Fișă de lucru- Recapitulare finală- clasa a IX-a

Probleme propuse

1.

a. Să se arate că: $\left[\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)^2\right]=4n+1, n\in \mathrm{N}^*, n\geq 3$ (unde am notat cu […], partea întreagă).

b. Să se calculeze: $\left[\left(\sqrt{2021}+\sqrt{2022}\right)^2\right]$.

2. Fie $a\in R$ cu $\frac{1}{2}<a<1$. Calculaţi suma: $S=\left[\frac{a+1}{a}\right]+\left[\frac{a+2}{a+1}\right]+\left[\frac{a+3}{a+2}\right]+\ldots+\left[\frac{a+2021}{a+2022}\right]$.

3.

a. Fie numerele arbitrare $\mathrm{n}\in \mathrm{N}^*, \mathrm{p}\in \mathrm{Z}^*$ .Să se arate că numărul p admite o reprezentare de forma,unde $\mathrm{a_i}\in \mathrm{Z}^*, \mathrm{i}=1,2,\cdots,\mathrm{n}$

b. Găsiţi $\mathrm{a_1},\mathrm{a_2},\mathrm{a_3}\in \mathrm{Z}^*$, astfel încât $-2=\frac{\mathrm{a_1^3}+\mathrm{a_2^3}+\mathrm{a_3^3}}{\left(\mathrm{a_1}+\mathrm{a_2}+\mathrm{a_3}\right)^2}$.

4. Fie mulţimea A=(-3, 4]. Să se determine mulţimea: $\mathrm{B}=\left\{x\in \mathrm{A}\middle|\left(\frac{x+1}{3}<x-2\right)\vee\left(\frac{x-2}{x+2}\leq 3\right)\right\}$.

5. Să se rezolve ecuaţia [3X – $\frac{29}{6}$]= 2X +1, unde [.] este partea întreagă.

6. Fie $\mathrm{a_1},\mathrm{a_2},\ldots\mathrm{a_n}$ termeni ai unei progresii aritmetice. Arătaţi că

$a_1^2-a_2^2+a_3^2-a_4^2+\ldots+a_{2k-1}^2-a_{2k}^2=\frac{k}{2k-1}\left(a_1^2-a_{2k}^2\right)$

7. Într-o progresie aritmetică $a_3+a_9=24, a_{11}-a_7=10$. Se cere suma primilor 10 termeni ai progresiei.

8. Într-o progresie geometrică $b_4-b_2=72, b_5-b_3=144$. Se cere suma primilor 10 termeni ai progresiei.

9. Fie x, y, z în progresie aritmetică. Să se arate că următoarele numere sunt în progresie aritmetică: $\frac{1}{\sqrt{y}+\sqrt{z}}$; $\frac{1}{\sqrt{z}+\sqrt{x}}$; $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$; unde x, y, z > 0.

10. . Fie progresia geometrică $(x_n)_{n\geq 1}$, cu termeni pozitivi, iar $(y_n)_{n\geq 1}$progresie aritmetică având $x_1=y_1$şi $x_2=y_2$. Să se demonstreze că $x_n\geq y_n$, $(\forall)x\geq 1$.

11. Primul termen dintr-o progresie aritmetică si respectiv geometrică este 3. Al doilea termen al progresiei aritmetice este cu 6 mai mare decat al doilea termen al progresiei geometrice. Termenul al treilea din cele doua progresii este acelaşi. Determinaţi progresiile.

12. Se dă funcţia $f:[3,\infty)\to\mathbb{R}$

$$f(x)=\sqrt{x+1+4\sqrt{x-3}}+\sqrt{x+1-4\sqrt{x-3}}$$

a. Aflaţi pentru ce valori ale lui x avem $f(x)=2\sqrt{x-3}$

b. Calculaţi valorile funcţiei în punctele

$$x_1=\frac{6067}{2022} \quad , \quad x_2=\frac{15165}{2022}$$

13. Să se rezolve inecuaţia: $\frac{\left(x^{256}+x^{90}+x^{40}+x^2+1\right)(3-x)}{\left(x^4+x^2+1\right)(-x+1)}\le 0$

14. Să se găsească funcţiile: $f, g: R\to R$ astfel încât: $\begin{cases}7f(x+1)+3g(x-1)=23x+10\\2f(x+1)-g(x-1)=x+1\end{cases}$

15. Să se determine m real, astfel încât ecuaţia $x^2-(m+5)x+m^2=0$ să aibă rădăcini reale diferite.

16. Pe laturile [AB], [BC], [CA] ale triunghiului ABC se consideră punctele M, N, P astfel incât: $\overline{AB}=\frac{1}{3}\overline{MB}, \overline{PB}=5\overline{PC}$ si $\overline{CN}=\frac{3}{5}\overline{NA}$. Arătati că punctele M, N, P sunt coliniare.

17. Fie ABC un triunghi iar A', B', C' mijloacele laturilor [BC], [AC] si [AB]. Arătaţi că:

a. $\overline{AA'}=\frac{1}{2}\left(\overline{AB}+\overline{AC}\right)$;

b. $\overline{AA'}+\overline{BB'}+\overline{CC'}=\overline{0}$

18. Fie o placa triunghiulara ABC. Sa se arate ca se poate obtine din aceasta o altă placă MNP, cu $M\in(AB)$, $N\in(AC)$, $P\in(BC)$, al cărei centru de greutate să coincidă cu cel al plăcii ABC, dacă şi numai dacă $\frac{AM}{MB}=\frac{BP}{PC}=\frac{CN}{NA}$.

19. Se consideră o placă de forma unui paralelogram ABCD şi P un punct pe diagonala BD. Considerând MP||AB, $M\in(AD)$, şi NP || AD, $N\in(AB)$, să se arate că centrul de greutate al sistemului de greutăţi egale cu p, plasate în centrele de greutate G_1, G_2, G_3 ale triunghiurilor MDP, NBP şi respectiv BCD, coincide cu centrul de greutate al suprafeţei MNC.

20. Se consideră paralelogramele ABCD şi EFGH în acelaşi plan. Se consideră punctele M,N,P,Q pe segmentele (AE), (BF), (CG), (DH) astfel încât AM/ME=BN/NF=CP/PG=DQ/QH=k. Să se demonstreze că patrulaterul MNPQ este paralelogram.

Soluţii la problemele propuse

1.

a) $\left[\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)^2\right]=\left[n+2\sqrt{n(n+1)}+n+1\right]=$

$=\left[2n+1+2\sqrt{n(n+1)}\right]=4n+1$ deoarece pentru orice n natural,

$n\geq 3\Rightarrow\left[\sqrt{n(n+1)}\right]=n;[2n]=2n;[1]=1.$

b) După punctul a) înlocuind n cu 2021 avem:

$\left[\left(\sqrt{2021}+\sqrt{2022}\right)^2\right]$ = 4 · 2021 + 1 = 8084+1 = 8085.

2. Rezolvare :

Avem $S=\left[1+\frac{1}{a}\right]+\left[1+\frac{1}{a+1}\right]+\left[1+\frac{1}{a+2}\right]+\ldots+\left[1+\frac{1}{a+2021}\right]$

Cum $\frac{1}{2}<a<1\Rightarrow 1<\frac{1}{a}<2\Rightarrow\left[\frac{1}{a}\right]=1$

$\frac{3}{2}<a+1<2\Rightarrow\frac{1}{2}<\frac{1}{a+1}<\frac{2}{3}\Rightarrow\left[\frac{1}{a+1}\right]=0$ ş.a.m.d.

avem $\left[\frac{1}{a+2021}\right]=0\Rightarrow$

$$S=1+\left[\frac{1}{a}\right]+1+\left[\frac{1}{a+1}\right]+1+\left[\frac{1}{a+2}\right]+\ldots+1+\left[\frac{1}{a+2021}\right]$$
$$=1+1+1+0+1+0+\ldots+1+0$$
$$=2+2021=2022$$

3.

$$p=\frac{p^3}{p^2}=\frac{p^3}{p^2}\cdot\frac{\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2}{\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2}=\frac{p^3\left(1^3+2^3+\cdots+n^3\right)}{p^2(1+2+\cdots+n)^2}=$$

$$=\frac{p^3+(2p)^3+\cdots+(np)^3}{(p+2p+\cdots+np)^2}\Rightarrow a_1=p;a_2=2p;\cdots;a_n=np$$

Cum $p\in Z^*\Rightarrow a_1,a_2,\cdots,a_n\in Z^*$.

4.

A = (-3,4]

$$\frac{x+1}{3}<x-2\Rightarrow x+1<3x-6\Rightarrow x>\frac{7}{2}\Rightarrow x\in\left(\frac{7}{2},\infty\right)=S_1$$

$$\frac{x-2}{x+2}\le 3\Rightarrow \frac{x-2}{x+2}-3\le 0\Rightarrow \frac{x-2-3x-6}{x+2}\le 0\Rightarrow \frac{-2x-8}{x+2}\le 0$$

x	$-\infty$			-4				-2			$+\infty$
-2x-8	+	+	+	0	-	-	-	-	-	-	-
x+2	-	-	-	-	-	-	0	+	+	+	
$\frac{-2x-8}{x+2}$	-	-	-	0	+	+	|	-	-	-	

$$x\in(-\infty,-4]\cup(-2,\infty)=S_2$$
$$S=S_1\cup S_2=(-\infty,-4]\cup(-2,\infty)=S_2$$
$$B=S\cap A\Rightarrow B=(-2,4].$$

5.

$$2x+1\in Z$$
$$2x+1\le 3x-\frac{29}{6}<2x+2$$
$$\begin{cases}2x+1\le 3x-\frac{29}{6}\\ 3x-\frac{29}{6}<2x+2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\ge\frac{35}{6}\\ x<\frac{41}{6}\end{cases}\Rightarrow\frac{35}{6}\le x<\frac{41}{6}$$
$$\Rightarrow\frac{35}{3}\le 2x<\frac{41}{3}\Rightarrow\frac{35}{3}+1\le 2x+1<\frac{41}{3}+1\Rightarrow$$
$$12\frac{2}{3}\le 2x+1<14\frac{2}{3}\Rightarrow\begin{cases}2x+1=13\Rightarrow x=6\\ 2x+1=14\Rightarrow x=\frac{13}{2}\end{cases}$$

6.

$$a_1^2-a_2^2+a_3^2-a_4^2+\ldots+a_{2k-1}^2-a_{2k}^2=$$
$$=(a_1-a_2)(a_1+a_2)+(a_3-a_4)(a_3+a_4)+\ldots+(a_{2k-1}-a_{2k})(a_{2k-1}+a_{2k})$$
$$=-r(a_1+a_2+a_3+.a_4+\ldots+a_{2k-1}+a_{2k})=$$
$$=-r\cdot S_{2k}=-r\cdot\frac{(a_1+a_{2k})\cdot 2k}{2}=$$
$$-r\cdot k\cdot(a_1+a_{2k}).$$

Pentru a exprima pe r în funcţie de a_1 şi a_{2k} avem din formula termenului general al unei progresiiaritmetice $a_{2k}=a_1+(2k-1)r\Rightarrow r=\frac{a_{2k}-a_1}{2k-1}\Rightarrow$

$a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - a_4^2 + ... + a_{2k-1}^2 - a_{2k}^2 = \frac{a_1 - a_{2k}}{2k-1} \cdot k(a_1 + a_{2k}) = \frac{k}{2k-1}(a_1^2 - a_{2k}^2)$

7.

$a_n = a_1 + (n-1)r$ (a_1 primul termen, r raţia, a_n termen general)

$a_{11} - a_7 = 10 \Rightarrow a_1 + 10r - a_1 - 6r = 10 \Rightarrow r = \frac{5}{2}$

$a_3 + a_9 = 24 \Rightarrow a_1 + 2r + a_1 + 8r = 24 \Rightarrow a_1 + 5r = 12$

$a_1 = 12 - 5r = 12 - 5\frac{5}{2} = -\frac{1}{2}$

Suma primilor termeni ai unei progresii aritmetice este

$S_n = \frac{[2a_1 + (n-1)r]n}{2} \Rightarrow S_{10} = \frac{[2 \cdot (-\frac{1}{2}) + 9 \cdot \frac{5}{2}] \cdot 10}{2} = \frac{215}{2}$

8.

$b_n = b_1 q^{n-1}$ (b_1 primul termen, q raţia, b_n termen general)

$b_4 - b_2 = 72 \Rightarrow b_1 q^3 - b_1 q = 72 \Rightarrow b_1 q(q^2 - 1) = 72$

$b_5 - b_3 = 144 \Rightarrow b_1 q^4 - b_1 q^2 = 144 \Rightarrow b_1 q^2 (q^2 - 1) = 144$

Rezultă că $\frac{b_1 q(q^2-1)}{b_1 q^2 (q^2-1)} = \frac{1}{2} \Rightarrow q = 2; b_1 = 12$

$S_{10} = \frac{b_1(q^{10} - 1)}{q - 1} = 12(2^{10} - 1)$.

9.

Deoarece x, y, z sunt în progresie aritmetică rezultă că $x + z = 2y$.

Verificăm că numerele date sunt în progresie aritmetică:

$\frac{1}{\sqrt{y} + \sqrt{z}} + \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{2}{\sqrt{z} + \sqrt{x}}$.

Eliminăm numitorii:

$(\sqrt{z} + \sqrt{x})(\sqrt{x} + \sqrt{y}) + (\sqrt{y} + \sqrt{z})(\sqrt{z} + \sqrt{x}) = 2(\sqrt{y} + \sqrt{z})(\sqrt{x} + \sqrt{y})$

$x + z = 2y$ q.e.d.

10. $x_1 = y_1 = x > 0, q > 0;$

$$x_2 = y_2 \to x \cdot q = x + r \to r = x \cdot q - x \to r = x(q-1)$$

Trebuie demonstrat că $x \cdot q^{n-1} \geq x + (n-1) \cdot r$

$$x \cdot q^{n-1} \geq x + (n-1) \cdot x \cdot (q-1)$$

$$\to x \cdot q^{n-1} \geq x[1 + (n-1) \cdot (q-1)]$$

Rămâne de demonstrat că pentru $(\forall) n \geq 1$

$$q^{n-1} \geq 1 + (n-1) \cdot (q-1)$$

Pentru $n = 1$ și $n = 2$ este evident adevărat.

Presupunem adevărat pentru k, deci

$q^{k-1} \geq 1 + (k-1) \cdot (q-1)$ și arătăm că este adevărat și pentru k, adică

$$q^k \geq 1 + k \cdot (q-1)$$

Dar
$q^{k-1} \geq 1 + (k-1) \cdot (q-1)$ înmulțim prin q dă
$q^k \geq q + (k-1) \cdot (q-1) \cdot q$ și rămâne de arătat că

$$q + (k-1) \cdot (q-1) \cdot q \geq 1 + k \cdot (q-1) \leftrightarrow (q-1)(1 + k \cdot q - q - k) \geq 0$$
$$\leftrightarrow (q-1)^2(k-1) \geq 0\ (A)(\forall)k \geq 1$$

11.

Notăm cu a_1, a_2, a_3 termenii progresiei aritmetice şi cu b_1, b_2, b_3 termenii progresiei geometrice. Fie q raţia progresiei geometrice. Avem:
$a_1 = 3; a_2 = b_2 + 6; a_3 = b_3; b_1 = 3; b_2 = b_1 q = 3q; b_3 = b_1 q^2 = 3q^2$.
Dar $2a_2 = a_1 + a_3 \Rightarrow 2(3q+6) = 3 + 3q^2 \Rightarrow 3q^2 - 6q - 12 + 3 = 0 \Rightarrow$
q = -1 sau q = 3.

Cazul 1 - pentru q = -1 avem: $a_1 = 3, a_2 = 3, a_3 = 3, b_1 = 3, b_2 = -3, b_3 = 3$ şi cum la progresia aritmetică raţia r este zero, cazul acesta nu convine.
Cazul 2 – pentru q = 3 avem:
$a_1 = 3, a_2 = 15, a_3 = 27, b_1 = 3, b_2 = 9, b_3 = 27$.

12.

a.

$$f(x) = \left|\sqrt{x-3} + 2\right| + \left|\sqrt{x-3} - 2\right| = \sqrt{x-3} + 2 + \left|\sqrt{x-3} - 2\right|$$

$$= \sqrt{x-3} + 2 + \left|\sqrt{x-3} - 2\right| = \begin{cases} 4, x \in [3,7] \\ 2\sqrt{x-3}, x \in (7, \infty). \end{cases}$$

b.

Deoarece $x_1 \in [3,7]$ *rezultă că* $f(x_1) = 4$, în schimb pentru că $x_2 \in (7, \infty)$ *vom avea* $f(x_2) = 2\sqrt{\frac{15165}{2022} - 3} = 2\sqrt{\frac{9099}{2022}} = 3\sqrt{2}$

13. $x^{256} + x^{90} + x^{40} + x^2 + 1 > 0$; $x^4 + x^2 + 1 > 0$
Pentru ca fracţia dată să fie mai mică sau egală co zero trebuie ca:

$$\frac{3-x}{-x+1} \leq 0$$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$	
3-x	+	+	+	+	0	-	-	-
-x+1	+	+	0	-	-	-	-	-
$\frac{3-x}{-x+1}$	+	+	|	+	+	0	-	-

Deci $x \in (1,3]$.

14.

$$\begin{cases} 7f(x+1)+3g(x-1)=23x+10 \\ 2f(x+1)-g(x-1)=x+1 \quad /3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7f(x+1)+3g(x-1)=23x+10 \\ 6f(x+1)-3g(x-1)=3x+3 \end{cases}$$ Adunând aceste două egalităţi:

$13f(x+1) = 26x + 13 \Rightarrow f(x+1) = 2x + 1$

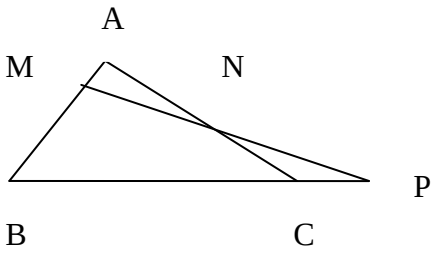
Notăm $x+1=y \Rightarrow x=y-1$.
Atunci $f(y)=2(y-1)+1 \Rightarrow f(y)=2y-1$.
Deci $f:R\to R$ este $f(x)=2x-1$.
Din a doua egalitate rezultă:
$g(x-1) = 2f(x+1) - x - 1$
$g(x-1) = 2(2x+1) - x - 1$
$g(x-1) = 3x+1$

Notăm $x-1 = z \Rightarrow x = z+1$.
Atunci $g(z) = 3(z+1)+1 \Rightarrow g(z) = 3z+4$.
Deci $g:R\to R$ este $g(x) = 3x+4$.

15.

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow (m+5)^2 - 4m^2 > 0 \Rightarrow -3m^2 + 10m + 25 > 0 \Rightarrow m \in \left(-\frac{5}{3}, 5\right).$$

16.



Demonstrăm că vectorii $\overline{MN}$ şi $\overline{MP}$ sunt coliniari.

$$\overline{MN} = \overline{MA} + \overline{AN}$$
$$\frac{AM}{MB} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{1}{4} \Rightarrow \overline{MA} = \frac{1}{4}\overline{BA} = -\frac{1}{4}\overline{AB}$$

$\frac{CN}{NA}=\frac{3}{5}\Rightarrow \frac{AC}{NA}=\frac{8}{5}\Rightarrow \overline{AN}=\frac{5}{8}\overline{AC}$

Deci $\overline{MN}=-\frac{1}{4}\overline{AB}+\frac{5}{8}\overline{AC}$. (1)

Analog:

$\overline{MP}=\overline{MB}+\overline{BP}$

$\overline{MB}=\frac{3}{4}\overline{AB}$ şi $\overline{BP}=\frac{5}{4}\overline{BC}$

$\overline{MP}=\frac{3}{4}\overline{AB}+\frac{5}{4}\overline{BC}=\frac{3}{4}\overline{AB}+\frac{5}{4}\left(\overline{BA}+\overline{AC}\right)=$

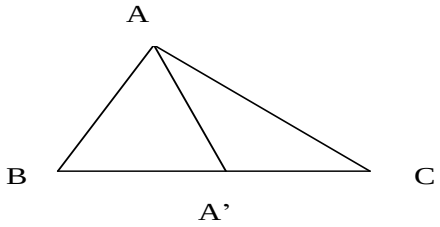
$=\frac{3}{4}\overline{AB}-\frac{5}{4}\overline{AB}+\frac{5}{4}\overline{AC}=(\frac{3}{4}-\frac{5}{4})\overline{AB}+\frac{5}{4}\overline{AC}$

Deci $\overline{MP}=-\frac{1}{2}\overline{AB}+\frac{5}{4}\overline{AC}$. (2)

Din (1) şi (2) $\Rightarrow$ $\overline{MP}=2\overline{MN}\Rightarrow \overline{MP}$ şi $\overline{MN}$ coliniari.

17.

1)



În Δ AA'B avem $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA'}$. (1)

În Δ AA'C avem $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA'}$. (2)

Se adună relaţiile (1) şi (2) şi rezultă:

$2\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA'}+\overrightarrow{CA'}$

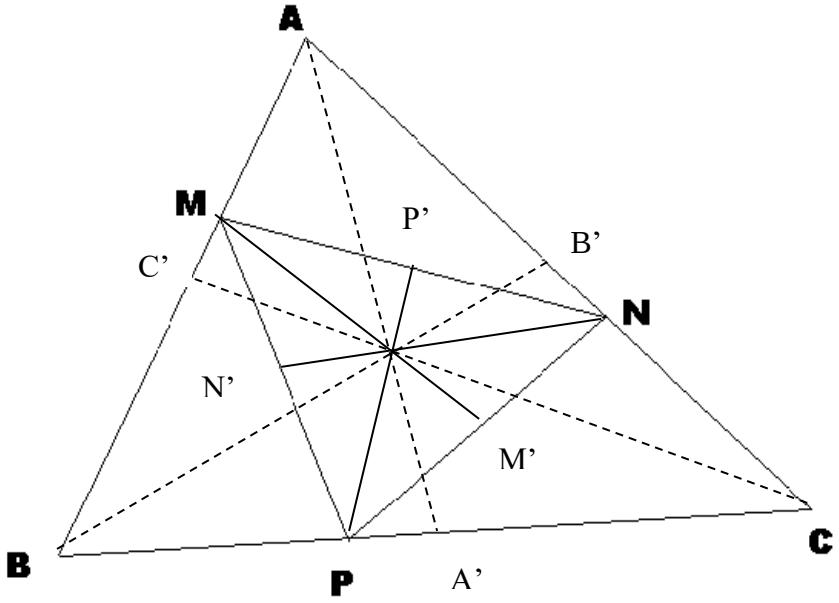
Dar $\overrightarrow{BA'}+\overrightarrow{CA'}=\vec{0}\Rightarrow 2\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\Rightarrow \overrightarrow{AA'}=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}$.

2)

$\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right)=\vec{0}$

Deoarece $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\vec{0}$; $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$; $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BC}=\vec{0}$.

18.



Notam $\frac{AM}{MB} = x$ $\frac{BP}{PC} = y$ $\frac{CN}{NA} = z$

Trebuie sa aratam ca cele doua suprafete triunghiulare ABC si MNP au acelasi centru de greutate dacă și numai dacă x = y = z.

$$\overrightarrow{r_M} = \frac{\overrightarrow{r_A} + x\,\overrightarrow{r_B}}{1+x};$$

$\overrightarrow{r_N} = \frac{\overrightarrow{r_C} + z\overrightarrow{r_A}}{1+z}$;

$\overrightarrow{r_P} = \frac{\overrightarrow{r_B} + y\overrightarrow{r_C}}{1+y}$.

Fie G centrul de greutate al suprafeţei ABC şi G' cel al suprafeţei MNP

$$G \equiv G' \Leftrightarrow \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_C}\right) = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{r_M} + \overrightarrow{r_N} + \overrightarrow{r_P}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_C} =$$

$$\frac{\overrightarrow{r_A} + x\overrightarrow{r_B}}{1+x} + \frac{\overrightarrow{r_C} + y\overrightarrow{r_A}}{1+y} = \frac{\overrightarrow{r_B} + z\overrightarrow{r_C}}{1+z} \Leftrightarrow$$

$$\overrightarrow{r_A} - \frac{\overrightarrow{r_A}}{1+x} + \overrightarrow{r_B} - \frac{x\overrightarrow{r_B}}{1+x} + \overrightarrow{r_C} - \frac{\overrightarrow{r_C}}{1+y} - \frac{y\overrightarrow{r_A}}{1+y} - \frac{\overrightarrow{r_B}}{1+z} - \frac{z\overrightarrow{r_C}}{1+z} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\overrightarrow{r_A}\left(1 - \frac{1}{1+y} - \frac{y}{1+y}\right) + \overrightarrow{r_B}\left(1 - \frac{x}{1+x} - \frac{1}{1+z}\right) + \overrightarrow{r_C}\left(1 - \frac{1}{1+y} - \frac{1}{1+z}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\overrightarrow{r_A}\frac{(x-y)}{(1+x)(1+y)} + \overrightarrow{r_B}\frac{(z-x)}{(1+x)(1+z)} + \overrightarrow{r_C}\frac{(y-z)}{(1+y)(1+z)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\overrightarrow{r_A}(x-y)(1+z)\overrightarrow{r_B}(z-x)(1+y) + \overrightarrow{r_C}(y-z)(1+x) = 0 \Leftrightarrow x = y = z$$

Deoarece în cazul când $x \neq y \neq z$ s-ar obţine $\overrightarrow{r_A} = \overrightarrow{r_B}\frac{(x-z)(1+y)}{(x-y)(1+z)} + \overrightarrow{r_C}\frac{(z-y)(1+x)}{(x-y)(1+z)}$ şi cum $\frac{(x-z)(1+y)}{(x-y)(1+z)} + \frac{(z-y)(1+x)}{(x-y)(1+z)} = 1$, ar însemna A, B, C coliniare, în contradictie cu problema

19.

Notăm :

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{a} \Rightarrow \overrightarrow{AN} = \alpha\,\overrightarrow{a}$

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{b} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \beta\,\overrightarrow{b}$

$\overrightarrow{AG_1} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AD}\right)$

$\overrightarrow{AG_2} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AB}\right)$

$\overrightarrow{AG_3} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}\right)$

Astfel dacă G este centrul de greutate al ansamblului de greutăţi din G_1, G_2, G_3, avem

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{9}\left(2\,\overrightarrow{AD} + 2\,\overrightarrow{AB} + 2\,\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AC}\right) \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{9}\left(2\,\overrightarrow{b} + 2\,\overrightarrow{a} + 2\alpha\,\overrightarrow{a} + 2\beta\,\overrightarrow{b} + \beta\,\overrightarrow{b} + \alpha\,\overrightarrow{a} + \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right)$$

$$= \frac{1}{9}\left(3\,\overrightarrow{b} + 3\,\overrightarrow{a} + 3\beta\,\overrightarrow{b} + 3\alpha\,\overrightarrow{a}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \alpha\,\overrightarrow{a} + \beta\,\overrightarrow{b}\right) \quad (1)$$

Considerăm acum suprafaţa MNC şi G' centrul său de greutate, avem

$\overrightarrow{AG'} = \frac{1}{2}(AN + AM + AC) = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \alpha\,\overrightarrow{a} + \beta\,\overrightarrow{b}\right)$ (2)

Din egalităţile (1) şi (2) rezuzltă cerinţa.

20. $\overrightarrow{r_M} = \frac{\overrightarrow{r_A} + k\overrightarrow{r_E}}{1+k}$, $\overrightarrow{r_N} = \frac{\overrightarrow{r_B} + k\overrightarrow{r_F}}{1+k}$,

$$\overrightarrow{r_P} = \frac{\overrightarrow{r_C} + k\,\overrightarrow{r_E}}{1+k}$$

$$\overrightarrow{r_Q} = \frac{\overrightarrow{r_D} + k\,\overrightarrow{r_H}}{1+k}$$

Fie O mijlocul lui MP şi O' mijlocul lui NQ. Avem relaţiile :

$\overrightarrow{r_O} = \frac{\frac{\overrightarrow{r_A}+\overrightarrow{r_C}}{2} + k\frac{\overrightarrow{r_E}+\overrightarrow{r_Q}}{2}}{1+k} = \frac{\overrightarrow{r_L} + k\overrightarrow{r_I}}{1+k}$ şi $\overrightarrow{r_{O'}} = \frac{\frac{\overrightarrow{r_B}+\overrightarrow{r_D}}{2} + k\frac{\overrightarrow{r_F}+\overrightarrow{r_H}}{2}}{1+k} = \frac{\overrightarrow{r_L} + k\overrightarrow{r_I}}{1+k} \Rightarrow O$ şi O' coincid

$\Rightarrow MNPQ$ paralelogram

BIBLIOGRAFIE

1. Mircea GANGA – Matematică (manual pentru clasa a IX-a) – Editura Mathpress, 2004.
5. Marin GUŞATU, Brânduşa NICOLAESCU, Claudiu CORCODEL... – Matematică - Sinteze şi modele pentru Bacalaureat, Editura Fair Partners.
6. Ion PETRICĂ, Ion LAZĂR – Probleme de algebră pentru liceu, Editura Petrion, Bucureşti.
7. Marian ANDRONACHE, Nicolae BIŞBOACĂ ... – Teste de matematică pentru examen de Bacalaureat, Editura Plus, Bucureşti, 2005.
8. Gazeta Matematică – Seria B
9. Năchilă P. , Brânzei D. , Stoica C. , Hărăbor V.E. , Matematică – Subiecte date la examenele de admitere în învăţământul superior, Editura Scorpion7, Bucureşti 1996,