Examenul de corigență - proba scrisă

Varianta I

Clasa a XI-a , Specializarea Matematică-Informatică

Subiectul I (45 puncte)

1. Se consideră determinantul $D(x)=\begin{vmatrix} 1-x & 2 & 3 \\ 1 & 2-x & 3 \\ 1 & 2 & 3-x \end{vmatrix}$, unde x este număr real.

a) Arătați că $D(1)=5$.

b) Demonstrați că, pentru orice număr întreg p, $p\neq 6$, numărul $D(p)$ este divizibil cu $6-p$.

c) Determinați valoarea maximă pe care o poate lua $D(n)$, atunci când n este număr natural.

2. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ și $B(x)=\begin{pmatrix} 0 & x+1 \\ x-1 & 1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a) Arătați că $B(1)+B(3)=2B(2)$.

b) Determinați numărul real x pentru care $A\cdot B(x)=B(x)\cdot A$.

c) Determinați numerele reale x pentru care $B(x)\cdot B(x)=B(x)$.

Subiectul II (45 puncte)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x}$.

a) Calculați $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x-2}$.

b) Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f.

c) Demonstrați că există un singur număr natural nenul m pentru care $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(mx)}{f(x)}=m^2-m$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x^2-ax+2a-4, & x\in(-\infty,2) \\ 2^{x-1}-2, & x\in[2,+\infty) \end{cases}$, unde a este număr real.

a) Arătați că $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4f(x)}{(1-2x)^2}=1$, pentru orice număr real a.

b) Demonstrați că funcția f este continuă pe $\mathbb{R}$, pentru orice număr real a.

c) Demonstrați că, pentru orice număr real a, $a<3$, ecuația $f(x)=0$ are cel puțin o soluție în intervalul $(1,3)$.

Timp de lucru 90 minute.

Se acordă 10 puncte din oficiu. Fiecare subpunct valorează 7,5 puncte.

Președinte comisie: Membrii comisie:

Examenul de corigență - proba scrisă

Varianta II

Clasa a XI-a , Specializarea Matematică-Informatică

Subiectul I (45 puncte)

1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $X(a)=\begin{pmatrix}2&4&1\\3&9&1\\a&a^2&1\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

a) Arătați că $\det\left(X(-1)\right)=12$.

b) Determinați numerele reale a pentru care $\det\left(X(a)-I_3\right)=0$.

c) În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,4)$, $B(3,9)$ și $C\left(a,a^2\right)$, unde a este număr natural. Determinați numerele naturale a pentru care ABC este triunghi și are aria mai mică decât 3.

2. Se consideră matricea $M(x)=\begin{pmatrix}1+3x&3x\\-3x&1-3x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a) Demonstrați că $M(x)M(y)=M(x+y)$, pentru orice numere reale x și y.

b) Determinați inversa matricei $M(x)$, unde x este număr real.

c) Determinați numărul real pozitiv x pentru care are loc egalitatea $M\left(\sqrt{x}\right)M\left(\sqrt{x+5}\right)=M(5)$.

Subiectul II (45 puncte)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x}$.

a) Calculați $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x-2}$.

b) Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f.

c) Demonstrați că există un singur număr natural nenul m pentru care $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(mx)}{f(x)}=m^2-m$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x^2-ax+2a-4, & x\in(-\infty,2)\\ 2^{x-1}-2, & x\in[2,+\infty)\end{cases}$, unde a este număr real.

a) Arătați că $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4f(x)}{(1-2x)^2}=1$, pentru orice număr real a.

b) Demonstrați că funcția f este continuă pe $\mathbb{R}$, pentru orice număr real a.

c) Demonstrați că, pentru orice număr real a, $a<3$, ecuația $f(x)=0$ are cel puțin o soluție în intervalul $(1,3)$.

Timp de lucru 90 minute.

Se acordă 10 puncte din oficiu. Fiecare subpunct valorează 7,5 puncte.

Președinte comisie: Membrii comisie:

Examenul de corigență - proba scrisă

Varianta I

Clasa a XI-a , Specializarea Științe ale Naturii

Subiectul I (45 puncte)

1. Se consideră determinanții $d=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 4 & 1\\ 3 & 8 & 1\end{vmatrix}$ și $D(a)=\begin{vmatrix}4-a & a-1\\ a+1 & 4-a\end{vmatrix}$, unde a este număr real.

a) Arătați că $d=1$.

b) Determinați numărul real a pentru care $D(a)=1$.

c) În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,1), B(2,4)$ și $C(3,m)$. Determinați numerele reale m știind că $\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}$.

2. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & x\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a) Calculați $A(2)+A(-2)$.

b) Determinați numerele reale p și q pentru care $A(2)\cdot\begin{pmatrix}p\\ q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ 5\end{pmatrix}$.

c) Arătați că matricea $A(x)$ este inversabilă pentru orice număr întreg x.

Subiectul II (45 puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$.

a) Calculați $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

b) Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)$

c) Determinați ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x-2, & x<2\\ x^2-4x+4, & x\geq 2\end{cases}$.

a) Calculați $f(1)\cdot f(3)$.

b) Arătați că funcția f este continuă în punctul $x=2$.

c) Demonstrați că $f(a)\cdot f(b)<0$, pentru orice $a<2$ și $b>2$.

Timp de lucru 90 minute.

Se acordă 10 puncte din oficiu. Fiecare subpunct valorează 7,5 puncte.

Președinte comisie: Membrii comisie:

Examenul de corigență - proba scrisă

Varianta II

Clasa a XI-a , Specializarea Științe ale Naturii

Subiectul I (45 puncte)

1. Se consideră determinantul $D(m)=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ m & 1 & -1 \\ 2 & 3 & m \end{vmatrix}$, unde m este număr real.

a) Calculați $D(0)$.

b) Arătați că $D(m)=(m+2)(m+3)$, pentru orice număr real m.

c) Determinaţi numerele naturale n pentru care $D\left(n^2-3n\right)=0$.

2. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ a & 3 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

a) Arătați că $A(-1)+A(1)=2A(0)$.

b) Determinați numărul real a pentru care $A(a)\cdot\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}=5I_2$, unde $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, știind că $A(1)\cdot X=4A(2)$.

Subiectul II (45 puncte)

1. Se consideră funcţia $f:(2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\dfrac{4}{x-2}$.

a) Calculaţi $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$.

b) Determinaţi ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

c) Calculaţi $\lim\limits_{x\to 2}\left((x-2)f(x)\right)$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} 2x^2+x-1, & x\le 1 \\ x+1, & x>1 \end{cases}$.

a) Calculaţi $f(0)+f(2)$.

b) Arătați că funcția f este continuă în $x=1$.

c) Rezolvaţi în mulțimea numerelor reale inecuația $f(x)\le 0$.

Timp de lucru 90 minute.

Se acordă 10 puncte din oficiu. Fiecare subpunct valorează 7,5 puncte.

Președinte comisie: Membrii comisie: