Examenul de corigență - proba orală

Bilet nr 1.

Clasa a XII-a Specializarea: Matematică-informatică

1. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=\sqrt[3]{x^2+y^2}$.

a) Arătați că $0*8=4$.

b) Demonstrați că legea de compoziție „$*$” **nu** are element neutru.

c) Demonstrați că există o infinitate de perechi (m,n) de numere naturale nenule pentru care numărul $m*n$ este natural nenul.

2. Se consideră funcția $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{\ln(x+2)}{x^2+1}$.

a) Arătați că $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{\ln(x+2)}dx=\frac{\pi}{4}$.

b) Calculați $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$.

c) Arătați că $\displaystyle\int_0^1\left(f(x)+\frac{\operatorname{arctg}x}{x+2}\right)dx=\frac{\pi}{4}\ln 3$.

Președinte : Membrii comisie:

Examenul de corigență - proba orală

Bilet nr 2.

Clasa a XII-a Specializarea: Matematică-informatică

1. Pe mulțimea $M=(0,1)$ se definește legea de compoziție $x\circ y=\dfrac{xy}{1-x-y+2xy}$.

a) Arătați că $x\circ\dfrac{1}{2}=x$, pentru orice $x\in M$.

b) Demonstrați că legea de compoziție „$\circ$” este comutativă.

c) Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to(0,1)$, $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$. Arătați că $f(x)\circ f(y)=f(xy)$, pentru orice $x,\ y\in(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}$.

a) Arătați că $\displaystyle\int_0^1\left(f(x)-\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\right)dx=\frac{1}{3}$.

b) Calculați $\displaystyle\int_0^4\big(f(x)-f(-x)\big)dx$.

c) Determinați numărul real a, $a>4$, astfel încât $\displaystyle\int_4^a\frac{f(x)}{x}dx=10+\ln\frac{a+\sqrt{a^2+9}}{9}$.

Președinte : Membrii comisie:

Examenul de corigență - proba orală

Bilet nr 3.

Clasa a XII-a Specializarea: Matematică-informatică

1. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=3x-2y+1$.

a) Arătați că $5*8=0$.

b) Determinați numărul real x pentru care $2020^x*2020^x=2$.

c) Demonstrați că există o infinitate de perechi (m,n) de numere întregi pentru care $m*n=0$.

2. Se consideră funcția $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+2\ln(2x+1)$.

a) Arătați că $\int_0^1\left(f(x)-2\ln(2x+1)\right)dx=\frac{1}{2}$.

b) Calculați $\int_0^1 f(x)\,dx$.

c) Dacă F este o primitivă a funcției f, arătați că $F(\pi)\le F\left(\frac{16}{5}\right)$.

Președinte : Membrii comisie:

Examenul de corigență - proba orală

Bilet nr 4.

Clasa a XII-a Specializarea: Matematică-informatică

1. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=3xy-3\sqrt{2}(x+y)+6+\sqrt{2}$.

a) Arătați că $\sqrt{2}\circ 1=\sqrt{2}$.

b) Demonstrați că $x\circ y=3\left(x-\sqrt{2}\right)\left(y-\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}$, pentru orice numere reale x și y.

c) Calculați $\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{1}}\circ\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\circ\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}\circ\ldots\circ\frac{\sqrt{2020}}{\sqrt{2017}}$.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$, $f(x)=\frac{x^2+4}{x}$.

a) Arătați că $\int_1^3\left(f(x)-\frac{4}{x}\right)dx=4$.

b) Calculați $\int_2^6\frac{2}{f(x)}dx$.

c) Determinați numărul real nenul a, știind că $\int_1^e\left(f(x)-\frac{4}{x}\right)\ln x\,dx=\frac{e^2+1}{a}$.

Președinte : Membrii comisie:

Examenul de corigență - proba orală

Bilet nr 5.

Clasa a XII-a Specializarea: Matematică-informatică

1. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = xy - m(x+y) + m(m+1)$, unde $m \in (0,+\infty)$.

a) Pentru $m=1$, arătați că $2 \circ 2 = 2$.

b) Demonstrați că, dacă $2 \circ 1 = 5$, atunci $2 \circ 5 = 1$.

c) Determinați numărul real x, știind că $\left(mx^3\right) \circ \left(-mx^2\right) = m$, pentru orice $m \in (0,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + \dfrac{2x}{x^4+1}$.

a) Arătați că $\displaystyle\int_0^1 \left(x^4+1\right) f(x)\,dx = \frac{11}{5}$.

b) Se consideră $F:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o primitivă a funcției f. Știind că graficul funcției F are asimptotă oblică spre $+\infty$, determinați panta acestei asimptote.

c) Se consideră funcția $G:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, primitiva funcției f pentru care $G(0) = 0$. Arătați că $\displaystyle\int_0^1 xG(x)\,dx = \frac{1}{3} + \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\ln 2$.

Președinte : Membrii comisie:

Examenul de corigență - proba orală

Bilet nr 6.

Clasa a XII-a Specializarea: Matematică-informatică

1. Pe mulțimea $A = [0,+\infty)$ se definește legea de compoziție $x \circ y = 4^{xy} - (1-x-y)$.

a) Arătați că $2 \circ 0 = 2$.

b) Arătați că $x \circ \dfrac{1}{x} \geq 5$, pentru orice $x \in A$, $x \neq 0$.

c) Demonstrați că, dacă m și n sunt numere naturale impare, atunci $m \circ n$ este număr natural impar.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = xe^x$.

a) Arătați că $\displaystyle\int_0^2 \frac{f(x)}{e^x}\,dx = 2$.

b) Arătați că $\displaystyle\int_{-1}^1 \left(f(x) + e^x\right)dx = \frac{e^2+1}{e}$.

c) Demonstrați că $\displaystyle\int_{-1-a}^{-1+a} f(x)\,dx \geq -\frac{2a}{e}$, pentru orice $a \in (0,+\infty)$.

Președinte : Membrii comisie:

Examenul de corigență - proba orală

Bilet nr 1.

Clasa a XII-a Specializarea: Științe ale naturii

1. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = 3x + 4y - 25$.

a) Arătați că $3 \circ 4 = 0$.

b) Determinați numărul real x pentru care $(2x) \circ x = 5$.

c) Determinați numerele întregi m pentru care $m^2 \circ 1 \geq 1 \circ m^2$.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + \ln x - 1$.

a) Arătați că $\int_1^4 (f(x) - \ln x + 1)\,dx = 21$.

b) Arătați că $\int_2^4 \frac{x}{f(x) - \ln x}\,dx = \frac{1}{2}\ln 5$.

c) Determinați $a \in (1,+\infty)$ pentru care $\int_1^a \frac{f(x)}{x^2}\,dx = \frac{a - \ln a}{a}$.

Președinte : Membrii comisie:

Examenul de corigență - proba orală

Bilet nr 2.

Clasa a XII-a Specializarea: Științe ale naturii

1. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = x(y-2) + y(x-2)$.

a) Arătați că $2 * 4 = 4$.

b) Determinați numerele reale x pentru care $x * x = 0$.

c) Determinați numărul real x pentru care $(x * 1) * (x + 1) = 4$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 6x + 1$.

a) Arătați că $\int_1^2 (f(x) - x^3 - 1)\,dx = 9$.

b) Arătați că $\int_0^1 \frac{x^2}{f(x) - 6x}\,dx = \frac{1}{3}\ln 2$.

c) Determinați numărul real a pentru care $\int_0^1 f(\sqrt{x})\,dx = \frac{a^3}{5}$.

Președinte : Membrii comisie:

Examenul de corigență - proba orală

Bilet nr 3.

Clasa a XII-a Specializarea: Științe ale naturii

1. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=3xy-x^2-y^2$.

a) Arătați că $1*2=1$.

b) Determinați numerele reale x pentru care $2*x=1$.

c) Determinați numerele reale x pentru care $\left(\sqrt[3]{x}*\sqrt[3]{x}\right)*\sqrt[3]{x^2}=1$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+5}{x^2+1}$.

a) Arătați că $\int_0^3\left(x^2+1\right)f(x)dx=24$.

b) Calculați $\int_0^1\left(f(x)-1\right)dx$.

c) Arătați că orice primitivă F a funcției f este concavă pe $[0,+\infty)$.

Președinte : Membrii comisie:

Examenul de corigență - proba orală

Bilet nr 4.

Clasa a XII-a Specializarea: Științe ale naturii

1. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=x+y+16$.

a) Arătați că $(-8)\circ 2=10$.

b) Determinați elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”.

c) Determinați numărul real x pentru care pentru care $x\circ\left(\dfrac{x}{2}+3\right)\circ x=2x$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-1$.

a) Arătați că $\int_0^1 f(x)dx=-\dfrac{2}{3}$.

b) Arătați că $\int_1^e\left(f(x)+1\right)\ln x dx=\dfrac{2e^3+1}{9}$.

c) Determinați numărul real, a, $a\in(0,+\infty)$, pentru care $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(f(\sin x)+f(\cos x)\right)\operatorname{tg}x dx=\ln a$.

Președinte : Membrii comisie:

Examenul de corigență - proba orală

Bilet nr 5.

Clasa a XII-a Specializarea: Științe ale naturii

1. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = 8xy + x + y$.

a) Arătați că $x \circ y = 8\left(x+\frac{1}{8}\right)\left(y+\frac{1}{8}\right)-\frac{1}{8}$, pentru orice numere reale x și y.

b) Determinați numerele reale x, pentru care $x \circ x = 1$.

c) Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=8x+1$. Demonstrați că $f(x\circ y\circ z)=f(x)\cdot f(y)\cdot f(z)$, pentru orice numere reale x, y și z.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-6x^2+12x+5$.

a) Arătați că $\int_0^1 \left(f(x)-x^3\right)dx = 9$.

b) Demonstrați că orice primitivă a funcției f este o funcție convexă pe $\mathbb{R}$.

c) Arătați că $\int_2^4 \frac{3}{f'(x)+12}dx = \frac{\pi}{8}$.

Președinte : Membrii comisie:

Examenul de corigență - proba orală

Bilet nr 6.

Clasa a XII-a Specializarea: Științe ale naturii

1. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = xy-(x+y)+2$.

a) Arătați că $2*2=2$.

b) Demonstrați că $x*y=(x-1)(y-1)+1$, pentru orice numere reale x și y.

c) Calculați $1*2*3*\ldots*2018$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=xe^x$.

a) Arătați că $\int_1^2 \frac{f(x)}{x}dx = e(e-1)$.

b) Determinați primitiva $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a funcției f pentru care $F(1)=0$.

c) Determinați numărul real a pentru care $\int_0^1 f(x)\,f'(x)dx = \frac{1}{2}e^a$.

Președinte : Membrii comisie: