Prof. IARCA DANIEL
COLEGIUL NATIONAL PEDAGOGIC „SPIRU HARET”

BUZAU

Probleme de coliniaritate şi concurenţă.

Problemele a căror concluzie solicită demonstrarea apartenenţei unor puncte la o aceeaşi dreaptă le vom numi probleme de coliniaritate

În continuare enumerăm câteva dintre procedeele cele mai des întâlnite pentru soluţionarea problemelor de coliniaritate .

a. **Demonstrarea coliniarităţii cu ajutorul unghiului alungit (unghiuri adiacente suplementare).**

   Dacă punctele A şi B sunt situate de o parte şi de alta a dreptei CD şi m(<ACD)+m(<DCB)=180, atunci punctele A, C, B sunt coliniare.

b. **Demonstrarea coliniarităţii folosind reciproca teoremei unghiurilor opuse la vârf.**

   Dacă punctul B este situat pe dreapta EF, iar punctele A şi C sunt situate de o parte şi de alta a dreptei EF şi m(<ABF)=m(<CBE), atunci punctele A, B, C sunt coliniare.

c. **Demonstrarea coliniarităţii prin identificarea unei drepte ce conţine punctele respective.**

d. **Demonstrarea coliniarităţii folosind postulatul lui Euclid.**

   Dacă dreptele AB şi BC sunt paralele cu o dreapta d, atunci în baza postulatului lui Euclid, A, B, C sunt coliniare.

e. **Demonstrarea coliniarităţii folosind axioma de construcţie a unghiului.**

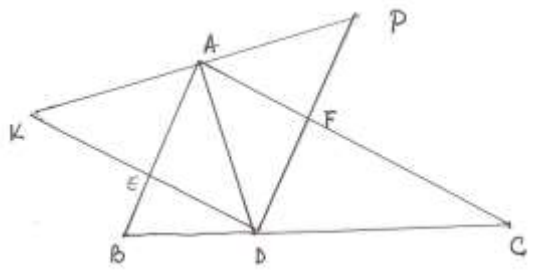
   Dacă B şi C sunt în acelaşi semiplan determinat de dreapta AA’ şi m(<A’AB)=m(<A’AC) atunci A, B, C sunt coliniare.

f. **Demonstrarea coliniarităţii punctelor A, B, C demonstrând că AB+BC=AC.**

Probleme propuse

a. **Demonstrarea coliniarităţii cu ajutorul unghiului alungit (unghiuri adiacente suplementare)**

   P1. Pe ipotenuza (BC) a triunghiului dreptunghic ABC se consideră un punct arbitrar D. Fie K şi P simetricele lui D faţă de AB respectiv AC. Să se arate că punctele K, A, P sunt coliniare.



Soluţie:

AE - mediatoarea [KD] $\Rightarrow (KA) \equiv (KD) \Rightarrow \Delta$ KAD-isoscel $\Rightarrow$

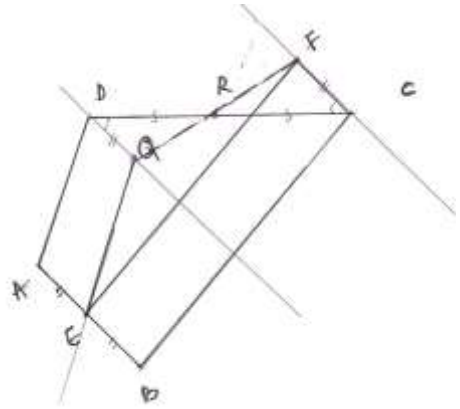
$\angle KAE \equiv \angle DAE$

AF-mediatoarea $[PD] \Rightarrow (PA) \equiv (PD) \Rightarrow \Delta$ PAD-isoscel $\Rightarrow \angle PAF \equiv \angle DAF$

$m(\angle KAP) = 2 \cdot m(\angle BAD) + 2 \cdot m(\angle DAF) = 2 \cdot m(\angle BAC) = 180^0 \Rightarrow$ K,A,P coliniare.

b. **Demonstrarea coliniarităţii folosind reciproca teoremei unghiurilor opuse la vârf.**

P2. Se consideră patrulaterul ABCD cu E mijlocul lui [AB] şi R mijlocul [CD]. Prin E se duce EF paralelă la AD, iar prin vârfurile C şi D se duce câte o paralelă la AB. Obţinem paralelogramele BCFE şi AEQD. Să se arate că vârfurile F şi Q ale acestor paralelograme sunt coliniare cu R.



Soluţie: AEQD-paralelogram $\Rightarrow AE = DQ$ şi $AE // DQ$

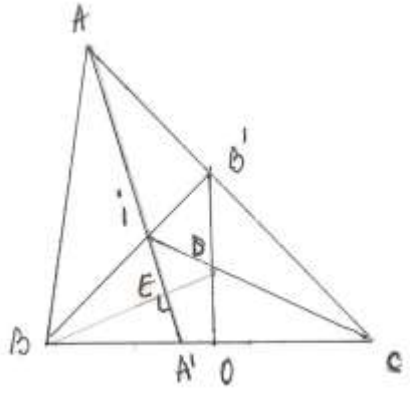
BCEF-paralelogram $\Rightarrow BE = FC$ şi $BE // FC$

$AE = BE \Rightarrow DQ = FC$ şi $DQ // FC \Rightarrow \angle QDC \equiv \angle FCR$

Se arată că $\Delta DRQ \equiv \Delta CRF$ cf cazului L.U.L $\Rightarrow \angle DRQ \equiv \angle FRC$.Dar D, R, C -coliniare $\Rightarrow$ Q, R, F-coliniare

c. **Demonstrarea coliniarităţii prin identificarea unei drepte ce conţine punctele respective.**

P3. În triunghiul ABC cu m(<B)=2m(<C) notăm cu I intersecţia bisectoarelor [BB' şi [AA', B' aparţine (AC) şi A' aparţine (BC). Perpendiculara din B pe AA' intersectează perpendiculara din B' pe BC în D. Să se demonstreze că punctele I, D, C sunt coliniare.



Soluţie: $\left[BB' - bis\angle ABC \Rightarrow m(\angle B'BC\ ) = m(\angle ACB \Rightarrow \Delta BB'C - isoscel\right)$

$m(\angle C) = \alpha$ şi $m(\angle B) = 2\alpha \Rightarrow m(\angle A) = 180^0 - 3\alpha \Rightarrow m(\angle BAA') = 90^0 - \frac{3\alpha}{2}$.

În $\Delta BAA'$ avem $m(\angle BA'A) = 90^0 - \frac{\alpha}{2}$.

$m(\angle BB'A) = 2\alpha \Rightarrow m(\angle AIB') = 90^0 - \frac{\alpha}{2}$. Atunci $\Delta BA'I$ isoscel . Cum $BE \perp A'I \Rightarrow (BE$ - bisectoarea $\angle B'BC$.

În $\Delta BB'C$-isoscel avem $B'O \perp BC \Rightarrow (B'O$ este bisectoarea $\angle BB'C$.

Dar (BE - bisectoarea $\angle B'BC$, deci D- centrul cercului înscris în $\Delta BB'C$.

Cum (CI este bisectoarea $\angle B'CB$ rezultă că I,D,C sunt coliniare.

P4. Fie triunghiul ABC şi E,F,G,H proiecţiile lui A pe bisectoarele unghiurilor $\angle ABC$ şi $\angle$ ACB. Să se arate că E,F,G,H sunt coliniare.

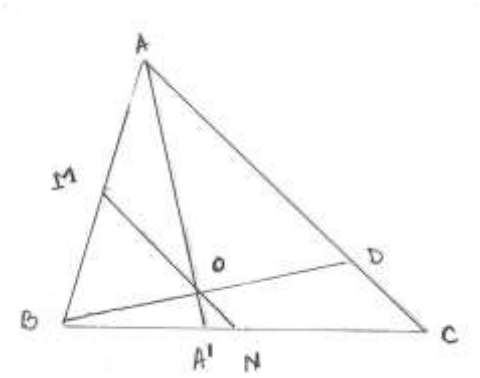
Soluţie: Se arată că patrulaterul AFBE- dreptunghi $\Rightarrow$ punctele O, E ,F-coliniare

Se arată că triunghiul OEB este isoscel, atunci $EF \,//\, BC$

Analog patrulaterul AGCH este dreptunghi $\Rightarrow G, O', H$ - coliniare $\Rightarrow GH \,//\, BC$

d. Demonstrarea coliniarităţii folosind postulatul lui Euclid

P5. Se dă un triunghi ABC. Să se arate că mijloacele laturilor AB, BC şi proiecţia vârfului B pe bisectoarea unghiului A sunt trei puncte coliniare.



Soluţie: Fie $BD \perp AA', D \in [AC], BD \cap AA' = \{O\}$.

În triunghiul ΔABD avem [AO- bisectoarea $\angle BAC$ şi $AO \perp BD$. Atunci ΔABD isoscel şi deci AO este şi mediană, rezultă că [MO] este linie mijlocie în ΔABD.

$\Rightarrow$ MO//AD $\Rightarrow MO \,//\, AC$ (1)

În ΔBDC avem [ON] linie mijlocie $\Rightarrow$ ON//DC $\Rightarrow$ON//AC(2)

Din (1) şi (2) şi axioma paralelelor rezultă că M,O,N coliniare.

P6. Pe latura [BC] a triunghiului ABC se considera un punct D astfel încât BC=3DC. Dacă R este mijlocul medianei CM, M aparţine (AB), să se arate că punctele A, R, D sunt coliniare.

Soluţie: Fie F-mijlocul (BD) $\Rightarrow BF = FD = DC$

Se arată că MF//AD şi RD // MF.

P7. Fie triunghiul ABC,M este mijlocul segmentului (AB) ,$M \in (CN)$ a.î $MN \equiv \frac{1}{3} MC$. Dacă E este simetricul punctului C faţă de B , să se arate că punctele A,N,E sunt coliniare.

Etapa locală 2007 Dâmboviţa

Soluţie: Se ia G-centru de greutate al triunghiului ABC.

Se arată că ANBG este paralelogram $\Rightarrow$ BG//AN

Se arată că BG- linie mijlocie în $\Delta ENC \Rightarrow BG // NE$

Atunci A,N, E-coliniare

.

Probleme de concurenţă

Vom numi probleme de concurenţă o problema de geometrie a cărei concluzie cere demonstrarea faptului că trei sau mai multe drepte (cercuri) au ca intersecţie acelaşi punct

Dintre procedeele mai des utilizate pentru demonstrarea concurenţei amintim:

a. **Demonstrăm că punctul de intersecţie a două dintre drepte aparţine şi celei de-a treia dreaptă.**

b. **Demonstrarea concurenţei a trei drepte prin identificarea acestora cu trei linii importante în triunghi concurente (bisectoare, înălţimi, mediane, etc.)**

c. **Demonstrarea concurenţei prin coliniaritate.**

Teoreme ajutătoare:

Teoremă: În orice triunghi medianele sunt concurente în punctul G numit centrul de greutate al triunghiului , situat pe fiecare mediană la 1/3 de bază şi 2/3 de vârf.

Teoremă: În orice triunghi bisectoarele interioare sunt concurente în punctul I numit centrul cercului înscris în triunghi.

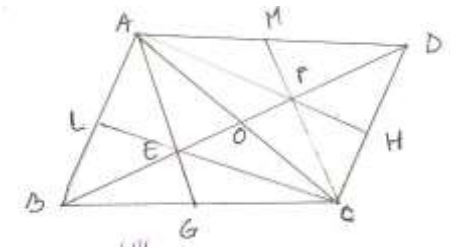
Teoremă: Mediatoarele laturilor unui triunghi sunt concurente în punctul O numit centrul cercului circumscris triunghiului.

Teoremă: Înălţimile unui triunghi sunt concurente în punctul H numit ortocentrul triunghiului.

Probleme propuse

P1. Se consideră un paralelogram ABCD şi fie $E,F \in (BD)$ a.î BE=EF=FD.

BC $\cap$ AE={G},CD $\cap$ AF={H},AB $\cap$ CE={L},AD $\cap$ CF={M}.Să se arate că dreptele AC,EF,LH sunt concurente.



Soluţie: Se arată că $\Delta ADE \equiv \Delta BCF$ (LUL)

$\Rightarrow AE = CF$.

Se arată că $\Delta ADF \equiv \Delta CBE$ (LUL)

$\Rightarrow AF = CE$.

Atunci patrulaterul AECF este paralelogram $\Rightarrow AC \cap EF = \{O\}$. Analog ALCH paralelogram $\Rightarrow AC \cap LH = \{O\}$.

P2. Fie M un punct pe diagonala [BD] a pătratului ABCD. Să se demonstreze că perpendicularele duse din M, B, D respective pe AB, AM, CM se întâlnesc pe diagonala [AC].

Soluţie: Se arată că H este ortocentrul $\Delta DCM \Rightarrow MH \perp DC$

Se arată că $ME \perp CD$. Atunci punctele H ,M ,E-coliniare

Se arată că M-ortocentrul $\Delta AHB \Rightarrow AM \perp HB \Rightarrow H, F, B$ - coliniare $\Rightarrow$ cele 3 perpendiculare sunt concurente.

P3. Fie triunghiul ABC şi $AA' \cap BB' \cap CC' = \{M\}$, $A' \in (BC)$, $B' \in (AC)$, $C' \in (AB)$.Dacă A_1, B_1, C_1 sunt mijloacele laturilor triunghiului, iar A_2, B_2, C_2 sunt mijloacele segmentelor AM,BM ,CM, să se arate că A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 sunt concurente.

Soluţie: A_2B_1 -linie mijlocie in triunghiul AMC

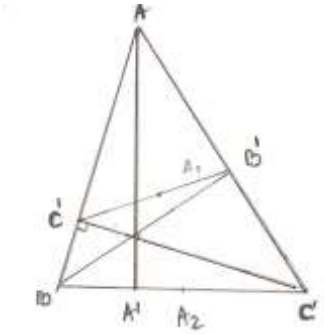
A_1B_2 - linie mijlocie in triunghiul BMC .Atunci patrulaterul $A_2B_1A_1B_2$ este paralelogram $\Rightarrow$ diagonalele se intersectează în O.

Analog patrulaterul $A_1C_1A_2C$ este paralelogram $\Rightarrow$ diagonalele se intersectează în O_1 .

Se arată că $O = O_1$

P4. Să se arate că dreptele care unesc mijloacele laturilor unui triunghi cu mijloacele corespunzătoare ale triunghiului ortic sunt concurente.

Soluţie:



Fie $BB' \perp AC$ şi $CC' \perp AB$. Fie A_1 mijlocul $[B'C']$ şi A_2 mijlocul [BC].

Se arată că în triunghiul dreptunghic $\Delta BB'C$ avem $B'A_2 = BA_2 = CA_2$.

Se arată că în triunghiul dreptunghic $\Delta BC'C$ avem $C'A_2 = BA_2 = CA_2$.

Rezultă $\Delta A_2B'C'$ isoscel şi A_2A_1 mediană $\Rightarrow A_2A_1 \perp B'C'$.

Analog $B_1B_2 \perp A'C'$ şi $C_1C_2 \perp A'B'$.

Atunci cele trei drepte sunt mediatoarele triunghiului ortic, deci sunt concurente.