$

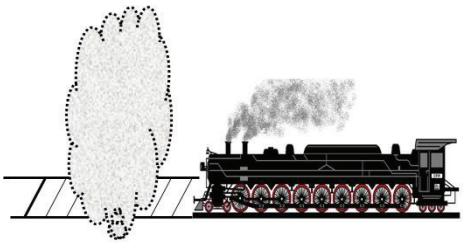
$=P_a\cdot l\cdot h+\rho gl\cdot\frac{h^2}{2}=10^5\,N/m^2\cdot 20m\cdot 10m+1000\,Kg/m^3\cdot 10m\cdot 20m\cdot\frac{10^2}{2}m^2=2\cdot 10^7+10^7=3\cdot 10^7 N$



7. O locomotivă având masa de 10 tone și viteza $v_1=80km/h$ la intrarea într-un strat de zăpadă, are la ieșire, viteza $v_2=60km/h$ 60 km/h. Să se afle lucrul mecanic necesar pentru străbaterea stratului de zăpadă.

Rezolvare:

Conform definiției lucrului mecanic, variația energiei cinetice ne dă lucrul mecanic. Astfel,



$Ec_f-Ec_i=L\Rightarrow\frac{mv^2{}_f}{2}-\frac{mv^2{}_i}{2}=L\Rightarrow\frac{m}{2}\left(v^2{}_f-v^2{}_i\right)=L$.

Matematic, lucrul mecanic se poate exprima cu ajutorul integralei definite astfel,

$L=\int_{v_2}^{v_1} m\cdot vdv=m\cdot\frac{v^2}{2}\Big|_{v_2}^{v_1}=\frac{1}{2}t\cdot\left(80^2km/h-60^2km/h\right)=\frac{10000}{2}kg\cdot\left[\left(\frac{200}{9}\right)^2\frac{m^2}{s^2}-\left(\frac{100}{6}\right)^2\frac{m^2}{s^2}\right]=$

$=5000\cdot\left(492,84-275,56\right)=1086400\ J=1086,4\ KJ$.

S-a calculat $80\frac{km}{h}=\frac{80\cdot 1000m}{3600s}=\frac{200}{9}\frac{m}{s}$ și $60\frac{km}{h}=\frac{60\cdot 1000m}{3600s}=\frac{100}{6}\frac{m}{s}$.

8. Căldura molară la presiune constantă a unei anumite substanțe variază cu temperatura, după legea $C=20J\cdot mol^{-1}\cdot k^{-1}+(40\cdot 10^{-3}J\cdot mol^{-1}\cdot k^{-2})T$. Câtă căldură este necesară, pentru a schimba temperatura a 10 moli de la 30^0 la 330^0 ?

Rezolvare: Din expresia căldurii molare $C = M \cdot c = \frac{dQ}{n \cdot dT}$, se obține $dQ = n \cdot C \cdot dT$, unde n reprezintă numărul de moli, c reprezintă căldura specifică a apei, $c = \frac{4190J}{kg \cdot grad}$.

Așadar, prin integrare se obține $Q = n \cdot \int_{T_1}^{T_2} C \, dT$ expresia căldurii care trebuie schimbată de un corp de masă m, pentru a-și modifica temperatura de la T_1 la T_2. c variază cu temperatura;

Așadar, $Q = n \cdot \int_{T_1}^{T_2} C \, dT = 10 \cdot \int_{30}^{330} \left[20 + (40 \cdot 10^{-3}) T \right] dT = 10 \cdot \left[20T + (40 \cdot 10^{-3}) \frac{T^2}{2} \right] \Big|_{30}^{330} =$

$10 \cdot \left[20 \cdot (330 - 30) + (40 \cdot 10^{-3}) \frac{(330-30)^2}{2} \right] = 10 \cdot \left(20 \cdot 300 + 20 \cdot 10^{-3} \cdot 300^2 \right) = 78000 \ J$.

9. O bobină folosită într-un motor de curent continuu are inductanța L= 20H și rezistența $R = 200\ \Omega$ și este parcursă de un curent de intensitate 0,1 A. Care este energia înmagazinată în câmpul magnetic ?

Rezolvare:

Formula prin care se exprimă energia înmagazinată în circuitul inductiv este $W = L \cdot \int_0^I i \, di = \frac{1}{2} L \cdot I^2$ unde „ **W** ” este energia totală furnizată în circuitul cu inductanță, adică în bobină, „ **L** ” este inductanța proprie iar „ **i** ” este intensitatea curentului.

După ce curentul i atinge valoarea finală (i=I)energia furnizată bobinei , W, produce în interior un câmp magnetic de inducție iar energia este înmagazinată sub formă de energie potențială.

Așadar, în cazul nostru, $W = L \cdot \int_0^I i \, di = \frac{1}{2} L \cdot i^2 \Big|_0^I = \frac{1}{2} L \cdot I^2 = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 0{,}1^2 = 10 \cdot 0{,}01 = 0{,}1 \ J$.

10. Un gaz ideal este menținut în contact termic cu un corp foarte mare, de temperatură constantă T și suferă o destindere izotermă, în care volumul variază de la $V_1 = 5l$ la $V_2 = 10l$. Care este lucrul mecanic efectuat ?

Rez: Cum $P = \frac{nRT}{V}$, atunci,

$L = \int_{V_1}^{V_2} PdV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT}{V} dV = nRT \ln V \Big|_{V_1}^{V_2} = nRT(\ln V_2 - \ln V_1) = nRT \ln \frac{V_2}{V_1}$.

EXERCIȚII RECAPITULATIVE

1. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}e^{x-1}+a, & x<1\\ \ln x+x-1, & x\geq 1\end{cases}$.

a) Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât f(x) să admită primitive pe $\mathbb{R}$;

b) Pentru a = - 1, să se calculeze $\int_0^2 f(x)dx$;

c) Să se calculeze $\int_1^2 x\cdot f(x)dx$;

2. Fie $f:(0;\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln x$.

a) Să se calculeze $\int(4x+2)\cdot f(x)dx$;

b) Să se calculeze $\int_1^e \frac{1}{x}\cdot f(x)dx$;

c) Folosind, eventual, faptul că $x^2\leq x$, pentru orice $x\in[0;1]$, să se demonstreze că $\int_1^e f^2(x)dx\leq 1$;

3. Fie $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f_n(x)=\frac{x^n}{x^2+1}$.

a) Să se calculeze $\int_0^1 f_0(x)dx$;

b) Să se determine aria suprafeței determinată de graficul funcției $f_4(x)$, axa Ox și dreptele x=0 și x=1;

c) Să se arate că $\frac{1}{2(n+1)}\leq\int_0^1 f_n(x)\leq\frac{1}{n+1}$.

4. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{-3;3\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+3}+1$.

a) Să se arate că $\int_0^1 (x-3)(x+3)\cdot f(x)dx=1-\ln 2$;

b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$;

c) Să se calculeze $\int_0^1 f(x^2)dx$;

5. Fie $f,g:(0;\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{\ln x}{x},\ g(x)=\dfrac{1}{2}\ln^2 x.$

a) Să se arate că g(x) este o primitivă a lui f(x);

b) Să se calculeze $\int_1^e x\cdot f(x)dx$;

c) Folosind, eventual, faptul că $\dfrac{\ln x}{x}\le\dfrac{1}{e},\ \forall x\in[1;e]$, să se demonstreze că $\int_1^e f(x)dx\le 1-\dfrac{1}{e}$.

6. Se consideră funcția $f_a:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f_a(x)=2x+a,\ a\in\mathbb{R}.$

a) Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ F(x)=x^2+8x+3$ să fie o primitivă a funcției f_a;

b) Să se calculeze $\int_0^1 e^x\cdot f_1(x)dx$;

c) Să se determine $a\in\mathbb{R}_+$ astfel încât $\int_0^a f_3(x)dx\ge 0$.

7. Se consideră funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{4}{3}\sqrt[3]{x},\ g(x)=x\cdot\sqrt[3]{x}.$

a) Să se arate că g(x) este o primitivă a funcției f(x);

b) Să se arate că orice primitivă a lui f(x) este convexă pe $\mathbb{R}\setminus\{0\}$;

c) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\cdot g(x)dx$;

8. Pentru orice număr $n\in\mathbb{N}^*$, se consideră funcțiile $f_n:[0;1]\to\mathbb{R},\ f_n(x)=\dfrac{x^n+x-6}{x+2}$.

a) Să se calculeze $\int_0^1 f_0(x)dx$;

b) Să se arate că $\dfrac{x+2}{x^2+x-6}=\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{4}{x-2}+\dfrac{1}{x+3}\right)$ și să se calculeze $\int_0^1\dfrac{1}{f_2(x)}dx$;

c) Să se calculeze $\int f_3(x)dx$;

9. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^{1007}+2015^x$.

a) Să se determine $\int_0^1 f(x)dx$;

b) Să se arate că orice primitivă a lui f(x) este convexă pe $\mathbb{R}$;

c) Să se calculeze $\int_0^1 x\cdot f(x^2)dx$;

10. Se consideră funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=(x+2)^3-x^3,\ g(x)=2x^3+6x^2+8x$.

a) Să se arate că g(x) este o primitivă a funcției f(x).

b) Să se calculeze $\int\dfrac{f(x)}{x^2}dx$;

c) Să se calculeze $\int_{-1}^1 f(x)\cdot g(x)dx$;

11. Fie $f:[0;\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=x-\sqrt{x}$.

a) Să se calculeze $\int_0^1 f^2(x)dx$;

b) Să se determine $a\in\mathbb{R}_+$* astfel încât $\int_0^a f(x)dx=0$;

c) Să se calculeze $\int_1^2 f'(x)\cdot f(x)dx$;

12. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=(x^2+4x+a)\cdot e^x,\ a\in\mathbb{R}$.

a) Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât orice primitivă a lui f să fie convexă pe $\mathbb{R}$;

b) Pentru a=0, să se determine aria suprafeței determinată de graficul funcției f(x), axa Ox și dreptele de ecuații x=0, x=1;

c) Pentru a=4, să se determine constantele $m,n,p\in\mathbb{R}$ astfel încât

$\int f(x)dx=(mx^2+nx+p)\cdot e^x+C$.

13. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=e^x+3x^2+3$.

a) Arătaţi că $\int_1^2 (f(x)-e^x-3)dx=7$;

b) Arătaţi că $\int_0^1 x(f(x)-3x^2)dx=\frac{5}{2}$;

c) Determinaţi $a\in(0;1)$, ştiind că $\int_0^a \frac{1}{f(x)-f'(x)}dx=\frac{1}{6}$; (Bac 2021, M tehnologic-iulie)

14. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4}}$.

a) Arătaţi că $\int_0^1 f(x)\sqrt{x^2+4}\ dx=\frac{5}{2}$;

b) Arătaţi că $\int_0^1 (f^2(x)-1)dx=2\ln\frac{5}{4}$;

c) Determinaţi $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, primitiva lui f pentru care $F(0)=0.$;

(Bac 2020, M tehnologic-august)

15. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=1+\frac{x}{x^2+1}-\frac{2}{x^2+1}$.

a) Arătaţi că $\int_0^1 (x^2+1)f(x)\ dx=-\frac{1}{6}$;

b) Determinaţi primitiva F a funcţiei f pentru care F(0)=0.

c) Arătaţi că $\int_1^2\left(f(x)+f(\frac{1}{x})\right)dx=\ln\frac{5}{2}$; (Bac 2020, M tehnologic-iulie)

16. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=(x-1)e^x$.

a) Arătaţi că $\int_0^1 \frac{f(x)}{e^x}\,dx=-\frac{1}{2}$;

b) Demonstraţi că $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ F(x)=(x-2)e^x+2019$ este o primitivă a funcţiei f.

c) Arătaţi că $\int_0^1 f^2(x)\cdot f^1(x)dx$; (Bac 2019, M tehnologic-august)

17. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{3x^2+6x+7}$.

a) Arătaţi că $\int_0^1 f^2(x)\ dx=11$;

b) Calculaţi $\int_{-1}^1 \frac{x+1}{f(x)}\,dx=11$;

c) Demonstraţi că, pentru orice $a\in(0;\infty)$, suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=0 şi x=a are aria mai mare sau egală cu $a\sqrt{7}$.

(Bac 2019, M tehnologic-iulie)

18. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=3x^2+1$.

a) Arătaţi că $\int_{-1}^1 (f(x)-1)\ dx=2$;

b) Demonstraţi că orice primitivă a funcţiei f este crescătoare pe $\mathbb{R}$;

c) Calculaţi $\int_1^e f(x)\ln x\ dx$. (Bac 2018, M tehnologic-iulie)

19. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}3x^2-x,\ x\in(-\infty;1]\\ 2+\frac{1}{x}\cdot\ln x,\ x\in(1;\infty)\end{cases}$.

a) Arătaţi că $\int_{-1}^1 (f(x)-1)\ dx=2$;

b) Arătaţi că funcţia f admite primite pe $\mathbb{R}$;

c) Determinaţi numărul natural n pentru care $\int_0^2 f(x)\ dx=\frac{n^2-4+\ln^2 2}{2}$.

(Bac 2018, M tehnologic-august)

20. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=4x^3-x$.

a) Arătaţi că $\int_0^1 (f(x)+x)\ dx=1$; b) Arătaţi că $\int_0^1 (4x^3-f(x))\cdot e^x\ dx=1$

c) Determinaţi aria suprafafeţei plane delimitată de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=1 şi x=3.

(Bac 2017, M tehnologic-iulie)

MODELE DE TESTE PENTRU BACALAUREAT

TESTUL 1

Subiectul I. (30p

1. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia: $\sqrt{x^2-4x+4}=3$;

2. Câte numere de telefon de şase cifre distincte se pot forma cu cifrele 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ?

3. Să se rezolve ecuaţia $\frac{(n+1)!+n!}{n!}=2020$.

4. Să se calculeze suma: 2 + 9 + 16 + ...+191;

5. Se consideră vectorii $\vec{v_1}=2\vec{i}+3\vec{j}$, $\vec{v_2}=-4\vec{i}+2\vec{j}$. Să se calculeze $3\cdot\vec{v_1}+2\cdot\vec{v_2}$

6. Să se scrie ecuaţia dreptei ce trece prin punctul M(-2;1) şi este paralelă cu dreapta de ecuaţie

-2x + 4y -1 = 0;

Subiectul II. (30p)

1. Fie $A=\begin{pmatrix}5 & 2\\ -10 & -4\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $M=\{X(a)\mid\ a\in\mathbb{R}, X(a)=I_2-a\cdot A\}$.

a) Să se arate că $A^2-A=O_2$

b) Să se calculeze determinantul matricei X(a);

c) Dacă X(a) e inversabilă, să se calculeze $(X(a))^{-1}$.

2. Pe $(4;\infty)$ se defineşte legea de compoziţie $x*y=xy-4x-4y+20,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$. Se cere:

a) Să se calculeze $3*4$;

b) Să se demonstreze că $\underbrace{x*x*....*x}_{n\ termeni}=(x-4)^n+4$, $n\in\mathbb{N}$;

c) Să se rezolve în $\mathbb{R}_+$ ecuaţia $\underbrace{\log_2 x*\log_2 x*.....*\log_2 x}_{2020\ termeni}=5$,

Subiectul III. (30p)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=4^x+5^x$.

a) Să se calculeze $f'(0)$; b) Să se studieze monotonia lui f;

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}x^2+\frac{1}{x^2}-2, & x<1\\ (x+3)\ln x, & x\geq 1\end{cases}$.

a) Să se arate că f(x) admite primitive pe $\mathbb{R}$;

b) Să se calculeze $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)dx$;

c) Să se calculeze aria suprafeţei determinată de graficul funcţiei $f(x)$, axa Ox şi dreptele x=1 şi x=e;

TESTUL 2

Subiectul I. (30p

1. Să se rezolve în $\mathbb{N}$ ecuaţia: $C_n^n + C_n^{n-1} + ... + C_n^1 = 1023$;

2. Câte numere de patru cifre distincte se pot forma cu cifrele 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ?

3. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x^2-4x+3.$ Să se determine punctele de pe graficul funcţiei care au abcisa egală cu ordonata.

4. Să se calculeze suma: 1 + 7 + 13 + ...+151;

5. Să se calculeze: $\log_3 81\cdot\log_3 27\cdot\log_3 9\cdot\log_3 3\cdot\log_3 1$;

6. Se dau vectorii $\vec{v_1}(2m-1;3)$ şi $\vec{v_2}(m+2;2)$. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât cei doi vectori să fie coliniari.

Subiectul II. (30p)

1. În mulţimea $M_2(\mathbb{R})$ se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}-1&2\\-1&2\end{pmatrix}$ şi X(a)= I_2 +aA, unde $a\in\mathbb{R}$.

a) Să se calculeze A^3 unde $A^3=A\cdot A\cdot A$.

b) Să se verifice dacă X(a)X(b)=X(a+b+ab), $\forall a,b\in\mathbb{R}$.

c) Să se calculeze X(1)+X(2)+……+X(2020).

2. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x*y=xy-5x-5y+30,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$. Se cere:

a) Să se arate că legea este asociativă pe $\mathbb{R}$;

b) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\sqrt[3]{x}*\sqrt{x}=5$;

c) Să se arate că există $a,b\in\mathbb{Q}-\mathbb{Z}$ astfel încât $a*b\in\mathbb{N}$.

Subiectul III. (30p)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=e^{2x}+e^{-2x}$;

a) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$;

b) Să se studieze monotonia lui f;

c) Să se arate că $f(x)\geq 2,\ \forall x\in\mathbb{R}$;

2. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sin^2 x$.

a) Să se calculeze $\int f'(x)dx$;

b) Să se calculeze $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(x)\cdot\cos x dx$;

c) Să se arate că $0\leq\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} f(x)\leq\dfrac{\pi}{24}$.

TESTUL 3

Subiectul I. (30p

1. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia: $\lg(x^2-3x)=1$;

2. Într-o urnă sunt 8 bile albe şi 4 bile negre. Care este probabilitatea ca scoţând două bile din urnă fără a le vedea , acestea să fie albe ?

3. Să se determine imaginea funcţiei $f:[-1;1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-5x+6$.

4. Să se calculeze: $C_{2020}^1+C_{2020}^2+C_{2020}^3+.....+C_{2020}^{2020}$.

5. Dacă $a\in(0;\frac{\pi}{2})$ şi $\sin a=\frac{1}{3}$ să se calculeze sin2a.

6. Să se calculeze lungimea segmentului determinat de punctele $A(-2;2)$, $B(-3;3)$.

Subiectul II. (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ din $M_2(\mathbb{R})$.

a) Să se verifice că $A^3 = 4A$;

b) Să se determine $x\in\mathbb{R}$ astfel încât $\det(A-xI_2)=0$;

c) Să se rezolve ecuaţia AX=XA unde $X\in M_2(\mathbb{R})$.

2. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x*y=xy-7x-7y+56,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$.

a) Să se arate că legea este comutativă.

b) Să se arate că legea este asociativă.

c) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\underbrace{x*x*...*x}_{6\ de\ x}=736$.

Subiectul III. (30p)

1. Fie funcţia $f:(0;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x(1+\ln x)$;

a) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$;

b) Să se determine intervalele de convexitate şi concavitate ale funcţiei f;

c) Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul lui f în punctul de abcisă $x_0=1$;

2. Fie funcţiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin x+x\cdot\cos x$, $g(x)=x\cdot\sin x$.

a) Să se arate că g(x) este o primitivă a lui f(x);

b) Să se calculeze $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)dx$;

c) Să se arate că $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx\geq 0,\ \forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

TESTUL 4

Subiectul I. (30p

1. Opt alergători aleargă într-o cursă. Câte situaţii de clasament există dacă se consideră că nu ajung mai mulţi în acelaşi timp.

2. Să se determine coordonatele punctelor de intersecţie a graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-3x-10$ cu axa OX.

3. În progresia geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$ se cunosc primul termen al progresiei, $b_1=5$ şi al cincilea termen al progresiei, $b_5=405$. Să se determine al optulea termen.

4. Rata dobânzii pe care o acordă o bancă la depunerea unei sume de bani este de 6% pe an.Ce dobândă obţine o persoană ce depuen la bancă suam de 1800 de euro pe un an ?

5. Dacă $\cos x=\frac{1}{3},\ x\in\left(0^0,90^0\right)$, să se calculeze $\sin(180^0-x)$.

6. Să se determine ecuaţia dreptei ce conţine punctul $A(2;1)$ şi are panta egală cu $tg\frac{\pi}{6}$;

Subiectul II. (30p)

1. Se consideră matricele de forma $M_a=\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R}).$

a) Să se arate că $M_a\cdot M_b=M_{a+b},\forall a,b\in\mathbb{R}.$

b) Să se calculeze produsul $M_1\cdot M_2\cdot M_3\cdot.....\cdot M_{100}$;

c) Să se determine matricele $X\in M_2(R)$ pentru care $M_a\cdot X=X\cdot M_a,\ \forall a\in\mathbb{R}.\ a\neq 0$.

2. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=-xy-x-y-2,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$.Se cere:

a) Să se arate că $x\circ y=-(x+1)(y+1)-1,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$;

b) Să se arate că legea e asociativă pe $\mathbb{R}$;

c) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia: $x\circ(x+1)\circ(x-1)=-1$.

Subiectul III. (30p)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=e^{x+1}-e(x+1).$

a) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$;

b) Să se arate că $f(x)\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$;

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2-1}$;

2. Fie $f:(0;2)\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{2x-x^2}$.

a) Să se calculeze $\int_0^1\frac{2-2x}{f(x)}dx$;

b) Să se calculeze volumul corpului de rotaţie obţinut prin rotirea graficului funcţiei $f:[0;1]\to\mathbb{R}$ în jurul axei Ox şi între dreptele x=0 şi x=1;

c) Să se demonstreze că $0\leq\int_0^1 f(x)dx\leq\sqrt{2}.$

TESTUL 5

Subiectul I. (30p

1. Să se calculeze $\log_3 27+\log_4 16-\sqrt[3]{125}$.

2. Să se arate ca expresia $A_5^2+C_5^2-P_4$ este un număr par.

3. Se dă funcția f:R→R , f(x)=2x+3, să se calculeze f(0)+f(1)+.....+f(6);

4. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2mx+4$, să se determine parametrul real m, știind că abscisa punctului de minim este egală cu 5.

5. Să se arate ca expresia $(\sin x+\cos x)^2-2\sin x\cdot\cos x$, nu depinde de variabila x.

6. Fie punctele A(2;3) și B(-1;-5). Să se determine coordonatele vectorului $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$.

Subiectul II. (30p)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases}3x-my=5\\-3x+y+z=-1,m\in\mathbb{R},\text{ și }\\x+2y-3z=1\end{cases}$ $A=\begin{pmatrix}3&-m&0\\-3&1&1\\1&2&-3\end{pmatrix}$.

a) Să se determine $m\in\mathbb{R},$ astfel încât A să fie inversabilă;

b) Să se calculeze A^2;

c) Să se rezolve sistemul pentru m = 2;

2. Se consideră polinomul $f=4X^4-15X^2-5X+6\in\mathbb{R}[X]$.

a) Să se calculeze $f(-1)+f(-\frac{1}{2})$;

b) Să se arate că f este divizibil cu polinomul $g=X^2-X-2$;

c) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația f(x) = 0 ;

Subiectul III. (30p)

1. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=(x+3)e^{-3x}$.

a) Să se determine $f'(0)$;

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

c)Să se determine punctele de extrem ale funcţiei f.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}x+3,&x\langle 0\\3\cdot e^x,&x\geq 0\end{cases}$.

a) Să se arate că f(x) admite primitive pe $\mathbb{R}$;

b) Să se calculeze $\int\limits_{-1}^{1}f(x)dx$;

c) Să se calculeze $\int\limits_{0}^{1}x^2\cdot f(x)dx$;

TESTUL 6

Subiectul I. (30p

1. Să se calculeze $8\cdot\frac{1}{2^4}-125\cdot\frac{1}{2\cdot 5^3}$.

2. Să se determine rația unei progresii aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$,unde $a_1=8$ și $a_4=-1$.

3. Să se rezolve ecuatia $\sqrt[3]{x^2+5x+5}=-1$.

4. Să se determine prețul inițial al unui produs care după două ieftiniri succesive cu câte 10% are prețul de 567 lei.

5. Fie $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Dacă $\sin x=\frac{1}{2}$, să se calculeze tgx.

6. Se dau dreptele de ecuatii: $d_1:\ y-(m+1)x+3=0$ și $d_2:\ y-7x-5=0$. Să se determine parametrul real m, știind că dreptele sunt paralele.

Subiectul II. (30p)

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1+x & 2 & 3\\ 4 & 5+x & 6\\ 7 & 8 & 9+x\end{pmatrix},\ x\in\mathbb{R}.$

a) Să se calculeze determinantul matricei A(0);

b) Să se arate că $\det\left[A(x)+A(-x)\right]=0$;

c) Să se rezolve ecuația $\det\left[A(x)\right]=0.$

2. . Se consideră polinomul $f=X^3-2X^2+2X+a\in\mathbb{R}[X]$.

a) Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care polinomul f are rădăcina $x_1=1$;

b) Pentru a = -1 să se determine câtul şi restul împărţirii lui f la polinomul $g=X+2$;

c) Pentru a = 3 să se calculeze $x_1^3+x_2^3+x_3^3$ unde x_1,x_2,x_3 sunt rădăcinile polinomului f;

Subiectul III. (30p)

1. Fie $f:(-\infty,-3)\cup(1;+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln(x^2+2x-3)$.

a) Să se calculeze f '(2) ;

b) Să se arate că f este o funcţie concavă pentru orice $x\in(-\infty,-3)\cup(1;+\infty)$;

c) Să se calculeze limita $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}x^3-5x+4, & x\leq 1\\ x\cdot\ln x\ , & x\rangle 1\end{cases}$.

a) Să se arate că f(x) admite primitive pe $\mathbb{R}$;

b) Să se arate că orice primitivă a lui f(x) este convexă pe $(1;\infty)$;

c) Să se calculeze $\int_0^e f\ (x)dx$;

TESTUL 7

Subiectul I. (30p

1. Să se arate că $\left(\sqrt[3]{9}\right)^{\log_3 1}+\sqrt[3]{-27}\in\mathbb{Z}$.

2. Să se determine numărul întreg x care verifică inegalităţile: $0\le\frac{4x-2}{3}\le 2$.

3. Să se determine valorile reale pozitive ale lui x ştiind că $\lg\sqrt[3]{x}$, $\frac{7}{3}$ şi $2\lg x$ sunt termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice.

4. Să se calculeze $\lg\left(tg1^0\right)\cdot\lg\left(tg2^0\right)\cdot\lg\left(tg3^0\right)\cdot.....\cdot\lg\left(tg45^0\right)$.

5. Să se determine $y\rangle 0$ din relaţia $\sin^2 77^0+\cos^2 77^0=(y-1)(y+1)$;

6. În plan se consideră punctele $A(-3;1)$, $B(2;-2)$, $C(4;2)$. Să se scrie ecuaţia medianei din vârful A al triunghiului ABC.

Subiectul II. (30p)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 3 & -9\end{pmatrix}$ şi mulţimea $G=\left\{X(a)\middle|X(a)=I_2+aA,\ a\in\mathbb{R}\right\}$.

a) Să se calculeze $\det(I_2+2A)$ şi să se arate că $A^2=-10A$;

b) Să se arate că $X(a)\cdot X(b)=X\left(a+b-10ab\right),a,b\in\mathbb{R}$.

c) Să se determine produsul $X\left(\frac{1}{100}\right)\cdot X\left(\frac{2}{100}\right)\cdot....\cdot X\left(\frac{100}{100}\right)$.

2. . Se consideră polinomul $f(X)=X^3-3X^2+a\in\mathbb{R}[X]$.

a) Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care f are rădăcina x=3;

b) Să se determine valorile lui $a\in\mathbb{R}$ pentru care f admite o soluţie dublă în $\mathbb{Z}$;

c) Să se calculeze suma $S=x_1^{\,3}+x_2^{\,3}+x_3^{\,3}$ unde x_1,x_2,x_3 sunt rădăcinile polinomului f pentru a=3.

Subiectul III. (30p)

1. . Se consideră funcţia $f:(0;\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{\ln x}{x}$.

a) Să se calculeze $f'(1)$;

b) Să se studieze monotonia lui f;

c) Să se calculeze $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\rangle 0}} f(x)$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3+1$.

a) Să se calculeze $\int_0^1\frac{x^2-x+1}{f(x)}dx$;

b) Să se calculeze $\int_0^1\frac{f(x)}{x+1}dx$;

c) Să se calculeze $\int\frac{3x^2}{f(x)}dx$;

TESTUL 8

Subiectul I. (30p

1. Se determine multimea valorilor reale ale lui x pentru care $-4\langle\ 3x+2\ \langle 4$.

2. Să se rezolve ecuaţia $\sqrt{3x+4}=2\sqrt{x}$.

3. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^x+2\cdot 3^{x+1}=7$.

4. Să se determine cât la sută din a +b reprezintă numărul a . ştiind că este egal cu 25% din b.

5. Se consideră pătratul ABCD de centru O. Să se calculeze $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$.

6. Să se demonstreze că expresia $(\sin x+\cos x)^2-2\sin x\cdot\cos x$ este constantă, pentru orice număr real x.

Subiectul II. (30p)

1. Se consideră sistemul de ecuaţii $\begin{cases}-x+2my+z=1\\ mx+y-2z=3\\ x+2y+z=1\end{cases}, m\in\mathbb{R}$ şi $A(m)=\begin{pmatrix}-1 & 2m & 1\\ m & 1 & -2\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$ este matricea sistemului.

a) Să se calculeze $A(1)\cdot A(-1)$;

b) Să se arate că pentru orice număr real m, determinantul matricei sistemului este negativ;

c) Pentru m=3 să se rezolve sistemul.

2. Se consideră polinomul $f(X)=X^4-2X^3-4X^2+aX+b\in\mathbb{R}[X],\ a,b\in\mathbb{R}$.

a) Să se determine a şi b ştiind că polinomul f este divizibil cu polinomul $g(X)=(X-1)(X-3)$

b) Pentru a = 2 şi b = 3, să se rezolve ecuaţia $f(x)=0$;

c) Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât polinomul f să fie divizibil cu polinomul X-2 şi restul împărţirii lui f la X+2 să fie 3;

Subiectul III. (30p)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\setminus\{1;3\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-4x+3}$;

a) Să se calculeze $f'(x),\ f'(2)$;

b) Să se studieze monotonia lui f;

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)\cdot(2x-3)$;

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}x+e^x+1, & x\ \geq 0\\ \sqrt{x^2+4}\ , & x\langle 0\end{cases}$.

a) Să se arate că f(x) admite primitive pe $\mathbb{R}$;

b) Să se calculeze $\int\limits_0^1 x\cdot f\ (x)dx$;

c) Să se calculeze volumul corpului de rotaţie determinat de graficul funcţiei $g:[-2;-1]\to\mathbb{R},\ g(x)=f(x)$, în jurul axei Ox şi între dreptele de ecuaţii x= -2 şi x= -1;

TESTUL 9

Subiectul I. (30p

1. Fie numărul $a=\frac{23}{15}=1,a_1a_2a_3.....a_n....$. Calculați $a_1+a_2+a_3+....+a_{2020}$.

2. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x+5$. Să se calculeze $f(3)+f(3^2)+f(3^3)+...+f(3^{10})$;

3. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3-27$. Calculați produsul $f(1)\cdot f(2)\cdot....\cdot f(2020)$;

4. Să se calculeze $i^{33}+i^{55}+i^{77}$;

5. În plan se consideră punctele $A(-1;4),\ B(-3;-4),\ C(4;3)$. Fie G, centrul de greutate al triunghiului ABC. Determinați ecuația dreptei AG.

6. În sistemul de axe XOY se consideră punctele $A(0;3),\ B(2;5),\ C(3;7),\ D(5;9)$. Demonstrați că $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.

Subiectul II. (30p)

1. Se consideră determinantul $\Delta(a)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 5 & 25\\ 1 & a & a^2\end{vmatrix}$, unde a este un număr real.

a) Să se calculeze valoarea determinantului D(3):

b) Să se rezolve ecuaţia D(a)=0;

c) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $D(5^x)=0$.

2. Se consideră polinomul $f(X)=X^3+(m-2)X^2-mX-3\in\mathbb{R}[X]$ având rădăcinile $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{C}$.

a) Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât polinomul f să fie divizibuil cu polinomul $X-2$;

b) Pentru $m=3$ să se rezolve ecuația $f(x)=0$;

c) Pentru m=4 să se calculeze $x_1^2+x_2^2+x_3^2$.

Subiectul III. (30p)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{2x+6}{x^2+4}$.

a) Să se calculeze $f'(0)$;

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot f(x)$;

c) Să se arate că funcţia f este strict descrescătoare pe $[1;\infty)$.

2. Se consideră funcțiile $f,F:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x\cdot e^x$ și $F(x)=\int_0^x f(t)dt$

a) Să se arate că $F(x)=f(x)-e^x+1$;

b) Să se calculeze $\int_1^e f(\ln x)dx$;

c) Să se calculeze $\int_0^1 x\cdot f(x^2)dx$.

TESTUL 10

Subiectul I. (30p

1. Determinați numărul de submulțimi nevide ale mulțimii $A=\{x,y,z,t\}$.

2. Se consideră funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=4x-6,\ g(x)=-2x+6.$ Să se determine coordonatele punctului de intersecție a graficelor două funcții.

3. Într-o urnă sunt 6 bile albe și 8 negre. Care este probabilitatea ca la extragerea a patru bile din urnă, fără să le introducem în urnă, acestea să fie albe.

4. Demonstrați că $(2+i\sqrt{3})^2+(2-i\sqrt{3})^2\in\mathbb{Z}$

5. Determinați numărul $a\in\mathbb{R}$ știind că punctul $A(a;a+2)$ aparține dreptei d: $4x-2y-6=0;$

6. Se consideră vectorii $\vec{u}=3\cdot\vec{i}+5\cdot\vec{j}$, $\vec{v}=2\cdot\vec{i}-3\cdot\vec{j}$ și $\vec{w}=2\cdot\vec{u}-\vec{v}$. Să se calculeze modulul vectorului $\vec{w}=2\cdot\vec{u}-\vec{v}$.

Subiectul II. (30p)

1. Se consideră sistemul de ecuaţii $\begin{cases}x+my+z=m-3\\2x-3y+z=-1\\(m+1)x+y-2z=4\end{cases}$, unde $m\in\mathbb{R}.$

a) Să se determine $m\in R$, ştiind că $\begin{vmatrix}1&m&1\\2&-3&1\\m+1&1&-2\end{vmatrix}=-6.$

b) Pentru m= 2, să se rezolve sistemul de ecuaţii.

c) Pentru m= 0, să se calculeze A^2 unde A este matricea asociată sistemului de ecuaţii.

2. Se consideră polinomul $f(X)=2X^3+(a+2)X^2+\hat{1}\in\mathbb{Z}_3[X]$ având rădăcinile $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{C}$

a) Să se determine $a\in\mathbb{Z}_3$ astfel încât $f(\hat{1})=\hat{0};$ b) Pentru $a=2$, să se rezolve ecuația $f(x)=\hat{0};$

c) Să se determine $a\in\mathbb{Z}_3$ astfel încât polinomul f să fie divizibil cu polinomul $X+\hat{1}$.

Subiectul III. (30p)

1. . Fie $f:\Re\to\Re$, f(x)= x^{2010} -1.

a) Să se arate că $1+2+2^2+2^3+\ldots.+2^{2009}$ = f(2) ;

b) Să se calculeze limita $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x-1}$; **c)** Să se arate că f este convexă, $\forall x\in\mathbb{R}$**.**

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x^n+nx+1}{x^2-1}$.

a) Pentru n = 0 să se determine mulțimea primitivelor lui f(x).

b) Pentru n = 2 să se calculeze $\int_2^3 f(x)dx;$

c) Pentru n = 1 să se calculeze volumul corpului de rotație determinat de graficul funcției $g:\left[0;\dfrac{1}{2}\right]\to\mathbb{R},\ g(x)=(x^2-1)\cdot f(x)$ în jurul axei Ox.

Partea a III-a . REZOLVĂRI

STRUCTURI ALGEBRICE

I. Legi de compoziție | **INDICATII / RĂSPUNSURI**

1. Legi de compoziție .

1. a)8; b) x=3; c) E=2; **2.** b) $x \in \{2;3\}$; c) $x \in \{1;27\}$. **3.** a) – 7; b) x = 9; c) $x \geq 2$; **4.** a) 10;b) $x \in \{-10;9\}$. c) x = 0, prin urmare avem o singură soluție. **5.** a) x = 0, prin urmare avem o singură soluție. b) n = 7; c) x =1. **6.** a) $x \in (-3;2)$; b) n= 10; c) 2016. **7.** a) x = 1; b) n = 8; c) x = 1; **8.** a) $x \in (-2;1)$; b) n=10; c) 10073. **9.** a) x =1; b) $x \in (-3;2)$; c) n=21.

2. Parte stabilă .

1. Se arată că $\forall x, y \in (-1;\infty) \Rightarrow x * y \in (-1;\infty)$. **2**. $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M$.

12. Se arată că $\forall x, y \in (-\infty;4) \Rightarrow x * y \in (-\infty;4)$; **13**. Se arată că $\forall x, y \in (3;\infty) \Rightarrow x * y \in (3;\infty)$; **19**. $\forall A(x), A(y) \in H \Rightarrow A(x) \cdot A(y) \in H.$

3. Asociativitatea şi comutativitatea unnei legi de compoziție .

4. Din condiția de comutativitate a legii, $x * y = y * x, \ \forall x, y \in \mathbb{R}$ rezultă $a = 2$;
5. Din condiția de comutativitate a legii, $x * y = y * x, \ \forall x, y \in \mathbb{R}$ rezultă $a = 8$;
6. Din condiția de asociativitate a legii, $(x * y) * z = x * (y * z), \ \forall x, y, z \in \mathbb{R}$ rezultă $2axz + 4a^2 x = 2ax + xz \Rightarrow 2a = 1, \ 4a^2 = 2a$. Rezultă $a = \frac{1}{2}$.

7. Din faptul că legea este comutativă, x * y =y * x, rezultă a=b și din faptul că legea este asociativă rezultă a=b=0 sau a=b=1.

4. Element neutru. Elemente simetrizabile .

4. $x * y = y * x \Rightarrow ax + by = ay + bx \Rightarrow \ x(a-b) + y(b-a) = 0 \Rightarrow \ a = b$. Cum legea admite element neutru rezultă $x * e = x \Rightarrow x * \frac{4}{3} = x \Rightarrow \ 3x\frac{4}{3} + ax + a \cdot \frac{4}{3} + 4 = x \Rightarrow a = -3 \Rightarrow b = -3$.

5. $a = 0, \ b = 2, \ a * b + a \circ b = 2 + 0 = 2$;

6. Se determină $e=\frac{6}{5}$ și $f=-\frac{2}{3}$. Rezultă sistemul $\begin{cases}x+y=2\\x-y=0\end{cases}$ cu soluția $S=\{(1;1)\}$.

13. Se determină elementele neutre $e_*=1,\ e_\circ=4$. Sistemul dat devine

$\begin{cases}2xy-3-3y+5=1\\x+y=8xy\end{cases}$,

$\begin{cases}2P-3S=-4\\8P-S=0\end{cases}\Rightarrow S=\frac{16}{11},P=\frac{2}{11}$. x și y se determină din ecuația $t^2-\frac{16}{11}t+\frac{2}{11}=0$.

14. $a*e=a\Rightarrow f(f^{-1}(a)-f^{-1}(e)+m)=a\Rightarrow\ f^{-1}(a)-f^{-1}(e)+m=f^{-1}(a)\Rightarrow$
$m=f^{-1}(e)\Rightarrow e=f(m)=(m+2)^3$. Se știe că pentru $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3$, inversa lui f(x) este $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$. Din $x^2*x=e,$ rezultă $f(f^{-1}(x^2)-f^{-1}(x)+m)=(m+2)^3\Rightarrow$
$f(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+m)=(m+2)^3\Rightarrow\ \sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+m=f^{-1}\left((m+2)^3\right)\Rightarrow\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+m=m+2\Rightarrow$
$\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}-2=0$. Notând cu $t=\sqrt[3]{x}$ se obține ecuația $t^2-t-2=0\Rightarrow\ t\in\{-1;2\}\Rightarrow$
$x\in\{-1;8\}$. Suma soluțiilor ecuației este $S=-1+8=7.$

5. Exerciții recapitulative .

7. a) $1*2=3\cdot1\cdot2-6\cdot1-6\cdot2+14=6-6-12+14=2$;

b) $2*x=3\cdot2\cdot x-6\cdot2-6\cdot x+14=\cancel{6x}-12-\cancel{6x}+14=2,\forall x\in\mathbb{R}$;

c) Întrucât numărul 2 compus cu orice număr real x după legea de compoziție din enunț va da tot 2 și calculând de la stânga la dreapta pentru fiecare număr se obține $E=1*2*3*.....*2019*2020=2$.

Observație: Se poate demonstra prin inducție matematică că $1*2*3*.....*n=2$,pentru orice număr natural n.

8. a) Se aplică proprietatea asociativității;

b) $\sqrt[3]{x}*\sqrt{x}=5\Leftrightarrow(\sqrt[3]{x}-5)\cdot(\sqrt{x}-5)=0\Rightarrow x\in\{25;125\}$;

c) $a*b=(a-5)(b-5)+5\in\mathbb{N}$ dacă, de exemplu, $a-5=\frac{2}{3},b-5=\frac{3}{2}$, rezultă $a=\frac{17}{3},b=\frac{13}{2}$

9. a) $-(x+1)(y+1)-1=-(xy+x+y+1)-1=-xy-x-y-2=x\circ y$.

b) Se arată că $(x\circ y)\circ z=x\circ(y\circ z),\ \forall x,y,z\in\mathbb{R}$.

$(x\circ y)\circ z=(-xy-x-y-2)\circ z=-(-xy-x-y-2)\cdot z-(-xy-x-y-2)-z-2=$

$=xyz+xz+yz+\underline{2z}+xy+x+y+\cancel{2}-\underline{z}-\cancel{2}$; (1)

$x\circ(y\circ z)=x\circ(-yz-y-z-2)=-x(-yz-y-z-2)-x-(-yz-y-z-2)-2=$

$=xyz+xy+xz+\underline{2x}-\underline{x}+yz+y+z+\cancel{2}-\cancel{2}$; (2)

Din (1) = (2) rezultă că legea este asociativă;

c) $x\circ(x+1)\circ(x-1)=-1\Leftrightarrow\left[-(x+1)(x+2-1)\right]\circ(x-1)=-1\Leftrightarrow\ -\left(-x^2-3x-2\right)\cdot x-1=-1\Rightarrow$
$x(x^2+3x+2)=0\Rightarrow\ x\in\{-2;-1;0\}$.

10. a) $(x-3)(y-3)+3=xy-3x-3y+9+3=xy-3x-3y+12=x*y$

b) din punctul a) rezultă $x*3=(x-3)(3-3)+3=3,\ \forall x\in\mathbb{R}$

$\frac{30}{10}=3\Rightarrow\frac{1}{10}*\frac{2}{10}*\frac{3}{10}*.....*\frac{49}{10}*\frac{50}{10}=3$.

c) $x*x*x=30\Leftrightarrow(x-3)^3+3=30\quad(x-3)^3=27\Rightarrow x-3=3\Rightarrow x=6$.

11. b) $5'=\frac{25}{2}$; c) 2; **12**. b) e =11, c) $x'=\frac{10x-99}{x-10}\Rightarrow 11'=11$;

13. a) $x\circ y=(x-6)(y-6)+6\rangle 6,\ \forall x,y\rangle 6.$

b) $(x-6)^2+6=x^2-12x+36+6=x^2-6x-6x+42=x\circ x$;

c) $x\circ x\circ x=7\Leftrightarrow(x-6)^3+6=7\Rightarrow(x-6)^3-1=0\Rightarrow\ (x-6-1)((x-6)^2+x-6+1)=0\Rightarrow$

$(x-7)(x^2-11x+31)=0$. $S=\{7\}$. **14**. b) x=3; c) $\underbrace{x\circ x\circ....\circ x}_{2015\ de\ x}=2^{2014}\cdot(x-1)^{2015}+1$;

15. a) 3; c) $x\in\{0;3\}$; **16**. b) $x'=\frac{12x-35}{4x-12},\forall x\in\mathbb{R}-\{3\}$; c) x=3;

17. **b)** $x'=\frac{2x-3}{x-2}=\frac{2(x-2)+1}{x-2}=2+\frac{1}{x-2}\in\mathbb{Z}\ \Leftrightarrow x-2|1\Rightarrow x-2=1\text{sau}\ x-2=-1\Rightarrow x\in\{1;3\}$

c) A= 2; **18. b) x=7; c) E=4;** **19. b)** $e=\frac{7}{3}\Rightarrow x'=\frac{18x-35}{9x-18},\forall x\in\mathbb{R}-\{2\}$; c) E = 2;

20. **a)** $(x+3)*(\frac{1}{x}+3)=(x+3-3)(\frac{1}{x}+3-3)+3=x\cdot\frac{1}{x}+3=1+3=4$; b) e = 4;

c) $x'=\frac{3x-8}{x-3},\forall x\in\mathbb{R}-\{3\}$; **21**. c) x=10; **22**. **a)** $e=\frac{7}{3}$; b) x=2017; c)

$\underbrace{x*x*....x}_{2015\ de\ x}=3^{2014}\cdot(x-2)^{2015}+2$; **23**. **b) x=2018; c)** $\underbrace{x*x*....x}_{2015\ de\ x}=2^{2014}\cdot(x-3)^{2015}+3$;

24. **b)** $x'=\frac{49x-48}{49x-49},\forall x\in\mathbb{R}-\{1\}$; c) $S=\left\{\frac{8}{7}\right\}$; **25**. **b)** $x'=\frac{36x-143}{9x-36},\forall x\in\mathbb{R}-\{4\}$;

26. b) $x*y=3xy-12x-12y+52=3(x-4)(y-4)+4$**.** Cum legea este asociativă, rezultă că $2^{2011}*2^{2010}*.....*2^2*2^1*2^0=4.$

c) Se demonstrează prin inducție matematică. $x*x=3(x-4)^2+4$**,**

$x*x*x=3^2(x-4)^3+4$**, ...,** $\underbrace{x*x*x*....*x}_{n\ factori}=3^{n-1}(x-4)^n+4$**.**

27. c) $\underbrace{x*x*.....*x}_{2015\ de\ x}=\sqrt{2015x^2}=x\sqrt{2015}$; **28**. c)

$\underbrace{x*x*.....*x}_{64\ de\ x}=8\Leftrightarrow\sqrt[3]{64x^3}=8\Rightarrow 4x=8\Rightarrow x=2$.

II. Grupuri	INDICATII / RĂSPUNSURI

2. Morfisme şi izomorfisme de grupuri .

7. f este izomorfism de la grupul $((5,\infty),*)$ la grupul $(\mathbb{R}_+^*,\cdot)$ dacă şi numai dacă f este morfism de grupuri, $f(x*y)=f(x)\cdot f(y),\ \forall x,y\in(5;\infty)$ şi f este funcţie bijectivă (injectivă şi surjectivă).
Din prima condiţie rezultă m= -5, aşadar, $f(x)=x-5$. Mai trebuie arătat că f(x) este bijectivă.
8. f este morfism de la grupul $(\mathbb{R},+)$ la grupul $(\mathbb{R}_+^*,\cdot)$ dacă şi numai dacă $f(x+y)=f(x)\cdot f(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}$. De aici rezultă, $3^{m(x+y)+m-1}=3^{mx+m-1}\cdot 3^{my+m-1}\Rightarrow\ m=1$.
9. a = - 3
10. Din condiţia f izomorfism rezultă $f(x\cdot y)=f(x)*f(y)\Rightarrow a=a^2,\ ab-3a=0,$ $ab-3b=0,\ \ b=b^2-3b-3b+12$. Din aceste egalităţi rezultă $a=1,b=3$.
12. Se verifică relaţia $f(x\cdot y)=f(x)*f(y)\Leftrightarrow\ \sqrt{xy+1}=\sqrt{x+1}*\sqrt{y+1}$.
14. Se consideră izomorfismul $f:G\to\mathbb{R}_+^*,\ f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$ de la grupul $(G,*)$ la grupul $\left(\mathbb{R}_+^*,\bullet\right)$. Se determină inversa funcţiei f. Din f(x)=y rezultă $x=\dfrac{1-y}{1+y}$ aşadar, inversa lui f este $f^{-1}(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$. (*). Cum f este izomorfism deci, morfism de grupuri,

$$(f(x*y)=f(x)\cdot f(y)\Rightarrow)\ f(A)=f(\frac{1}{2\cdot1+1})\cdot f(\frac{1}{2\cdot2+1})\cdot....\cdot f(\frac{1}{2\cdot2015+1})=$$

$$=\frac{1-\frac{1}{2\cdot1+1}}{1+\frac{1}{2\cdot1+1}}\cdot\frac{1-\frac{1}{2\cdot2+1}}{1+\frac{1}{2\cdot2+1}}\cdot....\cdot\frac{1-\frac{1}{2\cdot2015+1}}{1+\frac{1}{2\cdot2015+1}}=\frac{1}{2016}\ \Rightarrow A=f^{-1}(\frac{1}{2016})=\frac{1-\frac{1}{2016}}{1+\frac{1}{2016}}=\frac{2015}{2017}.$$

III. Inele şi corpuri	INDICATII / RĂSPUNSURI

1. Inele şi corpuri. Definiţie .

1. a) e= 2; x'=4 - x; e' =3; b) Fie $x\in(\mathbb{Z},*,\circ)$ astfel încât există $x'\in(\mathbb{Z},*,\circ)$ astfel încât $x\circ x'=x'\circ x=3\Rightarrow\ (x-2)(x'-2)=1\Rightarrow x-2\,|\,1\Rightarrow x-2=\pm1\Rightarrow\ x\in\{1,3\}$. Aşadar, elementele simetrizabile în $(\mathbb{Z},*,\circ)$ sunt 1 şi 3.
2. $(\mathbb{R},*)$ - grup comutativ, e = - 4; x' = - 8 – x; $(\mathbb{R},\circ)$ e' = - 3,
$x'=-4+\dfrac{1}{x+4},\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-4\}$;
Presupunem că inelul are divizori ai lui zero(elementul zero al inelului este elementul neutru de la prima lege e= - 4); $\Rightarrow\exists a,b\in\mathbb{R},a\neq-4,b\neq-4$ astfel încât $a\circ b=-4\Rightarrow ab+4a+4b+12=-4\Leftrightarrow(a+4)(b+4)=0\Rightarrow a=-4,b=-4$. Contradicţie cu presupunerea făcută. Inelul nu are divizori ai lui zero.

15. R. $e_* = 7,\ e_\circ = 8$

18. R. Din comutativitatea primei legi rezultă $a = b$ iar din asociativitatea ei rezultă $a \in \{0;1\}$. Din elementul neutru se determină $a = 1,\ e = -c$, iar din distributivitatea celei de a doua lege față de prima rezultă $c = 0$. Așadar, $(\mathbb{R}, *, \circ)$ dacă $a = b = 1,\ c = 0$.

2. Morfisme şi izomorfisme de inele .

5. f(-2)=0, f(-1)=1 rezultă f(x)=x+2; Se arată că f este un morfism bijectiv între grupurile subiacente;

6. Pentru $(\mathbb{R}, +, \bullet)$ $e_+ = 0$, $e_\bullet = 1$ pentru $(\mathbb{R}, *, \circ)$ $e_* = 4$, $e_\circ = 5$. Atunci, din f(0) = 4, f(1) =5 rezultă f(x) = x+4 ; Se arată că e morfism bijectiv între grupurile subiacente;

7. Pentru $(\mathbb{Q}, +, \bullet)$ $e_+ = 0$, $e_\bullet = 1$ pentru $(\mathbb{Q}, *, \circ)$ $e_* = 7$, $e_\circ = 8$ Atunci, din f(0)=7, f(1)=8 rezultă f(x) = x+7 ; Se arată că e morfism bijectiv între grupurile subiacente;

3. Inelul claselor de resturi modulo n .

1. a) $\hat{0}$; b) 10; c) $\hat{0}$; d) 2; e) $\hat{6}$; **2**. a) $S = \{\hat{3}\}$; b) $S = \{\hat{3}\}$; c) $S = \{\hat{1}\}$; d) $S = \{\hat{1}, \hat{4}\}$; e) $S = \{\hat{0}, \hat{2}\}$; f) $S = \{\hat{1}, \hat{3}\}$; **3**. a) $S = \{\hat{3}\}$; b) $S = \{\hat{1}\}$; c) $S = \{\hat{2}\}$; d) $S = \{\hat{1}, \hat{2}\}$; e) $S = \{\hat{2}\}$;

4. a) $\begin{pmatrix} 4 & \hat{3} \\ 4 & \hat{3} \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} \hat{1} & 2 \\ \hat{0} & 2 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{3} & \hat{0} \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} & \hat{3} \\ 4 & 4 & \hat{3} \\ 4 & \hat{1} & 2 \end{pmatrix}$; **5**. a) $\hat{6}$; b) 2; c) $\hat{6}$; **6**. a) $\hat{0}$; b) 4; c) 2; d) $\hat{0}$; **7**. a) $S = \{(\hat{5}, 2)\}$; b) $S = \{(\hat{6}, 2)\}$; c) $S = \{(\hat{6}, \hat{1})\}$; d) $S = \{(\hat{1}, \hat{5})\}$; e) $S = \{(\hat{5}, \hat{3})\}$;

8. a) $S = \{(\hat{1}; \hat{0})\}$**;** **b)** $S = \{(\hat{1}; 2)\}$**; c)** $S = \{(2; \hat{0})\}$**; d)** $S = \{(\hat{3}; \hat{0})\}$**;** **9.** $P = \frac{1}{8}$**;** **10.** $x = 4$;

11. $x \in \mathbb{Z}_9$; **12**. a) $|U(\mathbb{Z}_8)| = \varphi(8) = 8(1 - \frac{1}{2}) = 4$; c) $|U(\mathbb{Z}_7)| = \varphi(7) = 7(1 - \frac{1}{7}) = 6$, sau pentru p prim rezultă $\varphi(p) = p - 1$; 13. a) $U(\mathbb{Z}_6) = \{\hat{1}; \hat{5}\}$; b) $U(\mathbb{Z}_7) = \{\hat{1}; 2, \hat{3}, 4, \hat{5}, \hat{6}\}$; c) $U(\mathbb{Z}_8) = \{\hat{1}; \hat{3}, \hat{5}, 7\}$; d) $U(\mathbb{Z}_{37}) = \mathbb{Z}_{37} - \{\hat{0}\}$;

IV. Inele de polinoame — INDICATII / RĂSPUNSURI

1. OPERAŢII CU POLINOAME

1.1. Forma algebrică a unui polinom .

5. $a = \hat{1}, b = 2$; **6.** $a = -1,\ b = -4,\ c = 4$**;** **9.** $a = \frac{10}{3}, b = -1$; **10.** a= 36, b= 54, m= 2, n=3;

11. $a=-3,\ b=-2$; **12.** $m=-5$; **13.** $a=2,\ b=0,\ c=3$; **14.** a) $f=aX^2+bX+c\in\mathbb{Z}_3[X],\ a,b,c\in\mathbb{Z}_3=\{\hat{0},\hat{1},2\},\ a\neq\hat{0}$. Coeficientul c poate lua 3 valori, coeficientul b poate lua 3 valori iar a poate lua 2 valori. În total, numărul de polinoame este dat de numărul total de posibilități de aranjare a tripletului (a,b,c) adică $2\bullet3\bullet3=18$ polinoame.
b) $4\bullet5\bullet5=100$ polinoame;

1.2. Valoarea numerică a unui polinom .

2. a) 16; b) $-\frac{5}{9}$; c) $4-4\sqrt{2}$; **4.** 0 ; **8.** 0; **9.** 1; **10.** $f(2)=\hat{0}\Rightarrow m=\hat{5}$; **12.** $a=-4,\ b=-3$;
13. f(2)= 1+2+2^2 +2^3 + …….+ 2^7= 2^8 -1 =255 ; **14.** $m=-2,\ n=1$; **15.** $f(X)=2X^2-4X+1$;
16. $f(5+\sqrt{3})=12+4\sqrt{3}$; **17.**
$f(1)=1+\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+.....+\frac{1}{\sqrt{15}+\sqrt{14}}+\frac{1}{\sqrt{16}+\sqrt{15}}=4\in\mathbb{N}$.
19. a) $a_0+a_2+a_4+....+a_{18}+a_{20}=\frac{f(1)+f(-1)}{2}=\frac{3^{10}+1}{2}$;
b) Se dezvoltă după binomul lui Newton,
$\left[\underset{a}{X^2}+\underset{b}{(X+1)}\right]^{10}=(X^2)^{10}+(X^2)^9\bullet(X+1)+(X^2)^8\bullet(X+1)^2+.....$. Rezultă
$a_{20}+a_{19}+a_{18}=1+1+2=4$. **20.** $f(\sqrt{3}-2)=14\sqrt{3}-22\Rightarrow a=-4,\ b=2$;
21. Din linia a treia se scad linia a doua și linia întâi inmulțită cu 2. Se obține determinantul $\Delta=\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a & b & c \end{vmatrix}$ care este egal cu 0. **22.** Cum polinomul din dreapta are gradul trei rezultă că și polinomul din stânga are gradul 3, deci gradul lui f(x) este 3. Se derivează consecutiv egalitatea dată până se ajunge la $f^{III}(X)-f^{IV}(X)=6$. După ce se adună toate relațiile se obține $f(X)=X^3+3X^2+10X+7$.

1.3. Operații cu polinoame .

2. a) $c(X)=X^2+9X+27,\ r(X)=83$; b) $c(X)=-X^2-X+1,\ r(X)=6$; c) $c(X)=2X^2-3X+5,\ r(X)=-13$; d) $c(X)=X^2-2X+4,\ r(X)=7X+21$; k) $c(X)=2X^2-X+\hat{1},\ r(X)=0$.
6. a) $f=2X+3$; b) $f=X^2-4$; c) $f=X-5$; d) $f=X-3$; e) $f=X^2+2X+1$.
7. Gradul polinomului din dreapta este trei rezultă că și $grad\left(f(X+1)-Xf(X)\right)=3$ adică gradul lui f este 2. Așadar, se consideră polinomul

$f(X)=aX^2+bX+c$ care se înlocuiește în relația dată rezultând $-aX^3+(a-b)X^2+(2a+b-c)X+a+b+c=-X^3+5$.

După identificarea coeficienților se obține $a=1,\ b=1,\ c=3.$ Atunci, $f(X)=X^2+X+3$ iar

$f(1)+f(2)+f(3)+...+f(10)=(1^2+2^2+...+10^2)+(1+2+...+10)+10\cdot 3=470.$

8. Cum gradul polinomului din dreapta este 2 rezultă că gradul celui din stânga este tot doi, prin urmare gradul lui f este 1. Fie acesta $f(X)=aX+b$ care se înlocuiește în relația dată în ipoteză.

Din identificarea coeficienților rezultă $f(X)=X-2$. Restul împărțirii lui f la X+1 este -3. Atunci,

$r(10)=-3.$

9. Se formează trinomul de gradul doi care are rădăcinile $\sqrt{2015}$ și $-\sqrt{2015}$, rezultă $g(X)=X^2-2015$ și împărțind f la g rezultă $f=(X^2-2015)(X^{n-2}+X^{n-3}+X)+2015$ de unde rezultă că $f(\sqrt{2015})=2015$.

10. $f=(X^2+X)\cdot c(X)+r(X),\ r(X)=aX+b$. Din $f(0)=b,\ f(-1)=-a+b$ rezultă după ce se calculează f(0) și f(-1) că a=0 și b=1. Așadar, restul este r(X)=1.

11. Se formează trinomul de gradul doi care are rădăcinile $3+2\sqrt{2}$ și $3-2\sqrt{2}$. Rezultă, din $f(x)=g(x)\cdot c(x)+r(x)\Rightarrow\ f(x)=(x^2-6x+1)(x^{2012}+1)+1\Rightarrow\ f(3+2\sqrt{2})=0+1=1.$

1.4. Schema lui Horner .

1. f(-1)=2; **5**. m=8; **9**. $r(X)=13X+28$;

16. $\begin{cases} f(3)=26 \\ f(9)=656 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 3^m-3^n+8=26 \\ 9^m-9^n+8=656 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a-b=18 \\ a^2-b^2=656 \end{cases}\Rightarrow a=27,\ b=9$, unde $a=3^m=27\Rightarrow m=3,\ b=3^n=9\Rightarrow n=2$. Rezultă, $f(X)=X^3-X^2+8$. Cu schema lui Horner, rezultă $c(X)=X^2-6X+30,\ r(X)=-142.$

2. Divizibilitatea polinoamelor

2.1. Divizibilitatea polinoamelor .

2. a = -2, b=8; **4**. **a**) m=8; **b**) m = 2; **c**) m = -1; **5**. **a**) a= 4, b = -2; **b**) a=3, b= - 3; **c**) a = -9, b=12;

e) a = b = -5 ; **6**. m = -5; **7**. b = 12-4a; **8**. a = -1, b= -3; **9**. $f(1)=f'(1)=0$ și $f''(1)\neq 0$;

10. $f(1)=f'(1)=f''(1)=0$ și $f'''(1)\neq 0$;

2.2. Cel mai mare divizor comun. Cel mai mic multiplu comun .

2. a) $(f,g)=X-3$; $[f,g]=\dfrac{f\bullet g}{(f,g)}$; b) $(f,g)=X+2$; c) $(f,g)=X-1$.

3. a) $(f,g)=X-1$; **b)** $(f,g)=X^3-1$ **;** **c)** $(f,g)=X^{11}-1$.

3. Rădăcinile polinoamelor

3.1. Ecuaţii polinomiale .

1. $S=\{1;2;3\}$; **3.** a= 0, b= -3, c= 2; **4.** **a**) $S=\{8\}$; **b**) $S=\{8\}$; **c**) $S=\{\pm 6\}$; **d**) $S=\{\pm 8\}$;

e) $S=\{2;6\}$; **f**) $S=\{1;7\}$; **g**) $S=\left\{1;\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}\right\}$; **h**) $S=\left\{3;\frac{-3\pm i\sqrt{3}}{2}\right\}$; **i**) $S=\left\{3;1\pm i\sqrt{2}\right\}$;

j) $S=\{\pm 1;\pm i\}$; **k**) $S=\left\{\pm 2\sqrt{2};\pm 2i\sqrt{2}\right\}$; **l**) $S=\{-2;1\}$; **m**) $S=\{-1;2\}$; **n**) $S=\{1;2;3\}$;

o) $S=\left\{-\sqrt{2};\sqrt{2};5\right\}$; **p**) $S=\{-3;1\}$; **q**) $S=\left\{-1;\frac{1\pm i\sqrt{7}}{2}\right\}$; **r**) $S=\{-3;-1;2\}$; **s**) $S=\{-2;1;3\}$;

t) $S=\{-4;-1;2\}$; **u**) $S=\{-3;-2;2;1\}$; **v**) $S=\left\{-2;-\sqrt{2};-1;\sqrt{2}\right\}$; **x**) $S=\{-2,-1,2,3\}$;

y) $S=\left\{\pm 2;\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}\right\}$. **5** . a) $S=\left\{\pm 1;\pm\sqrt{3}\right\}$; e) $S=\{\pm 2;\pm 3\}$; **7.** a) ordinul lui x_0 este 2;

b) 3; c) 3; d) 2; **8.** a= 5, b= -2; **9.** $a=-\frac{7}{2}, b=3$; **11.** c) ordinul lui x_0 este 3 ;

3.2. Descompunerea polinoamelor. Polinoame ireductibile .

15. Trebuie să arătăm că f are rădăcini în $\mathbb{Z}_7$, $\forall m\in\mathbb{Z}_7$.

Pentru $m=\hat{0}$ rezultă $f=X^6+\hat{5}=(X^3-4)(X^3+4)$ este reductibil.

Fie $m\neq\hat{0}$. Se arată mai întâi că $x^6=\hat{0},\ \forall x\in\mathbb{Z}_7$. Cum $(\mathbb{Z}_7,\ +,\bullet)$ este corp, rezultă că pentru orice element $m\neq\hat{0}$, există inversul său, $n\in\mathbb{Z}_7$ astfel încât $m\bullet n=\hat{1}$. Prin urmare, $f(n)=n^6+m\bullet n+\hat{5}=\hat{1}+\hat{1}+\hat{5}=\hat{0}.$ Aşadar, n e rădăcina polinomului f, adică f e reductibil peste $\mathbb{Z}_7$, $\forall a\in\mathbb{Z}_7$.

3.3. Relaţiile lui Viete .

3. $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=S_1^2-2S_2=6.$ **4.** a) m = -3 ; **5.** a = 9; **6.** E = - 6; **7.** a = 2;

$S=\left\{-2;\pm\sqrt{3}\right\}$; **8**. a) d = 0; b) 9; c) 0; d) 64; e) 10; f) -8; g) 4; h) – 26; i) 16; **9**. m = 4 ;

10. $\sum_{i=1}^{3}x_i=-1,\ \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{3}x_{ij}=2\Rightarrow\sum_{i=1}^{3}x_i^2=-3$ **iar** $\sum_{i=1}^{3}x_i^3=\left(\sum_{i=1}^{3}x_i\right)^3-3\sum_{i=1}^{3}x_i\bullet\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{3}x_{ij}=-1+3\bullet 2=5$

Rezultă $(-3)^2+4\cdot(-1)=5$, Adevărat.

11. Se aduce la acelaţi numitor în sumă după care se obţine suma $\frac{x_1^3+x_2^3+x_3^3+2(x_1+x_2+x_3)}{x_1x_2x_3}=3$ deoarece se aplică relaţiile lui Viete la numitor iar la numărător rădăcinile se înlocuiesc în ecuaţia dată.

12. Din $f(-1)=0,\ f'(-1)=0,\ f''(-1)=0$ **rezultă** $a=3,\ b=1,\ c=0.$

16. a) $m=6;\ S=\{-2;1;4\}$ **; b)** $m=15;\ S=\{-3;1;5\}$ **; c)** $m=1;\ S=\left\{1-\sqrt{2};1;1+\sqrt{2}\right\}$ **; d)** $m=23;\ S=\{1;3;5\}$ **; e)** $m=8;\ S=\{-4;-1;2\}$ **; f)** $m=4;\ S=\left\{1-\sqrt{5};1;1+\sqrt{5}\right\}$ **;**

17. $S=\sum_{i=1}^{2012}\frac{1}{x_i}=\frac{x_1x_2...x_{2011}+....+x_1x_2....x_{2010}x_{2012}}{x_1x_2....x_{2012}}=\frac{-3}{-1}=3$ întrucât $\sum_{i=1}^{2012}x_i=-\frac{a_{n-1}}{a_n}$ şi $x_1\cdot x_2\cdot.....\cdot x_{2012}=(-1)^n\frac{a_0}{a_n}$, unde n = 2012;

18. $f=(X-2)^{2015}+(X+2)^{2015}=\left(X^{2015}-C_{2015}^1X^{2014}\cdot 2+.....-2^{2015}\right)+$

$+\left(X^{2015}+C_{2015}^1X^{2014}\cdot 2+.....+2^{2015}\right)=2X^{2015}+2C_{2015}^2X^{2013}\cdot 2^2+.....$

Rezultă $\sum_{i=1}^{2015}x_i=0$.

19. Deoarece x = 1 nu este rădăcină a polinomului dat rezultă că se poate înmulți în ecuația polinomială asociată cu x-1 obținându-se ecuația $x^3-1=0$ de unde rezultă $x^3=1$. Cum x_1,x_2 sunt rădăcinile polinomului rezultă că sunt rădăcinile şi ecuației nou rezultate. Aşadar, $x_1^{\,3}=1, x_2^{\,3}=1.$ Atunci,

$x_1^{\,2015}+x_2^{\,2015}=\left(x_1^{\,3}\right)^{671}\bullet x_1^{\,2}+\left(x_2^{\,3}\right)^{671}\bullet x_2^{\,2}=x_1^{\,2}+x_2^{\,2}=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=-1$**.**

21. **a**) m= 3 ; **b**) $c(X)=X^2+5X+18,\ r(X)=60$; **c**) m=1;

3.4. Polinoame cu coeficienți numere raționale, reale, complexe .

1. c) $f(X)=(X-1)^2(X+2)^2+1\geq 1$; **2.** $S=\left\{1-\sqrt{3},1+\sqrt{3},-i,i\right\}$

4. Trebuie arătat că polinomul nu poate avea toate rădăcinile reale. Pentru aceasta se calculează suma

$x_1^{\,2}+x_2^{\,2}+x_3^{\,2}=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=(a+1)^2-2(a^2+2)=-a^2+2a-3$. Cum discriminantul ecuației de gradul doi în a este negativ

$\Delta=(-2)^2-4\cdot(-1)\cdot(-3)=4-12=-8\langle 0$, rezultă că polinomul nu poate avea toate rădăcinile reale. Pot fi două rădăcini reale sau niciuna.

5. $f=X^4+(1-2m)X^2+2mX+2m^2+3=(X^2-m)^2+(X+m)^2+3\geq 3,\ \forall m\in\mathbb{R}.$

6. Se verifică că ecuația are rădăcina întreagă -2, după care, cu schema lui Horner se determină ecuația de gradul doi care trebuie să nu aibă soluții reale ceea ce este echivalent cu condiția $\Delta_a\langle 0\Rightarrow a\in(-2,2)$.

7. a) Cum $f=(X^2-1)(X^2-4)-1=X^4-5X^2+3$ asociem ecuația corespunzătoare, care este una bipătrată: $x^4-5x^2+3=0$. Se face notația $x^2=y$ de unde rezultă

$y_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{13}}{2}\Rightarrow\ x^2=\frac{5\pm\sqrt{13}}{2}\Rightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{5+\sqrt{13}}{2}}\in\mathbb{R}\ ,\ x_{3,4}=\pm\sqrt{\frac{5-\sqrt{13}}{2}}\in\mathbb{R}.$

b) Cum $x_1=-x_2, x_3=-x_4\Rightarrow x_1^{\,2015}+x_2^{\,2015}+x_3^{\,2015}+x_4^{\,2015}=-x_2^{\,2015}+x_2^{\,2015}-x_4^{\,2015}+x_4^{\,2015}=0\in\mathbb{N}.$

8 . $f(X)=(X-x_1)(X-x_2)(X-x_3)\Rightarrow \ln f(X)=\ln(X-x_1)+\ln(X-x_2)+\ln(X-x_3)\Rightarrow$
$\frac{f'(X)}{f(X)}=\frac{1}{X-x_1}+\frac{1}{X-x_2}+\frac{1}{X-x_3}\Rightarrow \sum_{k=1}^{3}\frac{1}{1-x_k}=\frac{f'(1)}{f(1)}=\frac{3}{2}.$

9 . $\sum_{k=1}^{3}\frac{x_k+1}{x_k-1}=\sum_{k=1}^{3}\frac{x_k-1+2}{x_k-1}=\sum_{k=1}^{3}(1+\frac{21}{x_k-1})=3+2\bullet\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{x_k-1}=3-2\bullet\frac{f'(1)}{f(1)}=3-2\cdot\frac{-1}{-2}=2.$

10. Fie $a\in\mathbb{R}$ rădăcina reală a polinomului. Rezultă
$a^3-(\sqrt{3}+1)a^2+(\sqrt{3}-2)a+2\sqrt{3}=0\Leftrightarrow$
$a^3-a^2-2a+\sqrt{3}(-a^2+a+2)=0\Rightarrow$ a trebuie să fie rădăcina comună a ecuațiilor
$a^3-a^2-2a=0$ și $-a^2+a+2=0$ de unde rezultă $a_1=-1,\ a_2=2.$
Se formează polinomul de gradul doi cu cele două rădăcini găsite și se împarte polinomul dat la acesta. Rezultă, $a_3=\sqrt{3}$.

3.5. Exerciţii recapitulative .

1. a) $f(-1)+f(\frac{1}{2})=\frac{27}{8}$; **b**) $c(X)=X^2-3X+1,\ r(X)=0$; **c**) $d=16$;

2. **a**) 9 ; **b**) $c(X)=X^2+X-2,\ r(X)=7$; **c**) $S=\{-1;-1\pm\sqrt{3}\}$;

3. **a**) m = 11, **b**) $c(X)=X^2+4X-7,\ r(X)=20$; **c**) $S=\{-3;-2;-1\}$;

4. **a**) 0 ; **b**) f(1) =0 ; **c**) $c(X)=X^2+X+1,\ r(X)=-2X-1$;

5. **a**) m = - 6 ; **b**) $c(X)=X-2,\ r(X)=0$; **c**) 8;

6. **a**) – 7 ; **b**) $g=X^2-X-2=(X-2)(X+1)$, $f(-1)=0, f(2)=0$; **c**) $S=\{-\frac{3}{2};-1;\frac{1}{2};2\}$

7. **b**) $c(X)=X^2+X+1,\ r(X)=0$; **c**) d = 4;

8. a) a = - 1 ; b) $c(X)=X^2-4X+10,\ r(X)=-21$; c) – 12;

9. **b**) -10 ; **c**) 15 ;

10. **a**) $S=\{-3;-1;2\}$; **b**) a = - 1 ; **c**) f(1) = 3 + a + b ;

11. **a**) $m=-3$; **b**) 9 ; **c**) g(X)=f(X-1)= $(X-1)^3+3(X-1)^2+3(X-1)+2=X^3+1=$ $(X+1)(X^2-X+1)$. De aici observăm că X^2-X+1 nu are rădăcini reale deoarece discriminantul ecuației de gradul doi atașată polinomului este negativ.

12. **a**) a= 0 ; **b**) Presupunem că f are rădăcină dublă adică $x_1 = x_2$. Folosind relațiile lui Viete, rezultă :
$x_1 = x_2 = 2$ este rădăcina dublă , $x_3 =$ -1 iar a = 4.
c) Plecând de la ecuația $x^3-3x^2+3=0$ și punând condițiile ca x_1,x_2,x_3 să fie soluțiile ecuației și însumând relațiile obținute, rezultă
$\sum_{i=1}^{3}x_i^3-3\sum_{i=1}^{3}x_i^2+9=0\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{3}x_i^3=3[(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)]-9=18.$

13. a) coeficientul lui X^3 este 2 ; b) $x^4+9x^2-36=0\Rightarrow x_{1,2}=\pm 2i\sqrt{3},\ x_{3,4}=\pm\sqrt{3}.$;

c) $(x-1)(x^2+x+1)=0\Rightarrow x^3=1\Rightarrow x_i^{2010}=(x_i^3)^{670}=1$ atunci $\sum_{i=1}^{4}x_i^{2010}=4.$

14. **a**) f se scrie de forma $f(X)=(X^2+2)^2+X^2+2\rangle 0,\ (\forall)x\in R,$ rezultă că f nu are rădăciniu reale.

b) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}=\frac{x_2x_3x_4+x_1x_3x_4+x_1x_2x_4+x_1x_2x_3}{x_1x_2x_3x_4}=0$; **c**) $g(X)=(X^2+X)\cdot q(X)+aX+b$

Cum $\begin{cases}g(0)=1\\ g(-1)=-12^{100}+2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=1\\ -a+1=-12^{100}+2\end{cases}\Rightarrow a=12^{100}-1$, b= 1. Aşadar,

$r(X)=(12^{100}-1)X+1$.

15. **a**) $(X^2-4)^2-1=X^4-8X^2+16-1=X^4-8X^2+15=f(X)$;

b) Cum $f(X)=(X^2-4)^2-1=(X^2-5)(X^2-3)$ se poate vedea că polinoamele X^2 -5 şi X^2 -3 nu au rădăcini întregi. **c**) De la punctul b) observăm că $f(X)=(X^2-5)(X^2-3)=(X-\sqrt{3})(X+\sqrt{3})(X-\sqrt{5})(X+\sqrt{5})$ aceasta fiind descompunerea în factori ireductibili în $\mathbb{R}[X]$.

16. a) $g(X)\cdot(X-1)+2=(X^3+2X^2+2X+1)\cdot(X-1)+2=X^4+X^3-X+1=f$.

b) $g(X)=X^3+1+2X(X+1)=(X+1)(X^2+X+1)\Rightarrow x_1=-1\in\mathbb{R}$, şi $x_{2,3}\notin\mathbb{R}$.

c) Cum a este o rădăcină a polinomului g rezultă că g(a)= 0. Atunci, conform punctului a) rezultă : $f(a)=g(a)\cdot(a-1)+2=2\in\mathbb{N}$. ;

17. **a**) $S=\{\hat{1},\hat{2}\}$; **18**. **a**) $a=\hat{0}$; **b**) $\hat{1}$; **c**) $S=\{\hat{1}\}$;

19. **a**) $f(\hat{0})=\hat{0},\ f(\hat{1})=\hat{0},\ f(\hat{2})=\hat{0},\ f(\hat{3})=\hat{0}$;

b) $f(X)=(X^2+X+\hat{2})^2=X^4+X^2+\hat{4}+\hat{2}X^3+\hat{4}X^2+\hat{4}X=X^4+\hat{2}X^3+X^2$.

c) $\hat{2}m=\hat{2}\Rightarrow m=\hat{1}$ *sau* $m=\hat{3}$.

20. **a**) Suma coeficienţilor polinomului f este egală cu valoarea polinomului în $\hat{1}$.

$a_0+a_1+.....+a_{2010}=f(\hat{1})=\hat{1}+\hat{2}^{2010}+\hat{3}^{2010}=\hat{1}+\hat{1}=\hat{2}$.

b) f este ireductibil în $\mathbb{Z}_3[X]$deoarece $f(\hat{0})=\hat{2},\ f(\hat{1})=\hat{2},\ f(\hat{2})=\hat{2}$ deci f nu are rădăcini în $\mathbb{Z}_3[X]$.

c) Cum $f(X)=(X^2+\hat{2})\cdot q(X)+aX+b,\ a,b\in\mathbb{Z}_3[X]$ rezultă $a=\hat{0},\ b=\hat{2}$, $r(X)=\hat{2}$.

21. **a**) Se verifică pentru fiecare element din $\mathbb{Z}_6[X]$.

$\hat{0}^3=\hat{0},\ \hat{1}^3=\hat{1},\ \hat{2}^3=\hat{2},\ \hat{3}^2=\hat{3},\ \hat{4}^2=\hat{4},\ \hat{5}^2=\hat{5}$;

b) $f(\hat{3})=\hat{0}\Leftrightarrow\hat{3}+(\hat{3}a+\hat{1})\hat{3}+a+\hat{4}=\hat{0}\Rightarrow a=\hat{2},\ sau\ a=\hat{5}$.

c) Pentru $a=\hat{5}\Rightarrow\ f(X)=X^3+\hat{4}X+\hat{3}$. Din

$f(\hat{3})=\hat{0}=f(-\hat{3})\Rightarrow\ f(X)=(X+\hat{3})(X^2+\hat{3}X+\hat{1})$.

22. a) Cum $f(\hat{1})=\hat{1}^2+(a+\hat{2})\hat{1}+\hat{3}a+\hat{2}\Rightarrow\hat{4}a=\hat{1}\Rightarrow a=\hat{4}$.

b) Pentru $a=\hat{2}\Rightarrow f(X)=X^2+\hat{4}X+\hat{3}$. Atunci,

$f(x)=\hat{4}\ \Leftrightarrow X^2+\hat{4}X+\hat{3}=\hat{4}\Leftrightarrow X^2+\hat{4}X-\hat{1}=\hat{0}\Leftrightarrow X^2+\hat{4}X+\hat{4}=\hat{0}$ cu singura soluţie $x=\hat{3}$.

c) Cum $X+\hat{3}=X-\hat{2}\Rightarrow f\vdots(X-\hat{2})\Leftrightarrow f(\hat{2})=\hat{0}$. Evident, $f(\hat{2})=\hat{2}^2+\hat{4}\cdot\hat{2}+\hat{3}=\hat{0}$.

Analiza matematică

I. Primitive — INDICATII / RĂSPUNSURI

1. Primitive. Funcţii care admit primitive — INDICATII / RĂSPUNSURI

8. a) $f(x)=\frac{2x}{x^2+2}$; b) $f(x)=4024(2x-1)^{2011}$; c) $f(x)=\frac{3x^2-1}{2\sqrt{x^3-x}}$; d) $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-3}}$;

e) $f(x)=\frac{2x^2+3}{x^2+1}$; f) $f(x)=\frac{x}{x^2+4}$;

9. **a)** $a=\frac{2}{3},b=-\frac{8}{3}$**; b)** $a=-1,b=-3,c=-2$**; c)** $a=-1,b=\frac{1}{2},c=1$**; d)** $a=\frac{2}{5},b=\frac{-1}{15},c=\frac{-1}{15}$**;**

10. **a**) $a=-\frac{e}{2},b=\frac{3e}{2}$; **b**) $a=-\frac{1}{3},b=\frac{5}{3}$; **c**) $a=-1,b=3$; **d**) $a=-2,b=\frac{11}{4}$**;**

e) $a=1,b=3$; **f)** $a=\frac{1}{e}+\frac{3}{2},b=0$; **12.** Se calculează limitele laterale în 1.

$l_s(1)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{x^2+3}{x}=4,\ l_d(1)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\sqrt{25x^2-9}=4,\ f(1)=4.$ Rezultă că f este continuă în 1 şi atunci, este continuă pe $\mathbb{R}$. Conform teoremei, rezultă că f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

13. Se calculează limitele laterale în 0.

$l_s(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{\sin 3x}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3=3,\ l_d(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(2^{x+1}+e^x)=2+1=3,\ f(0)=3.$ Rezultă că f este continuă în 0 şi atunci, este continuă pe $\mathbb{R}$. Conform teoremei, rezultă că f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

15. a) a=5; b) $a=-\frac{1}{2}$; c) a= -5; d) a=1;

3. Integrala nedefinită — INDICATII / RĂSPUNSURI

1. a) x^4-x^3+5x+C; b) $2\frac{x^3}{3}-4\frac{x^2}{2}+3x+C$; c) $\frac{x^5}{5}-2x^3+2x+C$; d) $\frac{x^4}{4}-2\ln|x|-3\cdot\frac{1}{x}+C$;

e) $x^2+5\ln|x|+\frac{4}{x}+C$; f) $x-\frac{1}{x}-\frac{1}{3x^3}+C$; g) $\frac{x^3}{3}-3\frac{x^2}{2}+C$; h) $2\frac{x^3}{3}+3\frac{x^2}{2}-2x+C$;

i) $\frac{x^6}{6}+\frac{5^x}{\ln 5}+C$; j) $e^x-e^{-x}+C$; k) $4\cdot\frac{x^3}{3}+2x^2+x+C$; l) $3x^3-6x^2+4x+C$;

m) $\frac{x^4}{4}+9\frac{x^3}{3}+27\frac{x^2}{2}+27x+C$; n) $\frac{x^4}{4}-2x^3+6x^2-8x+C$; o) $\frac{-25}{x}+40\ln|x|+16x+C$;

p) $x+6\ln|x|-\frac{12}{x}-\frac{4}{x^2}+C$; q) $\frac{6^x}{\ln 6}+C$;

2. a) $\frac{4}{3}x\sqrt{x}-\frac{9}{4}x\sqrt[3]{x}+C$; b) $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+x+C$; c) $-\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{3}{8}x^2\sqrt[3]{x^2}+C$; d) $4\sqrt{x}-\frac{9}{2}\sqrt[3]{x^2}+C$;

3. a) $\frac{1}{5}arctg\frac{x}{5}+C$; b) $\frac{1}{6}arctg\frac{x}{6}+C$; c) $\frac{1}{2\sqrt{2}}arctg\frac{x}{2\sqrt{2}}+C$; d) $\frac{1}{6}arctg\frac{3x}{2}+C$;

e) $\frac{1}{14}\ln\left|\frac{x-7}{x+7}\right|+C$; f) $\frac{1}{20}\ln\left|\frac{x-10}{x+10}\right|+C$; g) $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-2\sqrt{2}}{x+2\sqrt{2}}\right|+C$; h) $\frac{1}{24}\ln\left|\frac{4x-3}{4x+3}\right|+C$;

4. a) $5\cos x-4\sin x+C$; b) $-\ln|\cos x|+\ln|\sin x|+C$; c) $\frac{1}{2}tgx+\frac{1}{2}x+C$; d) x + C; e) tg x + C;

f) $-\ln|\cos x|+\ln|\sin x|+C$; g) $\frac{1}{2}\left(-\ln|\cos x|+\ln|\sin x|\right)+C$; h) $x-\cos x+C$; i) $2\sin x+C$;

j) $\frac{1}{2}ctgx+C$; **5.** $F(x)=e^x+x^3+C,\ F(0)=2\Rightarrow C=1\Rightarrow F(x)=e^x+x^3+1$;

6. $F(\pi)=0\Rightarrow C=2$; **7**. $F(4)=\frac{\pi}{16}\Rightarrow C=0$; **8).** $F(x)=-\frac{1}{x^2}-2017x+2018$;

9). $F(x)=\frac{x^4}{4}-2x^2+2.$ **10).** $F(x)=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)$.

11. $F(x)=e^x+x^3+C,\ F(0)=2\Rightarrow C=1\Rightarrow F(x)=e^x+x^3+1$;

12. $F(\pi)=0\Rightarrow C=2$;

13. $F(4)=\frac{\pi}{16}\Rightarrow C=0$.

14*. a) $\frac{x}{2}\sqrt{x^2-25}-\frac{25}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-25}\right|+C$; b) $\frac{x}{2}\sqrt{x^2-7}-\frac{7}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-7}\right|+C$;

c) $\frac{x}{2}\sqrt{x^2+9}+\frac{9}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+9}\right|+C$; d) $\frac{x}{2}\sqrt{x^2+3}+\frac{3}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+3}\right|+C$;

e) $\frac{x}{2}\sqrt{9-x^2}+\frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3}+C$; f) $\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+C$; g) $\ln\left(x+\sqrt{x^2+9}\right)+C$;

h) $\ln\left|x+\sqrt{x^2-9}\right|+C$; i) $\ln\left|x+\sqrt{x^2-5}\right|+C$; j) $\arcsin\frac{x}{7}+C$; k) $\arcsin\frac{x}{\sqrt{6}}+C$;

l) $\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}\sqrt{x^2-1}+\frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+C$; m) $\frac{x}{2}\sqrt{x^2+2}+2\ln\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)+C$;

II. Integrala definită	INDICATII / RĂSPUNSURI

1. Integrala definită. Formula Leibniz - Newton	INDICATII / RĂSPUNSURI

1). a) $\int_0^1 x^6 dx = \frac{x^7}{7}\Big|_0^1 = \frac{1}{7};$ **b)** $\int_0^1 4x^3 dx = 4\frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = 1;$ **c)** $\int_1^2 5x^2 dx = 5\frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{5}{3}\cdot 2^3 + \frac{5}{3}\cdot 1^3 = \frac{35}{3};$

d) $\int_0^1 (9x^2 - 2x + 3)dx = \left(9\cdot\frac{x^3}{3} - 2\cdot\frac{x^2}{2} + 3x\right)\Big|_0^1 = 3 - 1 + 3 = 5;$

e) $\int_0^1 x(x^2 - 3x)dx = \int_0^1 (x^3 - 3x^2)dx = \left(\frac{x^4}{4} + 3\cdot\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{4} - 1 = \frac{-3}{4};$

f) $\int_0^1 (3x-4)(x-3)dx = \int_0^1 (3x^2 - 13x + 12)dx = \left(3\cdot\frac{x^3}{3} + 13\cdot\frac{x^2}{2} + 12x\right)\Big|_0^1 = \frac{13}{2};$

g) $\int_0^1 (2x-1)^2 dx = \int_0^1 (4x^2 - 4x + 1)dx = \left(4\cdot\frac{x^3}{3} - 4\cdot\frac{x^2}{2} + x\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3};$

h) $\int_0^1 (x+2)^3 dx = \int_0^1 (x^3 + 6x^2 + 12x + 8)\ dx = \left(\frac{x^4}{4} + 6\frac{x^3}{3} + 12\frac{x^2}{2} + 8x\right)\Big|_0^1 = \frac{65}{4};$

2). a) $\int_0^1 x^{\frac{2}{5}} dx = \frac{x^{\frac{2}{5}+1}}{\frac{2}{5}+1} = \frac{5}{7}\cdot x^{\frac{7}{5}}\Big|_0^1 = \frac{5}{7};$ **b)** $\int_1^2 \frac{1}{x^4} dx = \int_1^2 x^{-4} dx = \frac{x^{-3}}{-3}\Big|_1^2 = \frac{7}{24};$

c) $\int_1^2 \left(x^{-3} + x^{-2}\right)dx = \left(\frac{x^{-2}}{-2} + \frac{x^{-1}}{-1}\right)\Big|_1^2 = \frac{7}{8};$

d) $\int_1^2 \left(\frac{4}{x^3} - \frac{2}{x^2}\right)dx = \int_1^2 \left(4\cdot x^{-3} - 2\cdot x^{-1}\right)dx = \left(4\cdot\frac{x^{-2}}{-2} - 2\cdot\frac{x^{-1}}{-1}\right)\Big|_1^2 = \frac{1}{2};$

e) $\int_1^2 \frac{2x^3 + 3x}{x^5} dx = \int_1^2 \left(2\cdot\frac{1}{x^2} + 3\cdot\frac{1}{x^4}\right)dx = \int_1^2 \left(2\cdot x^{-2} + 3\cdot x^{-4}\right)dx = 2\cdot\frac{x^{-1}}{-1} + 3\cdot\frac{x^{-3}}{-3} = -\frac{1}{8};$

f) $\int_1^2 \left(3\sqrt{x} + 4\sqrt[3]{x}\right)dx = \int_1^2 \left(3\cdot x^{\frac{1}{2}} + 4\cdot x^{\frac{1}{3}}\right)dx = \left(2\cdot x^{\frac{3}{2}} + 3\cdot x^{\frac{4}{3}}\right)\Big|_1^2 = 4\sqrt{2} + 6\sqrt[3]{2} - 5;$

g) $\int_0^1 x\cdot\sqrt{x}dx = \int_0^1 x\cdot x^{\frac{1}{2}}dx = \int_0^1 x^{\frac{3}{2}}dx = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\Big|_0^1 = \frac{2}{5};$

h) $\int_0^1 x\cdot\sqrt[3]{x}dx = \int_0^1 x\cdot x^{\frac{1}{3}}dx = \int_0^1 x^{\frac{4}{3}}dx = \frac{3}{7}\cdot x^{\frac{7}{3}}\Big|_0^1 = \frac{3}{7};$

i) $\int_0^1 \left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x}}\right)dx = \int_0^1 \frac{1}{3}\cdot x^{-\frac{1}{3}}dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot x^{\frac{2}{3}}\Big|_1^2 = \frac{1}{2}\cdot\sqrt[3]{4} - \frac{1}{2};$

j) $\int_1^2 \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}}dx = \int_1^2 \frac{x^2+2x+1}{\sqrt{x}}dx = \int_1^2 \left(x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}\right)dx = \frac{2}{5}\left(x^{\frac{5}{2}}+\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}\right)\Big|_1^2$.

3). a) $\int_0^1 8^x dx = \frac{8^x}{\ln 8}\Big|_0^1 = \frac{8}{\ln 8}-\frac{1}{\ln 8}=\frac{7}{\ln 8}$; b) $\int_0^1 (4^x+2^x)dx = \left(\frac{4^x}{\ln 4}-\frac{2^x}{\ln 2}\right)\Big|_0^1 = \frac{3}{\ln 4}+\frac{1}{\ln 2}$;

c) $\int_0^1 e^x dx = e-1$; d) $\int_0^1 3^x\cdot 2^x dx = \int_0^1 6^x dx = \frac{5}{\ln 6}$;

e) $\int_0^1 (6^x-4^x)\cdot 3^x dx = \int_0^1 (18^x-12^x)dx = \frac{17}{\ln 18}-\frac{11}{\ln 12}$.

4). a). $\int_1^2 \frac{1}{x}dx = \ln|x|\Big|_1^2 = \ln 2$; **b)** $\int_0^1 \frac{1}{x+4}dx = \ln|x+4|\Big|_0^1 = \ln 5-\ln 4=\ln\frac{5}{4}$;

c) $\int_0^1 \frac{1}{2x+6}dx = \frac{1}{2}\ln|2x+6| = \frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}$; **d)** $\int_{-2}^2 \frac{1}{3x-9}dx = \frac{1}{3}\ln|3x-9|\Big|_{-2}^2 = \frac{1}{3}\ln\frac{1}{5}$;

e) $\int_0^1 \frac{x+3}{x+2}dx = \int_0^1 \frac{x+2+1}{x+2}dx = \int_0^1 (1+\frac{1}{x+2})dx = \left(x+\ln|x+2|\right)\Big|_0^1 = 1+\ln\frac{3}{2}$;

f) $\int_0^1 \frac{x-5}{x+3}dx = 1-8\ln\frac{4}{3}$; **g)**

$\int_1^2 \frac{(x-3)^2}{x^2}dx = \int_1^2 \frac{x^2-6x+9}{x^2}dx = \int_1^2 (1-\frac{6}{x}+\frac{9}{x^2})dx = 10-\frac{9}{2}-6\ln 2$;

h) $\int_0^1 \frac{(x-2)(x+3)}{x^2-4}dx = \int_0^1 \frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+2)}dx = \int_0^1 \frac{x+3}{x+2}dx$;

5). a). $\int_0^2 \frac{1}{x^2+4}dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}$; **b)** $\int_0^1 \frac{1}{x^2+9}dx = \frac{1}{3}\cdot arctg\frac{1}{3}$; **c)** $\int_0^1 \frac{1}{x^2+5}dx = \frac{1}{\sqrt{5}}arctg\frac{1}{\sqrt{5}}$;

d) $\int_0^4 \frac{1}{2x^2+32}dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{4}$; **e)** $\int_0^1 \frac{1}{x^2-4}dx = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|\Big|_0^1 = \frac{1}{4}\ln\frac{1}{3}$;

f) $\int_0^4 \frac{x^2-16}{x^2+16}dx = \int_0^4 (1-32\cdot\frac{1}{x^2+16})dx = 4-2\pi$; **g)** $\int_0^1 \frac{x^2+3}{x^2-9}dx = \left(x+12\cdot\frac{1}{2\cdot 3}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|\right)\Big|_0^1 = 1+2\ln\frac{1}{2}$;

6). a) $\int_0^1 \frac{2x+4}{x^2+4x+5}dx = \ln|x^2+4x+5|\Big|_0^1 = \ln 10-\ln 5=\ln 2$; **b)** $-\ln 2$; **c) 0; d)** $-\ln 8$ **;**

7). 1; b) $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$**; c)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$**; d)** $\frac{1}{2}$**; e)** $\sqrt{2}+2$**;** **8.** a) $\frac{7}{2}$; b) $\frac{27}{4}$; c) $\frac{\pi}{18}$; d) $\frac{7}{4}$; e) $8\sqrt{2}-6+4\ln 3$; f) $\frac{15}{8}-\ln 4$; **9).** $a^3-2a^2+2a-4=0\Rightarrow(a-2)(a^2+2)=0\Rightarrow a=2$; **10).** $a^2-2a-3=0\Rightarrow a=3$;

11). $a^2-4a+3\le 0\Rightarrow a\in[1;3]$.

2. Proprietăţi ale integralei definite	**INDICATII / RĂSPUNSURI**

1.. funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x^3}{1+x^2}$ este impară. $f(-x)=\dfrac{(-x)^3}{1+(-x)^2}=-\dfrac{x^2}{1+x^2}=-f(x)$;

Conform proprietăţii

3. a) $\int_{-1}^{3}|x-2|dx=\int_{-1}^{2}(-x+2)dx+\int_{2}^{3}(x-2)dx=(-\dfrac{x^2}{2}+2x)\Big|_{-1}^{2}+(\dfrac{x^2}{2}-2x)\Big|_{2}^{3}=0$. S-a explicitat mai întâi modulul. În cazul nostru c = 2;

4. $\int_{-3}^{-1}(2x^2-4x+5)dx\rangle 0$ deoarece determinantul ecuaţiei $2x^2-4x+5=0$ este $\Delta=-26\langle 0$ aceasta însemnând că funcţia $f:[-3;-1]\to\mathbb{R},\ f(x)=2x^2-4x+5\rangle 0$ este pozitivă.

5). Deoarece $\left(\sqrt{x^2+3x}\right)'=\dfrac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x}}\rangle 0,\ \forall x\in[0;1]\Rightarrow$ funcţia de sub integrală este crescătoare pe [0;1], atunci din $0\le x\le 1\Rightarrow f(0)\le f(x)\le f(1)\Leftrightarrow 0\le\sqrt{x^2+3x}\le 2\Rightarrow$ $\int_0^1 0dx\le\int_0^1\sqrt{x^2+3x}dx\le\int_0^1 2dx$, mai departe rezultă inegalitatea dată.

6. Cum $f'(x)=\left(\dfrac{x^2+8x-5}{x^2+1}\right)'=-\dfrac{8x^2+12x+8}{(x^2+1)^2}$ studiind semnul lui **f '** se observă că f este crescătoare pe $[-\dfrac{1}{2};2]$ aşadar din $-\dfrac{1}{2}\le x\le 2\Rightarrow f(-\dfrac{1}{2})\le f(x)\le f(2)$ după care se integrează inegalitatea pe [0;1] : $-7\le f(x)\le 3\Rightarrow\int_0^1(-7)dx\le\int_0^1 f(x)\le\int_0^1 3dx$ rezultând relaţia dată.

7). Cum $\sin x\langle 1,\ \forall x\in[0;\dfrac{\pi}{2}]$ se înmulţeşte cu $\sin^3$ x si se integrează.

8). Se ia funcţia $f:[1;2]\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x-1}{x+2}$. Cum f '(x) este pozitivă rezultă că f este strict crescătoare pe [1;2]. Din $1\le x\le 2\Rightarrow f(1)\le f(x)\le f(2)\Rightarrow 0\le f(x)\le\dfrac{1}{4}$. După care se integrează inegalitatea conform proprietăţii 5. $0\le\int_1^2 f(x)dx\le\int_1^2\dfrac{1}{4}dx=\dfrac{1}{4}$;

9) . e) se arată că $\ln(x+1)\le x-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{x^3}{3}$ după care se integrează pe [0;1]; f) se stie că $e^x\ge x+1,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow e^{-x^2}\ge -x^2+1$, $\dfrac{1}{e^{x^2}}\langle\dfrac{1}{1+x^2}$ după care se integrează pe [0;1]; g) Se integrează inegalitatea $e^x\ge x+1,\forall x\in\mathbb{R}$ pe [0;1]; h) se inegrează inegalitatea $e^x-1\ge\ln(1+x)$ pe [0;1] după ce în prealabil se demonstrează că funcţia

$f:[0;1]\to\mathbb{R},\ f(x)=e^x-1-\ln(1+x)$ este crescătoare pe $[0;1]$; l) se demonstrează prin integrarea inegalităţii $0\le\frac{x^n}{1+x^{2n}}\le x^n,\ \forall x\in[0;1], n\in\mathbb{N}$.

10). Din $\sin x\langle 1\Rightarrow\frac{\sin x}{1+x}\langle\frac{1}{1+x}$ rezultă $\int_0^1\frac{\sin x}{1+x}dx\langle\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\ln|1+x|\Big|_0^1=\ln 2$.

11). $x^{2011}\cdot f(x)\le x^{2011}\cdot 3\Rightarrow\int_0^1 x^{2011}\cdot f(x)dx\le\int_0^1 x^{2011}\cdot 3dx=3\cdot\frac{x^{2012}}{2012}\Big|_0^1=\frac{3}{2012}$;

12). $x\in[0;1]\Rightarrow 1\le 1+x^2\le 2\Rightarrow\ln 1\le\ln(1+x^2)\le\ln 2$ după care se integrează pe $[0;1]$;

13). $\int_{-1}^1 f(x)dx=\int_{-1}^0(e^x+2)dx+\int_0^1(x^2+x+3)dx=\frac{5}{6}+6-\frac{1}{e}$.

14). $\int_{-1}^1 f(x)dx=\int_{-1}^0(2x+4)dx+\int_0^1(\frac{1}{3x+1}+3)dx=6+\frac{1}{3}\ln 4$.

15). $x\ge 0\Rightarrow\sin x+x\cos x\ge 0,\ \forall x\ge 0\Rightarrow$

16. Fie $f:\mathbb{R}-\{-5\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{x-3}{x+5}$. $f'(x)=\left(\frac{8}{x+5}\right)^2\rangle 0\Rightarrow$ f este crescătoare, atunci, din $3\le x\le 5\Rightarrow f(3)\le f(x)\le f(5)\Rightarrow 0\le f(x)\le\frac{1}{5}$.

17. $0\le x\le 1\Rightarrow 0\le x^2\le 1\Rightarrow -1\le -x^2\le 0\Rightarrow 8\le 9-x^2\le 9\Rightarrow\ \sqrt{9-x^2}\le 3$.

18. $\frac{1}{3}\langle\frac{x-1}{x+1}\langle\frac{4}{6}\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{3}}\langle\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\langle\frac{2}{\sqrt{6}}$.

19. Cum $\frac{\ln x}{x}\le\frac{1}{e},\ \forall x\in[1;e]$, rezultă $\int_1^e\frac{\ln x}{x}\le\int_1^e\frac{1}{e}dx=\frac{1}{e}x\Big|_1^e=1-\frac{1}{e}$.

III. Metode de integrare — INDICATII / RĂSPUNSURI

1. Metoda integrării prin părţi — INDICATII / RĂSPUNSURI

1.

a) $\int xe^xdx=\int(e^x)'\cdot xdx=e^x\cdot x-\int e^x\cdot x'dx=e^x\cdot x-e^x+C$

$\int_0^1 x\cdot e^xdx=\left(e^x\cdot x-e^x\right)\Big|_0^1=e^1\cdot 1-e^1-\left(e^0\cdot 0-e^0\right)=e-e+1=1.$

b) $\int(x+1)\cdot e^xdx=\int\left(e^x\right)^I(x+1)dx=e^x\cdot(x+1)-\int(x+1)^I\cdot e^xdx=e^x\cdot(x+1)-e^x+C=e^x\cdot x+C$

$\int_0^2(x+1)\cdot e^xdx=\left(e^x\cdot x\right)\Big|_0^2=e^2\cdot 2-e^0\cdot 0=2e^2$.

c)) $\int x^2\cdot e^xdx=\int x^2\left(e^x\right)'dx=x^2e^x-\int 2x\cdot e^xdx=x^2e^x-2\int x\cdot\left(e^x\right)'dx=x^2e^x-2[x\cdot e^x-\int e^xdx]=$

$=x^2e^x-2x\cdot e^x+2e^x+C=e^x\left(x^2-2x+2\right)+C$

$\int_0^1 x^2 \cdot e^x dx = e^x\left(x^2-2x+2\right)\Big|_0^1 = e\cdot 1-1\cdot 2 = e-2$.

d) $36-28e^2$;

e) $\int (x^2-2x)\cdot e^x dx = \int \left(e^x\right)^I (x-2x)dx = e^x\cdot(x^2-2x) - \int (x^2-2x)^I \cdot e^x dx =$

$e^x\cdot(x^2-2x) - \int (2x-2)e^x dx = (*)$

$\int (2x-2)e^x dx = e^x(2x-2) - \int e^x\cdot 2dx = e^x(2x-2)-2e^x + C$

$(*) = e^x\cdot(x^2-2x) - \left[e^x(2x-2)-2e^x\right] = e^x\cdot x^2 - 4xe^x + 4e^x + C$

$\int_0^1 (x^2-2x)\cdot e^x dx = \left(e^x\cdot x^2 - 4xe^x + 4e^x\right)\Big|_0^1 = e-4e+4e-4 = e-4$.

g) $\frac{2}{\ln 2} - \frac{4}{\ln^2 2} + \frac{2}{\ln^3 2}$;

h) $\int_0^1 x\cdot e^{-x}dx = \int_0^1 x\cdot\left(\frac{e^{-x}}{-1}\right)^I dx = -xe^{-x}\Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x}dx = 1-\frac{2}{e}$.

i)

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cdot\sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(e^x\right)^I\cdot\sin x\ dx = e^x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^1 e^x\cdot(\cos x)dx = e^{\frac{\pi}{2}} - e^x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x(-\sin x)dx \Rightarrow$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cdot\sin x dx = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}}+1\right)$. **j)** $-\frac{1}{2}(e^\pi+1)$;

k) $\int_0^{\pi} e^x\cdot\sin 2x\ dx = \int_0^{\pi} \left(e^x\right)^I\cdot\sin 2x\ dx = e^x\sin 2x\Big|_\pi^0 - 2e^x\cos 2x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 4e^x\sin 2x\ dx \Rightarrow$

$\int_0^{\pi} e^x\cdot\sin 2x\ dx = \frac{1}{5}\left(e^x\sin 2x\Big|_\pi^0 - 2e^x\cos 2x\Big|_0^{\pi}\right) = \frac{1}{5}\left(e^\pi\cdot(-2)-(-2)\right) = \frac{2-2e^\pi}{5}$.

2. a) $\int \ln x dx = \int x'\ln x dx = x\cdot\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C$.

$\int_1^e \ln x dx = (x\ln x - x)\Big|_1^e = e\ln e - e - (1\ln 1 - 1) = e-e-0+1 = 1$.

b) $\int x\cdot\ln x dx = \int\left(\frac{x^2}{2}\right)'\ln x dx = \frac{x^2}{2}\cdot\ln x - \int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$

$\int_1^e x\ln x dx = \left(\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{4}x^2\right)\Big|_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$. **c)** $\frac{3e^4+1}{16}$; **d)** $\frac{e-2}{e}$;

e) $\int_1^e (4x-3)\ln x dx \int_1^e (4\frac{x^2}{2})^I\ \ln x dx = 2x^2\ln x\Big|_1^e - \int_1^e (2x^2)\cdot\frac{1}{x}dx = 2e^2 - \int_1^e 2x\ dx = 2e^2 - x^2\Big|_1^e = e^2+1$.

f) $\int_e^{e^2} \ln^3 x dx = \int_e^{e^2} x^I\cdot\ln^3 x\ dx = x\ln^3 x\Big|_e^{e^2} - \int_e^{e^2} x\cdot 3\ln^2 x\cdot\frac{1}{x}dx = \ldots.\ \ 8e^2-4e$;

g) $\int_1^2 x\cdot\log_2 x dx \quad \int_1^2 x\cdot\frac{\ln x}{\ln 2}\,dx=\frac{1}{\ln 2}\cdot\int_1^2 x\cdot\ln x\,dx=\ldots\ldots\quad=\frac{5}{4\ln 2};$

3. a)

$$\int_0^{\pi} x\cdot\sin x\,dx=\int_0^{\pi} x\cdot(-\cos x)^I\,dx=-x\cdot\cos x\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\cos x\,dx=-\pi\cos\pi+0\cdot\cos 0+\sin x\Big|_0^{\pi}=\pi.$$

b) $\int_0^{\pi} x\cdot\cos x\,dx=\int_0^{\pi} x\cdot(\sin x)^I\,dx=x\cdot\sin x\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin x\,dx=\pi\sin\pi-0-(-\cos x)\Big|_0^{\pi}=$

$=\cos\pi-\cos 0=-2.$

e) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cdot\sin x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cdot(-\cos x)\,dx=-x^2\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x\cdot\cos x\,dx$

f) $\int_0^{\pi} x^2\cdot\cos x\,dx=\int_0^{\pi} x^2\cdot(\sin x)^I\,dx=x^2\sin x\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi} 2x\cdot\sin x\,dx$

g) $\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx=\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}\,dx=\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\frac{\sin 2x}{2}\right)\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi}{2}$

4. a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot\sin^2 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{2}\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot\frac{\cos 2x}{2}\,dx=$

$$\frac{x^2}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{x\sin x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{2}dx\right]=\frac{\pi^2}{16}+\frac{1}{4}.$$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot\cos^2 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{2}\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\cdot\cos 2x}{2}\,dx=$

$$=\frac{x^2}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}\left[\frac{x\sin 2x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{2}dx\right]=\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{4}.$$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{\cos^2 x}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cdot(tgx)^I\,dx=x\cdot tgx\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}} tgx\,dx=\frac{\pi}{4}+\frac{\ln\sqrt{2}}{2}.$

d) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{\sin^2 x}\,dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} x\cdot(-ctgx)^I\,dx=-x\cdot ctgx\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} ctgx\,dx=\left(-x\cdot ctgx+\ln|\sin x|\right)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}.$

e) $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x\cdot\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\int_0^{\frac{1}{2}}(-\sqrt{1-x^2})^I\cdot\arcsin x\,dx=\left(-\sqrt{1-x^2}\arcsin x+x\right)\Big|_0^{\frac{1}{2}}.$

f) $\int_0^{\pi} x^2 \cdot \sin 2x\ dx = \int_0^{\pi} x^2 \cdot \left(\frac{\cos 2x}{2}\right)^I dx = x^2 \cdot \frac{\cos 2x}{2}\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} x \cdot \cos 2x\ dx$

$= x^2 \cdot \frac{\cos 2x}{2}\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} x \cdot \left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^I dx.$

g) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cdot \cos 2x\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cdot \left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^I dx = \frac{x^2 \sin 2x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\pi} x \cdot \left(-\frac{\cos 2x}{2}\right)^I dx.$

h)

$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} tg^3 x\ dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} (tg^2 x + 1 - 1) \cdot tgx\ dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} (tg^2 x + 1) tgx\ dx - \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} tgx\ dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} (tgx)^I \cdot tgx\ dx - \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} tgx\ dx =$

i) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cdot tg^2 x\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cdot \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x}\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\ dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cdot \left(tg\ x\right)^I dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\ dx =$

$= \left(x \cdot tgx + \ln \cos x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}.$

j) $\int_0^1 x \cdot arctg^2 x\ dx = \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2}\right)^I \cdot arctg^2 x\ dx = \frac{x^2}{2} arctgx\Big|_0^1 - \int_0^1 x^2 \cdot \frac{arctg\ x}{1+x^2}\ dx.$

$\int_0^1 (x^2 + 1 - 1) \cdot \frac{arctg\ x}{1+x^2}\ dx = \int_0^1 arctgx\ dx - \int_0^1 \frac{arctg\ x}{1+x^2}\ dx.$

$\int_0^1 arctgx\ dx = \int_0^1 x^I \cdot arctgx\ dx = x \cdot arctgx\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\ dx$ $\qquad$ $\int_0^1 \frac{arctg\ x}{1+x^2}\ dx = \frac{arctg^2 x}{2}\Big|_0^1$

k) $\int_0^1 (\arcsin x)^2\ dx = \int_0^1 x^I \cdot \arcsin x\ dx = x \cdot \arcsin x\Big|_0^1 - \int_0^1 x \cdot 2 \arcsin x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx =$

$= x \cdot \arcsin x\Big|_0^1 - 2\int_0^1 \arcsin x \cdot (-\sqrt{1-x^2})^I dx = x \cdot \arcsin x\Big|_0^1 - 2\sqrt{1-x^2} \arcsin x\Big|_0^1 + 2x\Big|_0^1.$

l) $\int_1^{\sqrt{1}} x \cdot \arccos \frac{1}{x}\ dx = \left(\frac{x^2}{2} \arccos \frac{1}{x} - \frac{1}{4}\sqrt{x^2 - 1}\right)\Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}.$

2. Metoda schimbării de variabilă — INDICATII / RĂSPUNSURI

1). a). $\frac{80}{8} = 10$**; b). 0; c).** $\frac{2^{11}+1}{33}$**; d).** $\frac{1+3^9}{36}$**; e)** $\frac{-6305}{80}$**; f)** $\frac{31}{15}$**; g)** $\frac{32}{7}$**; h)** $\frac{1}{22}$**;**

2). a) $\frac{7}{12 \ln 2}$**; b).** $\frac{e^5 - e}{4}$**; c).** $\frac{3}{\ln 7}$**; d).** $\frac{4}{\ln 3}$**; e).** $\frac{e^{11} - e^2}{6}$**; f).** $\frac{e^2 - e}{3}$**; g).** $2e^2 - 2e$**;**

3). a). $9-\sqrt{3}$ **; b)** $\frac{13}{6}$ **; c)** $\frac{272}{15}$**; d)** 12**; e) 0; f) 13; g)** $\frac{48-32\sqrt{2}}{3}$**; h)** $\frac{13}{3}$**; i)** $-2+2\sqrt{2}$**;**

j) $3-2\sqrt{2}$**; k)** $\frac{141}{10}$**;**

4). a). ln2; b) 4; c) $\frac{11}{12}$; d) $\frac{2}{3}(\sqrt{27}-1)$; e) $\frac{7}{24}$; f) $\frac{6\sqrt[3]{2}-3}{4}$; i) $\ln^2 2$; m). $\frac{1}{2}$**;**

5). a) $\frac{7}{24}$; **b)** $\frac{-1}{7}$; **c)** $arctge-\frac{\pi}{4}$;

6). a) $\frac{2}{5}$; b) e-1; c) $\frac{4}{35}$; d) $\frac{2}{63}$; e) $\frac{1}{12}$; f) ln2; g) $\frac{7}{24}$; h) $e^{\frac{\pi}{4}}-1$; i) $\frac{5\pi^2}{288}$;

3. Intgrarea funcţiilor raţionale	**INDICATII / RĂSPUNSURI**

1). a) $\ln\frac{10}{3}$**; b).** $1-6\ln 2$**; c)** $2-4\ln 2$**; d)** $\frac{\pi}{12}$**; e)** $\frac{\pi}{16}$**; f)** $\frac{1}{20}\ln\frac{3}{7}$**; g)** $\frac{1}{12}\ln\frac{1}{3}$**; h)** $1+\frac{1}{6}\ln\frac{1}{2}$**;**

i) $4+\frac{\pi}{4}$**; 2). a)**

$$\int\frac{1}{4x^2-5x+1}dx=\int\frac{1}{4\left[\left(x-\frac{5}{8}\right)^2-\left(\frac{3}{8}\right)^2\right]}dx=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2\cdot\frac{3}{8}}\ln\left|\frac{x-\frac{5}{8}-\frac{3}{8}}{x-\frac{5}{8}+\frac{3}{8}}\right|+C=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{8x-8}{8x-2}\right|+C$$

$$\int_2^3\frac{1}{4x^2-5x+1}\,dx=\frac{1}{3}\left(\ln\frac{16}{22}-\ln\frac{8}{14}\right);$$

b). $\int\frac{1}{x^2+4x+5}dx=\int\frac{1}{(x+2)^2+1}dx=arctg(x+2)+C$**,** $\int_0^1\frac{1}{x^2+4x+5}\,dx=arctg3-arctg2$**;**

c). $\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\frac{1+\sqrt{5}}{-1+\sqrt{5}}$; **d).** $\frac{\pi}{4}$; **e)** $\frac{1}{4}(\ln\frac{1}{3}-\ln\frac{1}{5})$; **f)** $\ln\frac{3}{4}-\ln\frac{1}{2}=\ln\frac{3}{2}$**;**

3). a) În general dacă numitorul are doi factori liniari atunci fracţia se va descompune în două fracţii simple: $\frac{x+1}{(x+2)\cdot(x+5)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x+5}$. După ce se aduce la acelaşi numitor se obţine:

$x+1=(x+5)A+(x+2)B$, după care vom da valori lui x pentru a afla mai uşor pe A şi B.

$x\to-2\Rightarrow-1=3A\Rightarrow A=-\frac{1}{3}$; $\quad x\to-5\Rightarrow-4=-3B\Rightarrow B=\frac{4}{3}$.

Aşadar, $\int\frac{x+1}{(x+2)\cdot(x+5)}dx=\int\left(-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+2}+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{x+5}\right)dx=-\frac{1}{3}\ln|x+2|+\frac{4}{3}\ln|x+5|+C$**;**

b) Dacă numitorul se poate descompune în factori liniari cum este cazul nostru $x^2-8x+7=(x-1)(x-7)$ atunci descompunerea în fracţii simple are forma:

$\frac{x}{x^2-8x+7}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-7}$; După aducerea la acelaşi numitor rezultă:

$x=(x-7)A+(x-1)B$.

Pentru a afla pe A şi B se dau valori lui x:

$x\to 1\Rightarrow 1=-6A\Rightarrow A=-\frac{1}{6}$, $\quad x\to 7\Rightarrow 7=6B\Rightarrow B=\frac{7}{6}$;

Aşadar, $\int\frac{x}{x^2-8x+7}dx=\int\left(-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x-1}+\frac{7}{6}\cdot\frac{1}{x-7}\right)=-\frac{1}{6}\ln|x-1|+\frac{7}{6}\ln|x-7|+C$;

4). a) $\int_1^2\frac{8x^2-6x+2}{x}\,dx=\left(4x^2-6x+2\ln|x|\right)\Big|_1^2$; **b)** $\int_1^2\frac{4x^3-5x+3}{x^2}\,dx=\left(2x^2-5\ln|x|-\frac{3}{x}\right)\Big|_1^2$;

c) $\int_2^3\frac{x^4-1}{x^2-1}\,dx=\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\Big|_2^3$; **d)** $\int_0^1\frac{x^2-9}{x-3}\,dx=\left(\frac{x^2}{2}+3x\right)\Big|_0^1$; **e)** $\int_0^1\frac{x^2-25}{x+5}\,dx=\left(\frac{x^2}{2}-5x\right)\Big|_0^1$;

f) $\int_0^1\frac{x^3-3x}{x^2-3}\,dx=\frac{x^2}{2}\Big|_0^1$; **g)** $\int_0^1\frac{x^{2015}+2x^{2014}}{x+2}\,dx=\frac{x^{2015}}{2015}\Big|_0^1$; **h)** $\frac{19}{24}$;

5). a). $\int_0^1\frac{x^3}{x+2}\,dx=\int_0^1\left(x^2-2x+4-\frac{8}{x+2}\right)dx$; **b)** $\int_0^1\frac{x^3+5}{x-2}\,dx=\left(\frac{x^3}{3}+x^2+4x+13\ln|x-2|\right)\Big|_0^1$;

e) $\int_0^1\frac{x^3+x^2-4x-3}{x^2-4}\,dx=\int_0^1\left(x+1+\frac{1}{x^2-4}\right)dx=\frac{3}{2}+\frac{1}{4}\ln\frac{1}{3}$.

f) $\int_0^3\frac{x^3+9x+1}{x^2+9}\,dx=\int_0^3\left(x+\frac{1}{x^2+9}\right)dx=\frac{9}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{4}$.

6. a) $\frac{\pi}{8}$; b) $\frac{1}{3}(arctg5-arctg\frac{7}{3})$; c) $\ln\frac{3}{4}$; d) $3\ln 2-2\ln\frac{5}{3}$; e) $-\ln 15$; f) $\frac{21}{4}\ln\frac{6}{5}-\frac{1}{4}\ln 2$;

g) $10+4\ln 2$; h) $\frac{19}{24}$; k) 1-2ln2; l) $\frac{1}{10}(\ln\frac{16}{5}+arctg\frac{1}{2})$;

IV. Aplicaţii ale integralei definite — INDICATII / RĂSPUNSURI

1. Aria subgraficului unei funcţii — INDICATII / RĂSPUNSURI

1. a) $\frac{17}{6}$; b) 1; c) $\frac{\pi}{8}$; d) $2-\ln\frac{5}{3}$; e) 1; f) 6 + 5ln2; g) $\frac{1}{2}(e^{\frac{\pi}{2}}-1)$; h) $\frac{1}{8}\ln\frac{1}{3}$;

2. Volumul unui corp de rotaţie — INDICATII / RĂSPUNSURI

1. a) $\frac{13\pi}{3}$; b) $\pi(e-2)$; c) $\frac{\pi(13e^4-1)}{4}$; d) $\frac{-\pi}{2}$; e) $\frac{\pi^2}{12}$; f) $\frac{125\pi}{3}$; g) $\frac{1}{3}$; h) $\frac{4\pi}{3}$.

3. Aplicaţii variate ale integralei definite **INDICATII / RĂSPUNSURI**

3.2 Limite cu integrale

1). 1; **2).** $\frac{1}{2}$; **3**). 0; **4**). 0; **5)** $\frac{1}{2}$. **6)** $\frac{1}{3}$; **7)** 1; **8).** 0; **9).** $\frac{1}{4}$; **10).** $\frac{1}{20}$.

3.4 Şiruri de integrale

1). Cum $\frac{x^{2018}}{x+3} \le \frac{1}{x+3}$, $\forall x \in (0;1)$, integrând de la 0 la 1 rezultă

$\int_0^1 f_{2018}(x)dx \le \int_0^1 \frac{1}{x+3}dx = \ln(x+3)\Big|_0^1 = \ln\frac{4}{3}$.

2). $0 \le x^2 \le x \Big| \cdot x^{2016}$, $x^{2018}+1 \le x^{2017}+1 \Big| : (x+1) \Rightarrow I_{2018} \le I_{2017}$.

4). Cum $0 \le x \le 1 \Rightarrow 0 \le x^2 \le 1 \Rightarrow 1 \le x^2+1 \Rightarrow 1 \le \frac{1}{x^2+1} \le 2 \Big| \cdot x^n \Rightarrow$

$\frac{x^n}{2} \le \frac{x^n}{x^2+1} \le x^n$, $\forall x \in (0;1)$. Atunci, $\int_0^1 \frac{x^n}{2}dx \le \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1}dx \le \int_0^1 x^n dx \Rightarrow$

$\frac{x^{n+1}}{2(n+1)}\Big|_0^1 \le \int_0^1 f_n(x)dx \le \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1$. Rezultă ceea ce trebuia.

5). $I_{n+2} - I_n = \int_2^3 (\frac{x^{n+2}+1}{x^2-1} - \frac{x^n+1}{x^2-1})dx = \int_2^3 \frac{x^n(x^2-1)}{x^2-1})dx = \frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{n+1}$;

Exerciţii recapitulative **INDICATII / RĂSPUNSURI**

1. f(x) admite primitive pe $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ f este continuă pe $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ f este continuă în 1 $\Leftrightarrow$
$l_s(1) = l_d(1) = f(1)$. $l_s(1) = \lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} f(x) = 1+a$, $l_d(1) = \lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x>1}} f(x) = 0 = f(1)$. Din

$1+a=0 \Rightarrow a=-1$.

b) $\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 (e^{x-1}-1)dx + \int_1^2 (\ln x + x - 1)dx =$

$\left(e^{x-1}-x\right)\Big|_0^1 + x\ln x\Big|_1^2 - x\Big|_1^2 + (\frac{x^2}{2}-x)\Big|_1^2 = \ln 4 - \frac{1}{e} - \frac{1}{2}$.

c) $\int_1^2 x\cdot f(x)dx = \int_1^2 x\cdot(\ln x + x - 1)dx = \int_1^2 (x\cdot\ln x + x^2 - x)dx = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^2 - x\Big|_1^2 + \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 - \frac{x^2}{2}\Big|_1^2 =$

$= \ln 4 - \frac{1}{6}$.

2. a) $\int (4x+2)\cdot\ln x = \int (4\frac{x^2}{2}+2x)^I \cdot \ln x = (2x^2+2x)\cdot\ln x - \int (2x^2+2x)\cdot\frac{1}{x}dx =$

$= (2x^2+2x)\cdot\ln x - (2\frac{x^2}{2}+2x) + C$.

b) $\int_1^e \frac{1}{x}\cdot \ln x dx = \int t dt = \frac{t^2}{2} = \frac{\ln^2 x}{2}\Big|_1^e = \frac{1}{2}$, unde s-a făcut notația $\ln x = t \Rightarrow \frac{1}{x}dx = dt$.

c) Din $x^2 \le x,\ \forall x \in [0;1]$ și din faptul că $\ln x \in [0;1],\ \forall x \in [1;e]$ rezultă $\ln^2 x \le \ln x$. Prin integrare rezultă $\int_1^e \ln^2 x dx \le \int_1^e \ln x dx = 1$.

$\int_1^e \ln x dx = \int_1^e x^1 \cdot \ln x dx = x\cdot \ln x\Big|_1^e - \int_1^e x\cdot \frac{1}{x}dx = x\cdot \ln x\Big|_1^e - x\Big|_1^e = 1$.

3. $\int_0^1 f_0(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx = arctgx\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$;

b) $A = \int_0^1 f_4(x)dx = \int_0^1 \frac{x^4}{x^2+1}dx = \int_0^1 \left(x^2 - 1 - \frac{1}{x^2+1}\right)dx = -\frac{2}{3} - \frac{\pi}{4}$;

c) Cum $0 \le x \le 1 \Rightarrow 0 \le x^2 \le 1 \Rightarrow 1 \le x^2+1 \Rightarrow 1 \le \frac{1}{x^2+1} \le 2 \Big| \cdot x^n \Rightarrow$

$\frac{x^n}{2} \le \frac{x^n}{x^2+1} \le x^n,\ \forall x \in (0;1)$. Atunci, $\int_0^1 \frac{x^n}{2}dx \le \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1}dx \le \int_0^1 x^n dx \Rightarrow$

$\frac{x^{n+1}}{2(n+1)}\Big|_0^1 \le \int_0^1 f_n(x)dx \le \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1$. Rezultă ceea ce trebuia.

4. a) $\int_0^1 (x-3)(x+3)\cdot f(x)dx = \int_0^1 (x-3)(x+3)\cdot \left(\frac{1}{x-3} + \frac{1}{x+3} + 1\right)dx =$

$= \int_0^1 \frac{x^2-3}{x^2-9}dx = \int_0^1 \left(1 + 6\cdot \frac{1}{x^2-9}\right)dx = x\Big|_0^1 + 6\cdot \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|\Big|_0^1 = 1 - \ln 2$;

b) $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{x-3} + \frac{1}{x+3} + 1\right)dx = \left(\ln|x-3| - \ln|x+3| + x\right)\Big|_0^1 = 1 - \ln 2$;

c) $\int_0^1 f(x^2)dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{x^2-3} + \frac{1}{x^2+3} + 1\right)dx = \left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right| - \frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{x}{\sqrt{3}} + x\right)\Big|_0^1 =$

$= \frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right| - \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{6} + 1$;

5. a) g(x) este o primitivă a lui f(x) pe $(0;\infty)$ dacă și numai dacă

$g'(x) = f(x),\ \forall x \in (0;\infty)$

$g'(x) = \left(\frac{1}{2}\ln^2 x\right)' = \frac{1}{2}\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x} = \ln x\cdot\frac{1}{x} = f(x),\ \forall x \in (0;\infty)$; b) $\int_1^e x\cdot\frac{\ln x}{x}dx = \int_1^e \ln x dx = 1$;

c) Cum $\frac{\ln x}{x} \le \frac{1}{e},\ \forall x \in [1;e]$, rezultă $\int_1^e \frac{\ln x}{x} \le \int_1^e \frac{1}{e}dx = \frac{1}{e}x\Big|_1^e = 1 - \frac{1}{e}$.

6. a) Din $F'(x) = \left(x^2 + 8x + 3\right)' = 2x + 8 = 2x + a = f(x) \Rightarrow a = 8$;

b) $\int_0^1 e^x\cdot(2x+1)dx = e^x(2x+1)\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x\cdot 2dx = 1$;

c) $\int_0^a f_3(x)dx \geq 0 \Rightarrow \int_0^a (2x+3)dx \geq 0 \Rightarrow a^2+3a \geq 0 \Rightarrow a \in (-\infty;3] \cup [0;\infty)$.

7. a) (x) este o primitivă a funcției f(x) $\Leftrightarrow g'(x) = f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$.

$g'(x) = \left(x \cdot \sqrt[3]{x}\right)' = \left(x \cdot x^{\frac{1}{2}}\right)' = (x^{\frac{4}{3}})' = \frac{4}{3}\sqrt[3]{x} = f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$;

b) Orice primitivă F a lui f este convexă pe $\mathbb{R}-\{0\}$ dacă și numai dacă

$F''(x) \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}-\{0\}$

Cum $F''(x) = f'(x) = \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}-\{0\}$.

c) $\int_0^1 f(x)\cdot g(x)dx = \int_0^1 g'(x)\cdot g(x)dx = g^2(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 g(x)\cdot g'(x)dx \Rightarrow \int_0^1 f(x)\cdot g(x)dx = \frac{1}{2}(x\sqrt[3]{x})\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$.

8. a) $\int_0^1 \frac{x-6}{x+2}dx = \int_0^1 \frac{x+2-8}{x+2}dx = \int_0^1 \left(1-8\cdot\frac{1}{x+2}\right)dx = [x-8\ln(x+2)]\Big|_0^1 = 1+8\ln\frac{2}{3}$;

b) $\frac{1}{5}\left(\overset{x+3)}{\overset{}{}}\frac{4}{x-2} + \overset{x-2)}{\overset{}{}}\frac{1}{x+3}\right) = \frac{1}{5}\cdot\frac{4x+12+x-2}{(x-2)(x+3)} = \frac{5(x+2)}{5(x-2)(x+3)} = \frac{x+2}{x^2+x-6}$.

$\int_0^1 \frac{x+2}{x^2+x-6}dx = \frac{1}{5}\int_0^1 \left(\frac{4}{x-2}+\frac{1}{x+3}\right)dx = \frac{1}{5}\ln\frac{4}{3} - \frac{4}{5}\ln 2$.

c) $\int \frac{x^3+x-6}{x+2}dx = \int_0^1 \left(x^2-2x+5-16\cdot\frac{1}{x+2}\right)dx = \frac{x^3}{3} - x^2 + 5x - 16\ln|x+2| + C$.

9. a) $\int_0^1 (x^{1007}+2015^x)dx = \left(\frac{x^{1008}}{1008} + \frac{2015^x}{\ln 2015}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{1008} + \frac{2014}{\ln 2015}$.

b) $F''(x) = f'(x) = 1007\cdot x^{1006} + \frac{2015^x}{\ln 2015} > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$;

c) $\int_0^1 x\cdot(x^{2\cdot 1007}+2015^{x^2})dx = \left(\frac{x^{2016}}{2016}\right)\Big|_0^1 + \int \frac{2015^t}{2}dt = \frac{1}{2016} + \frac{2014}{2\ln 2015}$.

10. a) $g'(x) = 6x^2 = 12x+8 = f(x)$ deoarece

$f(x) = (x+2)^3 - x^3 = x^3+6x^2+12x+8-x^3 = 6x^2+12x+8$.

b) $\int \frac{6x^2+12x+8}{x^2}dx = 6x + 12\ln|x| - 8\cdot\frac{1}{x} + C$;

c) $\int_{-1}^1 f(x)\cdot g(x)dx = \int_{-1}^1 g'(x)\cdot g(x)dx = g^2(x)\Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 g(x)\cdot g'(x)dx \Rightarrow$

$\int_{-1}^1 g'(x)\cdot g(x)dx = \frac{1}{2}g^2(x)\Big|_{-1}^1 = \frac{1}{2}(2x^3+6x^2+8x)\Big|_{-1}^1 = 10$.

11. a) $\int_0^1 (x-\sqrt{x})^2 dx = \int_0^1 (x^2 - 2x\sqrt{x} + x)dx = \left(\frac{x^3}{3} - 2 \cdot \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + x^2 \right) \Big|_0^1 = \frac{8}{15}$;

b) $\int_0^a (x-\sqrt{x})dx = 0 \Rightarrow \left(\frac{x^2}{2} - \frac{2}{3} \cdot \sqrt{x^3} \right) \Big|_0^a = 0 \Rightarrow a(\frac{a}{2} - \frac{2}{3}\sqrt{a}) = 0 \Rightarrow a = \frac{16}{9}$;

c) $\int_1^2 f'(x) \cdot f(x)dx = f^2(x) \Big|_1^2 - \int_1^2 f(x) \cdot f'(x)dx \Rightarrow$

$\int_1^2 f'(x) \cdot f(x)dx = \frac{1}{2}(x^2 - 2x\sqrt{x} + x) \Big|_1^2 = 3 - 2\sqrt{2}.$

12. a) $F''(x) = f'(x) = (x^2 + 6x + 4 + a) \cdot e^x \geq 0 \Leftrightarrow \Delta_a \leq 0 \Rightarrow a \geq 5$.

b) $A = \int_0^1 (x^2 + 4x) \cdot e^x dx = e^x(x^2 + 4x) \Big|_0^1 - \int_0^1 (2x + 4) \cdot e^x dx = e + 2;$

c) (1) $\int (x^2 + 4x + 4) \cdot e^x dx = (mx^2 + nx + p) \cdot e^x + C \Rightarrow$

(2) $\int (x+2)^2 \cdot e^x dx = (x^2 + 4x + 4)e^x - 2(x+2)e^x + 2e^x = e^x(x^2 + 2x + 2) \Rightarrow$ din egalitatea celor două relații că m=1, n=2, p=2;

Modele de teste pentru bacalaureat **INDICATII / RĂSPUNSURI**

TESTUL 1

Subiectul I. (30p

1) $\sqrt{x^2 - 4x + 4} = 3 \Big| ()^2 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 9 \Rightarrow x^2 - 4x - 5 = 0 \Rightarrow \ x \in \{-1; 5\}$. Din condiția de existență

$x^2 - 4x + 4 \rangle 0$ care are loc pentru orice x real și pozitiv, întrucât discriminantul ecuației de gradul doi $x^2 - 4x + 4 = 0$ este negativ, rezultă $S = \{-1; 5\}$.

2). $A_8^6 = \frac{8!}{(8-6)!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cancel{2!}}{\cancel{2!}} = 20160$.

3). $\frac{(n+1)! + n!}{n!} = 2020 \Rightarrow \frac{(n+1) \cdot n! + n!}{n!} = 2020 \Rightarrow \frac{n!(n+2)}{n!} = 2020 \Rightarrow n + 2 = 2020 \Rightarrow n = 2018$.

4). $2 = a_1, \ a_n = 191, \ S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$, observăm că $9 - 2 = 16 - 9 = 7 = r$ fiind rația unei progresii aritmetice cu termenul general $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r \Rightarrow 191 = 2 + (n-1) \cdot 7 \Rightarrow$
$189 = (n-1) \cdot 7 \Rightarrow n = 28$.

Atunci, suma termenilor aflați în progresie aritmetică este $S_{28} = \frac{(2 + 191) \cdot 28}{2} = 2702$.

5). $3 \cdot \overrightarrow{v_1} + 2\overrightarrow{v_2} = 3\left(2\vec{i} + 3\vec{j}\right) + 2\left(-4\vec{i} + 2\vec{j}\right) = 6\vec{i} + 9\vec{j} - 8\vec{i} + 4\vec{j} = -2\vec{i} + 13\vec{j}$.

6). Ecuația dreptei **d** care trece prin punctul $A(x_0, y_0)$ și are panta m este $y - y_0 = m_d(x - x_0)$.

Se găsește mai întâi panta dreptei $(g)\colon\ -2x + 4y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{2}{4}x + \frac{1}{4} \Rightarrow m_g = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Cum cele două drepte sunt paralele, $d \parallel g \Rightarrow m_d = m_g \Rightarrow\ m_d = \frac{1}{2}$. Așadar, ecuația dreptei d este $y - 1 = \frac{1}{2}(x + 2) \Rightarrow -x + 2y - 4 = 0$.

Subiectul II. (30p)

1. a) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -10 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -10 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -10 & -4 \end{pmatrix} = A$; Atunci , $A^2 - A = O_2$

b) Cum $X(a) = I_2 - a \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5a & 2a \\ -10a & -4a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-5a & -2a \\ 10a & 1+4a \end{pmatrix}$. Atunci,

$\det(X(a)) = \begin{vmatrix} 1-5a & -2a \\ 10a & 1+4a \end{vmatrix} = (1-5a)(1+4a) + 2a \cdot 10a = 1 - a$;

c) Dacă X(a) este inversabilă, rezultă că există $(X(a))^{-1}$ astfel încât $X(a) \cdot (X(a))^{-1} = I_2$.

Vom nota cu X(b) pe $(X(a))^{-1}$ rezultând $X(a) \cdot X(b) = I_2 \Leftrightarrow X(a + b - ab) = I_2 \Leftrightarrow$

$\begin{pmatrix} 1-5(a+b-ab) & -2(a+b-ab) \\ 10(a+b-ab) & 1+4(a+b-ab) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$ a+b-ab=0 de unde rezultă că $b = \frac{a}{a-1}$;

Aşadar, pentru $b = \frac{a}{a-1}$ se obţine inversa matricei X(a) şi anume

$(X(a))^{-1} = X(b) = X\left(\frac{a}{a-1}\right)$.

2. a) $3 * 4 = 3 \cdot 4 - 4 \cdot 3 - 4 \cdot 4 + 20 = \cancel{12} - \cancel{12} - 16 + 20 = 4$;

b) Se demonstrează prin inducţie matematică.

Se observă că $x * x = (x-4)^2 + 4,\ \forall x \in \mathbb{R}$; Presupunem că P(n): $\underbrace{x * x * \ldots . * x}_{n\ termeni} = (x-4)^n + 4$ este adevărată şi demonstrăm că P(n+1): $\underbrace{x * x * \ldots . * x * x}_{n+1\ termeni} = (x-4)^{n+1} + 4$ este adevărată.

$\underbrace{x * x * \ldots . * x * x}_{n+1\ termeni} = \left(\underbrace{x * x * \ldots . * x}_{n\ termeni}\right) * x = \left((x-4)^n + 4 - 4\right)(x-4) + 4 = (x-4)^n (x-4) + 4 = (x-4)^{n+1} + 4$

Rezultă că P(n) este adevărată, $\forall n \in \mathbb{N}$.

c) Conform punctului b) rezultă că ecuaţia dată este echivalentă cu

$\left(\log_2 x - 4\right)^{2020} + 4 = 5 \Rightarrow\ \log_2 x - 4 = 1$ sau $\log_2 x - 4 = -1 \Rightarrow x \in \{8; 32\}$.

Subiectul III. (30p)

1. a) $f'(x) = 4^x \ln 4 + 5^x \ln 5 \Rightarrow\ f'(0) = \ln 4 + \ln 5 = \ln 20$;

b) $f'(x) = 4^x \ln 4 + 5^x \ln 5 \rangle 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$; c) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

2. a) f(x) admite primitive pe $\mathbb{R}$ dacă şi numai dacă f este continuă pe $\mathbb{R}$. În cazul nostru f

trebui să fie continuă în 1 $\Leftrightarrow l_s(1)=l_d(1)=f(1)$.

$l_s(1)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}(x^2+\frac{1}{x^2}-2)=0;\ l_d(1)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}(x+3)\ln x=0=f(1)$. Rezultă că f este continuă în 1 deci și pe $\mathbb{R}$, adică f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

b) $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}(x^2+\frac{1}{x^2}-2)dx=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{1}{x}-2x\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}=\frac{7}{24}$;

c) $A=\int\limits_1^e(x+3)\ln x dx=\left(\frac{x^2}{2}+3x\right)\ln x\Big|_1^e-\int\limits_1^e(\frac{x^2}{2}+3x)\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{e^2}{2}+3e-\int\limits_1^e(\frac{x}{2}+3)dx=$

$\frac{e^2}{2}+3e-\left(\frac{x^2}{4}+3x\right)\Big|_1^e=\frac{e^2+13}{4}$.

TESTUL 2

Subiectul I. (30p

1). Se aplică binomul lui Newton: $C_n^0+C_n^1+C_n^2+.....+C_n^n=2^n$; În cazul nostru

$\left(C_n^n+C_n^{n-1}+C_n^{n-2}+.....+C_n^2+C_n^1\right)+C_n^0=1023+C_n^0\Rightarrow$

$2^n=1023+C_n^0\Rightarrow 2^n=1023+1\Rightarrow 2^n=1024\Rightarrow n=10.$

2). $A_8^4=\frac{8!}{(8-4)!}=\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!}}=1680$;

3). $A(a;a)\in G_f\Rightarrow f(a)=a\Rightarrow 2a^2-4a+3=a\Rightarrow 2a^2-5a+3=0\Rightarrow a\in\left\{1;\frac{3}{2}\right\}$. Rezultă punctele, $A(1;1)$, $B(\frac{3}{2},\frac{3}{2})$.

4). Se observă că $7-1=13-7=6=r$ (rația unei progresii aritmetice).

$a_n=a_1+(n-1)\cdot r\Rightarrow 151=1+(n-1)\cdot 7\Rightarrow 150=(n-1)\cdot 6\Rightarrow n=26$. Atunci suma $1+7+13+....+151$ este egală cu suma a 26 de termeni aflați în progresie aritmetică și anume $S_{26}=\frac{(1+151)\cdot 26}{2}=1976$.

5). Deoarece $\log_3 1=0\Rightarrow \log_3 81\cdot\log_3 27\cdot\log_3 9\cdot\log_3 3\cdot\log_3 1=0$.

6). Cum vectorii $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$ sunt coliniari rezultă

$\frac{2m-1}{m+2}=\frac{3}{2}\Rightarrow 2(2m-1)=3(m+2)\Rightarrow 4m-2=3m+6\Rightarrow m=8.$

Subiectul II. (30p)

1. a) $A^3=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -1 & 2\end{pmatrix}^2\cdot\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -1 & 2\end{pmatrix}=A$;

b) $X(a)\cdot X(b)=\left(I_2+a\cdot A\right)\cdot\left(I_2+b\cdot A\right)=I_2+(a+b+ab)A=X(a+b+ab)$.

c) $X(1)+X(2)+...+X(2020)=(I_2+1\cdot A)+(I_2+2\cdot A)+....+(I_2+2020\cdot A)=$

$=2020I_2+(1+2+3+...+2020)A$

2. a) Se aplică proprietatea asociativității;

b) $\sqrt[3]{x}*\sqrt{x}=5\Leftrightarrow(\sqrt[3]{x}-5)\cdot(\sqrt{x}-5)=0\Rightarrow x\in\{25;125\}$;

c) $a*b=(a-5)(b-5)+5\in\mathbb{N}$ dacă, de exemplu, $a-5=\frac{2}{3},b-5=\frac{3}{2}$, rezultă $a=\frac{17}{3},b=\frac{13}{2}$

Subiectul III. (30p)

1. a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x};=f'(x)=2\cdot e^{2x}-2\cdot e^{-2x}$; $f'(0)=0$; b) f este crescătoare pe $(0;\infty)$ și descrescătoare pe $(-\infty;0)$; c) 0 este punctul de minim al funcției. Rezultă, $f(x)\geq f(0)\Rightarrow f(x)\geq 2,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

2. a) $\int f'(x)dx=f(x)+C=\sin^2 x+C;$

b) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(x)\cdot\cos x dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\cdot\cos x dx=\int t^4dt=\frac{t^5}{5}=\frac{\sin^5 x}{5}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{3};$

c) $0\leq x\leq\frac{\pi}{6}$, și cum sin x este crescătoare, rezultă

$$\sin 0\leq\sin x\leq\sin\frac{\pi}{6}\Rightarrow 0\leq\sin x\leq\frac{1}{2}\Rightarrow 0\leq\sin^2 x\leq\frac{1}{4}\Rightarrow\ 0\leq\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\sin^2 x\leq\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{4}dx=\frac{x}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{24}.$$

TESTUL 3

Subiectul I. (30p

1). $\lg(x^2-3x)=1\Rightarrow x^2-3x=10\Rightarrow x^2-3x-10=0\Rightarrow x\in\{-2;5\}$. Din condițiile de existență a ecuației rezultă $x^2-3x\rangle 0\Rightarrow x\in(-\infty,0)\cup(3;\infty)$, atunci $S=\{-2;5\}$.

2). $P=\frac{C_8^2}{C_{12}^2}=\frac{\frac{8!}{6!\cdot 2!}}{\frac{12!}{10!\cdot 2!}}=\frac{14}{33};$

3) $\text{Im}\,f=[f(1);f(-1)]=[2;12]$. deoarece f(x) este descrescătoare pe intervalul $[-1;1]$;

4) $C_{2020}^1+C_{2020}^2+C_{2020}^3+.....+C_{2020}^{2020}=2^{2020}-1$ din formula $2^n=(1+1)^n=C_n^0+C_n^1+C_n^2+C_n^3+.....+C_n^n$

5) $\cos a=\sqrt{1-\sin^2 a}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{8}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Aşadar, $\sin 2a=2\frac{1}{3}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{4\sqrt{2}}{9}$.

6). $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{(-3+2)^2+(3-2)^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$.

Subiectul II. (30p)

1.) a) $A^2=\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix}\Rightarrow A^3=\begin{pmatrix}-4&4\\4&-4\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix}=4A;$

b) $\det(A-xI_2)=0\Rightarrow\begin{pmatrix}-1-x&1\\1&-1-x\end{pmatrix}=0\Rightarrow(-1-x)^2-1=0\Rightarrow\ x^2+x=0\Rightarrow x\in\{-1;0\}$.

c) $\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}-a+c=-a+b\\ -b+d=a-b\\ a-c=-c+d\\ b-d=c-d\end{cases}$. Rezultă, b=c, şi a=d.

2. a) Pentru comutativitate: Evident, $x*y=xy-7x-7y+56=yx-7y-7x+56,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$.

b) Ca legea să fie asociativă trebuie să demonstrăm relaţia $(x*y)*z=x*(y*z),\forall x,y,z\in\mathbb{R}$.

$(x*y)*z=(xy-7x-7y+56)*z=(xy-7x-7y+56)\cdot z-7(xy-7x-7y+56)-7z+56=$

$=xyz-7xz-7yz+\underline{\underline{56z}}-7xy+49x+49y-\underline{392}-\underline{\underline{7z}}+\underline{56}$. (1).

$x*(y*z)=x*(yz-7y-7z+56)=x\cdot(yz-7y-7z+56)-7x-7(yz-7y-7z+56)+56=$

$=xyz-7xy-7xz+\underline{\underline{56x}}-\underline{\underline{7x}}-7yz+49y+49z-\underline{392}+\underline{56}$. (2).

Din (1) şi (2) se observă că cele două expresii sunt egale, rezultă asociativitatea legii de compoziţie.

c) Se foloseşte faptul că $x*x=(x-7)^2+7\Rightarrow\underbrace{x*x*...*x}_{6\ de\ x}=(x-7)^6+7$. Din

$(x-7)^6=729\Rightarrow(x-7)^6=3^6\Rightarrow x-7=3\Rightarrow x=10.$

Subiectul III. (30p)

1. a) $f'(x)=2+\ln x$; $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1};=f'(1)=2.$ b) f este convexă pe $(0;\infty)$ şi concavă pe $(-\infty;0)$. c) $2x-y-1=0$;

2. a) $g'(x)=f(x),\ \forall x\in\mathbb{R};\ g'(x)=x'\cdot\sin x+x\cdot\cos x=\sin x+x\cos x=f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$

b) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}g(x)dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}x\cdot\sin xdx=x\cdot(-\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(-\cos x)dx=1$;

c) $x\ge0\Rightarrow\sin x+x\cos x\ge0,\ \forall x\ge0\Rightarrow\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx\ge0$.

TESTUL 4

Subiectul I. (30p

1) Cei 8opt alergători pot ocupa oricare unul din cele 3 locuri, I, II, III adică $8\cdot7\cdot6=336$ sau $A_8^3=\dfrac{8!}{(8-3)!}=\dfrac{8\cdot7\cdot6\cdot5!}{5!}=336$ situaţii;

2). $G_f\cap Ox=\{A;B\}$, unde $A(x_1;0),\ B(x_2;0)$.

Soluţiile ecuaţiei $f(x)=0$ sunt $x_1=-2,x_2=5$ rezultă că punctele de intersecţie cu axa OX sunt $A(-2;0),B(5;0)$.

3). $b_n=b_1\cdot q^{n-1}\Rightarrow\ b_5=b_1\cdot q^{5-1}\Rightarrow405=5\cdot q^4\Rightarrow q^4=81\Rightarrow q=3$. Atunci,

$b_8=b_1\cdot q^{8-1}=5\cdot3^7=10935.$

4). $D = p\%\ din\ N \Rightarrow\ D/_{1an} = 6\%\ din\ 1800 = \frac{6}{100}\cdot 1800 = 108$ euro.

5). $\sin(180^0 - x) = \sin x,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Pentru $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ atunci,

$$\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

6). Ecuația dreptei d este $y - y_0 = m_d(x - x_0)$ unde $m_d = tg\frac{\pi}{6} = tg30^0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Atunci,

$$y - 1 = \frac{\sqrt{3}}{3}(x-2) \Rightarrow \sqrt{3}x - 3y + 3 - 2\sqrt{3} = 0.$$

Subiectul II. (30p)

1. a) $M_a \cdot M_b = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = M_{a+b}$;

b) Conform punctului a) rezultă

$$M_1 \cdot M_2 \cdot ..... \cdot M_{100} = M_{1+2+...+100} = \begin{pmatrix} 1 & 1+2+...+100 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5050 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) $M_a \cdot X = X \cdot M_a,\ \forall a \in \mathbb{R}\ \ M_a \cdot X = X \cdot M_a \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ z=0, t=x.

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}.$$

2.). a) $-(x+1)(y+1)-1 = -(xy+x+y+1)-1 = -xy-x-y-2 = x \circ y$.

b) Se arată că $(x \circ y)\circ z = x \circ (y \circ z),\ \forall x, y, z \in \mathbb{R}$**.**

$$(x \circ y)\circ z = (-xy-x-y-2)\circ z = -(-xy-x-y-2)\cdot z - (-xy-x-y-2) - z - 2 =$$

$$= xyz + xz + yz + \underline{2z} + xy + x + y + \cancel{2} - \underline{z} - \cancel{2};\ (1)$$

$$x \circ (y \circ z) = x \circ (-yz-y-z-2) = -x(-yz-y-z-2) - x - (-yz-y-z-2) - 2 =$$

$$= xyz + xy + xz + \underline{2x} - \underline{x} + yz + y + z + \cancel{2} - \cancel{2};\ (2)$$

Din (1) = (2) rezultă că legea este asociativă;

c) $x \circ (x+1) \circ (x-1) = -1 \Leftrightarrow [-(x+1)(x+2-1)] \circ (x-1) = -1 \Leftrightarrow\ -\left(-x^2-3x-2\right)\cdot x - 1 = -1 \Rightarrow$

$x(x^2+3x+2) = 0 \Rightarrow\ x \in \{-2; -1; 0\}$**.**

Subiectul III. (30p)

1. a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = f'(0) = 0;$

b) $f'(x) = e^{x+1} - e \geq 0, \forall x \geq 0 \Rightarrow$ f este crescătoare pe $[0;\infty) \Leftrightarrow \forall x \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq f(0)$. Cum f(0)=0 rezultă că $f(x) \geq 0, \forall x \geq 0.$

$f'(x) = e^{x+1} - e \leq 0, \forall x \leq 0 \Rightarrow$ f este descrescătoare pe $(-\infty; 0] \Leftrightarrow \forall x \leq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq f(0)$. Cum f(0)=0 rezultă că $f(x) \geq 0, \forall x \geq 0.$ Aşadar, $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{x+1}-e(x+1)}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{x+1}-e}{2x} = \infty.$

2. a) $\int_0^1 \frac{2-2x}{f(x)}dx = \int_0^1 \frac{2-2x}{\sqrt{2x-x^2}}dx = \int 2dt = 2t = 2\sqrt{2x-x^2}\Big|_0^1 = 2$, unde s-a făcut substituția

$\sqrt{2x-x^2} = t\big|()^2 \Rightarrow 2x-x^2 = t^2$ iar prin derivare rezultă $(2-2x)dx = 2tdt$.

b) $V(C_f) = \pi\int_0^1 f^2(x)dx = \pi\int_0^1 \left(2x-x^2\right)\,dx = \pi\left(\frac{2x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{2\pi}{3}$.

c) Cum $0 \le x \le 1 \Rightarrow 0 \le x^2 \le 1 \Rightarrow -1 \le -x^2 \le 0$ și $0 \le 2x \le 2$ de unde, prin adunarea lor rezultă $-1 \le 2x - x^2 \le 2$ adică $0 \le \sqrt{2x-x^2} \le \sqrt{2} \Rightarrow\ 0 \le \int_0^1 f(x)dx \le \int_0^1 \sqrt{2}\ dx = \sqrt{2}x\Big|_0^1 = \sqrt{2}$.

TESTUL 5

Subiectul I. (30p

1). $\log_3 27 + \log_4 16 - \sqrt[3]{125} = \log_3 3^3 + \log_4 4^2 - \sqrt[3]{5^3} = 3+2-5 = 0$;

2). $A_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5\cdot 4\cdot 3!}{3!} = 20$, $C_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!\cdot 2!} = \frac{5\cdot 4\cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}\cdot 2} = 10$;

$P_4 = 4! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 24 \Rightarrow A_5^2 + C_5^2 - P_4 = 20+10-24 = 6$.

3) f(0)+f(1)+.....+f(6)= 2(0+1+2+3+…+6)+3·7=2·21+21=63.

4). Abcisa punctului d eminim la o funcție de gradul al doilea este dată de formula $-\frac{b}{2a} = \frac{2m}{2} = 5 \Rightarrow m = 5$.

5). $(\sin x + \cos x)^2 - 2\sin x\cdot\cos x = \sin^2 x + 2\sin x\cdot\cos x + \cos^2 x - 2\sin x\cdot\cos x = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

6). $\overrightarrow{OA}(2;3)$, $\overrightarrow{OB}(-1;-5) \Rightarrow\ \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = (2+(-1);3+(-5) = (1;-2)$.

Subiectul II. (30p)

1. a) A este inversabilă $\Leftrightarrow \det A \neq 0$; Rezultă, $m \in \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{15}{8}\right\}$;

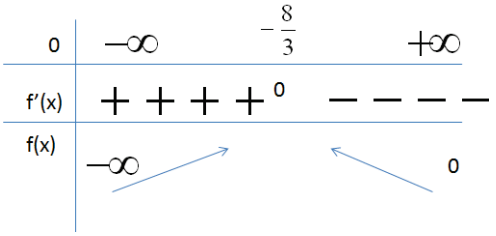
b) $A^2 = \begin{pmatrix} 9+3m & -4m & -m \\ -11 & 3m+3 & -2 \\ -6 & -m-4 & 11 \end{pmatrix}$; c) $S = \{(-21,-34,-30)\}$.

2. a) -7; b) $g = X^2 - X - 2 = (X-2)(X+1)$, $f(-1) = 0, f(2) = 0$; c) $S = \left\{-\frac{3}{2};-1;\frac{1}{2};2\right\}$;

Subiectul III. (30p)

1. a) $f'(x) = e^{-3x} + (x+3)e^{-3x}.(-3) \Rightarrow f'(0) = -8$. b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^{-3x}(-3x-8)}{e^{-3x}(x+3)} = -3$.

c) Din f '(x) = 0 rezultă că $x = -\frac{8}{3}$este punct de maxim.



2. a) $l_s(0)=l_d(0)=f(0)=3\Rightarrow$f continuă în 3, rezultă că f admite primitive pe $\mathbb{R}$;

b) $\int_{-1}^{1} f(x)dx=\int_{-1}^{0}(x+3)dx+\int_{0}^{1}3\cdot e^x dx=\left(\frac{x^2}{2}+3x\right)\Big|_0^1+3e^x\Big|_0^1=3e-\frac{1}{2}$;

c) $\int_0^1 x^2\cdot 3e^x dx=3x^2e^x\Big|_0^1-\int_0^1 3\cdot 2x\cdot e^x dx=3e-6xe^x\Big|_0^1+6\int_0^1 e^x dx=3e-6$.

TESTUL 6

Subiectul I. (30p

1). $8\cdot\frac{1}{2^4}-125\cdot\frac{1}{2\cdot 5^3}=8\cdot\frac{1}{16}-125\cdot\frac{1}{250}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0.$

2). $a_4-a_1=(4-1)\cdot r\Rightarrow -1-8=3r\Rightarrow r=\frac{-9}{3}=-3$;

3). $\sqrt[3]{x^2+5x+5}=-1\big|()^3\Rightarrow x^2+5x+5=-1\Rightarrow x^2+5x+6=0\Rightarrow x\in\{-3;-2\}$.

4). Fie x prețul inițial. Atunci, după prima ieftinire se obține prețul $x-\frac{10}{100}x=\frac{90x}{100}=\frac{9}{10}x$.

După a doua ieftinire se obține prețul de 567 lei adică

$\frac{9}{10}x-\frac{10}{100}\cdot\frac{9}{10}x=567\Rightarrow\frac{90x-9x}{100}=567\Rightarrow 81x=567\cdot 100\Rightarrow x=700$.

5). $\cos x=\sqrt{1-\sin^2 x}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\ tgx=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

6). $d_1\parallel d_2\Rightarrow\frac{1}{1}=\frac{-(m+1)}{-7}\Rightarrow 7=m+1\Rightarrow m=6.$

Subiectul II. (30p)

1. a) $\det A(0)=0;$ b) $\det\left[A(x)+A(-x)\right]=0;$

c) $\det A(x)=0\Rightarrow x^3+15x^2-18x=0\Rightarrow x\in\left\{0;\frac{-15\pm\sqrt{297}}{2}\right\}$.

2. a) a = - 1 ; b) $c(X)=X^2-4X+10,\ r(X)=-21$; c) – 12;

Subiectul III. (30p)

1. a) Cum $f'(x)=\frac{2x+2}{x^2+2x-3}\Rightarrow f'(2)=\frac{6}{5}$;

b) f(x) se mai poate scrie de forma

$f(x)=\ln(x^2+2x-3)=\ln(x+3)(x-1)=\ln(x+3)+\ln(x-1)$, atunci $f'(x)=\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x-1}$ iar

$f''(x)=-\frac{1}{(x+3)^2}-\frac{1}{(x-1)^2}\langle 0$ pentru orice $x\in(-\infty,-3)\cup(1;+\infty)$.

Aşadar, f este concavă.

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(x^2+2x-3)}{x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+2}{x^2+2x-3}=0$, după ce, în prealabil s-a aplicat regula lui l'Hospital.

2. a) $l_s(1)=l_d(1)=f(1)=0\Rightarrow$ f continuă în 1, rezultă că f admite primitive pe $\mathbb{R}$;

b) Orice primitivă F a lui f este convexă pe $(1;\infty)$ dacă şi numai dacă

$F''(x)\geq 0,\ \forall x\in(1;\infty)$

Cum $F''(x)=f'(x)=(x\ln x)'=\ln x+1\rangle 0,\ \forall x\in(1;\infty)$.

c) $\int_0^e f(x)dx=\int_0^1(x^3-5x+4)dx+\int_1^e x\ln x dx=\left(\frac{x^4}{4}-\frac{5}{2}x^2+4x\right)\Big|_0^1+\frac{x^2}{2}\ln x\Big|_{-1}^e-\int_1^e\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx=$

$=\frac{1}{4}-\frac{5}{2}+4+\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}\frac{x^2}{2}\Big|_1^e=\frac{5}{2}+\frac{e^2}{4}$.

TESTUL 7

Subiectul I. (30p

1). $\sqrt[3]{9}^{\log_3 1}+\sqrt[3]{-27}=\sqrt[3]{9}^0-3=1-3=-2;$

2). $0\leq\frac{4x-2}{3}\leq 2\ \Big|\cdot 3\Rightarrow 0\leq 4x-2\leq 6\ \Big|+2\Rightarrow 2\leq 4x\leq 8\Big|:4\Rightarrow\frac{1}{2}\leq x\leq 2\Rightarrow\ x\in\left[\frac{1}{2};2\right]\cap\mathbb{Z}=\{1;2\}$

3). a,b,c sunt în progresie aritmetică , atunci $b=\frac{a+c}{2}$. În cazul nostru,

$\frac{7}{3}=\frac{\lg\sqrt[3]{x}+2\lg x}{2}\Rightarrow 14=3\cdot\left(\frac{1}{3}\lg x+2\lg x\right)\Rightarrow 14=7\lg x\Rightarrow\lg x=2\Rightarrow x=10^2=100;$

4). $tg45^0=1\Rightarrow\lg 1=0\Rightarrow\lg\left(tg1^0\right)\cdot\lg\left(tg2^0\right)\cdot\lg\left(tg3^0\right)\cdot.....\cdot\lg\left(tg45^0\right).=0;$

5). $\sin^2 x+\cos^2 x=1,\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow\sin^2 77^0+\cos^2 77^0=1\Rightarrow$

$(y-1)(y+1)=1\Rightarrow y^2-1=1\Rightarrow y^2=2\Rightarrow y=\pm\sqrt{2}$

6). Mai întâi se determină coordonatele mijlocului segmentului $[BC]$,

$M(\frac{2+4}{2};\frac{-2+2}{2})=M(3;0)$.

Atunci, ecuația dreptei AM este : $\begin{vmatrix} x & y & 1\\ -3 & 1 & 1\\ 3 & 0 & 1\end{vmatrix}=0\Rightarrow x+3y-3+3y=0\Rightarrow x+6y-3=0$.

Subiectul II. (30p)

1. a) $\det(I_2+2A)=\begin{vmatrix}-1 & 6\\ 6 & -17\end{vmatrix}=-19;\ A^2=\begin{pmatrix}10 & -30\\ -30 & 90\end{pmatrix}=-10\cdot\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 3 & -9\end{pmatrix}=-10A;$

b) $X(a)\cdot X(b)=(I_2+aA)(I_2+bA)=I_2+(a+b-10ab)A=X(a+b-10ab);$

c) Cum $X(a)\cdot X(\frac{1}{10})=X(\frac{1}{10})\Rightarrow$ produsul este egal cu $X(\frac{1}{10})$.

2. a) a= 0 ; b) Presupunem că f are rădăcină dublă adică $x_1 = x_2$. Folosind relaţiile lui Viete, rezultă :

$x_1 = x_2 = 2$ este rădăcina dublă , $x_3 = -1$ iar a = 4.

c) Plecând de la ecuaţia $x^3-3x^2+3=0$ şi punând condiţiile ca x_1,x_2,x_3 să fie soluţiile ecuaţiei şi însumând relaţiile obţinute, rezultă

$$\sum_{i=1}^{3}x_i^{\,3}-3\sum_{i=1}^{3}x_i^{\,2}+9=0\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{3}x_i^{\,3}=3[(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)]-9=18.$$

Subiectul III. (30p)

1. a) $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}\Rightarrow f'(1)=1;$

b) Observăm din punctual a) că $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}\Rightarrow 1-\ln x\rangle 0\Leftrightarrow x\langle e\Rightarrow$

Pentru $x\langle e$, f este strict crescătoare, şi pentru $x\rangle e$ f este strict descrescătoare.

c) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\rangle 0}}\dfrac{\ln x}{x}=-\infty.$

2. a) $\int_0^1\dfrac{x^2-x+1}{f(x)}dx=\int_0^1\dfrac{x^2-x+1}{(x+1)(x^2-x+1)}dx=\int_0^1\dfrac{1}{x+1}dx=\ln(x+1)\Big|_0^1\ln 2;$

b) $\int_0^1\dfrac{f(x)}{x+1}dx=\int_0^1\dfrac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x+1)}dx=\int_0^1(x^2-x+1)dx=\dfrac{5}{6}.$

c) $\int\dfrac{3x^2}{f(x)}dx=\int\dfrac{3x^2}{x^3+1}dx=\int\dfrac{1}{t}dt=\ln|t|=\ln|x^3+1|+C.$

TESTUL 8

Subiectul I. (30p

1) $-4\langle\ 3x+2\ \langle 4\Big|-2\Rightarrow -6\langle 3x\langle 2\Big|:3\Rightarrow -2\langle x\langle\frac{2}{3}\Rightarrow x\in\left(-2;\frac{2}{3}\right).$

2). $\sqrt{3x+4}=2\sqrt{x}\,|()^2\Rightarrow 3x+4=4x\Rightarrow 3x-4x=-4\Rightarrow x=4$. Condiţii de existenţă a ecuaţiei: $\begin{cases}3x+4\rangle 0\\ x\rangle 0\end{cases}$.

3). $3^x+2\cdot 3^{x+1}=7\Leftrightarrow 3^x\cdot(1+2\cdot 3)=7\Big|:7\Rightarrow 3^x=1\Rightarrow x=0.$

4). $a=\frac{25}{200}\cdot b\Rightarrow a=\frac{1}{4}\cdot b\Rightarrow a+b=\frac{5}{4}b$ sau $b=4a\Rightarrow a+b=a+4a=5a$.

$\frac{x\cdot 5a}{100}=a\Rightarrow x=\frac{100a}{5a}=20$. Răspuns, 20%.

5) $\overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{OC},\ \overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OD}\Rightarrow\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.

6). $(\sin x+\cos x)^2-2\sin x\cos x=\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x-2\sin x\cos x=\sin^2 x+\cos^2 x=1$.

Subiectul II. (30p)

1. a) $A(1)\cdot A(-1)=\begin{pmatrix}-1&2&1\\1&1&-2\\1&2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&-2&1\\-1&1&-2\\1&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&6&-4\\-4&-5&-3\\-2&2&-2\end{pmatrix}\cdot$

b) $\det\left[A(m)\right]=\begin{vmatrix}-1&2m&1\\m&1&-2\\1&2&1\end{vmatrix}=-2m^2-2m-6\langle 0$ deoarece discriminantul ecuației de gradul doi în m este $\Delta=b^2-4ac=4-48=-44\langle 0$.

c) Pentru m = 3 rezultă determinantul matricei sistemului este $\Delta=-30$, iar $\Delta_x=-20$, $\Delta_y=-10$, $\Delta_z=10$.

2. a) $f(X)\vdots\ (X-1)(X-3)\Leftrightarrow f(1)=0\ si\ f(3)=0\Rightarrow a=2,b=3$;

b) $f(x)=0\Leftrightarrow x^4-2x^3-4x^2+2x+3=0\Rightarrow x_1=x_2=-1,\ x_3=1,x_4=3$.

c) $f(X)\vdots\ (X-2)\Rightarrow f(2)=0\ \Rightarrow 2a+b=16$;

$r=f(3)=f(-2)\Rightarrow -2a+b=-13$. Din rezolvarea sistemului rezultă $b=\frac{3}{2},a=\frac{29}{4}$.

Subiectul III. (30p)

1. a) $f'(x)=\frac{-x^2+4x-5}{(x^2-4x+3)^2}$, $f'(2)=1$; b) f este descrescătoare pe $\mathbb{R}$. c) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)\cdot(2x-3)=$

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-2}{x^2-4x+3}\cdot(2x-3)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-7x+6}{x^2-4x+3}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x-7}{2x-4}=2$. S-a aplicat regula lui l'Hospital.

2. a) $l_s(0)=l_d(0)=f(0)=2\Rightarrow$ f continuă în 0, rezultă că f admite primitive pe $\mathbb{R}$;

b) $\int_0^1 x\cdot f(x)dx=\int_0^1 x(x+e^x+1)dx=\int_0^1(x^2+x\cdot e^x+x)dx=\frac{11}{6}$;

c) $V=\pi\int_{-2}^{-1}\sqrt{x^2+4}^2dx=\pi\int_{-2}^{-1}(x^2+4)dx=\frac{19}{3}\pi$;

TESTUL 9

Subiectul I. (30p

1). $a=\frac{23}{15}=1,53333...\Rightarrow a_1+a_2+a_3+....+a_{2020}=5+3+3+3+.....+3=5+3\cdot 2019=6062$.

2). $f(3)+f(3^2)+f(3^3)+...+f(3^{10})=(3+5)+(3^2+5)+(3^3+5)+....+(3^{10}+5)=$

$=3+3^2+3^3+....+3^{10}+5\cdot 10=3\cdot\frac{3^{10}-1}{3-1}=\frac{3^{11}-3}{2}+50;$

3). Deoarece f(3)=0 rezultă că $f(1)\cdot f(2)\cdot....\cdot f(2020)=0.$

4). $i^{33}+i^{55}+i^{77}=i^{4\cdot 8+1}+i^{4\cdot 13+3}+i^{4\cdot 19+1}=i-i+i=i$;

5). $G\left(\frac{-1-3+4}{3};\frac{4-4+3}{3}\right)=G(0;1)$. Ecuația dreptei AG este $\begin{vmatrix} x & y & 1\\ -1 & 4 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=0\Rightarrow 3x+y-1=0$.

6). $\overrightarrow{AB}(2-0;5-3)=\overrightarrow{AB}(2;2)$ și $CD(5-7;9-7)=\overrightarrow{CD}(2;2)$, aşadar vectorii sunt egali.

Subiectul II. (30p)

1. a) $D(3)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 5 & 25\\ 1 & 3 & 9\end{vmatrix}=45+3+25-5-75-9=73-89=-16$.

b) $D(a)=0\Rightarrow\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 5 & 25\\ 1 & a & a^2\end{vmatrix}=0\Rightarrow 5a^2+a+25-5-25a-a^2=0\Rightarrow$

$4a^2-24a+20=0\Rightarrow a^2-6a+5=0\Rightarrow a\in\{1;5\}$.

c) $D(5^x)=0\Rightarrow$din subpunctul b) că $5^x=1\Rightarrow x=0$ și $5^x=5\Rightarrow x=1.$

2. . a) $f\ \vdots\ (x-2)\Rightarrow f(2)=0\Rightarrow m=\frac{3}{2};$

b) $m=3\Rightarrow f(x)=0\Leftrightarrow x^3+x^2-3x-3=0\Rightarrow x_1=-1,\ x_{2,3}=\pm\sqrt{3};$

c) $m=4\Rightarrow f(x)=x^3+2x^2-4x-3\Rightarrow x_1^{\,2}+x_2^{\,2}+x_3^{\,2}=12.$

Subiectul III. (30p)

1. a) $f'(x)=\frac{-2x^2-12x+8}{(x^2+4)^2}\Rightarrow f'(0)=\frac{1}{2};$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x(2x+6)}{x^2+4}=2;$

c) Deoarece $-2x^2-12x+8<0,\forall x\ge 1\Rightarrow f'(x)<0,\forall x\ge 1\Rightarrow$ f este strict descrescătoare pe $[1;\infty)$.

2. . $F(x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^x t\cdot e^t dt=t\cdot e^t\Big|_0^x-\int_0^x e^t dt=x\cdot e^x-e^t\Big|_0^x=f(x)-e^x+1;$

b) $\int_1^e f(\ln x)dx=\int_1^e(\ln x)\cdot e^{\ln x}dx=\int_1^e(\ln x)\cdot x dx=\frac{e^2+1}{4};$

c) $\int_0^1 x\cdot f(x^2)dx=\int_0^1 x\cdot x^2\cdot e^{x^2}dx=\int_0^1 x^3\cdot e^{x^2}dx=\int t\cdot e^t\frac{dt}{2}=\left(\frac{x^2}{2}e^{x^2}-e^{x^2}\right)\Big|_0^1=\frac{e}{2}-e+1;$

TESTUL 10

Subiectul I. (30p

1). Numărul submulțimilor unei mulțimi cu n elemente este egal cu 2^n iar pentru submulțimi nevide 2^n-1; În cazul nostru, N= 2^4-1=15;

2). $f(x)=g(x)\Rightarrow 4x-6=-2x+6\Rightarrow 4x+2x=6+6\Rightarrow 6x=6\Rightarrow x=1.$

3). $P=\dfrac{C_6^4}{C_{14}^4}=\dfrac{15}{7\cdot 13\cdot 11};$ 4). $(2+i\sqrt{3})^2+(2-i\sqrt{3})^2=4+4i\sqrt{3}-3+4-4i\sqrt{3}-3=2\in\mathbb{Z};$

5). (d): $4x-2y-6=0;$ $A(a;a+2)\in d\Rightarrow 4\cdot a-2\cdot(a+2)-6=0\Rightarrow 2a=10\Rightarrow a=5.$

6). $\vec{u}=3\cdot\vec{i}+5\cdot\vec{j}$, $\vec{v}=2\cdot\vec{i}-3\cdot\vec{j}$ şi $\vec{w}=2\cdot\vec{u}-\vec{v}$.

$\vec{w}=2\cdot\vec{u}-\vec{v}=2(3\vec{i}+5\vec{j})-(2\vec{i}-3\vec{j})=6\vec{i}+10\vec{j}-2\vec{i}+3\vec{j}=4\vec{i}+13\vec{j}$.

$|\vec{w}|=|4\vec{i}+13\vec{j}|=\sqrt{4^2+13^2}=\sqrt{16+169}=\sqrt{185}$.

Subiectul II. (30p)

1. a) $6+2+m^2+m+3m+3-1+4m=-6\Rightarrow(m+4)^2=0\Rightarrow m=-4.$

b) $\Delta_s=6+2+6+9-1+8=30.$ $\Delta_x=-6-1+8+12+1-4=10,$ $\Delta_y=2+8-3+3-4-4=2,$

$\Delta_z=-12-2+6-9+1-16=-32.$ $x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}=\dfrac{10}{30}=\dfrac{1}{2},$ $y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}=\dfrac{2}{30}=\dfrac{1}{15},$ $z=\dfrac{\Delta_z}{\Delta}=\dfrac{-32}{30}=\dfrac{-16}{15}.$

c) $A^2=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&-3&1\\1&1&-2\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}2&1&-1\\-3&10&-3\\1&-5&6\end{pmatrix}.$

2. a) $f(\hat{1})=\hat{0}\Rightarrow a=\hat{1}.$ b) $a=2\Rightarrow f(X)=2X^3+X^2+\hat{1}.$ Din $f(x)=\hat{0}\Rightarrow x=2.$

c) $f\vdots(x+\hat{1})\Rightarrow f(-\hat{1})=\hat{0}\Leftrightarrow f(2)=\hat{0}\Rightarrow a=2.$

Subiectul III. (30p)

1. a) Suma termenilor aflaţi în progresie geometrică ne dă $1\cdot\dfrac{2^{2010}-1}{2-1}=2^{2010}-1$ adică tocmai f(2).

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{2010}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x^{2009}+x^{2008}+....+x+1)=2010;$

c) f ‘(x)=2010 x^{2009} şi din f ‘‘(x)= $2009\cdot 2010\cdot x^{2008}\rangle 0$ pentru orice $x\in\Re$, rezultă f convexă.

2. a) $\int\dfrac{2}{x^2-1}dx=2\cdot\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|+C;$ b) $\int_2^3\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-1}dx=\int_2^3\dfrac{x+1}{x-1}dx=\int_2^3(1+\dfrac{2}{x-1})dx=1+\ln 4;$

c) $V=\pi\int_0^{\frac{1}{2}}g^2(x)dx=\pi\int_0^{\frac{1}{2}}(4x^2+4x)+1dx=\dfrac{7}{6}\pi;$

Breviar teoretic

1. NUMERE REALE

Definiţie: A amplifica o fracţie cu un număr natural, diferit de 0, înseamnă a înmulţi atât numărătorul cât şi numitorul, cu acel număr. $\frac{a}{b}=\frac{a\cdot m}{b\cdot m}, b\neq 0, m\neq 0.$

Definiţie: A simplifica o fracţie cu un număr natural, diferit de 0, înseamnă a împărţi atât numărătorul, cât şi numitorul la acel număr. $\frac{a}{b}=\frac{a:m}{b:m}, b\neq 0, m\neq 0.$

Definiţie: Fracţia $\frac{a}{b}, b\neq 0$ **se numeşte fracţie ireductibilă, dacă nu se mai poate simplifica adică cel mai mare divizor comun al lor este egal cu 1, c.m.m.d.c(a,b)=1, altfel spus, numerele a, b sunt prime între ele.**

Compararea fracţiilor: Fie $a,b,c,d\in\mathbb{N},\ \ a,b,c,d\neq 0$**.**

$\frac{a}{b}\rangle\frac{c}{b}\Leftrightarrow a\rangle c \qquad \frac{a}{b}\rangle\frac{a}{c}\Leftrightarrow b\langle c \qquad \frac{a}{b}\rangle\frac{c}{d}\Leftrightarrow a\cdot d\rangle b\cdot c$

Definiţie: Fie $a,b,c,d\in\mathbb{N},\ \ a,b,c,d\neq 0$**.**

Fracţiile $\frac{a}{b}$ **şi** $\frac{c}{d}$ **se numesc echivalente dacă şi numai dacă** $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow a\cdot d=b\cdot c$**.**

Fracţie subunitară, echiunitară, supraunitară:

Fracţia $\frac{a}{b}, b\neq 0$ **se numeşte fracţie subunitară, dacă a < b sau** $\frac{a}{b}\langle 1$**.**

Fracţia $\frac{a}{b}, b\neq 0$ **se numeşte fracţie echiunitară, dacă a = b sau** $\frac{a}{b}=1$**.**

Fracţia $\frac{a}{b}, b\neq 0$ **se numeşte fracţie supraunitară, dacă a>b sau** $\frac{a}{b}\rangle 1$**.**

Definiţie: Se numeşte număr raţional , numărul reprezentat prin fracţia $\frac{a}{b}$ **(fracţie ordinară)şi toate fracţiile echivalente cu aceasta;**
Operaţii cu numere fracţionare: Pentru a aduna sau scădea numere fracţionare reprezentate prin numitori diferiţi se aduc fracţiile la acelaşi numitor prin amplificarea fiecărei fracţii cu câtul dintre c.m.m.m.c al numitorilor şi numitorul fracţiei respective.

$\boxed{\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}}$; $\boxed{\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}}$; $\boxed{\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}}$; $\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^0=1}$; ;

$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}}$; $\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^m\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^n=\left(\frac{a}{b}\right)^{m+n}}$; $\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^m:\left(\frac{a}{b}\right)^n=\left(\frac{a}{b}\right)^{m-n}}$; $\boxed{\left[\left(\frac{a}{b}\right)^m\right]^n=\left(\frac{a}{b}\right)^{m\cdot n}}$;

Inversul lui $\frac{a}{b}$ este numărul $\frac{b}{a}$, oricare ar fi a, b diferite de zero.

$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}=\frac{b}{a}}$; $\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\frac{b^n}{a^n}}$; $\boxed{a\frac{b}{c}=\frac{a\cdot c+b}{c}}$.

Definiţie: Un raport în care numitorul este 100, se numeşte **raport procentual** si se notează de forma

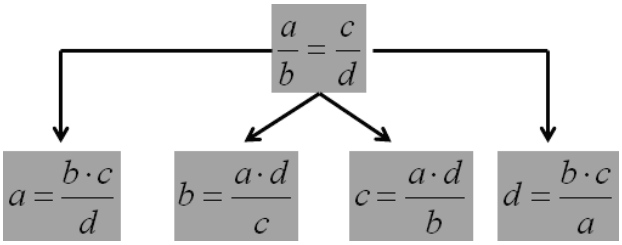
$\frac{p}{100}=p\%$, sau $(p\cdot\frac{1}{100})$; **p se numeşte procent.**

$p\%\ din\ x=\frac{p}{100}\cdot x$; $p\%\ din\ \frac{a}{b}=\frac{p}{100}\cdot\frac{a}{b}$ *sau* $p\cdot\frac{1}{100}\cdot\frac{a}{b}$

$\boxed{\frac{p}{100}\textbf{ din x =a}\ \Rightarrow x=a\cdot\frac{100}{p}}$. $\boxed{\textbf{p \% din N =a}\ \Rightarrow p=\frac{a\cdot 100}{N}}$. $\mathbf{D}=\frac{S\cdot p\cdot n}{100\cdot 12}$ ….

Dobânda obţinută prin depunerea la bancă a unei sume **S** de bani pe o perioadă de **n** luni cu procentul **p** al dobândei anuale acordate de bancă **Proprietatea fundamentală a proporţiilor**: $\boxed{\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow a\cdot d=b\cdot c}$

Aflarea unui termen necunoscut dintr-o proporţie



Modulul numerelor întregi: **Fie** $a\in\mathbb{Z}\ \Rightarrow\ |a|=\begin{cases}a,\ a\rangle 0\\ 0,\ a=0\\ -a,\ a\langle 0\end{cases}$;

Proprietăţile modulului

1. $|a|\geq 0, \quad \forall a\in\mathbb{R}$; **2.** $|a|=0, \quad \Leftrightarrow a=0$; **3.** $|a|=|-a|, \quad \forall a\in\mathbb{R}$;

4. $|a|=|b|, \quad \Leftrightarrow a=\pm b$; **5.** $|x|=a, \quad \Rightarrow x=\pm a, \quad a\rangle 0$;

6. $|x|\leq a, \quad \Leftrightarrow x\in[-a,a], \quad a\rangle 0$;

7. $|x|\geq a, \quad \Leftrightarrow x\in[-\infty,-a]\cup[a,+\infty], \quad a\rangle 0$;

Definiţie: **Fie** $a,b\in\mathbb{R}^*$**,** $m,n\in\mathbb{Z}^*$**; Atunci,** $a^n \underline{\underline{def}} \quad \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot .....\cdot a}_{n \ \ factori}$.

Proprietăţi:

1. $\boxed{a^o=1;\ a^1=a;\ 0^n=0}$**;** **2.** $\boxed{a^m\cdot a^n=a^{m+n}}$**;** **3.** $\boxed{a^m:a^n=a^{m-n}}$ **sau** $\boxed{\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}}$**;**

4. $\boxed{(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n}$ **5.** $\boxed{(a:b)^n=a^n:b^n}$ **sau** $\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}}$**;**

6. $\boxed{a^{-n}=\frac{1}{a^n}}$**;** **7.** $\boxed{(-1)^n=\begin{cases}1, n \ \ par\\ -1, n \ \ impar\end{cases}}$;

Definiţia radicalului de ordinul doi $\sqrt{a}\in\mathbb{R}_+$ $\boxed{\sqrt{a}\geq 0, \ \forall a\geq 0}$ $\sqrt{a}$ **nu există dacă** $a\langle 0$**;**

Proprietăţile radicalilor

$Fie\, a,b\in\mathbb{R}_+$

1. $\boxed{\sqrt{a^2}=|a|\geq 0,}$ **2.** $\boxed{\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}}$ **3.** $\boxed{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}}, \ b\neq 0$ **4.** $\boxed{\sqrt{a^n}=(\sqrt{a})^n=a^{\frac{n}{2}}}$

5. $\boxed{\sqrt{a}\in\mathbb{Q}\Rightarrow a=k^2}$ **6.** $\boxed{a\sqrt{b}=\sqrt{a^2b}}$ **7.** $\boxed{\sqrt{a^2b}=|a|\sqrt{b}}$ **8.** $\boxed{x\sqrt{a}\cdot y\sqrt{b}=xy\sqrt{ab}}$

9. $\boxed{x\sqrt{a}\pm y\sqrt{a}=(x\pm y)\sqrt{a}}$ **10.** $\boxed{\frac{x\sqrt{a}}{y\sqrt{b}}=\frac{x}{y}\sqrt{\frac{a}{b}}, \quad y,b\neq 0}$ **11.** $\boxed{\left(x\sqrt{a}\right)^n=x^n\sqrt{a^n}}$

12. $\boxed{\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}}$ unde $\mathbf{a^2-b=k^2}$.

Calcul algebric

Formule de calcul prescurtat în $\mathbb{R}$

1. $\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;}$ **2.** $\boxed{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2;}$ **3.** $\boxed{(a+b)(a-b) = a^2 - b^2;}$

4. $\boxed{(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca}$

5. $\boxed{(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;}$ **6.** $\boxed{(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3;}$

7. $\boxed{a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2);}$ **8.** $\boxed{a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2).}$

Reguli de calcul cu numere reale reprezentate prin litere

Factor comun $\boxed{a\cdot x + a\cdot y + a\cdot z = a\cdot(x+y+z)}$ $\boxed{x\cdot(a+b+c) = x\cdot a + x\cdot b + x\cdot c}$

Desfacerea parantezelor: $\boxed{(x+y)\cdot(a+b+c) = x\cdot a + x\cdot b + x\cdot c + y\cdot a + y\cdot b + y\cdot c}$

Raţionalizări

$$\boxed{\begin{array}{ll} \dfrac{x}{\sqrt{a}} = \dfrac{x\sqrt{a}}{a}, & \dfrac{x}{a\sqrt{b}} = \dfrac{x\sqrt{b}}{ab} \\ \dfrac{x}{a+\sqrt{b}} = \dfrac{x(a-\sqrt{b})}{a^2-b}, & \dfrac{x}{a-\sqrt{b}} = \dfrac{x(a+\sqrt{b})}{a^2-b} \end{array}}$$

Medii

Media aritmetică $m_a = \dfrac{x+y}{2}$; **Media geometrică** $m_g = \sqrt{x\cdot y}$,

$\forall x, y \in R^*_+$

Media ponderată $m_p = \dfrac{p\cdot x + q\cdot y}{p+q}; p, q \in N^* - ponderile.$

Ecuaţii în mulţimea numerelor reale $\boxed{a\cdot x + b = 0 \Rightarrow a\cdot x = -b \Rightarrow x = -\dfrac{b}{a}}$, $a \neq 0.$

$\boxed{x^2 = a \Rightarrow x = \pm\sqrt{a}, a\rangle 0.}$;

Ecuaţia de gradul al doilea: $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0, a, b, c \in \mathbb{R}$, $\Delta = b^2 - 4ac$,

$x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Dacă $\Delta\langle 0 \Rightarrow$	$S = \varnothing$	**Ecuaţia nu are soluţii reale**

Dacă $\Delta = 0 \Rightarrow$	$S = \left\{ -\frac{b}{2a} \right\}$	**Ecuaţia are soluţie dublă** $x_1 = x_2$
Dacă $\Delta \geq 0 \Rightarrow$	$S = \left\{ \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \right\}$	**Ecuaţia are două soluţii reale diferite**

Intervale în $\mathbb{R}$. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a \langle b$.

Intervale mărginite

$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$

$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

Intervale nemărginite

$(a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$

$[a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$

$(-\infty,a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$

$(-\infty,a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$

Inecuaţii în $\mathbb{R}$. Inecuaţii de forma $ax+b \leq 0 (\langle, \leq, \rangle)$, $a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}$.

$ax+b \leq 0 \Rightarrow$	$x \leq -\frac{b}{a}$	dacă $a \rangle 0$
	$x \geq -\frac{b}{a}$	dacă $a \langle 0$

2. PROGRESII

Definiţie: Se numeşte progresie aritmetică un şir în care diferenţa oricăror doi termeni consecutivi este un număr constant r, numit raţia progresiei aritmetice.

1. Relaţia de recurenţă între doi termeni consecutivi: $a_{n+1} = a_n + r, \forall n \geq 1$;

2. a_{n-1}, a_n, a_{n+1} **sunt termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice** $\Leftrightarrow$

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

3. Termenul general este dat de formula : $a_n = a_1 + (n-1)r$

4. Suma oricăror doi termeni egal depărtaţi de extremi este egal cu suma termenilor extremi :

$$a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n$$

5. Suma primilor n termeni : $S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$

6. Şirul termenilor unei progresii aritmetice: $a_1, a_1 + r, a_1 + 2r, ..., a_1 + (n-1)r$

$$a_m - a_n = (m-n)r$$

7. Trei numere $x_1,\ x_2,\ x_3$ **se scriu în progresie aritmetică de forma :**

$x_1 = u - v,\ x_2 = u,\ x_3 = u + v$, $u, v \in \mathbb{R}$;

Definiţie : Se numeşte progresie geometrică un şir în care raportul oricăror doi termeni consecutivi este un număr constant q, numit raţia progresiei geometrice.

1. Relaţia de recurenţă între doi termeni consecutivi: $b_{n+1} = b_n \cdot q, \forall n \geq 1$

2. b_{n-1}, b_n, b_{n+1} **sunt termenii consecutivi ai unei progresii geometrice** $\Leftrightarrow$

$$b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$$

3. Termenul general este dat de : $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$

4. Produsul oricaror doi termeni egal depărtaţi de extremi este egal cu produsul extremilor $b_k \cdot b_{n-k+1} = b_1 \cdot b_n$

5. Suma primilor n termeni ai unei progresii geometrice : $S_n = b_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$

6. Şirul termenilor unei progresii geometrice : $b_1,\ b_1 q,\ b_1 q^2, ...,\ b_1 q^{n-1}$

$$\frac{b_m}{b_n} = q^{m-n};$$

7. Trei numere $x_1,\ x_2,\ x_3$ **se scriu în progresie geometrică de forma :**

$$x_1 = \frac{u}{v},\ x_2 = u,\ x_3 = u \cdot v \quad u, v \in \mathbb{R}$$

3. FUNCŢII

Definiţie : Fie A şi B două mulţimi nevide. Se numeşte **funcţie definită pe A cu valori în B** , un triplet de forma (**A,B,f**) în care, printr-un procedeu (lege, corespondenţă) notat cu **f**, fiecărui element **x** din A îi corespunde un singur element **y** din B.

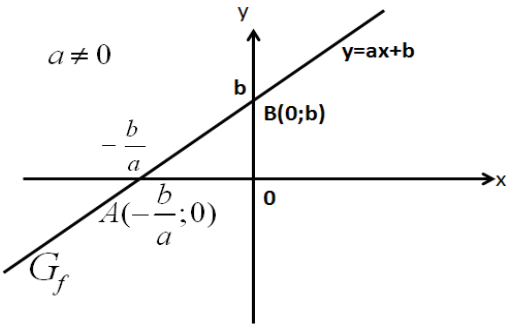
Convenim să notăm o funcţie astfel, $f: A \to B$ sau $A \xrightarrow{f} B$, unde

Definiţie: Fie $f: A \to B$. Se numeşte **imaginea funcţiei f** , mulţimea tuturor valorilor funcţiei f pe care o notăm cu **f(A) sau Im f** .

Definiţie: Două funcţii **f şi g sunt egale** dacă şi numai dacă, au acelaşi domeniu de definiţie, acelaşi codomeniu şi stabilesc aceeaşi corespondenţă.

Definiţie : Fie A şi B două mulţimi (finite) de numere reale şi $f: A \to B$. Graficul funcţiei f reprezintă mulţimea tuturor punctelor de forma (x, f(x)) unde $x \in A$ iar f(x) este valoarea funcţiei f în x. $G_f = \{(x, f(x)) | x \in A, f(x) \in B\} \subset A \times B$.

Intersecţia graficului funcţiei de gradul întâi cu axele de coordonate, OX, OY: y=ax+b

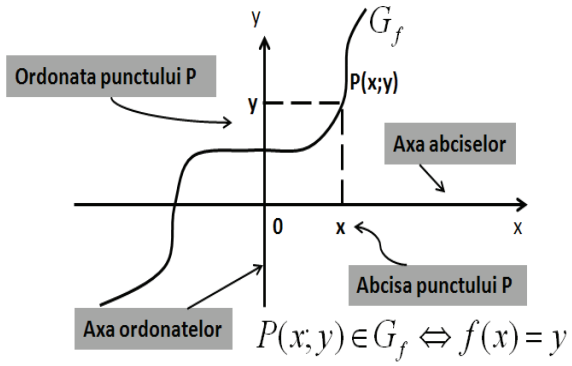


$\cap OX: y = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a} \Rightarrow A(-\frac{b}{a}, 0)$

$\cap OY: x = 0 \Rightarrow y = b \Rightarrow B(0, b)$

$G_f \cap Ox = A(-\frac{b}{a};0)$,

$G_f \cap Oy = B(0;b)$



Definiţie : Un punct P(a,b) aparţine graficului unei funcţii f ,
$P(a;b) \in G_f \Leftrightarrow f(a) = b$.

Funcţii monotone

Definiţie : O **funcţie** $f:D\to\mathbb{R},\ D\subseteq\mathbb{R}$ **se numeşte strict crescătoare** pe D (respectiv **strict descrescătoare** pe D $\Leftrightarrow(\forall)x_1,x_2\in D, x_1\langle x_2\Rightarrow f(x_1)\langle f(x_2)$ (respectiv $f(x_1)\rangle f(x_2)$).

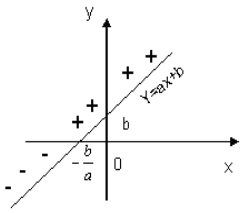
Definiţie : O **funcţie** $f:D\to\mathbb{R},\ D\subseteq\mathbb{R}$ **se numeşte crescătoare** pe D (respectiv **descrescătoare** pe D $\Leftrightarrow(\forall)x_1,x_2\in D, x_1\langle x_2\Rightarrow f(x_1)\le f(x_2)$ (respectiv $f(x_1)\ge f(x_2)$).

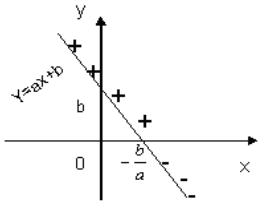
O funcţie care este crescătoare sau descrescătoare pe D se mai numeşte **monotonă.**

Definiţie: Funcţia $f:D\to\mathbb{R},\ D\subseteq\mathbb{R}$ **se numeşte constantă** $\Leftrightarrow(\forall)x_1,x_2\in D\Rightarrow f(x_1)=f(x_2)$.

Monotonia funcţiei de gradul întâi $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$, $a,b\in R$.

Pentru $a\rangle 0$**, funcţia este strict crescătoare, iar pentru** $a\langle 0$ **funcţia este strict descrescătoare.**





Semnul funcţiei de gradul întâi

f(x)= ax+b	$-\infty$ $\quad -\frac{b}{a}\quad$ $+\infty$
$a\rangle 0$	- - - - - 0 + + + + +
$a\langle 0$	+ + + + + + 0 - - - -

În concluzie, semnul funcţiei de gradul întâi este:

f(x)= ax+b	$-\infty$ $\quad -\frac{b}{a}\quad$ $+\infty$
	Semn contrar semnului lui a 0 semnul lui a

Teoremă: O **funcţie** $f:D\to\mathbb{R},\ D\subseteq R$ **se numeşte strict crescătoare** pe D (respectiv **strict descrescătoare** pe D $\Leftrightarrow(\forall)x_1,x_2\in D\Rightarrow\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\rangle 0$ (respectiv $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\langle 0$).

- **Compunerea funcţiilor**

Definiţie: Fie $f:A\to B$ şi $g:B\to C$ două funcţii. Prin **compunerea funcţiei g cu funcţia f** se înţelege funcţia $g\circ f:A\to C$ (şi citim g compus cu f) cu proprietatea că $(g\circ f)(x)=g(f(x)),\ \forall x\in A$.

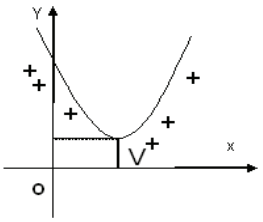
FUNCŢIA DE GRADUL AL DOILEA

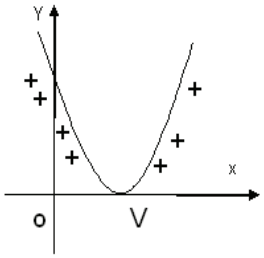
Forma canonică a funcţiei **f:R→R**, $f(x)=ax^2+bx+c,\quad a,b,c\in R, a\neq 0$ este

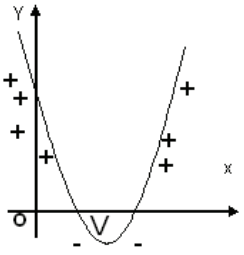
$f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}, \forall x\in R$;

Graficul funcţiei este o parabolă de vârf $V\left(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a}\right)$, unde $\Delta=b^2-4ac$

$a\rangle 0$ **f este convexă;**







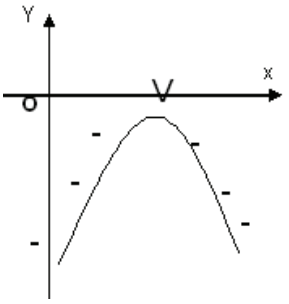
$\Delta\langle 0$; **x1,x2** $\in$ **C** $\Delta=0$, **x1=x2**$\in$**R** $\Delta\rangle 0, x_1\neq x_2\in R$

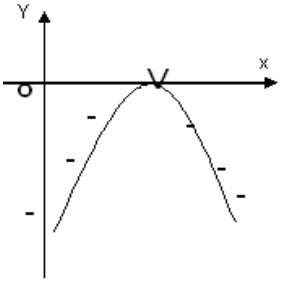
f(x) >0, $\forall x\in R$; f(x) ≥ 0, $\forall x\in R$; f(x) ≥ 0, $\forall x\in(-\infty,x_1]\cup[x_2,+\infty)$;

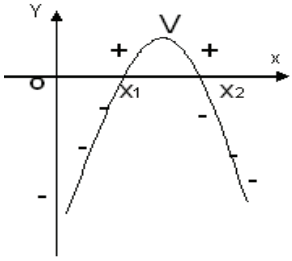
$V\left(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a}\right)$ - punct de minim; f(x)=0 $\Leftrightarrow x=-\frac{b}{2a}$ f(x)<0, $\forall x\in(x_1,x_2)$

Pentru $x\in\left(-\infty,-\frac{b}{2a}\right)$ funcţia este strict descrescătoare;Pentru $x\in[-\frac{b}{2a},+\infty)$, funcţia este strict crescătoare.

a<0 funcţia este concavă







$\Delta\langle 0$; **x1,x2** $\in$ **C** $\Delta=0$, **x1=x2**$\in$**R** $\Delta\rangle 0, x_1\neq x_2\in R$

f(x) <0, $\forall x\in R$; f(x) ≤ 0, $\forall x\in R$; f(x) ≥ 0, $\forall x\in[x_1,x_2]$;

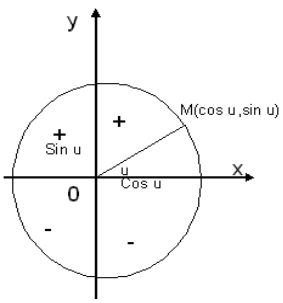
$V\left(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a}\right)$ - punct de maxim; f(x)=0 $\Leftrightarrow x=-\frac{b}{2a}$ f(x)<0, $\forall x\in(-\infty,x_1)\cup(x_2,+\infty)$

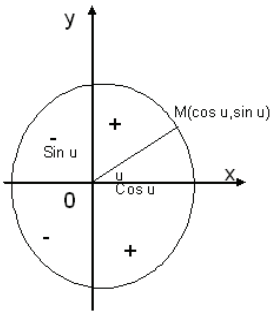
Pentru $x\in\left(-\infty,-\frac{b}{2a}\right)$ f este strict crescătoare;Pentru $x\in[-\frac{b}{2a},+\infty)$, este strict descrescătoare.

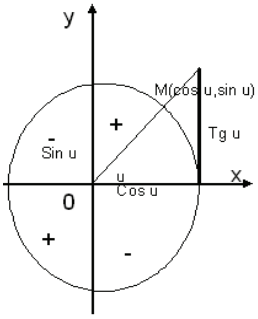
4. FUNCŢII ŞI FORMULE TRIGONOMETRICE

Semnul funcţiilor trigonometrice:

Sin: $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to[-1,1]$ **Cos:** $[0,\pi]\to[-1,1]$ **Tg:** $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to R$







arcsin:[-1,1]$\to\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ **arccos:[-1,1]** $\to[0,\pi]$ **arctg:R**$\to\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

Reducerea la un unghi ascuţit

Fie $u\in(0,\frac{\pi}{2})$ Notăm sgn f= semnul funcţiei f; cof = cofuncţia lui f

$$\sin\left(k\frac{\pi}{2}\pm u\right)=\begin{cases}\operatorname{sgn} f(k\frac{\pi}{2}\pm u)\cdot\sin u, k=par\\ \operatorname{sgn} f(k\frac{\pi}{2}\pm u)\cdot\cos u, k=impar\end{cases}$$ În general, $$f(k\frac{\pi}{2}\pm u)=\begin{cases}\operatorname{sgn} f(k\frac{\pi}{2}\pm u)\cdot f(u), k=par\\ \operatorname{sgn} f(k\frac{\pi}{2}\pm u)\cdot cof(u), k=impar\end{cases}$$

FORMULE TRIGONOMETRICE

1. $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\Rightarrow\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$; $\sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$, $\alpha\in R$

2. $tg\alpha=\pm\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}=\pm\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}\Rightarrow\quad tg^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}$;

3. $\cos\alpha=\pm\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}$; $\sin\alpha=\pm\frac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}$;

4. $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$; **5.** $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$;

6. $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$; **7.** $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha$;

8. $tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta}$; $tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha\cdot tg\beta}$;

9. $ctg(\alpha+\beta)=\frac{ctg\alpha\cdot ctg\beta-1}{ctg\alpha+ctg\beta}$; $ctg(\alpha-\beta)=\frac{ctg\alpha\cdot ctg\beta+1}{ctg\alpha-ctg\beta}$;

10. $\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$; **11.** $\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$

5. NUMERE REALE - Clasa a X-a

Scrierea puterilor cu exponent raţional cu ajutorul radicalilor se face după formula:

$$x^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{x^m}$$

Proprietăţi ale puterii cu exponent raţional:

$$x^{\frac{m}{n}}\cdot x^{\frac{p}{q}}=x^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}};\quad x^{\frac{m}{n}}:x^{\frac{p}{q}}=x^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}};\quad \left(x^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}}=x^{\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}};\quad (x\cdot y)^{\frac{m}{n}}=x^{\frac{m}{n}}\cdot y^{\frac{m}{n}};\quad (x:y)^{\frac{m}{n}}=x^{\frac{m}{n}}:y^{\frac{m}{n}};$$

Convenţie: $x^0=1$; $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}}=\sqrt[m\cdot n]{x},\ m,n\in\mathbb{N}^*,x\geq 0$; $\sqrt[n]{x}=\sqrt[m\cdot n]{x^m},\ m,n\in\mathbb{N}^*,x\geq 0$;

Compararea puterilor cu exponent raţional:

Fie $x,y\rangle 0$ şi $m,n\in\mathbb{Q}$;

1. Dacă $x\rangle 1$ atunci, $x^m\rangle x^n\Leftrightarrow m\rangle n$ **2**. Dacă $x\in(0;1)$ atunci, $x^m\rangle x^n\Leftrightarrow m\langle n$ **3**. $x^n=y^n\Leftrightarrow x=y$

$x^r,\ x\rangle 0,\ r\in\mathbb{R}$;

	$r\rangle 0$	$r\langle 0$
$x\rangle 1$	$x^r\rangle 1$	$x^r\in(0;1)$
$x\in(0;1)$	$x^r\in(0;1)$	$x^r\rangle 1$

Radicalii de ordinul trei

Definiţia radicalilor de ordinul trei $\sqrt[3]{a}\in\mathbb{R},\ \forall a\in\mathbb{R}$

Proprietăţile radicalilor. *Fie* $a,b\in\mathbb{R}$

1. $\sqrt[3]{a^3}=a,\forall a\in\mathbb{R}.$ **2**. $\sqrt[3]{a\cdot b}=\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b}.$ **3**. $\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}=\sqrt[3]{\frac{a}{b}},b\neq 0,\ b\neq 0$ **4**. $\sqrt[3]{a^n}=\sqrt[3]{a^n}=a^{\frac{n}{3}}$

5. $\sqrt[3]{a}\in\mathbb{Z}\Rightarrow a=k^3$ **6**. $a\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{a^3b}$ **7**. $\sqrt[3]{a^3b}=a\sqrt[3]{b}$ **8**. $x\sqrt[3]{b}\cdot y\sqrt[3]{b}=xy\sqrt[3]{ab}$

9. $x\sqrt[3]{a}\pm y\sqrt[3]{a}=(x\pm y)\sqrt[3]{a}$ **10**. $\frac{x\sqrt[3]{a}}{y\sqrt[3]{b}}=\frac{x}{y}\sqrt[3]{\frac{a}{b}},y,b\neq 0$ **11**. $\left(x\sqrt[3]{a}\right)^n=x^n\sqrt[3]{a^n}$

Raţionalizări ale numitorilor fracţiilor

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a}}=\frac{\sqrt[3]{a^2}}{a};\qquad \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}=\frac{\sqrt[3]{a}}{a};\qquad \frac{1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}=\frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{a-b};$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}=\frac{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{a+b};\qquad \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}=\frac{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}{a-b};$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}=\frac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}{a+b};$$

Sunt utile pentru raţionalizări următoarele formule:

$\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)=a-b$; $\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)=a+b$;

6. NUMERE COMPLEXE

NUMERE COMPLEXE SUB FORMĂ ALGEBRICĂ

$C = \{z | z = a + ib, a, b \in R, i^2 = -1\}$ - mulţimea numerelor complexe. **z=a+ib=Re z+Im z**

OPERAŢII CU NUMERE COMPLEXE

Fie $z_1 = a + ib, \quad z_2 = c + id$. Atunci:

1. $z_1 = z_2 \Leftrightarrow a = c \quad si \quad b = d$.

2. $z_1 + z_2 = (a + c) + i(b + d)$.

3. $z_1 \cdot z_2 = (a \cdot c - b \cdot d) + i(a \cdot d + b \cdot c)$.

4. $\overline{z_1} = a - ib$, conjugatul lui z_1

5. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{a \cdot c + b \cdot d}{c^2 + d^2} + i\frac{b \cdot c - a \cdot d}{c^2 + d^2}$

6. $\frac{1}{z_1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i\frac{b}{a^2 + b^2}$.

PUTERILE LUI i

1. $i^{4k} = 1$

2. $i^{4k+1} = i$

3. $i^{4k+2} = -1$

4. $i^{4k+3} = -i$

5. $i^{-n} = \frac{1}{i^n}, i^{-1} = \frac{1}{i} = -i$

6. $i^{-n} = (-i)^n = (-1)^n \cdot i^n = \begin{cases} i^n, n \quad par \\ -i^n, n \quad impar \end{cases}$

PROPRIETĂŢILE MODULULUI $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ **- modulul numerelor complexe**

1. $|z| \geq 0, |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

2. $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

3. $|z| = |\bar{z}|$

4. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

5. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, z_2 \neq 0$

6. $\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

7. $|z^n| = |z|^n$

8. $z \in C; \quad z \in R \Leftrightarrow \operatorname{Im} z = 0 \Leftrightarrow z = \bar{z}$.

ECUAŢII:

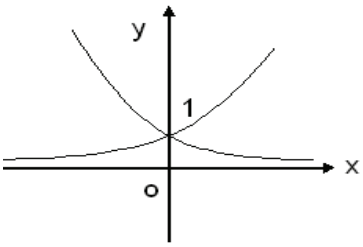
$x^2 = a$, $a\langle 0 \Rightarrow \ x = \pm i\sqrt{-a}$

$z^2 = a + ib \Rightarrow z_{1,2} = \pm\left[\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \pm i\sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}\right]$,+' dacă b pozitiv; ,-, dacă b negativ

$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} sau \quad \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a} daca \quad \Delta\langle 0$

7. FUNCŢIA EXPONENŢIALĂ

Def. **f: R→ (0,∞), f(x)=** $a^x, a\rangle 0, a \neq 1$



Dacă a $\rangle 1 \Rightarrow$ f este strict crescătoare

$x_1 \langle x_2 \Rightarrow a^{x_1} \langle a^{x_2}$

Dacă a $\in (0,1) \Rightarrow$ f este strict descrescătoare

$x_1 \langle x_2 \Rightarrow a^{x_1} \rangle a^{x_2}$

Proprietăţi:

Fie a,b $\in (0,\infty), a, b \neq 1, x, y \in R \Rightarrow$

$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

$(a \cdot b)^x = a^x \cdot a^y$

$\left(a^x\right)^y = a^{x \cdot y}$

$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}, a \neq 0$

$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}, b \neq 0$

$a^0 = 1$

$a^{-x} = \frac{1}{a^x}, a \neq 0$

pentru $a\langle 0,$ *nu se defineste* a^x

Tipuri de ecuaţii:

1. a $^{f(x)} = b, a\rangle 0, a \neq 1, b\rangle 0 \Rightarrow f(x) = \log_a b$

2. a $^{f(x)} = a^{g(x)}, a\rangle 0 \Rightarrow f(x) = g(x)$

3. a $^{f(x)} = b^{g(x)}, a, b\rangle 0 \Rightarrow f(x) = g(x) \cdot \log_a b$

4. ecuaţii exponenţiale reductibile la ecuaţii algebrice printr-o substituţie.

5. ecuaţii ce se rezolvă utilizând monotonia funcţiei exponenţiale.

Inecuaţii

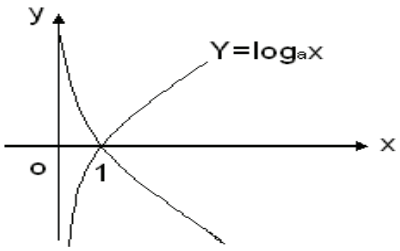
a>1, $a^{f(x)} \leq a^{g(x)} \Rightarrow f(x) \leq g(x)$

a $\in (0,1)$ $a^{f(x)} \leq a^{g(x)} \Rightarrow f(x) \geq g(x)$

8. FUNCTIA LOGARITMICĂ

Def: **f:(0,∞) →R, f(x)=** $\log_a x$**,**

$a\rangle 0, a \neq 1$, x>0



Dacă a $\rangle 1 \Rightarrow$ f este strict crescătoare

$x_1 \langle x_2 \Rightarrow \log_a x_1 \langle \log_a x_2$

Dacă a $\in (0,1) \Rightarrow$ f este strict descrescătoare

$x_1 \langle x_2 \Rightarrow \log_a x_1 \rangle \log_a x_2$

Proprietăţi:

Fiea,b

$c \in (0,\infty), a, b, c \neq 1, x, y \in (0,\infty), m \in R \Rightarrow$

$a^y = x\rangle 0 \Rightarrow y = \log_a x$

$\log_a x \cdot y = \log_a x + \log_a y$

$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

$\log_a a^m = m, \quad \log_a b^m = m \log_a b$

$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \quad \frac{1}{\log_a b} = \log_b a$

$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}, \quad x = a^{\log_a x}$

$\log_a 1 = 0, \quad \log_a a = 1.$

Tipuri de ecuaţii:

1. $\log_{f(x)} g(x) = b, f, g\rangle 0, f \neq 1 \Rightarrow g(x) = f(x)^b$

2. $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Rightarrow f(x) = g(x)$

3. $\log_a f(x) = \log_b g(x) \Rightarrow f(x) = a^{\log_b g(x)}$

4. ecuaţii logaritmice reductibile la ecuaţii algebrice printr-o substituţie.

5. ecuaţii ce se rezolvă utilizând monotonia funcţiei logaritmice.

Inecuaţii

$a\rangle 1$: $\log_a f(x) \leq \log_a g(x) \Rightarrow f(x) \leq g(x)$

$a \in (0;1)$: $\log_a f(x) \leq \log_a g(x) \Rightarrow f(x) \geq g(x)$

9. COMBINATORICĂ

Permutări

Definiţie : Fie **A** o mulţime finită cu **n** elemente. Se numesc **permutări de n elemente** ale lui **A** şi se notează cu $\mathbf{P_n}$, numărul tuturor mulţimilor ordonate formate cu cele **n** elemente ale mulţimii **A**.

$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot .....(n-1) \cdot n \ , \forall n \geq 1, \ n \in \mathbb{N}.$. Convenţie: $0! = 1;$

Formula de recurenţă pentru factoriale: $\forall n \geq 1, \ n \in \mathbb{N} \Rightarrow n! = n \cdot (n-1)!.$

Aranjamente

Definiţie: Fie **A** o mulţime finită cu **n** elemente şi **k** un număr natural astfel încât $n \geq k \geq 0.$ Se numesc **aranjamente de n elemente luate câte k** şi se notează A_n^k , numărul tuturor submulţimilor ordonate ale lui **A**, având fiecare câte **k** elemente.

$A_n^k = n(n-1)(n-2).....(n-k+1)$ sau $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}, \ \forall n \geq k \geq 0.$

Observaţie: $A_n^k \in \mathbb{N}^*.$

Formula de recurenţă pentru aranjamente: $\forall n \geq k \geq 1, \ n,k \in \mathbb{N} \Rightarrow A_n^k = (n-k+1)A_n^{k-1}.$

Definiţie: Două aranjamente de n elemente luate câte k obiecte se deosebesc prin natura elementelor sau prin ordinea lor.

Combinări

Definiţie: Fie **A** o mulţime finită cu **n** elemente şi k un număr natural astfel încât $n \geq k \geq 0.$ Se numesc **combinări de n elemente luate câte k** şi se notează C_n^k , numărul tuturor submulţimilor de câte **k** elemente luate din mulţimea **A**.

Fie $k,n \in \mathbb{N}, \ 0 \leq k \leq n.$ Atunci, $C_n^{\ k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$; $C_n^k \in \mathbb{N}^*.$

$C_n^p = C_n^q \Leftrightarrow p = q \ sau \ n-p = q$.

Formula combinărilor complementare: $C_n^{\ k} = C_n^{\ n-k}, 0 \leq k \leq n$.

Cazuri particulare: $C_n^0 = C_n^n = 1; \quad C_n^1 = C_n^{n-1} = n; \quad C_n^2 = C_n^{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}$; etc.

Formula de descompunere a combinărilor : $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}, \ \forall k,n \in \mathbb{N}, \ n \rangle k \geq 1.$

Teoremă: Pentru orice număr natural n şi a şi b numere reale există relaţia:

$$(a+b)^n = C_n^{\ 0}a^n + C_n^{\ 1}a^{n-1} \cdot b + C_n^{\ 2}a^{n-2} \cdot b^2 + ... + C_n^{\ k}a^{n-k} \cdot b^k + ... + C_n^{\ n}b^n$$

(1)

$$(a-b)^n = C_n^{\ 0}a^n - C_n^{\ 1}a^{n-1} \cdot b + C_n^{\ 2}a^{n-2} \cdot b^2 - .....+ (-1)^k C_n^{\ k}a^{n-k} \cdot b^k + ... + (-1)^n C_n^{\ n}b^n$$

(1')

Pentru a=b=1 se obţine $C_n^{\ 0} + C_n^{\ 1} + C_n^{\ 2} + ... + C_n^{\ n} = (1+1)^n$.

Numărul tuturor submulţimilor unei mulţimi cu n elemente este 2^n .

Termenul de rang k+1 al dezvoltării este

$$T_{k+1} = C_n^{\ k}a^{n-k} \cdot b^k, \quad k = 0,1,2,...., n$$

10. ECUAŢIILE DREPTEI ÎN PLAN

1. Ecuaţia carteziană generală a dreptei este ax+by+c=0 (d)

Punctul $M(x_0,y_0) \in d \Leftrightarrow a\cdot x_0 + b\cdot y_0 + c = 0$

2. Ecuaţia dreptei determinată de punctele $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$: $\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1} = \dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$

3. Ecuaţia dreptei determinată de un punct $M(x_0,y_0)$ şi o direcţie dată(are panta m)

$y-y_0=m(x-x_0)$

4. Ecuaţia explicită a dreptei (ecuaţia normală):

y=mx+n, unde $m = tg\varphi = \dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ **este panta dreptei şi n este ordonata la origine.**

5. Ecuaţia dreptei prin tăieturi: $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1,\quad a,b\neq 0.$

6. Fie (d): y=mx+n şi (d'): y=m'x+n'

Dreptele d şi d' sunt paralele $\Leftrightarrow$ **m=m'şi n ≠ n'.**

Dreptele d şi d' coincid $\Leftrightarrow$ **m=m'şi n=n'.**

Dreptele d şi d' sunt perpendiculare $\Leftrightarrow$ **mm'= -1.**

Tangenta unghiului φ **a celor două drepte este** $tg\varphi = \left|\dfrac{m-m'}{1+m\cdot m'}\right|$

7. Fie d: ax+by+c=0 şi d': a'x+b'y+c'=0 cu a',b',c' $\neq 0.$ **şi** $\theta = m(\langle d,d')$

Dreptele d şi d' sunt paralele $\Leftrightarrow \dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}\neq\dfrac{c}{c'}$

Dreptele d şi d' coincid $\Leftrightarrow \dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}=\dfrac{c}{c'}$

Dreptele d şi d' sunt concurente $\Leftrightarrow \dfrac{a}{a'}\neq\dfrac{b}{b'} \Leftrightarrow$ **ab'-ba'** $\neq 0.$

$\cos\theta = \dfrac{\vec{v}\cdot\vec{v'}}{|\vec{v}|\cdot|\vec{v'}|} = \dfrac{a\cdot a'+b\cdot b'}{\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{a'^2+b'^2}}$ **unde** $\vec{v}(-b,a), \vec{v'}(-b',a')$ **sunt vectorii directori ai dreptelor d şi d'.**

Dreptele d şi d' sunt perpendiculare, $d\perp d' \Leftrightarrow a\cdot a'+b\cdot b'=0$

8. Fie punctele $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$, $D(x_4,y_4)$ în plan.

Dreptele AB şi CD sunt paralele, $AB \parallel CD \Leftrightarrow (\exists)\alpha\in R^*, a.î.\ \overrightarrow{AB}=\alpha\cdot\overrightarrow{CD}$ **sau** $m_{AB}=m_{CD}$.

Dreptele AB şi CD sunt perpendiculare, $AB\perp CD \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$

Condiţia ca punctele $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$ să fie coliniare este: $\dfrac{y_3-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{x_3-x_1}{x_2-x_1}$

9. Distanţa dintre punctele $A(x_1,y_1)$ şi $B(x_2,y_2)$ este $AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

Distanţa de la un punct $M_0(x_0,y_0)$ la o dreaptă h de ecuaţie (h): ax+by+c=0 este dată de:

$$d(M_0,h)=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

11. ELEMENTE DE ALGEBRĂ SUPERIOARĂ

Pentru două matrice pătratice de ordinul doi avem: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+x & b+y \\ c+z & d+t \end{pmatrix}$.

$a\cdot\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a\cdot x & a\cdot y \\ a\cdot z & a\cdot t \end{pmatrix}$;

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a\cdot x+b\cdot z & a\cdot y+b\cdot t \\ c\cdot x+d\cdot z & c\cdot y+d\cdot t \end{pmatrix}$

Teoremă: Fie $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{C})$. **Atunci** $A^2-(a+d)\cdot A+(ad-bc)\cdot I_2=0_2$

Definiţie. Determinantul matricei $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ **este numărul** $\det(A)=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ **şi se numeşte determinantul de ordin 2. Termenii** $a_{11}a_{22}$, $a_{12}a_{21}$ **se numesc termenii dezvoltării determinantului de ordin 2.**

Definiţie. Determinantul matricei $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ **este numărul**

$\det(A)=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{23}a_{32}a_{11}-a_{33}a_{12}a_{21}$ **şi se numeşte determinantul de ordin 3. Termenii care apar în formulă se numesc termenii dezvoltării determinantului.**

- **<u>Proprietăţile determinanţilor</u>**

P_1. Determinantul unei matrice este egal cu determinantul matricei transpuse adică dacă $A\in \mathrm{M}_n(C)$, **atunci** $\det(A)=\det(A^T)$;

P_2. Dacă toate elementele unei linii (sau coloane) dintr-o matrice sunt nule, atunci determinantul matricei este nul.

P_3. Dacă într-o matrice schimbăm două linii (sau două coloane) între ele obţinem o matrice care are determinantul egal cu opusul determinantului matricei iniţiale.

P_4. Dacă o matrice are două linii (sau coloane) identice, atunci determinantul său este nul.

P_5. Dacă toate elementele unei linii (sau coloane) ale unei matrici sunt înmulţite cu un număr α, obţinem o matrice al cărei determinant este egal cu α înmulţit cu determinantul matricei iniţiale.

P_6. Dacă elementele a două linii (sau coloane) ale unei matrice sunt proporţionale, atunci determinantul este nul.

P_7. Dacă linia *i* a unei matrici *A* este suma a doi vectori, atunci determinantul ei este egal cu suma a doi determinanţi corespunzători matricelor care au aceleaşi linii ca *A*, cu excepţia liniei *i* unde au câte unul din cei doi vectori.

P_8. Dacă o linie (o coloană) a unei matrici pătratice este o combinaţie liniară de celelalte linii (coloane), atunci determinantul matricei este zero.

P_9. Dacă la o linie (o coloană) a matricii A adunăm elementele altei linii (coloane) înmulţite cu acelaşi număr, atunci această matrice are acelaşi determinant ca şi matricea A.

P_{10}. Dacă $A, B \in \mathrm{M}_n(C)$, atunci $\det(AB) = \det(A)\cdot\det(B)$ (Determinantul produsului a două matrici pătratice este egal cu produsul determinanţilor acelor matrici). În particular $\det(A^n) = (\det(A))^n$, $n \in N^*$.

P_{11}. Determinantul Vandermonde:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

P_{12}. Dacă $A=(a_{ij})$ este o matrice triunghiulară (sau diagonală) (toate elementele de deasupra diagonalei principale sau de dedesubtul ei sunt egale cu zero), atunci $\det(A) = a_{11}a_{22}...a_{nn}$. (Valoarea determinantului este egală cu produsul elementelor de pe diagonala principală).

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{vmatrix} = a\cdot c\cdot f$$

- **<u>Aplicaţii ale determinanţilor în geometria plană</u>**

(1). Ecuaţia dreptei determinată de punctele $A(x_1;y_1)$ şi $B(x_2;y_2)$ este : $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$;

(2). Condiţia ca trei puncte $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$ $C(x_3;y_3)$ să fie coliniare este : $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$;

(3). Aria triunghiului de vârfuri $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$ $C(x_3;y_3)$ este $A = \frac{1}{2}\cdot|\Delta|$, unde $\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$

Definiţie. Fie $A \in \mathrm{M}_n(C)$. Matricea A se numeşte **inversabilă** dacă există matricea $B \in \mathrm{M}_n(C)$ cu proprietatea că $A\cdot B = B\cdot A = I_n$, I_n fiind matricea unitate. $A^{-1} = \frac{1}{\det A}A^*$, unde A^* se numeşte matricea adjunctă.

În general, dacă matricea A este de forma $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ **atunci** $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

12. LIMITE DE FUNCTII

$P(X)=a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +a_n$,$a_0 \neq 0$ **$Q(X)=b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +b_n$,$b_0 \neq 0$**

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{P(X)}{Q(X)}=$$

	0		n<m
	$\frac{a_0}{b_0}$		n=m
$x\to\infty$	$\left(\frac{a_0}{b_0}\right)\infty$	∞,	n>m, $\frac{a_0}{b_0}>0$
		$-\infty$,	n>m, $\frac{a_0}{b_0}<0$
$x\to-\infty$	$\left(\frac{a_0}{b_0}\right)(-\infty)^{\text{n-m}}$	$\left(\frac{a_0}{b_0}\right)\infty$	n>m, n-m par
		$\left(\frac{a_0}{b_0}\right)(-\infty)$	n>m, n-m impar

$$\lim_{x\longrightarrow\pm\infty} P(x)=a_0(\pm\infty)^n$$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} q^x=\begin{cases}0, & \text{dacă } q\in(-1,1)\\ 1, & \text{dacă } q=1\\ \infty, & \text{dacă } q>1\\ \text{nu există}, & \text{dacă } q\le -1\end{cases}$$

$\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\frac{\sin x}{x}=1$	$\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\frac{tgx}{x}=1$	$\lim\limits_{u(x)\longrightarrow 0}\frac{\sin u(x)}{u(x)}=1$	$\lim\limits_{u(x)\longrightarrow 0}\frac{tgu(x)}{u(x)}=1$
$\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\frac{\arcsin x}{x}=1$	$\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\frac{arctgx}{x}=1$	$\lim\limits_{u(x)\longrightarrow 0}\frac{\arcsin u(x)}{u(x)}=1$	$\lim\limits_{u(x)\longrightarrow 0}\frac{arctgu(x)}{u(x)}=1$
$\lim\limits_{x\longrightarrow 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$	$\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$	$\lim\limits_{u(x)\longrightarrow 0}(1+u(x))^{\frac{1}{u(x)}}=e$	$\lim\limits_{u(x)\longrightarrow\infty}\left(1+\frac{1}{u(x)}\right)^{u(x)}=e$
$\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$	$\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$	$\lim\limits_{u(x)\longrightarrow 0}\frac{\ln(1+u(x))}{u(x)}=1$	$\lim\limits_{u(x)\longrightarrow 0}\frac{a^{u(x)}-1}{u(x)}=\ln a$
$\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\frac{(1+x)^r-1}{x}=r$	$\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\frac{x^k}{a^x}=0$	$\lim\limits_{u(x)\longrightarrow 0}\frac{(1+u(x))^r-1}{u(x)}=r$	$\lim\limits_{u(x)\longrightarrow\infty}\frac{u(x)^k}{a^{u(x)}}=0$

a>1 $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}a^x=\infty$ $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty}a^x=0$ $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\log_a x=\infty$ $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\log_a x=-\infty$

a $\in(0,1)$ $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\log_a x=-\infty$ $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\log_a x=\infty$ $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}a^x=0$ $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty}a^x=\infty$

13. DERIVATE

NR	FUNCTIA	DERIVATA	MULTIMEA PE CARE FUNCTIA ESTE DERIVABILĂ	FUNCTIA COMPUSĂ	DERIVATA
1.	C	0	R		
2.	x	1	R	u	u'
3.	x^n	nx^{n-1}	R	u^n	$n.u^{n-1}.u'$
4.	x^a	ax^{a-1}	$[0,\infty]$	u^a	$au^{a-1}.u'$
5.	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	R^*	$\frac{1}{u}$	$-\frac{1}{u^2}.u'$
6.	$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	R^*	$\frac{1}{u^n}$	$-\frac{n}{u^{n+1}}\cdot u'$
7.	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	R^*_+	$\sqrt{u}$	$\frac{1}{2\sqrt{u}}$ u'
8.	$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	R^*_+, n par R^*, n impar	$\sqrt[n]{u}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$ u'
9.	sin x	cosx	R	sin u	u'cos u
10.	cos x	-sinx	R	cos u	-u'sin u
11.	tg x	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$R\setminus\{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k\in Z\}$	tg u	$\frac{1}{\cos^2 u}u'$
12.	ctg x	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$R\setminus\{k\pi \mid k\in Z\}$	ctg u	$-\frac{1}{\sin^2 u}u'$
13.	arcsin x	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	(-1,1)	arcsin u	$\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}u'$
14.	arccos x	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	(-1,1)	arccos u	$-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}u'$
15.	arctg x	$\frac{1}{1+x^2}$	R	arctg u	$\frac{1}{1+u^2}u'$
16.	arcctg x	$-\frac{1}{1+x^2}$	R	arcctg u	$-\frac{1}{1+u^2}u'$
17.	a^x	$a^x \ln a$	R	a^u	$a^u.\ln a.u'$
18.	e^x	e^x	R	e^u	$e^u.u'$
19.	lnx	$\frac{1}{x}$	R^*_+	lnu	$\frac{1}{u}.u'$
20.	$\log_a x$	$\frac{1}{x\ln a}$	R^*_+	$\log_a u$	$\frac{1}{u\ln a}u'$
21.	u^v	$(u^v)' =$	$v.u^{v-1}.u' + u^v.v'.\ln u$		

1. $(f\cdot g)^I = f^I\cdot g + f\cdot g^I$; 2. $(a\cdot f)^I = a\cdot f^I$; 3. $\left(\frac{f}{g}\right)^I = \frac{f^I\cdot g - f\cdot g^I}{g^2}$;

4. $(f^{-1})^I(f(x_0)) = \frac{1}{f^I(x_0)}$

14. STRUCTURI ALGEBRICE

Definiţie

Noţiunea de **structură algebrică** se referă la o mulţime nevidă de numere, pe care se defineşte una sau două funcţii numite **legi de compoziţie** şi care verifică o serie de proprietăţi numite **axiomele structurii**.

Definiţie

Fie $M \neq \emptyset$, (o mulţime nevidă). O aplicaţie φ definită pe produsul cartezian $M \times M$ cu valori în M, $\varphi : M \times M \to M$, $(x, y) \to \varphi((x, y))$ se numeşte **lege de compoziţie** (internă) pe M.

Definiţie:

Fie $M \neq \emptyset$,(o mulţime nevidă) pe care este dată o lege de compoziţie φ . O submulţime H a lui M cu proprietatea $\forall x, y \in H \Rightarrow \varphi((x, y)) \in H$ se numeşte **parte stabilă** a lui M în raport cu legea de compoziţie φ. (Se mai spune că legea φ este corect definită)

Definiţie:

O lege de compoziţie MxM→M , (x,y) → $x * y$ se numeşte **asociativă** pe M dacă $(x * y) * z = x * (y * z),\ \forall x, y, z \in M$

Definiţie:

O lege de compoziţie MxM→M , (x,y) → $x * y$ se numeşte **comutativă** pe M dacă $x * y = y * x,\ \forall x, y \in M$.

Definiţie

Un element **e** $\in$ M se numeşte **element neutru** pentru o lege de compoziţie MxM→M,
(x,y) → $x * y$, dacă $x * e = e * x,\ \forall x \in M$. (**e** dacă există este unic).

Definiţie

Fie $M \neq 0$ o mulţime înzestrată cu o lege de compoziţie MxM→M, (x,y) → $x * y$, asociativă şi care admite element neutru, e. Un element $x \in M$ se numeşte **simetrizabil** în raport cu legea de compoziţie , dacă există $x' \in M$ a.î. $x * x' = x' * x = e$ $\forall x \in M$.

Definiţie

O mulţime nevidă G înzestrată cu o lege de compoziţie GxG→G, (x,y) → $x * y$ se numeşte **grup comutativ** sau abelian dacă sunt îndeplinite condiţiile:

1. $(x * y) * z = x * (y * z), \forall x, y, z \in G.$ **(Asociativitatea)**

2. $x * y = y * x,\ \forall x, y \in G;$ **(Comutativitatea)**

3. $\exists e \in G$ *a.î* $x * e = e * x = x,\ \forall x \in G$ **; (Element neutru)**

4. $\forall x \in G,\ \exists x^I \in G$ *a.î* $x * x^I = x^I * x = e$ **. (Elemente simetrizabile)**

Definiţie

Fie $(G; *)$ şi $(G'; \circ)$ două grupuri. O funcţie $f : G \to G'$ se numeşte **morfism de grupuri** dacă verifică proprietatea $f(x * y) = f(x) \circ f(y),\ \forall x, y \in G$; Un morfism $f : G \to G$ se numeşte endomorfism al lui G;

Definiţie

Fie $(G;*)$ şi $(G';\circ)$ două grupuri. Un morfism $f:G\to G'$ se numeşte **izomorfism de grupuri** dacă f este o funcţie bijectivă; Un izomorfism $f:G\to G$ se numeşte **automorfism** al lui G;

Definiţie

Fie M$\neq 0$ o mulţime înzestrată cu două legi de compoziţie MxM→M, $(x,y)\to x*y$, $(x,y)\to x\circ y$.

Operaţia "$\circ$" **este distributivă la stânga faţă de operaţia** "$*$" $\Leftrightarrow x\circ(y*z)=(x\circ y)*(x\circ z),\ \forall x,y,z\in M$;

Operaţia "$\circ$" **este distributivă la dreapta faţă de operaţia** "$*$" $\Leftrightarrow (y*z)\circ x=(y\circ x)*(z\circ x),\ \forall x,y,z\in M$

Spunem că legea de compoziţie $(x,y)\to x\circ y$ **este distributivă faţă de legea** $(x,y)\to x*y$ dacă este **distributivă şi la stânga şi la dreapta.**

Definiţie

O mulţime nevidă I înzestrată cu două legi de compoziţie "$*$" şi "$\circ$" se numeşte **inel** dacă sunt îndeplinite următoarele condiţii:

1. $(I;*)$ **este grup abelian;**

2. a doua lege este asociativă $(x\circ y)\circ z=x\circ(y\circ z),\forall x,y,z\in I.$

3. a doua lege este distributivă faţă de prima $x\circ(y*z)=(x\circ y)*(x\circ z),\ \forall x,y,z\in I$; $(y*z)\circ x=(y\circ x)*(z\circ x),\ \forall x,y,z\in I$.

Definiţie

Fie $(I,*,\circ)$ un inel . Un element $a\in I,\ a\neq 0$ se numeşte **divizor al lui „0" la stânga** (respectiv la dreapta dacă $\exists b\in I,\ b\neq 0$ astfel încât $a\bullet b=0$ ($b\bullet a=0$). Un element „ a" care este în acelaşi timp divizor al lui „ 0 " la stânga şi la dreapta se numeşte **divizor al lui „ 0 ".**

Definiţie

Un inel $(I,*,\circ)$ **are divizori ai lui „ 0 „** $\Leftrightarrow\exists a,b\in I,\ a,b\neq 0$ astfel încât $a\circ b=0$, $b\circ a=0$.

Un inel $(I,*,\circ)$ **nu are divizori ai lui „ 0 „** $\Leftrightarrow a\circ b=0\Rightarrow a=0$ *sau* $b=0$ sau $\forall a,b\in I, a\neq 0$, $b\neq 0\Rightarrow a\circ b\neq 0$;

Definiţie

Un inel $(I,*,\circ)$ unitar, nenul fără divizori ai lui „ 0 „ se numeşte **inel integru**. Dacă în plus, inelul este şi comutativ, va fi numit **domeniu de integritate**.

Definiţie

Fie $(I,*,\circ)$ un inel unitar. Un element $a\in(I,*,\circ)$ se numeşte **inversabil** dacă există $b\in(I,*,\circ)$ astfel încât $a\circ b=b\circ a=e_\circ$ unde $e_\circ$ este elementul neutru de la a doua lege.

Notăm cu $U(I)=\{a\in I\,|\,a-inversabil\}$ **- grupul elementelor inversabile ale inelului** $(I,*,\circ)$;

Definiţie

Fie $(K,*,\circ)$ un inel unitar cu $1\neq 0$. K se numeşte **corp** dacă orice element diferit de elementul zero " 0 " al inelului este inversabil. Dacă în plus, a doua lege este comutativă, atunci K este **corp comutativ**.

Definiţie

Fie n $\in \mathbb{N}^*$. Prin **rest modulo n a lui a** $\in \mathbb{Z}$ se înţelege restul împărţirii lui a la n(şi se notează cu a mod n). a mod n $\in \{0,1,2,3,...n-1\} = R_n$ - mulţimea resturilor lui a la împărţirea cu n.

Notăm cu $\mathbb{Z}_n = \{\hat{0};\hat{1};2;....;n-1\}$ **- mulţimea claselor de resturi modulo n;**

Aşadar, $a \in k \Leftrightarrow a \bmod n = k$; $\mathbb{Z} = \hat{0} \cup \hat{1} \cup 2 \cup .... \cup n-1$**;**

Teoremă. Fie $n \in \mathbb{N}$**. Atunci** $-a = n-a,\ \forall a \in \mathbb{Z}_n$**;**

$a \in \mathbb{Z}_n$ **este inversabil dacă şi numai dacă a şi n sunt prime între ele,** $(a,n)=1$**;**

Numărul elementelor inversabile ale inelului $(\mathbb{Z}_n,+,\bullet)$ este dat de formula

$|U(\mathbb{Z}_n)| = \varphi(n) = n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdot....\cdot\left(1-\frac{1}{p_k}\right)$ unde $n = p_1^{a_1}\cdot p_2^{a_2}\cdot....\cdot p_k^{a_k}$ reprezintă descompunerea în factori primi ai numărului natural **n**;

15. POLINOAME

Definiţie (Forma algebrică a unui polinom)

Se numeşte **polinom în nedeterminata X cu coeficienţi în corpul K** o expresie algebrică de forma $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + ... + a_nX^n$, unde $n \in \mathbb{N}$ iar $a_0, a_1, a_2, a_3, ...a_n \in K$ se numesc coeficienţii polinomului, a_0 se numeşte termen liber iar a_n se numeşte coeficientul dominant.

Notăm cu K**[X]**, **mulţimea polinoamelor cu coeficienţi în corpul K;**

Dacă $f \in K[X]$, atunci $f = \sum_{i=0}^{n} a_iX^i, a_n \neq 0$ este scrierea sub formă restrânsă a polinomului f;

Definiţie (Gradul unui polinom)

Fie $f = \sum_{i=0}^{n} a_iX^i$ un polinom nenul din K[X]. Numărul natural **n** se numeşte **gradul polinomului f** şi scriem grad (f) = n, dacă $a_n \neq 0$ *si* $a_i = 0, \forall i \rangle n.$

Gradul polinomului nul (f=0), este $-\infty$, cu convenţiile, $-\infty \langle n,\ -\infty + n = -\infty$.

Dacă $a_n = 1$**,** atunci f se numeşte polinom unitar.

Teoremă: Fie K un corp şi $f, g \in K[X]$**. Atunci:**

a) $grad(f+g) \leq \max(grad(f), grad(g))$**;** **b)** $grad(f \cdot g) = grad(f) + grad(g)$**;**

Definiţie (Polinoame egale)

Două polinoame $f, g \in K[X]$, $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + ... + a_nX^n$ şi $g = b_0 + b_1X + b_2X^2 + b_3X^3 + ... + b_nX^n$ **se numesc egale** şi scriem $f = g$ dacă şi numai dacă au acelaşi grad, n = m şi coeficienţii termenilor de acelaşi grad, sunt egali, $a_i = b_i, \forall i = \overline{0,n}.$

Definiţie (Polinom constant. Polinom nul)

Un polinom, $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + ... + a_nX^n \quad \in K[X]$ **se numeşte constant** dacă toţi coeficienţii polinomului cu excepţia termenului liber , sunt nuli.
f se numeşte polinom nul dacă şi numai dacă toţi coeficienţii polinomului sunt nuli, $a_i = 0, \ \forall i \in \overline{0,n}$ **.**

Definiţie

Fie $f \in K[X]$, $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + ... + a_nX^n$. Pentru $x \in K$, numărul $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ... + a_nx^n$ se numeşte **valoarea numerică a polinomului f în x**. Dacă **f(x)=0** atunci **x se numeşte rădăcină a polinomului** $f \in K[X]$ şi spunem că x anulează pe f.

Definiţie

Fie $f \in K[X]$ un polinom arbitrar ales. Se numeşte **funcţie polinomială asociată polinomului f**, funcţia $\tilde{f} : K \to K$, definită prin $\tilde{f}(x) = f(x), \ \forall x \in K.$

Teoremă: Dacă f este un polinom cu coeficienţi raţionali şi $a, b \in \mathbb{Q}, b \rangle 0$ **astfel încât** $\sqrt{b} \notin \mathbb{Q}$**, atunci, există** $A, B \in \mathbb{Q}$ **astfel încât** $f(a + \sqrt{b}) = A + B\sqrt{b}$ **respectiv,** $f(a - \sqrt{b}) = A - B\sqrt{b}$ **.**

Definiţie(Adunarea şi înmulţirea polinoamelor)

Fie K un corp comutativ şi $f, g \in K[X], f = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_1X + a_0$, grad(f)=n, $g = b_mX^m + b_{m-1}X^{m-1} + ... + b_1X + b_0$, grad(g)=m, $n \geq m$.
Atunci, pe mulţimea K[X] definim operaţiile:
$f + g = a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)X + ... + a_{m+1}X^{m+1} + ... + a_nX^n$
$f \cdot g = a_0 \cdot b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)X + ... + (a_0b_k + a_1b_{k-1} + ... + a_kb_0)X^k + ... + a_nb_mX^{n+m}$.

Definiţie(Ridicarea la putere a unui polinom)

Fie $f \in \mathbb{R}[X]$ şi $n \in \mathbb{N}$. Atunci, $f^n = \underbrace{f \bullet f \bullet ..... \bullet f}_{n \text{ de } f}$, iar $f^0 = 1, \ f \neq 0.$

Teorema împărţirii cu rest: Fie K un corp comutativ şi $f, g \in K[X], \ g \neq 0$ **. Atunci există şi sunt unice, polinoamele q şi r din K[X], astfel încât** $f = g \cdot q + r$ **cu** $grad(r) \langle grad(g)$ **.**
(Polinomul **f** se mai numeşte deîmpărţit, **g** se numeşte împărţitor, **q** se numeşte cât iar **r** se numeşte rest.)

Teorema restului: Dacă $f \in K[X], f \neq 0$ **şi** $a \in K$ **, atunci restul împărţirii polinomului f prin binomul X-a este egal cu f(a).**

Definiţie

Fie $f, g \in K[X]$. Spunem că **polinomul g divide polinomul f** şi scriem $g | f$ (sau polinomul **f este divizibil prin polinomul g** şi scriem $f \vdots g$), dacă există polinomul $h \in K[X]$ astfel încât $f = g \cdot h$.

Teorema lui Bézout: Fie K un corp comutativ şi f un polinom din K[X]. Elementul $a \in K$ **este o rădăcină a lui f dacă şi numai dacă X-a divide pe f.**

În concluzie, **f este divizibil cu binomul** $g = X - a \Leftrightarrow f(a) = 0$ **.**

Teoremă: Fie K un corp comutativ şi f un polinom din K[X]. Polinomul f este divizibil cu polinomul $g=(X-a)(X-b)\Leftrightarrow f(a)=0$ **şi** $f(b)=0$**.**

Observaţie: Dacă polinomul g este trinomul de forma $g=aX^2+bX+c$ **care se poate scrie de forma** $g=(X-x_1)(X-x_2)$ **atunci, f este divizibil cu g** $\Leftrightarrow f(x_1)=0, f(x_2)=0$**.**

Definiţie(Rădăcini multiple)

Fie $f\in K[X]$ un polinom nenul şi $a\in K$ o rădăcină a lui f. Un număr natural şi nenul **k**, se numeşte ordin de multiplicitate al rădăcinii **a** dacă $(X-a)^k \mid f$ şi $(X-a)^{k+1} \nmid f$. În aceste condiţii, **a se numeşte rădăcină multiplă de ordinul k al lui f**.

Pentru k = 1, **a** se numeşte rădăcină ***simplă*****;** Pentru k = 2, a se numeşte ***rădăcină dublă***, iar

Teoremă: Fie $f\in K[X]$**, K unul din corpurile** $\mathbb{Q},\mathbb{R}$ *sau* $\mathbb{C}$ **şi** $a\in K$**. Atunci, a este rădăcină multiplă de ordinul k a lui f dacă şi numai dacă** $f(a)=f'(a)=.....=f^{(k-1)}(a)=0$ **şi** $f^{(k)}(a)\neq 0.$

Teoremă: Fie $f,g\in K[X]$**. Polinomul f este divizibil prin polinomul g dacă şi numai dacă orice rădăcină a polinomului g este rădăcină şi a polinomului f având acelaşi ordin de multiplicitate.**

Definiţie

Fie $f,g\in K[X]$. Un polinom $d\in K[X]$ este un **cel mai mare divizor comun al polinoamelor f şi g** şi scriem **c.m.m.d.c(f,g)** dacă sunt verificate condiţiile:
a) $d\mid f$ şi $d\mid g$; b) dacă există $d'\in K[X]$ astfel încât $d'\mid f$ şi $d'\mid g$, atunci $d'\mid d$.

Pentru un **c.m.m.d.c(f,g)** se foloseşte şi notaţia **(f,g)** şi dacă există **este unic.**

Definiţie

Două polinoame f şi g din K[X] se numesc **prime între ele**(relativ prime) dacă cel mai mare divizor comun al lor este 1.

Definiţie

Fie $f,g\in K[X]$. Un polinom $m\in K[X]$ este un **cel mai mic multiplu comun al polinoamelor f şi g**, şi scriem **c.m.m.m.c(f,g)** dacă sunt verificate condiţiile:

a) $f\mid m \; si \; g\mid m$; b) $\forall m'\in K[X]$ astfel încât $f\mid m' \; si \; g\mid m'$, rezultă $m\mid m'$.

Pentru cel mai mic multiplu comun al polinoamelor f şi g se mai foloseşte notaţia **[f,g].**

Teoremă: Fie $f,g\in K[X]$ **astfel încât** $f\neq 0$ **sau** $g\neq 0$**. Dacă** $d=(f,g)$ **este un cel mai mare divizor comun al lor, atunci** $[f,g]\cdot(f,g)=f\cdot g$**.**

Definiție

Fie K un corp comutativ şi $f \in K[X]$ un polinom în nedeterminata X cu coeficienți în K. Se numește **ecuație polinomială** sau algebrică, orice ecuație de forma $f(x)=0$.

Numărul $a \in \mathbb{R}$ se numește **rădăcină a polinomului f** dacă și numai dacă $f(a)=0$, altfel spus numărul **„ a ”** este soluție a ecuației asociate polinomului.

Definiție

Fie K un corp comutativ şi $f \in K[X]$ un polinom astfel încât $grad(f)=n\geq 1$. Spunem că **f** este un **polinom reductibil peste K** dacă se scrie ca produsul unor polinoame de grad inferior cu coeficienţi în K. În caz contrar f se numeşte **polinom ireductibil peste K.**

Teorema fundamentală a algebrei: Orice polinom cu coeficienţi complecşi de grad mai mare sau egal cu 1 are cel puţin o rădăcină complexă.

Teoremă: Fie K un corp şi f un polinom nenul din K[X]. Dacă $x_1, x_2, x_3, ..., x_n \in K$ **sunt rădăcini distincte ale lui f, având ordinele de multiplicitate respectiv** $k_1, k_2, k_3, ..., k_n$**, atunci f se poate scrie sub forma** $f=(X-x_1)^{k_1}(X-x_2)^{k_2}(X-x_3)^{k_3}.....(X-x_n)^{k_n}\cdot g$**, unde** $g \in K[X]$**.**

Teoremă : Orice polinom $f \in K[X]$ **cu** $grad(f)\geq 1$ **se descompune în mod unic într-un produs finit de polinoame ireductibile peste K de forma** $f=f_1\cdot f_2\cdot ...\cdot f_n$**.**

Teoremă: Singurele polinoame ireductibile din $\mathbb{C}[X]$ **sunt cele de gradul întâi.**

Teoremă : Dacă un polinom are rădăcini în corpul K atunci f este reductibil în K[X].

Reciproc nu este adevărat.

Relaţiile lui Viète: $x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a}$, $x_1\cdot x_2+x_2\cdot x_3+x_3\cdot x_1=\frac{c}{a}$, $x_1\cdot x_2\cdot x_3=-\frac{d}{a}$;

f se mai poate scrie şi sub forma $f=a(X^3-S_1X^2+S_2X-S_3), a\in K\setminus\{0\}$, unde

$S_1=x_1+x_2+x_3$**,** $S_2=x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3$**,** $S_3=x_1\cdot x_2\cdot x_3$

În exerciţii sunt utile şi formulele:

1. $\boxed{x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)}$;

2. $\boxed{x_1^3+x_2^3+x_3^3=(x_1+x_2+x_3)^3-3(x_1+x_2+x_3)(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)+3x_1x_2x_3}$ sau

3. $\boxed{x_1^3+x_2^3+x_3^3=(x_1+x_2+x_3)(x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_1x_2-x_2x_3-x_1x_3)+3x_1x_2x_3}$

16. PRIMITIVE

1 $\int cdx = c \cdot x + C, \quad c \in R$

2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

3. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$

4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

5. $\int e^x dx = e^x + C$

6. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$

7. $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$

8. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

9. $\int \cos x dx = \sin x + C$

10. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -ctgx + C$

11. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tgx + C$

12. $\int tgx dx = -\ln|\cos x| + C$

13. $\int ctgx dx = \ln|\sin x| + C$

14. $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C$

15. $\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c} dx = \ln|ax^2+bx+c| + C$

16. $\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C$

17. $\int \frac{1}{x^2-a^2} dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

18.

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c} dx = \begin{cases} \int \frac{1}{a[(x+\frac{b}{2a})^2 - (\frac{\sqrt{\Delta}}{2a})^2]} dx, & \Delta\rangle 0 \\ \int \frac{1}{a[(x+\frac{b}{2a})^2 + (\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a})^2]} dx, & \Delta\langle 0 \end{cases}$$

19. $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} dx = \int \frac{m(2ax+b)+n}{ax^2+bx+c} dx = m \cdot \ln|ax^2+bx+c| + n \cdot \int \frac{1}{ax^2+bx+c} dx$

20. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} dx = \ln(x + \sqrt{a^2+x^2}) + C$

21. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2-a^2}\right| + C$

22. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin\frac{x}{a} + C$

23. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} dx = \sqrt{x^2+a^2} + C$

24. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}} dx = \sqrt{x^2-a^2} + C$

25. $\int \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = -\sqrt{a^2-x^2} + C$

26. $\int \sqrt{x^2+a^2} dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2+a^2}\right| + C$

27. $\int \sqrt{x^2-a^2} dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2-a^2}\right| + C$

28. $\int \sqrt{a^2-x^2} dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$

29. $\int \frac{1}{(ax+b)^n} dx = -\frac{1}{(n-1)(ax+b)^{n-1}} \cdot \frac{1}{a} + C$

30.

$$\int \frac{1}{(x^2+a^2)^2} dx = \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2+a^2-x^2}{(x^2+a^2)^2} + C = \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{x^2+a^2} dx - \frac{1}{a^2}\int x \cdot \left(\frac{-1}{2(x^2+a^2)}\right)' dx$$

Definiție:

Fie f, F: I → R. Spunem că F este o primitivă a lui f dacă:
a) F este derivabilă pe I; b) F'(x) =f(x), $\forall x \in I$ **.**

Definiție:

Fie f, F: I → R, unde F este o primitivă a lui f . Spunem că:

a) Orice primitivă F a lui f este crescătoare pe I dacă și numai dacă $F^I(x) \geq 0, \ \forall x \in I$ **;**

b) Orice primitivă F a lui f este descrescătoare pe I dacă și numai dacă $F^I(x) \leq 0, \ \forall x \in I$ **;**

c) Orice primitivă F a lui f este convexă pe I dacă și numai dacă $F^{II}(x) \geq 0, \ \forall x \in I$ **;**

d) Orice primitivă F a lui f este concavă pe I dacă și numai dacă $F^{II}(x) \leq 0, \ \forall x \in I$ **;**

Teoremă: Orice funcţie continuă definită pe un interval admite primitive pe acel interval.

Teoremă : Fie f : I → R. Dacă $F_1, F_2 : I \to R$ ***sunt două primitive ale funcţiei f, atunci există o constantă c*** $\in$ ***R astfel încât*** $F_1(x) = F_2(x) + c, \forall x \in I$.

Definiție:

Fie f: I $\to \mathbb{R}$ o funcţie care admite primitive. Mulţimea tuturor primitivelor lui f se numeşte

integrala nedefinită a funcţiei f şi se notează prin simbolul $\int f(x)$ dx. Operaţia de calculare a

primitivelor unei funcţii(care admite primitive) se numeşte **integrare**.

$\int f(x)\,\mathrm{dx} = \{F \in F(I) / F \quad primitivă \quad a \quad lui \quad f\}$.

Teoremă: Dacă f,g:I→ $\mathbb{R}$ **sunt funcţii care admit primitive şi** $\alpha \in \mathbb{R}$**, α ≠0, atunci funcţiile f+g, αf admit de asemenea primitive şi au loc relaţiile:∫(f+g) =∫f +∫g, ∫αf=α∫f, α≠0, ∫f =∫f +C**

De asemenea, $\int f^I(x)dx = f(x) + C$ **,** $\left(\int f(x)dx\right)^I = f(x) + C$ **.**

17. Proprietăţi ale integralei definite

Formula Leibniz – Newton

Definiţie: Fie $f:[a;b]\to\mathbb{R},\ a<b$**, f continuă şi** $F:[a;b]\to\mathbb{R}$ **o primitivă a sa.**

Numărul $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$ **se numeşte integrala definită a funcţiei f.**

Proprietatea 1. (Proprietatea de liniaritate a integralei)

Fie $f,g:[a;b]\to\mathbb{R}$**, funcţii continue şi** $m,n\in\mathbb{R}$**. Atunci are loc relaţia:**

$\int_a^b \big(mf(x)+ng(x)\big)dx = m\int_a^b f(x)dx + n\int_a^b g(x)dx$**.**

Proprietatea 2. (Proprietatea funcţiilor continue pare respectiv impare)

Fie $f:[-a;a]\to\mathbb{R}$ **o funcţie continuă. Atunci** $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 0, & f \text{ impara} \\ 2\int_0^a f(x)dx, & f \text{ para} \end{cases}$

Proprietatea 3. (Proprietatea de aditivitate a integralei)

Fie $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ **o funcţie continuă şi** $c\in(a;b)$**. Atunci**

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$**.**

Proprietatea 4. (Proprietatea funcţiilor continue pozitive**)**

Fie $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ **o funcţie continuă şi** $f(x)\ge 0,\ \forall x\in[a;b]$**. Atunci** $\int_a^b f(x)dx \ge 0$

Proprietatea 5. (Proprietatea de monotonie a integralei)

Fie $f,g:[a;b]\to\mathbb{R}$**, funcţii continue şi** $f(x)\le g(x),\ \forall x\in[a;b]$**. Atunci**

$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$**.**

Proprietatea 6. (Proprietatea de mărginire a integralei)

Fie $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ **o funcţie continuă şi** $m\le f(x)\le M,\ \forall x\in[a;b]$**.**

Atunci $m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$**.**

Proprietatea 7. (Proprietatea modulului integralei)

Fie $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ **o funcţie continuă. Atunci** $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$**.**

Metoda integrării prin părți : Fie f,g:R→R sunt funcţii derivabile cu derivatele continue, atunci funcţiile fg, f 'g, fg ' admit primitive şi are loc relaţia:
$\int f^1(x) \bullet g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x) \bullet g^1(x)dx$

Integrarea funcțiilor rationale când $grad(f) \geq grad(g)$

Dacă grad f ≥ grad g, atunci se efectuează împărţirea lui f la g $\Rightarrow$ f=gq+r, 0 ≤ grad r < grad g şi deci $R(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}$. Pentru $\frac{r(x)}{g(x)}$ se face scrierea ca sumă de fracţii raționale simple.

Aria subgraficului unei funcții

Definiţie. Fie $f:[a,b] \to [0,\infty)$ o funcţie continuă. Mulţimea $\Gamma_f = \{(x,y) | a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$
se numeşte subgraficul lui f şi reprezintă mulţimea punctelor din plan cuprinse între graficul lui f, axa Ox şi dreptele verticale x = a, x = b.

Volumul unui corp de rotație

Dacă $f:[a,b] \to [0,\infty)$ **este o funcţie continuă atunci volumul corpului obţinut prin rotirea graficului funcţiei f în jurul axei OX (numit corp de rotaţie) este:** $Vol(C_f) = \pi \int_a^b f^2(x)dx$**.**

Bibliografie:

1. Adrian Stan. Sinteze matematice. Editura Rafet. Rm. Sărat. 2007.
2. Adrian Stan, colab. Matematică. Ghid de pregătire M2. Bacalaureat 2010. Editura Campion. Bucureşti. 2010.
3. Adrian Stan. Polinoame. Proprietăţi aritmetice. Editura EditGraph. Buzău. 2010.
4. Adrian Stan. Algebra. Clasa a XI-a . Editura EditGraph. Buzău. 2010.
5. Adrian Stan Matematică clasele IX-XII. Editura EditGraph. Buzău. 2015.
6. Adrian Stan. Matematică. Fişe de lucru clasa a XII-a . Editura EditGraph. Buzău. 2017
7. Aurelia Gomolea. Matematică. Manual pentru clasa a XI-a. Editura Teora. Bucureşti. 2002.
8. Becheanu M., Grigore Gh.,Ianuş S.,Ichim I. Probleme de algebră, analiză matematică şi geometrie. Editura Cartea Românească. 1991.
9. Bordieanu Nicolae, Bordieanu Mona. Culegere de exerciţii şi probleme de algebră, clasele IX- XII. Editura Conexiuni. Bacău. 2001.
10. Burtea Marius, Burtea Georgeta. Manual de matematică clasa a IX-a. Editura Carminis. Piteşti. 2004.
11. Burtea Marius, Burtea Georgeta. Culegere de exerciţii şi probleme Matematică M2. Editura Campion. Bucureşti. 2009.
12. Burtea Marius, Burtea Georgeta. Matematică , manual pentru clasa a XI-a. Editura Carminis. Piteşti. 2008.
13. Cohal Traian, Iurea Gheorghe. Probleme de matematică pentru clasa a XI-a. Editura Taida. Iaşi. 2006.
14. Coşniţă C., Turtoiu F. Probleme de algebră. Editura Tehnică . Bucureşti. 1989.
15. Dan Brânzei. Matematică. Manual pentru clasa a IX-a. Editura Sigma. Bucureşti. 1999.
16. Dumitru Săvulescu. Matematică. Manual pentru clasa a XII-a . editura. Art. 2007
17. GangaM., Matematică, manual pentru clasa a XI-a. Editura Mathpress. Ploieşti. 2002.
18. Gomolea Aurelia şi colaboratori. Matematică, manual pentru clasa a XI-a. Editura Teora Educaţional. Bucureşti. 2003.
19. Ion Necşuleu. Matematică. Manual pentru clasa a XI-a. Editura Fair Partners. Bucureşti. 2006
20. Lupaş Luciana, Lupaş Alexandru. Probleme de algebră. Editura Gil. Zalău. 2002.
21. Marian Andronache. Matematică pentru clasa IX-a. Editura Art.Bucureşti. 2005.
22. Mircea Ganga. Matematică. Manual pentru clasa a X-a. Editura MathPress. 2005.
23. Mirică Ştefan şi colaboratori, Matematică, manual pentru clasa a XI-a. Editura Aramis. Bucureşti. 2009.
24. Mihai Postolache. Matematică pentru clasa a XII-a. Editura Fair Partners. Bucureşti. 2007.
25. Năstăsescu C., Niţă. C, Brandiburu M., Joiţa D. Exerciţii şi probleme de algebră. Editura Didactică şi Pedagogică. Bucureşti. 1983.
26. Ştefan Mirică. Matematică. Manual pentru clasa a XI-a . Editura Aramis. Bucureşti. 2002.
27. Fără autor. Ghid metodic. Bacalaureat 2009. M2. Editura Gil . Zalău. 2009.