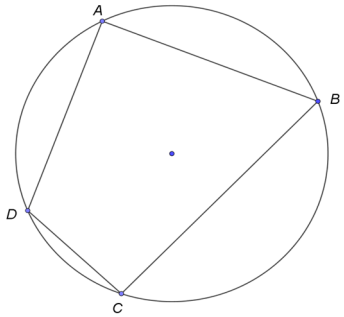
PATRULATERE INSCRIPTIBILE, PATRULATERE CIRCUMSCRIPTIBILE

Definiție: Un patrulater se numeşte inscriptibil (înscris într-un cerc) dacă vârfurile sale aparţin unui cerc. În acest caz cercul se numeşte circumscris patrulaterului.



Observație: Dacă punctele A, B, C, D sunt vârfurile unui patrulater inscriptibil se spune că punctele A, B, C, D sunt conciclice.

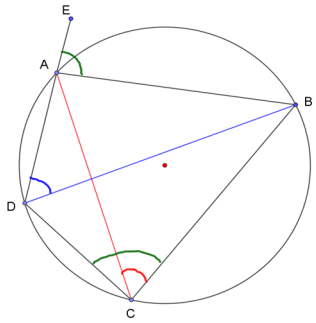
Observație: Admitem intuitiv că dacă un poligon este înscris într-un cerc atunci el este convex.

Condiții necesare și suficiente pentru ca un patrulater să fie inscriptibil

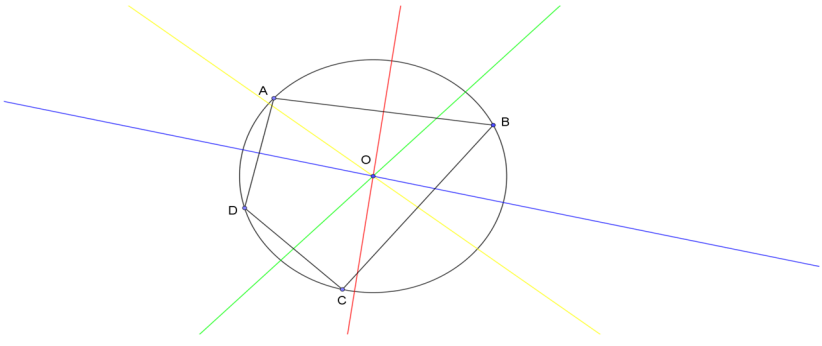
Teoremă: Un patrulater este inscriptibil dacă şi numai dacă unghiurile opuse sunt suplementare.

Teoremă: Un patrulater este inscriptibil dacă şi numai dacă un unghi interior este congruent cu unghiul exterior opus.

Teoremă: Un patrulater este inscriptibil dacă unghiul format de o diagonală cu una dintre laturi este congruent cu unghiul format de cealaltă diagonală cu latura opusă.



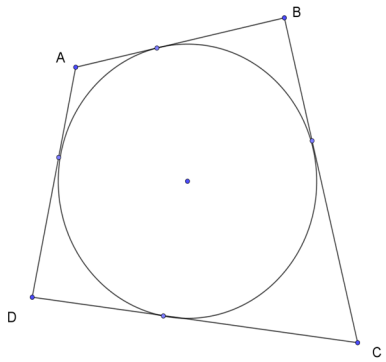
Teoremă: Un patrulater este inscriptibil dacă și numai dacă mediatoarele laturilor sale sunt concurente.



Teoremă: (Teorema lui Ptolemeu) Un patrulater este inscriptibil dacă şi numai dacă produsul diagonalelor este egal cu suma produselor laturilor opuse.($AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$)

Dreptunghiul, pătratul și trapezul isoscel sunt patrulatere inscriptibile.

Definiție: Un patrulater care are cele patru laturi tangente unui cerc se numește patrulater circumscriptibil.

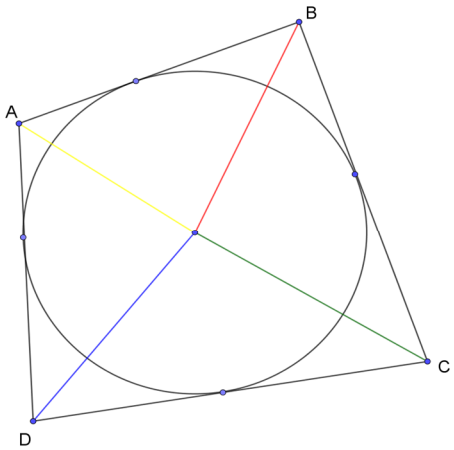


Observație: Admitem intuitiv că dacă un poligon este circumscris unui cerc atunci el este convex.

Condiții necesare și suficiente pentru ca un patrulater să fie circumscriptibil

Teoremă: Un patrulater este circumscriptibil dacă și numai dacă bisectoarele unghiurilor sale sunt concurente.

Teoremă:(Teorema lui Pitot) Un patrulater este circumscriptibil dacă și numai dacă sumele lungimilor laturilor opuse sunt egale ($AB + CD = AD + BC$).



Observație: Dacă un trapez isoscel este circumscriptibil atunci : a) punctele de contact cu cercul ale bazelor și centrul cercului sunt colineare b) lungimea diametrului cercului este media geometrică a lungimii bazelor c) aria trapezului este produsul dintre media aritmetică şi media geometrică a bazelor.

Observație: Dacă un trapez dreptunghic este circumscriptibil atunci: a) lungimea diametrului cercului este media armonică a lungimii bazelor b) aria trapezului este produsul lungimilor bazelor.

Probleme:

1. Fie un cerc de centru O si [AB] un diametru al sau. Pe tangenta la cerc în A, de o parte și de alta, se iau punctele D și C. Segmentele [BC] și [DB] taie cercul respectiv in E si F. Arătați ca patrulaterul DFEC este inscriptibil.

2. Diametrul [AB] al unui cerc este perpendicular pe o dreapta d, exterioară cercului. Dacă M este un punct oarecare al cercului, se notează cu P și Q punctele de intersecție ale coardelor [AM] și respectiv [BM] cu dreapta d. Demonstrați că:

a) punctele B, N, P sunt coliniare, unde N este intersecția lui AQ cu cercul;

b) patrulaterul PQMN este inscriptibil.

3. În triunghiul ABC, înălțimile BB′ (B′∈ AC) și CC′ (C′ ∈ AB) sunt concurente în H. Arătați că patrulaterele AB′HC′ și BCB′C′ sunt inscriptibile.

Supliment G.M.B.

4. a) Arătați că orice trapez isoscel este un patrulater inscriptibil

b) Se consideră triunghiul ABC. Punctele A′, B′ și C′ sunt mijloacele laturilor BC, AC; respectiv AB, iar punctul A_1 este piciorul ănălțimii din A a triunghiului ($A_1 \in BC$). Arătați că patrulaterul $A'B'C'A_1$ este inscriptibil.

Supliment G.M.B.

5. Se consideră triunghiul ABC. Punctele A′, B′ și C′ sunt mijloacele laturilor BC, AC, respectiv AB, iar A_2 este mijlocul segmentului AH, H este ortocentrul triunghiului ABC. Arătați că patrulaterul $A_2C'A'B'$ este incriptibil.

Supliment G.M.B.

6. Se consideră triunghiul oarecare ABC. În exteriorul acestuia se construiesc triunghiurile asemenea, $\Delta ABM \sim \Delta ACN$. Dreapta AM intersectează cercul circumscris triunghiului ACN în punctul E, iar dreapta AN intersectează cercul circumscris triunghiului AMB în punctul D. Demonstrați că punctele D, M, E și N sunt conciclice.

G.M.B.

Bibliografie:

1. Artur Bălăucă – OLIMPIADE, CONCURSURI ŞI CENTRE DE EXCELENŢĂ – clasa a VII-a, Editura TAIDA, Iaşi, 2016

2. Dan Brânzei (coordonator) – Matematică– olimpiade şi concursuri şcolare, Editura PARALELA 45, Piteşti, 2010

3. Maranda Linț ș.a. – Matematică de excelență – clasa a VII- a, Editura PARALELA 45, Piteşti, 2013

4. Colecţia GAZETA MATEMATICĂ

5. Colecția R.M.T.

6. www.olimpiade.ro

7. www.mategl.com

Prof. Gheorghe Dârstaru