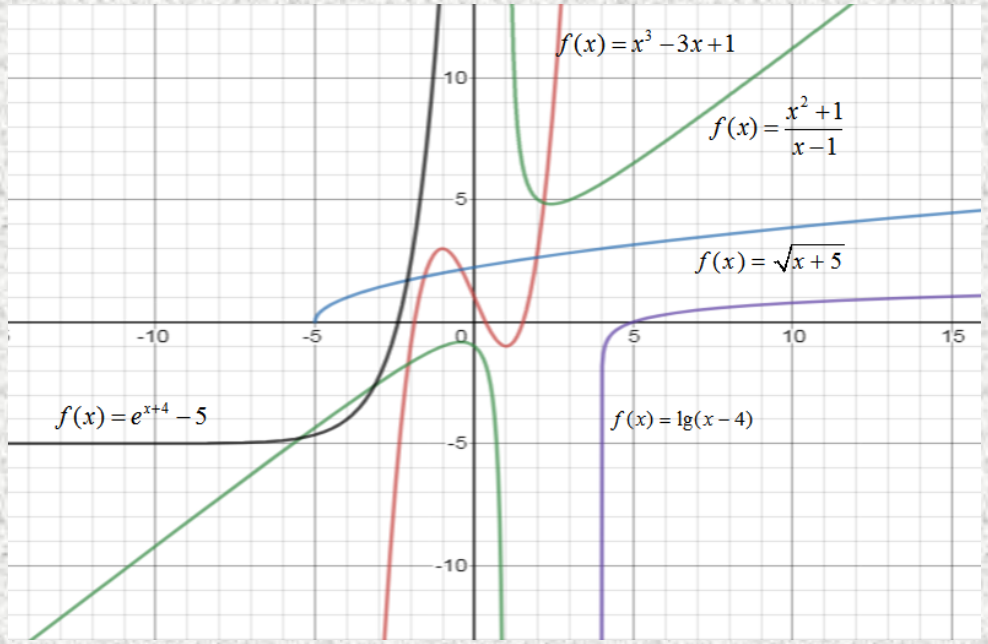
ADRIAN STAN

# MATEMATICĂ
## pentru clasa a XI-a




Editura Editgraph, Buzău, 2020

**ADRIAN STAN**

# MATEMATICĂ
# pentru clasa a XI-a

**Matematică M2, Tehnologic**

**Referenţi ştiinţifici:**
**Prof. dr Dumitru Săvulescu, București**
**Prof. gr. 1 Lucian Tuțescu, Craiova**
**Prof. gr. 1 Neculai Stanciu, Buzău**

**Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României**

**Stan Adrian**
**Matematică pentru clasa a XI-a. / Editgraph 2020**
**ISBN :**

**ISBN:**
**Editor: Florin Comăniță**
**Corectură: Stanciu Neculai**
**Tehnoredactare: Adrian Stan**
**Coperta: Adrian Stan**

**Tipar: editgraph Buzău**
**www.editgraph.ro**

**ADRIAN STAN**

# MATEMATICĂ
# pentru clasa a XI-a

**Matematică M2, Tehnologic**

## CUPRINS

**Prefață** ..... 6
**Recapitulare clasa a X-a** ..... 8
**1. MATRICE** ..... 12
**1.1** Conceptul de matrice..... 12
**1.2** Operaţii cu matrice..... 19
**1.3** Puterile unei matrice..... 30

**2. DETERMINANŢI** ..... **35**
**2.1** Determinanţii de ordinul 2 şi 3..... 35
**2.2** Definiţia determinantului de ordin *n*..... 45
**2.3** Proprietăţile determinanţilor..... 51
**2.4** Aplicaţii ale determinanţilor în geometria plană..... 54

**3. MATRICE INVERSABILE** ..... **58**
**3.1** Calculul inversei unei matrici..... 58
**3.2** Ecuaţii matriceale..... 66

**4. SISTEME DE ECUAŢII LINIARE** ..... **69**
**4.1** Rangul unei matrice..... 69
**4.2** Metode de rezolvare a sistemelor de ecuaţii liniare..... 73
**4.3** Metoda lui Gauss de rezolvare a sistemelor liniare ..... 87

**5. LIMITE DE FUNCȚII** ..... 90
**5.1** Limita unei funcții într-un punct de acumulare ..... 90
**5.2** Calculul limitelor de funcții ..... 93
**5.3** Limite fundamentale. Cazuri de nedeterminare ..... 100
**5.4** Asimptotele graficului funcțiilor reale ..... 105
**5.5.** Aplicații practice ale limitelor de funcții ..... 112

**6. FUNCȚII CONTINUE** ..... 115
**6.1** Funcții continue într-un punct de acumulare ..... 115
**6.2** Proprietățile funcțiilor continue ..... 121

**7. FUNCȚII DERIVABILE** ..... 125
**7.1** Derivata unei funcții într-un punct ..... 125
**7.2** Aplicații ale derivatelor ..... 133
**7.3** Aplicații practice ale derivatelor ..... 138

**8. STUDIUL FUNCŢIILOR CU AJUTORUL DERIVATELOR** ..... 140
**8.1** Proprietăți generale ale funcțiilor derivabile ..... 140
**8.2** Rolul derivatelor de ordinul întâi și doi ale studiilor funcțiilor ..... 142
**8.3** Etapele reprezentării grafice ale funcțiilor ..... 153
**8.4** Exerciții recapitulative ..... 157

**9. Recapitulare finală** ..... 166

**Indicații și răspunsuri** ..... 183

# Prefață

**L**ucrarea de faţă, reprezintă o sinteză a cunoştinţelor de clasa a XI-a corespunzătoare programei de matematică M2 prezentată într-un cadru bine stabilit în care elementele de teorie se îmbină cu partea aplicativă a conţinutului. Concise şi clare, aceste elemente teoretice sunt susţinute de exemple elocvente în prezentarea materialului într-un mod continuu şi cursiv.

**C**onţinutul lucrării este împărţit în opt capitole ample corespunzătoare conținuturilor din programa școlară pentru clasa a XI-a M2 tehnologic și o ultimă parte formată din probleme pentru recapitularea la final de an şcolar şi aprofundarea materiei, probleme de genul celor care se dau la bacalaureat care sunt utile pentru pregătirea bacalaureatului. Pe parcursul lucrării, exerciţiile propuse ca temă sunt însoţite şi de indicaţii şi răspunsuri pentru ca elevii să-şi poată verifica corectitudinea rezolvărilor lor.

**Î**nvăţarea după acest auxiliar beneficiază în afară de prezenţa noţiunilor teoretice de o parte de exerciţii rezolvate care să vină în sprijinul înţelegerii diverselor tipuri de exerciţii şi a aprofundării părţii teoretice. Rezolvarea exerciţiilor este în general detaliată şi aminteşte de regulă şi de formulele folosite pentru ca elevii să poată raţiona mult mai uşor. Prezentarea unui număr mare de exerciţii rezolvate are drept scop tocmai situaţia ca elevii să poată rezolva exerciţiile propuse ca temă la fiecare lecţie pe baza celor rezolvate ca modele.

**P**rimul capitol, „ **Matrice**” prezintă pentru început o problemă practică din domeniul organizării profitului în activităţile economice, problemă ce introduce conceptul de matrice ca fiind un tabel sau tablou de date. Deşi se va lucra cu matrice cu un număr limitat de linii respectiv coloane, se prezintă şi matricea generală cu m linii şi n coloane, respectiv matricea pătratică de ordinul n.

**A** doua temă „ **Operaţii cu matrice**” este una amplă întrucât conţine prezentarea operaţiilor: adunarea matricelor, înmulţirea cu scalari a matricelor, înmulţirea matricelor, ridicarea la putere a matricelor precum şi relaţia de egalitate a matricelor.

**C**apitolul „ **Determinanţi**” introduce noţiunile de determinanţi de ordinul doi şi trei şi exemple de metode de calcul ale acestora. Paragraful 2.3 prezintă toate proprietăţile determinanţilor utile în diversele aplicaţii de calcul în condiţiile în care folosirea metodelor cunoscute de calcul sunt mai greu de utilizat. Capitolul se încheie cu o serie de aplicaţii ale determinanţilor în geometria plană cum ar fi scrierea ecuaţiei unei drepte când se cunosc două puncte prin care trece dreapta sau aria unui triunghi când se cunosc vârfurile sale. De asemenea este utilă cunoaşterea condiţiei care trebuie verificată ca trei puncte să fie coliniare.

**C**apitolul trei „ **Matrice inversabile**” este unul important întrucât face legătura între noţiunea de matrice şi rezolvarea unor ecuaţii matriceale prin determinarea inversei unei matrice. Problemele rezolvate prezintă pe larg algoritmul de determinare a inversei unei matrice, prin urmare, cele trei tipuri de ecuaţii matriceale prezentate, **AX=B, XA=B, AXB=C** nu sunt greu de înţeles plecând de la aceste exemple.

**C**apitolul ” **Sisteme de ecuaţii**” introduce rangul unei matrice şi modalitatea de determinare a acestuia. Sunt prezentate metodele de rezolvare a sistemelor de ecuaţii liniare printre care **metoda lui Cramer** şi **metoda lui Gauss** şi este realizată o sinteză a compatibilităţii sistemelor de ecuaţii.

**C**apitolul „ **Limite de funcţii**” introduce noțiunea de limită de funcție și oferă toate tipurile de limite care se cer conform programei precum și asimptotele de funcții care utilizează conceptul de limită. De asemenea capitolul conține câteva exemple de utilizare a conceptului de limită în diverse domenii ale științelor.

**C**apitolul „ **Funcții continue**” este unul destul de succint prezentând o proprietate foarte importantă a analizei matematice aceea a continuității funcțiilor.

**U**n capitol amplu este cel al „ **Funcțiilor derivabile**” în care se prezintă noțiunea de derivată de ordinul întâi și doi și aplicațiile lor inclusiv câteva aplicații practice.

Ultimul capitol ” **Proprietățile funcțiilor derivabile”** conține acele cunoștințe prin care se poate studia monotonia și convexitatea funcțiilor și cu ajutorul lor putem trasa graficul funcțiilor

**U**ltima parte a cărții este un ansamblu de exerciţii recapitulative de nivel mediu în genul celor care se dau la bacalaureat şi care ajută la aprofundarea materiei, exerciţii rezolvate integral.

**S**perăm că această lucrare să se constituie într-un instrument de lucru adecvat învăţării la clasă şi util elevilor în aprofundarea cunoştinţelor prin efortul de rezolvare a multitudinii gamei de aplicaţii existente care poate dezvolta astfel şi un stil independent de lucru al elevilor în clasă şi acasă.

**Prof. Adrian Stan,**

# PARTEA I---ALGEBRĂ

## RECAPITULARE
## Clasa a X-a

1. Să se calculeze $16\cdot\frac{1}{2^5}-125\cdot\frac{1}{2\cdot 5^3}$.
2. Să se calculeze: $2^{100}:(2^{55}\cdot 2^{44})+2^{-2}$;
3. Să se demonstreze că numărul $\sqrt[3]{27}-\sqrt{12}+2\sqrt{3}$ este natural.
4. Să se calculeze: $(1+\sqrt{3})^2-\sqrt{\left(2\sqrt{3}-3\right)^2}+(\sqrt{3}-2)^{-1}$;
5. Să se calculeze $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{-3}+\frac{1}{\sqrt{3}-2}+\left|\sqrt{12}-4\right|$.
6. Să se calculeze expresia $\frac{\frac{1}{2}-3}{0,5+\sqrt[3]{8}}$;
7. Care număr este mai mare $\log_2\frac{1}{2}$; $\sqrt[3]{-64}$; $-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-2}$.
8. Să se arate că numărul $A=\sqrt{(\sqrt{5}-3)^2}+\sqrt{(2-\sqrt{5})^2}\in\mathbb{N}$.
9. Să se calculeze expresia $\sqrt[3]{125}+\frac{1}{2}-(\log_2 32+0,5)$ .
10. Să se calculeze $\sqrt[3]{24}-3\sqrt[3]{192}+\sqrt[3]{-81}$
11. Să se calculeze $\sqrt[3]{40}-\sqrt[3]{625}+2\sqrt[3]{-135}$.
12. Să se calculeze $\sqrt[3]{81}+\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{375}$ .
13. Să se arate că $\left(\sqrt[3]{9}\right)^{\log_3 1}+\sqrt[3]{-27}\in\mathbb{Z}$.
14. Să se calculeze: $\log_3 81\cdot\log_3 27\cdot\log_3 9\cdot\log_3 3\cdot\log_3 1$;
15. Arătaţi că $\log_6 2+\log_6 18\in\mathbb{N}$.
16. Să se calculeze $\log_5 100+2\log_5 3-\log_5 36$;
17. Să se calculeze $\frac{\log_4 18+\log_4 12-\log_4 27}{\log_4 2}$.
18. Să se calculeze $\log_3 27+\log_4 16-\sqrt[3]{125}$.
19. Să se calculeze $\log_6 24-\log_6 4$.
20. Să se determine valorile reale pozitive ale lui x ştiind că $\lg\sqrt[3]{x}$, $\frac{7}{3}$ şi $2\lg x$ sunt termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice.
21. Să se calculeze $\lg\left(tg1^0\right)\cdot\lg\left(tg2^0\right)\cdot\lg\left(tg3^0\right)\cdot.....\cdot\lg\left(tg45^0\right)$.
22. Să se calculeze $\lg(tg40^0)\cdot\lg(tg41^0)\cdot.....\cdot\lg(tg45^0)$.

23. Să se determine valorile reale ale lui x astfel încât funcția $f:D\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\log_{4x-1}8x^2$ să fie corect definită.
24. Folosind proprietățile logaritmilor să se restrângă expresia : $\frac{1}{3}\cdot\log_2 125-3\cdot\log_2 x-4\cdot\log_2 y$.
25. Știind că $\log_2 3=a$ să se arate că $\log_2 288=5+2a$;
26. Să se arate că $\log_3 24=1+3a$ unde $a=\log_3 2$.
27. Determinați $a,b\in\mathbb{R}$ pentru care $(4-6i)\cdot a+(8+2i)\cdot b=4+2i$;
28. Determinați $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât să existe egalitatea $(3-2i\sqrt{2})^2=a+ib.$
29. Să se calculeze $i^{33}+i^{55}+i^{77}$;
30. Demonstrați că $(2+i\sqrt{3})^2+(2-i\sqrt{3})^2\in\mathbb{Z}$
31. Fie $z_1=5-2i,\ z_2=4+3i$. Să se calculeze modulul numărului z unde $z=z_1\cdot z_2$;
32. Să se rezolve ecuatia $\sqrt[3]{x^2+5x+5}=-1$.
33. Să se rezolve ecuația: $\sqrt{x-3}-5=0$.
34. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia: $\sqrt[3]{2-x}=x$;
35. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia: $\sqrt{x^2-4x+4}=3$;
36. Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei $\sqrt{x^2-x-2}=2$.
37. Să se rezolve ecuaţia $\sqrt{3x+4}=2\sqrt{x}$.
38. Să se rezolve ecuaţia $\sqrt{x+5}=x-1$.
39. Să se rezolve ecuaţia $\sqrt{-x^2+5x+3}=x$.
40. Să se rezolve ecuaţia $\sqrt{5-x}=x+1$;
41. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt[3]{x^3+x^2-x-2}=x$.
42. Să se rezolve ecuaţia $\sqrt{4x-3}=2x-3$.
43. Să se rezolve ecuația în $\mathbb{R}$ : $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}=2$ ;
44. Fie $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z},\ f(x)=2^x-2^{-x}$. Să se calculeze $f(-2)+f(-1)+f(1)+f(2)$;
45. Rezolvaţi ecuaţia $2^x+2^{x+2}=10$.
46. Să se rezolve ecuaţia $\left(\frac{1}{2}\right)^x=2^{x-2}$.
47. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^x+2\cdot3^{x+1}=7$.
48. Să se rezolve ecuaţia $3^{2x^2-5x}=\frac{1}{27}$;
49. Rezolvaţi ecuaţia $5^{1-x}=25^x$.
50. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $2^{x^2-4x}=\frac{1}{8}$.
51. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia: $3^x+9^x+27^x=39.$
52. Să se rezolve ecuația $5^{1+x^2}\cdot5^{6x}=\frac{1}{5^7}$.
53. Să se rezolve ecuația $3^{x-2}+3^{x+2}=\frac{82}{81}$.
54. Să se rezolve ecuația: $2^{x+2}+2^x-10=0$.
55. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2^{\sqrt{x-1}}=4$.
56. Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei $\log_2(x+5)=3$

57. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia: $\lg(x^2-3x)=1$;

58. Să se rezolve ecuaţia $\log_3(x^2-7x+8)-\log_3(x-7)=0$;

59. Să se rezolve ecuaţia $\log_2(x+2)+\log_2 x=3$;

60. Să se rezolve ecuaţia $\log_2(2x+4)-\log_2(3x+1)=0$.

61. Să se rezolve ecuația : $\log_2(x^2-2x+1)=\log_2(x-1)$.

62. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\lg^2 x-4\lg x+3=0$.

63. Reuniunea a două mulțimi cu câte 2015 elemente fiecare are 2500 elemente. Determinați numărul de elemente comune ale celor două mulțimi.

64. În câte moduri se pot aranja 6 mașini în parcare ?

65. Câte numere de telefon cu cinci cifre, nu neapărat distincte, se pot forma cu elementele mulţimii $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ ?

66. Determinați numărul de submulțimi nevide ale mulțimii $A=\{x,y,z,t\}$.

67. Câte numere de telefon de zece cifre distincte se pot forma cu cifrele de la 0 la 9 ?

68. Câte numere de telefon cu cinci cifre distincte se pot forma cu elementele mulţimii $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ ?

69. Câte numere de telefon de şase cifre distincte se pot forma cu cifrele 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ?

70. Câte numere de patru cifre distincte se pot forma cu cifrele 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ?

71. Opt alergători aleargă într-o cursă. Câte situaţii de clasament există dacă se consideră că nu ajung mai mulţi în acelaşi timp.

72. Determinaţi numărul permutărilor mulţimii $A=\{1,2,3,4,5\}$.

**73**. Să se calculeze $C_{10}^9-C_9^8$.

74. Să se calculeze $\dfrac{2C_7^3-A_5^4}{P_3}$

75. Să se rezolve ecuaţia $\dfrac{(n+1)!+n!}{n!}=2020$.

76. Să se calculeze $C_8^3-C_8^5$.

77. Să se calculeze $\dfrac{C_9^6-C_9^5}{A_9^5}$

78. Să se calculeze $\dfrac{A_7^5-A_7^4}{C_5^3}$;

79. Să se calculeze $\dfrac{A_{2014}^1+C_{2014}^1}{2014}$

80. Să se calculeze $\dfrac{P_6+A_6^3}{C_7^3}$;

81. Să se determine numărul real $n\geq 1$, dacă $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!}=-4n+6$ .

82. Să se arate ca expresia $A_5^2+C_5^2-P_4$ este un număr par.

83. Să se calculeze $C_7^5-C_7^6-C_6^4$.

84. Calculaţi $C_{18}^2-C_{18}^{16}+C_{18}^3-C_{18}^{15}$.

85. Să se rezolve ecuaţia $C_n^0+C_n^1=8,\ n\in\mathbb{N}^*$.

86. Să se rezolve ecuația $C_n^3-2n=0$.

87. Să se rezolve ecuaţia $C_n^2 = 28, n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$

88. Să se determine $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$ pentru care avem relaţia $2C_n{}^2 - 6C_{n+1}{}^3 = 6n;$

89. Să se rezolve în $\mathbb{N}$ ecuaţia: $C_n^n + C_n^{n-1} + ... + C_n^1 = 1023;$

90. Să se calculeze: $C_{2020}^1 + C_{2020}^2 + C_{2020}^3 + ..... + C_{2020}^{2020}.$

91. Să se calculeze probabilitatea ca alegând la întâmplare unul din numerele $\log_2 128;\ \log_2 \frac{1}{64};\ \log_5 125$, acesta să fie divizibil cu 3.

92. Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr n din mulţimea $\{1,2,3,4,5\}$, acesta să verifice inegalitatea $n! \rangle 20.$

93. Se consideră mulţimea $A = \{1,3,5,...,13\}$. Să se determine probabilitatea ca alegând un număr din mulţimea A, acesta să fie prim.

94. Într-o urnă sunt 8 bile albe şi 4 bile negre. Care este probabilitatea ca scoţând două bile din urnă fără a le vedea , acestea să fie albe ?

95. Să se calculeze probabilitatea , ca alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie cubul unui număr natural.

96. Care este probabilitatea ca un număr de trei cifre să aibă produsul cifrelor egal cu 5?

97. Într-o urnă sunt 6 bile albe și 8 negre. Care este probabilitatea ca la extragerea a patru bile din urnă, fără să le introducem în urnă, acestea să fie albe.

98. Costul unui televizor este de 250 de euro. Cât reprezintă taxa TVA (18%) din preţul produsului ?

99. La clasa a X-a A din cei 24 de elevi, 6 sunt corigenţi iar la clasa a X-a B, din cei 30 de elevi, 7 sunt corigenţi. Ce clasă are procentul de promovabilitate mai mare ?

100. Să se calculeze TVA-ul pentru un produs, ştiind că preţul de vânzare al produsului este de 238 lei (procentul TVA-ului este de 19 %).

101. O sumă de 850 lei este pusă la bancă iar după un an suma finală devine 884 lei. Determinați procentul dobânzii acordate de bancă.

102. Să se determine prețul inițial al unui produs care după două ieftiniri succesive cu câte 10% are preţul de 567 lei.

103. Un produs se scumpește cu 15% ceea ce înseamnă 51 lei. Determinați prețul final al produsului.

104. Rata dobânzii pe care o acordă o bancă la depunerea unei sume de bani este de 6% pe an.Ce dobândă obţine o persoană ce depuen la bancă suam de 1800 de euro pe un an ?

105. Să se calculeze suma finală obţinută de un capital de 1000 de euro depus în regim de dobîndă simplă timp de doi ani, ştiind că dobânda anuală este de 5%.

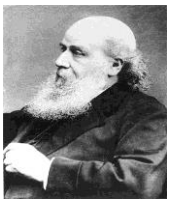
106. O persoană a depus la o bancă 1500 de lei. Ce sumă a primit persoana după un an, ştiind că rata dobânzii a fost de 8%.

107. Să se determine cât la sută din a +b reprezintă numărul a . ştiind că este egal cu 25% din b.

108. După o reducere a preţului cu 15% un produs costă 680 lei. Să se calculeze preţul iniţial al produsului.

# Cap. 1 MATRICE

**Termenul de matrice a fost introdus de matematicianul englez James Joseph Sylvester(1814 - 1897) în lucrarea „ On a New Class of Theorems" publicată în 1850. Tot el introduce şi noţiunea de rang şi signatură.**



## 1.1 Conceptul de matrice. Egalitatea matricelor

Pentru a înţelege conceptul de matrice să-l identificăm prin rezolvarea următoarei probleme:

Două unităţi comerciale $U_1$, $U_2$, produc trei tipuri de produse $P_1$, $P_2$, $P_3$ numărul acestora fiind exprimat în tabelul 1 în mii de unităţi iar corespunzător fiecărui produs i se asociază conform tabelului 2 suma investită şi venitul net obţinut, calculate per 1000 de unităţi de produs şi exprimate în milioane lei. .

Să se determine suma totală investită şi venitul net realizat din producerea tuturor celor trei tipuri de produse.

| | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ |
|---|---|---|---|
| $U_1$ | 3 | 4 | 5 |
| $U_2$ | 2 | 5 | 6 |

| | INVESTITII | VENIT NET |
|---|---|---|
| $P_1$ | 5 | 8 |
| $P_2$ | 6 | 9 |
| $P_3$ | 3 | 4 |

Rezolvare:

Tabel 1. Tabel 2.

Să observăm că datele din cele două tabele pot fi reprezentate sub forma $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ respectiv $\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 9 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ pe care le vom numi matrice. Suma investită şi venitul net realizat se obţin înmulţind cele două matrice asociate tabelelor 1 şi 2. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 9 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 51 & 80 \\ 58 & 85 \end{pmatrix}$. Prima coloană reprezintă investiţiile în milioane lei făcute de fiecare unitate comercială pentru producţia sa totală iar a doua reprezintă venitul net obţinut corespunzător producţiei sale.

Aşadar la o investiţie de 51 de milioane prima unitate obţine un venit de 80 de milioane iar cea de a doua, la o investiţie de 58 de milioane obţine un venit de 85 de milioane.

Noţiunea de matrice apare şi la rezolvarea sistemelor de ecuaţii liniare.

Astfel, fie sistemul de două ecuaţii liniare cu două necunoscute $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$, unde x, y sunt necunoscutele, $a_{i,j}$ cu $i,j \in \{1,2\}$ sunt coeficienţii necunoscutelor iar $b_1, b_2$ sunt termenii liberi. Acestui sistem i se asociază matricea coeficienţilor necunoscutelor sistemului şi anume un tablou de forma $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$ scris restrâns sub forma $A=(a_{ij})$ $i,j \in \{1,2\}$, iar coeficienţii $a_{ij} \in \mathbb{R}$ (sau $\mathbb{C}$), $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ (sau $\mathbb{C}$).

***Definiţie.*** Se numeşte **matrice cu *m* linii şi *n* coloane** (sau de tip $m \times n$) un tablou cu *m* linii şi *n* coloane de forma (*) ale cărui elemente $a_{ij}$ sunt numere complexe.

**(*)**
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m,n}(\mathbb{C})$$

**$M_{m,n}(\mathbb{C})$** se numeşte **mulţimea tuturor matricelor de tipul m,n** cu elemente în mulţimea numerelor complexe.

Notaţii: $A = (a_{ij})$ unde $i = \overline{1,m}$ şi $j = \overline{1,n}$. Pentru elementul $a_{ij}$, indicele *i* arată linia pe care se află elementul, iar al doilea indice *j* indică pe ce coloană este situat.

Mulţimea matricelor de tip $m \times n$ cu elemente numere reale se notează prin $\mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

Aceleaşi semnificaţii au şi mulţimile $M_{m,n}(\mathbb{Z}), M_{m,n}(\mathbb{Q}), M_{m,n}(\mathbb{C})$ cu menţiunea $M_{m,n}(\mathbb{Z}) \subset M_{m,n}(\mathbb{Q}) \subset M_{m,n}(\mathbb{R}) \subset M_{m,n}(\mathbb{C})$.

***Cazuri particulare***

**1)** O matrice de tipul $1 \times n$ (deci cu o linie şi *n* coloane) se numeşte **matrice linie** şi are forma $A = (a_1 \ \ a_2 \ \ \dots \ \ a_n)$.

**2)** O matrice de tipul $m \times 1$ (cu *m* linii şi o coloană) se numeşte **matrice coloană** şi are forma

$$B = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{pmatrix}.$$

**3)** O matrice de tip $m \times n$ se numeşte **nulă** (**zero**) dacă toate elementele ei sunt zero. Se notează cu $O_{m,n}$

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

| **Activitate independentă** | | **Răspuns** |
|---|---|---|
| **Determinaţi de ce tipuri sunt următoarele matrice cu elemente în** | | **a)**<br>**b)** |

| | |
|---|---|
| $\mathbb{C}$**:** a) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}$; b) $B=\begin{pmatrix}2 & i\\ 3i & 1\end{pmatrix}$; c) $C=\begin{pmatrix}-2\\ 4\\ 3\end{pmatrix}$; d) $D=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ -2 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$. | **c)**<br>**d)** |

***Definiţie.*** Se numeşte **matrice pătratică**, o matrice în care numărul de linii este egal cu numărul de coloane. Mulţimea acestor matrice se notează $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}\in M_n(\mathbb{C})$$

**Observaţii:**

1. Sistemul de elemente $(a_{11}\ \ a_{22}\ \ \dots\ \ a_{nn})$ reprezintă **diagonala principală** a matricei *A*, iar suma acestor elemente $a_{11}+a_{22}+\dots+a_{nn}$ se numeşte **urma matricei** *A* notată $Tr(A)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$.

2. Sistemul de elemente $(a_{1n}\ \ a_{2\,n-1}\ \ \dots\ \ a_{n1})$ reprezintă **diagonala secundară** a matricei *A*.

3. Matricea $I_n=\begin{pmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 1\end{pmatrix}$ se numeşte **matricea unitate de ordinul n** (pe diagonala principală toate elementele sunt egale cu 1, iar în rest sunt egale cu 0).

***Exemplu: Determinaţi numerele x,y,z,t ştiind că matricea*** $A=\begin{pmatrix}x+2 & 0 & 0\\ x+z & e^y & t-5\\ y^2 & 0 & z^2\end{pmatrix}$ ***este matricea unitate de ordinul trei.***

Rezolvare:

Din x+2 = 1, x+z = 0, $e^y$ =1, t-5 = 0, $y^2$ =0, $z^2$ =1 rezultă x= - 1, y= 0, z= 1, t= 5.

***Definiţie.*** Fie $A=(a_{ij})\in \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ Se numeşte **transpusa matricei A** , matricea $A^T=(a_{kl})\in \mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{C})$ în care liniile matricei A devin coloane iar coloanele devin linii

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}$$

***Exemplu*** *Dacă* $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}\in M_{23}(R)$, atunci $A^T=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 5\\ 3 & 6\end{pmatrix}\in M_{32}(R)$.

| **Activitate independentă** | | **Răspuns** |
|---|---|---|

| | |
|---|---|
| Determinaţi transpusa matricei $A=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. | |

***Proprietăţi ale operaţiei de transpunere:***

T1. $(A^T)^T=A,\ \forall A\in M_{m,n}(\mathbb{C})$;

T2. $(A+B)^T=A^T+B^T,\ \forall\ A,B\in M_{m,n}(\mathbb{C})$;

T3. $(aA)^T=aA^T,\ \forall A\in M_{m,n}(\mathbb{C})$;

T4. $(AB)^T=B^TA^T,\ \forall\ A,B\in M_{m,n}(\mathbb{C})$;

***Egalitatea a două matrice***

***Definiţie.*** Două matrice $A=(a_{ij}), B=(b_{ij})\in M_{m,n}(\mathbb{C})$ **sunt egale** şi scriem A = B dacă $a_{ij}=b_{ij},\ \forall\ i=\overline{1,m}, \forall\ j=\overline{1,n}$.

***Exemplu: Să se determine numerele reale x, y astfel încât să avem egalitatea de matrice***

$$\begin{pmatrix} x+3 & x+y \\ 1 & -2y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & -x+3 \\ 1 & 3x+4y \end{pmatrix}.$$

Rezolvare. Matricele sunt egale dacă elementele de pe poziţii corespunzătoare sunt egale, adică:

$$\begin{cases} x+3=5 \\ x+y=-x+3 \\ 1=1 \\ -2y=3x+4y. \end{cases}$$

Rezolvând acest sistem găsim soluţia $x = 2, y = -1$.

| **Activitate independentă** | | **Răspuns** |
|---|---|---|
| Să se determine numerele reale $x, y, z$ astfel încât să existe egalitatea de matrice $\begin{pmatrix} 2x-4 & y-2 \\ 3 & x+2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} z-2y & x \\ z-5 & y \end{pmatrix}$. | | |

## Exercitii rezolvate

**1. Să se determine numerele reale x, y pentru care are loc egalitatea:**

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{8} & y-3 \\ e^{x+3} & y^0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2^x & x+3 \\ y-2 & x+4 \end{pmatrix}.$$

Rezolvare:

Din $\frac{1}{8}=2^x\Rightarrow 2^{-3}=2^x\Rightarrow x=-3$. Mai departe, din celelalte egalităţi rezultă y = 3.

**2. Fie matricea** $A=\begin{pmatrix} a^2+2a & \sqrt{b}-2 \\ \log_3 c & a^2+4a+4 \end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$**. Să se determine** $a,b,c\in\mathbb{R}$ **astfel încât A este matricea nulă.**

Rezolvare: Din $A=\begin{pmatrix} a^2+2a & \sqrt{b}-2 \\ \log_3 c & a^2+4a+4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow a(a+2)=0\Rightarrow a=0$ *sau* $a=-2$,

$\sqrt{b}-2=0\Rightarrow\sqrt{b}=2\Rightarrow b=4$, $\log_3 c=0\Rightarrow c=3^0\Rightarrow c=1$,

$a^2+4a+4=0\Leftrightarrow(a+2)^2=0\Rightarrow a=-2$. Așadar, $a=-2, b=4, c=1$.

**3. Fie matricea** $A=\begin{pmatrix} \log_3(x+2) & \log_{2^2} y-\log_2 y-2 \\ \sqrt[3]{y^2-z^2} & 3z-11 \end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$**. Să se determine** $x,y,z\in\mathbb{R}$ **astfel încât** $A=I_2$**;**

Rezolvare: Din $A=\begin{pmatrix} \log_3(x+2) & \log_{2^2} y-\log_2 y-2 \\ \sqrt[3]{y^2-z^2} & 3z-11 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow$

$\log_3(x+2)=1\Rightarrow x+2=3\Rightarrow x=1$;

$\log_{2^2} y-\log_2 y-2=0\Rightarrow\log_2 y=-1\Rightarrow y=2^{-1}=\frac{1}{2}$ sau $\log_2 y=2\Rightarrow y=2^2=4$

$\sqrt[3]{y^2-z^2}=0\Rightarrow y=\pm z$, $3z-11=1\Rightarrow 3z=12\Rightarrow z=4$. Așadar, $x=1$, $y=z=4$.

**4. Să se calculeze** $\sum_{k=1}^{n}\begin{pmatrix} 1 & k \\ k^2 & k^3 \end{pmatrix}$.

Rezolvare:

$$\sum_{k=1}^{n}\begin{pmatrix} 1 & k \\ k^2 & k^3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n}1 & \sum_{k=1}^{n}k \\ \sum_{k=1}^{n}k^2 & \sum_{k=1}^{n}k^3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n & \frac{n(n+1)}{2} \\ \frac{n(n+1)(n+2)}{6} & \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 \end{pmatrix}.$$

$$\sum_{k=1}^{n}\begin{pmatrix} 1 & k \\ k^2 & k^3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n}1 & \sum_{k=1}^{n}k \\ \sum_{k=1}^{n}k^2 & \sum_{k=1}^{n}k^3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n & \frac{n(n+1)}{2} \\ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} & \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 \end{pmatrix}.$$

**5. Se consideră matricea** $A_k=\begin{pmatrix} 0 & k \\ k(k+1) & \frac{1}{k(k+1)} \end{pmatrix}$, $k\in\mathbb{N}$**. Determinaţi matricea**

$B=\sum_{k=1}^{n}A_k$**.**

Rezolvare:

$$B=\sum_{k=1}^{n}A_k=\begin{pmatrix} 0 & \sum_{k=1}^{n}k \\ \sum_{k=1}^{n}k(k+1) & \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & \frac{n(n+1)}{2} \\ \frac{n(n+1)(n+2)}{3} & \frac{n}{n+1} \end{pmatrix}$$ deoarece,

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+...+n = \frac{n(n+1)}{2};$$

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \sum_{k=1}^{n}(k^2+k) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3};$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + .... + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

## Exercitii propuse

**1.** Determinaţi de ce tipuri sunt următoarele matrice cu elemente în $\mathbb{C}$:

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; c) $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; d) $D = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$; e) $F = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

**2.** Să se determine numerele reale x, y, z astfel încât

$$x \cdot \begin{pmatrix} x-3 & 4 \\ 1 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -x \\ y & -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & y+5 \\ 15 & 10 \end{pmatrix}.$$

**3**. Să se determine numerele reale, x, y, z astfel încât să existe egalitatea:

$$\begin{pmatrix} x+y & 3x-y \\ 5+y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2z+1 \\ 2x & y+z \end{pmatrix}.$$

**4**. Să se determine numerele reale, x, y, z astfel încât să existe egalitatea:

$$\begin{pmatrix} \log_2(x+3) & \sqrt{x+4} \\ 5^{y-4} & z+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & y-3 \\ 25 & \log_2(x-4) \end{pmatrix}.$$

**5.** Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 8-a & b^2-9 \\ 2c-10 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Să se determine $a,b,c \in \mathbb{R}$ astfel încât A este matricea nulă.

**6.** Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 2^{a+3}-16 & a^2-3a+2 \\ \log_2(2b-c) & 3b-2c \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Să se determine $a,b,c \in \mathbb{R}$ astfel încât A este matricea nulă.

**7.** Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 2^{x+2} & 0 \\ 3^{y-1}-3 & 4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Să se determine $x,y,z \in \mathbb{R}$ astfel încât $A = I_2$;

**8.** Fie matricea $A = \begin{pmatrix} \sqrt[3]{x-1} & 2\sqrt{y+3}-4 \\ x^2-2x & 2^z-1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Să se determine $x,y,z \in \mathbb{R}$ astfel încât $A = I_2$;

**9.** Să se determine $x,y,z,t \in \mathbb{R}$ astfel încât $\begin{pmatrix} 7-2x & \sqrt{y+1} \\ C_z^2 & A_t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$;

**10.** Să se determine $x,y,z \in \mathbb{R}$ astfel încât $\begin{pmatrix} 2^x - 16\cdot 2^{-x} & x-\sqrt[3]{x-1} \\ 2y^2-20 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 12 & \log_3(y-z) \end{pmatrix}$;

**11.** Fie k un număr natural şi matricea $A_k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 2k & k^2 \end{pmatrix}$. Să se calculeze suma $A_1 + A_2 + ... + A_n$ .

**12.** Se consideră matricea $A_k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ k+1 & 2^k \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{N}$. Determinaţi matricea $B = \sum_{k=1}^{n} A_k$ .

**13.** Se consideră matricea $A_k = \begin{pmatrix} k & k \cdot k! \\ \frac{1}{2^k} & C_n^k \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{N}$. Determinaţi matricea $B = \sum_{k=1}^{n} A_k$ .

## 1.2 Operaţii cu matrice

### 1 *Adunarea matricelor*

***Definiţie.*** Fie $A=(a_{ij}), B=(b_{ij}), C=(c_{ij}) \in \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{C})$.
Matricea $C$ se numeşte **suma** matricelor $A$, $B$ dacă: $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$, $\forall\ i=\overline{1,m}$, $\forall\ j=\overline{1,n}$.

***Observaţii***

**1)** Două matrice se pot aduna dacă **sunt de acelaşi tip**, adică dacă au acelaşi număr de linii şi acelaşi număr de coloane, deci $A, B \in \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{C})$.

**2)** Explicit adunarea matricelor $A$, $B$ înseamnă:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Pentru două matrice pătratice de ordinul doi avem: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+x & b+y \\ c+z & d+t \end{pmatrix}$.

***Exemple:*** Să se calculeze $A + B$ pentru:

a) $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 5 & 1 & -8 \end{pmatrix}$;

b) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Rezolvare: **a)** Avem

$$A+B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 5 & 1 & -8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3+1 & 1+5 & -2+4 \\ 2+5 & 0+1 & 6-8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 7 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

**b)** Avem

$$A+B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.=\begin{pmatrix} 1+2 & 2-1 \\ 3-3 & 4+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\ .$$

| **Activitate independentă** | **Răspuns** |
|---|---|
| Să se calculeze $A + B$ şi A – B pentru $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. | |

***Proprietăţi ale adunării matricelor***

**$A_1$.(Asociativitatea adunării).** Adunarea matricelor este **asociativă**, adică:

$$(A+B)+C=A+(B+C),\ \forall A, B, C \in \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{C}).$$

**$A_2$.(Comutativitatea adunării).** Adunarea matricelor este **comutativă**, adică:

$$A+B=B+A,\ \forall A, B \in \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{C}).$$

**$A_3$.(Element neutru).** Adunarea matricelor admite matricea nulă ca **element neutru**, adică $\exists\, O_{m,n} \in \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ astfel încât $A + O_{m,n} = A,\ \forall A \in \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{C})$.

**$A_4$.(Elemente simetrizabile).** Orice matrice $A \in \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ admite un element simetrizabil, notat cu $-A$ şi numit matricea opusă lui A astfel încât $A + (-A) = O_{m,n}$.

## 2 *Înmulţirea cu scalari a matricelor*

***Definiţie.*** Fie $\lambda \in \mathbb{C}$ şi $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{C})$. Se numeşte **produsul dintre scalarul** $\lambda \in \mathbb{C}$ **şi matricea** $A$, matricea notată $\lambda A \in \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ definită prin $\lambda A = (\lambda a_{ij}), i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$.

**Observaţie:** A înmulţi o matrice cu un scalar revine la a înmulţi toate elementele matricei cu acest scalar.

$$a \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot x & a \cdot y \\ a \cdot z & a \cdot t \end{pmatrix} \qquad \text{Aşadar, } \lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \ldots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \ldots & \lambda a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \ldots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

***Exemplu.*** **Fie** $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 5 & 2 \\ -4 & \frac{4}{3} & -3 \end{pmatrix}$. ***Atunci 3A =*** $\begin{pmatrix} 1 & 15 & 6 \\ -12 & 4 & -9 \end{pmatrix}$.

| **Activitate independentă** | | **Răspuns** |
|---|---|---|
| Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 4 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$. Să se calculeze -2·A. | | |

***Proprietăţi ale înmulţirii matricelor cu scalari***

$P_1$ $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A,\ \forall\ \lambda, \mu \in C, (\forall)\ A \in \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{C})$;

$P_2$ $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B, \forall\ \lambda \in C, (\forall)\ A, B \in \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{C})$;

$P_3$ $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A, \forall\ \lambda, \mu \in C, (\forall)\ A \in \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{C})$;

$P_4$ $1 \cdot A = A, 1 \in \mathbb{C}, \forall\ A \in \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{C})$;

## 3 *Înmulţirea matricelor*

***Definiţie.*** Fie $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $B = (b_{j,k}) \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{C})$. **Produsul dintre matricele** $A$ şi $B$ (**în aceasta ordine**), notat $AB$ este matricea $C = (c_{i,k}) \in \mathrm{M}_{m,p}(\mathbb{C})$ definită prin

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk},\ \forall\ i = \overline{1,m}, \forall\ k = \overline{1,p}.$$

Observaţii

1) Produsul A·B a două matrice nu se poate efectua întotdeauna decât dacă $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$, $B \in M_{n,p}(\mathbb{C})$, adică numărul de coloane ale lui A este egal cu numărul de linii ale lui B, când se obţine o matrice $C = AB \in M_{m,p}(\mathbb{C})$.

2) Dacă matricele sunt pătratice $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ atunci are sens întotdeauna atât A·B cât şi B·A, iar, în general, $A \cdot B \neq B \cdot A$ adică înmulţirea matricelor nu este comutativă.

Pentru două matrice pătratice de ordinul doi înmulţirea lor este de forma:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot x + b \cdot z & a \cdot y + b \cdot t \\ c \cdot x + d \cdot z & c \cdot y + d \cdot t \end{pmatrix}$$

***Exemple***

**Să se calculeze:**

**a).** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 4 \cdot (-2) & 2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 4 \cdot 3 & 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 + 4 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot (-2) & 0 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 3 & 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -4 & 19 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$;

**b).** $\begin{pmatrix} 1 & i \\ -2i & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i & -3i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot i + i \cdot 0 & -3i \cdot 1 + i \cdot 1 \\ -2i \cdot i + 0 \cdot 0 & -2i \cdot (-3i) + 0 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & -2i \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$.

**c).** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 & 1 \cdot 6 + 2 \cdot 8 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 & 3 \cdot 6 + 4 \cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$.

**d).** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 9 & 1 \\ -6 & 10 & 6 \\ 2 & 10 & 2 \end{pmatrix}$.

$l_1 \cdot c_1 = 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) = 2 - 4 = -2;$

$l_1 \cdot c_2 = 1 \cdot 3 + 0 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 3 + 6 = 9;$

$l_1 \cdot c_3 = 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = -1 + 2 = 1;$

$l_2 \cdot c_1 = -1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) = -2 + 2 - 6 = -6;$

$l_2 \cdot c_2 = -1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = -3 + 4 + 9 = 10;$

$l_2 \cdot c_3 = -1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 1 + 2 + 3 = 6;$

$l_3 \cdot c_1 = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) = 2 + 2 - 2 = 2;$

$l_3 \cdot c_2 = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 3 + 4 + 3 = 10;$

$l_3 \cdot c_3 = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = -1 + 2 + 1 = 2;$

| **Activitate independentă** | | **Răspuns** |
|---|---|---|
| Să se calculeze: a) $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$. | | |

***Proprietăţi ale înmulţirii matricelor***

$P_1$ **(Asociativitatea înmulţirii). Înmulţirea matricelor este asociativă**, adică $(AB)C = A(BC), \forall A \in \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{C}), \forall B \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{C}), \forall C \in \mathrm{M}_{p,s}(\mathbb{C})$.

$P_2$ **(Distributivitatea înmulţirii în raport cu adunarea). Înmulţirea matricelor este distributivă în raport cu adunarea matricelor**, adică

$(A+B)C = AC + BC, \quad C(A+B) = CA + CB, \quad \forall A,\ B,\ C$ matrice pentru care au sens operaţiile de adunare şi înmulţire.

$P_3$ Dacă $I_n \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ este matricea unitate de ordinul n, atunci

$$I_n A = AI_n = A, \quad \forall A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}).$$

Se spune că $I_n$ este **element neutru** în raport cu operaţia de înmulţire a matricelor.

## Exercitii rezolvate

**1.** **Fie matricele** $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **şi** $f(x) = 2x^2 - x + I_2$ **.**

**Să se calculeze: A+B, A·B, $A^2$, f(A).**

Rezolvare:

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix};$$

$$f(A) = 2A^2 - A + I_2 = 2\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

**2.** **Fie matricele** $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **şi** $f(x) = x^2 - 3x + I_2$ **.**

**Să se calculeze: A-B, A·B , B·A, $B^2$, f(B).**

Rezolvare:

$$A - B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix};$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -1 \\ -4 & -4 \end{pmatrix};$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8 & -1\\ 4 & -2\end{pmatrix};$$

$$B^2=B\cdot B=\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 4\\ 0 & 4\end{pmatrix};$$

$$f(A)=B^2-3B+I_2=2\begin{pmatrix}4 & 4\\ 0 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-6 & -3\\ 0 & 6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11 & 7\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

**3.** **Fie matricele** $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 0\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$ **şi** $f(x)=x^2-x+2I_3$ **.**

**Să se calculeze: 2A+ 3B, A·B , $A^2$, f(**A).

Rezolvare:

$$2A+3B=2\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 0\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 2\\ 4 & -2 & 0\\ 6 & 2 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3 & 0 & 2\\ 3 & 3 & 6\\ 0 & 3 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 5\\ 7 & 1 & 6\\ 6 & 5 & -1\end{pmatrix};$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 0\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ -3 & -1 & 0\\ -2 & 2 & 4\end{pmatrix};$$

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 0\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 0\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 2\\ 8 & 0 & 4\end{pmatrix};$$

$$f(A)=A^2-A+2I_2=\begin{pmatrix}5 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 2\\ 8 & 0 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 0\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 1 & 1\\ -2 & 4 & 2\\ 5 & -1 & 5\end{pmatrix}.$$

**4. Să se determine** $x,y,z,u,v\in\mathbb{R}$ **ştiind că**

$$\begin{pmatrix}x-2 & y+4 & u\\ x-1 & v & z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6 & y-3 & 3\\ 2 & 1 & y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y+7 & x-1 & 4\\ 5y & -3 & 4\end{pmatrix}.$$

Rezolvare:

Din egalitatea de matrice se obţine ,

x – 2 + 6 = y+ 7

y + 4 + y – 3 = x -1

u + 3 = 4

x -1 + 2 =5y

v + 1 = -3

z + y = 4, de unde rezultă că u = 1, v = - 4, y= 1, x= 4, z = 3.

**5.** **Fie matricele** $A=\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & b\end{pmatrix}$ **şi** $B=\begin{pmatrix}a & 1\\ b & 1\end{pmatrix}$**. Să se determine** $a,b\in\mathbb{R}$ **astfel încât** **A·B=B·A.**

Rezolvare:

$AB=BA\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & b\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & 1\\ b & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & 1\\ b & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & b\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}a+ba & a+1\\ a+b^2 & b+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+1 & a^2+b\\ b+1 & ab+b\end{pmatrix}\Rightarrow$

din egalitatea de matrice că a = b şi $a^2 = 1$. Aşadar, $A=B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ sau $A=-B$ unde

$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}.$

**6.** **Fie matricele** $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ -2 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$**.**

**Să se calculeze: a)** $A\cdot B$**; b)** $(A\cdot B)^T$**; c)** $B\cdot A$**; d)** $(B\cdot A)^T$**.**

Rezolvare:

a) $A\cdot B=\begin{pmatrix}3 & 7\\ -5 & -6\end{pmatrix}$; b) $(A\cdot B)^T=\begin{pmatrix}3 & -5\\ 7 & -6\end{pmatrix}$; c) $B\cdot A=\begin{pmatrix}-2 & 9 & 2\\ -2 & -3 & -1\\ 2 & 7 & 2\end{pmatrix}$;

d) $(B\cdot A)^T=\begin{pmatrix}-2 & -2 & 2\\ 9 & -3 & 7\\ 2 & -1 & 2\end{pmatrix}$;

**7.** **Fie** $x\in\mathbb{R}$ **şi matricea** $A(x)=\begin{pmatrix}1-x & x\\ -x & 1+x\end{pmatrix}$**. Arătaţi că** $A(x)\cdot A(y)=A(x+y),\forall x,y\in\mathbb{R}.$

Rezolvare:

$A(x)\cdot A(y)=\begin{pmatrix}1-x & x\\ -x & 1+x\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1-y & y\\ -y & 1+y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-(x+y) & x+y\\ -(x+y) & 1+(x+y)\end{pmatrix}=A(x+y)$**.**

**8.** **Fie** $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ **şi** $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$**. Să se determine matricele** $X\in M_2(\mathbb{R})$ **astfel încât** $A\cdot X=X\cdot A$**.**

Rezolvare:

Fie $X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$. Din $A\cdot X=X\cdot A\Rightarrow\begin{pmatrix}3 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$. De aici rezultă:

3a+c = a – b
3b+d = 2a+b
– a = c – d
– b = 2c+d

Din rezolvarea acestui sistem obţinem: $a=2c,\ b=\frac{c}{2},\ d=3c.$ Prin urmare, matricele X au forma $X=\begin{pmatrix} 2c & \frac{c}{2} \\ c & 3c \end{pmatrix},\ c\in\mathbb{R}.$

**9*. Se consideră matricea** $A(x)=\begin{pmatrix} x & 2x-1 & x^2 \\ 2^x & \log_{2012}\frac{x}{x+1} & C_{2011}^x \end{pmatrix}$.

**Să se calculeze A(1) + A(2) + ...+ A(2011).**

**Rezolvare:**

1. A(1) + A(2) + ...+ A(2011)=

$$\sum_{x=1}^{2011}\begin{pmatrix} x & 2x-1 & x^2 \\ 2^x & \log_{2012}\frac{x}{x+1} & C_{2011}^x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sum_{x=1}^{2011}x & \sum_{x=1}^{2011}2x-1 & \sum_{x=1}^{2011}x^2 \\ \sum_{x=1}^{2011}2^x & \sum_{x=1}^{2011}\log_{2012}\frac{x}{x+1} & \sum_{x=1}^{2011}C_{2011}^x \end{pmatrix}$$

$$\sum_{x=1}^{2011}x=2011\cdot 1006 \qquad \sum_{x=1}^{2011}(2x-1)=2011^2 \qquad \sum_{x=1}^{2011}x^2=\frac{2011\cdot 2012\cdot 4023}{6}$$

$$\sum_{x=1}^{2011}\log_{2012}\frac{x}{x+1}=-1 \qquad \sum_{x=1}^{2011}2^x=2^{2012}-2 \qquad \sum_{x=1}^{2011}C_{2011}^x=2^{2011}-1$$

**10*. Se consideră matricea** $A(x)=\begin{pmatrix} x^2 & 2^x \\ \frac{1}{x^2-1} & \lg\left(1-\frac{1}{x^2}\right) \end{pmatrix}$, $x\in\mathbb{R}-\{-1;0;1\}$.

**Să se calculeze suma** $A(2)+A(3)+.....+A(2016)$.

Rezolvare:

$$A(2)+A(3)+.....+A(2016)=\sum_{x=2}^{2016}\begin{pmatrix} x^2 & 2^x \\ \frac{1}{x^2-1} & \lg\left(1-\frac{1}{x^2}\right) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sum_{x=1}^{2016}x^2 & \sum_{x=2}^{2016}2^x \\ \sum_{x=2}^{2016}\frac{1}{x^2-1} & \sum_{x=2}^{2016}l\,g\left(1-\frac{1}{x^2}\right) \end{pmatrix}$$

$$\sum_{x=2}^{2016}x^2=\left(1^2+2^2+3^2+...+2016^2\right)-1=\frac{2016\cdot 2017\cdot 4033}{6}-1,$$

$$\sum_{x=2}^{2016}2^x=\left(2+2^2+2^3+....+2^{2016}\right)-2=2^{2017}-4,$$

$$\sum_{x=2}^{2016}\frac{1}{x^2-1}=\sum_{x=2}^{2016}\frac{1}{(x-1)(x+1)}=\frac{1}{2}\cdot\sum_{x=2}^{2016}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+.....+\frac{1}{2014}-\frac{1}{2016}+\frac{1}{2015}-\frac{1}{2017}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2016}-\frac{1}{2017}\right).$$

$$\sum_{x=2}^{2016}l\,g\left(1-\frac{1}{x^2}\right)=\lg\left(1-\frac{1}{2^2}\right)+\lg\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\lg\left(1-\frac{1}{4^2}\right)+...+\lg\left(1-\frac{1}{2016^2}\right)=$$

$$=\lg\frac{2^2-1}{2^2}\cdot\frac{3^2-1}{3^2}\cdot....\cdot\frac{2016^2-1}{2016^2}=\lg\frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}\cdot\frac{2\cdot 4}{3\cdot 3}\cdot\frac{3\cdot 5}{4\cdot 4}\cdot.....\cdot\frac{2015\cdot 2017}{2016\cdot 2016}=\lg\frac{2017}{2\cdot 2016}.$$

## Exercitii propuse

**1.** Fie matricele $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ -2 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$.

Să se calculeze: a) $A\cdot B$; b) $(A\cdot B)^T$; c) $B\cdot A$; d) $(B\cdot A)^T$.

**2**. Se dă matricea $A=\begin{pmatrix}0 & -3 & 2\\ 1 & 2 & 1\\ 3 & -1 & 4\end{pmatrix}$. Să se calculeze : a) $A + A^T$; b) $A - A^T$.

**3.** Să se determine matricea A dacă $A-\begin{pmatrix}3 & -2\\ 4 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 6 & 1\end{pmatrix}$.

**4**. Să se determine matricea A din ecuaţia: $3A+\begin{pmatrix}2 & -3\\ -1 & 2\\ 2 & -3\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1 & 3\\ 7 & 4\\ -2 & 6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3 & 6\\ -9 & 3\\ 3 & 0\end{pmatrix}$.

**5.** Fie matricele $A=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}$ **şi** $f(x)=x^2-2x-I_2$ .

Să se calculeze: a) A+B; b) A – B; c) A·B; d) B·A; e) $A^2$; f) $B^2$; g) f(A); h) f(B).

**6.** Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 2\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$ **şi** $B=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 2\\ 1 & 2 & -2\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix}$.

Să se calculeze: a) 3A+ 2B; b) A-2B; c) A·B ; d) $A^2$.

**7**. Să se determine matricele A şi B dacă $3\cdot A+2\cdot B=\begin{pmatrix}-3 & 8\\ 1 & 7\end{pmatrix}$ **şi** $2\cdot A-B=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 10 & 0\end{pmatrix}$.

**8.** Se consideră matricele $H(a)=\begin{pmatrix}1 & \ln a & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & a\end{pmatrix}$, unde $a\rangle 0$. Să se arate că

$H(a)\cdot H(b)=H(a\cdot b),\forall a,b\rangle 0$.

**9.** Se consideră matricele $H(a)=\begin{pmatrix}1 & 0 & a\\ -a & 1 & -\frac{1}{2}a^2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, a\in\mathbb{R}$. Să se arate că

$H(a)\cdot H(b)=H(a+b),\forall a,b\in\mathbb{R}$..

**10.** Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}x-2 & -x\\ x & x+2\end{pmatrix}$, $x\in\mathbb{R}$;

a) Să se calculeze $A(1)+A(2)$; b) Să se calculeze $A(1)\cdot A(2)$;

**11.** Fie mulțimea de matrice $M=\left\{\ A(x)=\begin{pmatrix}1 & -x\\ x & 1\end{pmatrix}\middle| x\in\mathbb{R}\ \right\}$;

a) Să se arate că $I_2\in M$; b) Dacă $A(1)\cdot A(x)=A(4)-3I_2$, atunci să se determine x.

**12.** Să se determine matricea A din egalitatea**:** $A+\begin{pmatrix}\log_3 1 & 4!\\ \sqrt[3]{-8} & e^0\end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix}\ln e & C_4^2\\ \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} & 1^{20}\end{pmatrix}$**;**

**13.** Să se determine $x,y\in\mathbb{R}$ din relația $x\cdot\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 6\\ -2 & 0\end{pmatrix}$**;**

**14.** Să se determine $x\in\mathbb{R}$ știind că $\begin{pmatrix}x & x-2\\ x-1 & x+1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 10 & 5\end{pmatrix}$**;**

**15.** Fie $M=\left\{A(x)=\begin{pmatrix}x+1 & -x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\middle| x\in\mathbb{R}\right\}$.

a) Să se arate că $I_2\in M$;

b) Să se determine x din relația $A(x)\cdot A(1)=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$;

c) Să se determine $x\in\mathbb{R}$ astfel încât $A^2(x)=A(4)$.

**16.** Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$. Determinaţi $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât $A^2=aA+bI_2$.

**17.** Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}-3 & x\\ y & 1\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}y & 4\\ 2 & x\end{pmatrix}$. Să se determine $x,y\in\mathbb{C}$ astfel încât $A\cdot B=\begin{pmatrix}4 & 13\\ 6 & 13\end{pmatrix}$.

**18.** Se consideră mulţimea $M=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & a\end{pmatrix}\middle|\ a\in\mathbb{R}\right\}$.

a) Arătaţi că $A+B\in M$ şi $AB\in M,\ \forall A,B\in M$;

b) Determinaţi matricea $\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & a\end{pmatrix}$ cu proprietatea că $\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & a\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}=I_2$;

**19.** Se consideră mulţimea matricelor $M=\left\{A=\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix},\ a,b\in\mathbb{Z}\ \right\}$.

Să se arate că $A+B=B+A$ şi $A\cdot B=B\cdot A,\ \forall A,B\in M$.

**20**. Să se determine numerele reale x, y, z astfel încât $x\cdot\begin{pmatrix}x-3 & 4\\ 1 & x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & -x\\ y & -15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12 & y+5\\ 15 & 10\end{pmatrix}$.

**21.** Să se determine $(x;y;z)\in\mathbb{R}^3$ astfel încât matricele $A=\begin{pmatrix}1 & x\\ y & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & z\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ să verifice relaţia $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

**22.** Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}2 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}$ şi mulţimea $M=\left\{X(a)=I_2+aA\middle| a\in\mathbb{R}-\{-1\}\right\}$.

a) Să se arate că $\forall a,b\in\mathbb{R}-\{-1\}, X(a)X(b)=X(a+b+ab)$;

b) Să se determine $t\in\mathbb{R}$ astfel încât $X(1)X(2)X(3).....X(2011)=X(t-1)$.

**23.** Se consideră mulţimea matricelor $G=\{A_x \mid x\in\mathbb{Z}\}$ unde $A_x=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\x&0&1\end{pmatrix}, x\in\mathbb{Z}$.

Să se arate că $A_x\cdot A_y=A_{x+y}, \forall x,y\in\mathbb{Z}$.

**24.** Fie $A=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ şi $X(a)\underline{\underline{def}}\ I_2+aA$.

a) Să se arate că $X(a)\cdot X(b)=X(a+b)$;

b) Să se rezolve ecuaţia: $X(1)\cdot X(2)\cdot....\cdot X(n)=X(2011)$

**25.** Fie $x\in\mathbb{R}$ şi matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1+2x&x\\-2x&1-x\end{pmatrix}$. Arătaţi că

$A(x)\cdot A(y)=A(x+y+xy), \forall x,y\in\mathbb{R}$.

**26.** Fie $x\in\mathbb{R}$ şi matricea $A(x)=\begin{pmatrix}\cos x&\sin x\\-\sin x&\cos x\end{pmatrix}$. Arătaţi că

$A(x)\cdot A(y)=A(x+y), \forall x,y\in\mathbb{R}$.

**27.** Fie $x,y\in\mathbb{R}$ şi matricele $A=\begin{pmatrix}x&y\\-1&0\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $O_2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$.

Determinaţi x şi y ştiind că $A^2+A+2I_2=O_2$.

**28.** Să se determine matricele $X\in M_2(\mathbb{R})$ ştiind că $\begin{pmatrix}-3&2\\1&-1\end{pmatrix}\cdot X=X\cdot\begin{pmatrix}-3&2\\1&-1\end{pmatrix}$.

**29.** Să se afle constantele reale x,y dacă matricea $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$ satisface relaţia

$A^3 = x\cdot A^2 + y\cdot A$.

**30.** Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$, $a,b\in\mathbb{R}, b\neq 0$. Să se arate că dacă matricea $X\in M_2(\mathbb{R})$ verifică relaţia $A\cdot X=X\cdot A$ atunci există $x,y\in\mathbb{R}$ astfel încât $X=\begin{pmatrix}x&y\\y&x\end{pmatrix}$.

**31.** Se consideră ecuaţia $x^2+x+1=0$ cu rădăcinile $x_1,x_2\in\mathbb{C}$ şi funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=ax^2+bx+c,\ a\neq 0$. Dacă $A=\begin{pmatrix}c&b&a\\a&c&b\\b&a&c\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&x_1&x_2\\1&x_1^2&x_2^2\end{pmatrix}$ sunt matrice din $M_3(\mathbb{C})$ să se arate că $A\cdot B=\begin{pmatrix}f(1)&f(x_1)&f(x_2)\\f(1)&x_1f(x_1)&x_2f(x_2)\\f(1)&x_1^2f(x_1)&x_2^2f(x_2)\end{pmatrix}$.

**32.** Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}e^{\ln x}&\ln x\\\sqrt{x}&\frac{1}{x}\end{pmatrix}$, $x\in\mathbb{R}_+^*$. Să se calculeze suma

$A(1)+A(2)+A(2^2)+....+A(2^{10})$;

**33**. Se consideră matricea $A(k)=\begin{pmatrix} 2k & 2^k \\ k\cdot k! & C_{100}^k \end{pmatrix}$. Să se calculeze suma

$A(1)+A(2)+A(3)+....+A(100)$;

**34**. Se consideră matricea $M_n(x)=\begin{pmatrix} 1+nx & nx \\ -nx & 1-nx \end{pmatrix}$, unde $x\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{N}^*$.

a) Demonstraţi că $M_n(x)\cdot M_n(y)=M_n(x+y), \forall x,y\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{N}^*$. Să se afle $x\in\mathbb{R}+$pentru care are loc egalitatea: $M_n\left(\sqrt{x}\right)\cdot M_n\left(\sqrt{x+3}\right)=M_n(3), \forall n\in\mathbb{N}^*$.

b) Să se demonstreze că $M_n(x)\cdot M_m(x)=M_{n+m}(x)\ \forall x\in\mathbb{R}, m,n\in\mathbb{N}^*$, și să se calculeze $M_1(1)\cdot M_2(2)\cdot...\cdot M_{2019}(1)$.

**35.** Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Să se determine toate matricele $X\in M_2(\mathbb{R})$ astfel încât $A\cdot X=X\cdot A$ ;

b) Să se rezolve ecuaţia $X^2=A$.

**36.** Se consideră mulțimea $M=\left\{ X(a)\in M_2(\mathbb{R}) \,\middle|\, X(a)=\begin{pmatrix} 3a+1 & 6a \\ -a & 1-2a \end{pmatrix}, a\in\mathbb{R} \right\}$.

a) Să se arate că $X(a)=I_2+a\cdot A$ și că $X(a)\cdot X(b)=X(a+b+ab)$, unde $A=\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$;

b) Să se determine numărul real t din relația

$X(1)\bullet X(2)\bullet X(3)\bullet.....\bullet X(2013)\bullet X(2014)=X(t-1)$.

**37**. Se consideră matricea $M(x)=\begin{pmatrix} 1-x & x \\ -x & 1+x \end{pmatrix}$, $x\in\mathbb{R}$.

a) Arătați că M(-1) + M(1) = 2M(0)

b) Demonstrați că $M(x)\cdot M(y)=M(x+y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}$;

c) Demonstrați că pentru orice număr real a, există un număr real x astfel încât $M(x)\cdot M(x)=M(a)$.

( Simulare BAC 2019)

**38. Fie** $M=\left\{ X(a)=\begin{pmatrix} 1-a & 0 & 2a \\ 0 & 1 & 0 \\ -a & 0 & 1+2a \end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{R}) \right\}$ **și** $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$**.**

**a) Să se arate că** $X(a)=I_3+a\cdot A$;

**b) Arătați că** $X(a)\cdot X(b)=X(a+b+a\cdot b),\ \forall a,b\in\mathbb{R}$;

c) **Să se calculeze** produsul $P=X(-10)\cdot X(-9)\cdot....\cdot X(0)\cdot.....\cdot X(9)\cdot X(10)$.

**39.** Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **,** $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ din $M_3(\mathbb{R})$

şi funcţia $f:M_3(\mathbb{R})\to M_3(\mathbb{R})$, $f(X)=X^2-X+I_3$ unde $X^2=X\cdot X$

a) Să se demonstreze că $f(A)=I_3+B$;

b) Să se arate că $(f(A))^3=I_3+3B+3B^2$ unde( $(f(A))^3=f(A)\cdot f(A)\cdot f(A)$

## 1.3 Puterile unei matrice

***Definiţie.*** Fie $A\in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Atunci $A^1=A,\ A^2=A\cdot A,\ A^3=A^2\cdot A,\ \ldots,\ A^n=A^{n-1}\cdot A,\ \forall\ n\in\mathbb{N}^*$. (Convenim $A^0=I_n$).

**TEOREMA Hamilton-Cayley.** Orice matrice $A\in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ îşi verifică polinomul caracteristic $\det(A-\lambda I)=0$.

Pentru *n* = 2. Fie $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{C})$. Atunci $A^2-(a+d)\cdot A+(ad-bc)\cdot I_2=0_2$

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\Rightarrow \det A=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc \qquad A-\lambda I=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix}.$$

$$\det(A-\lambda I)=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix}=0\Leftrightarrow(a-\lambda)(d-\lambda)-bc=0\Rightarrow ad-(a+d)\lambda+\lambda^2-bc=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lambda^2-(a+d)\lambda+ad-bc=0\ (\text{polinom caracteristic})$$

Generalizare: $A^n-(\mathrm{Tr}A)\cdot A^{n-1}+(\det A)\cdot I_n=0,\ \forall\ A\in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

***Exemple***

**1. Fie matricea** $A=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$ **. Să se arate că** $A^{2021}=I_3$

Rezolvare:
Deoarece $A^3=I_3$ şi cum $A^{2021}=(A^3)^{667}=(I_3)^{667}$, rezultă că $A^{2021}=I_3$.

**2. Se consideră matricea** $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$**. Să se arate că** $A^{2011}=I_2$.

Rezolvare: Cum urma matricei este egală cu 0 și determinantul matricei este -1 rezultă din $A^n-(\mathrm{Tr}A)\cdot A^{n-1}+(\det A)\cdot I_2=0,\forall A\in M_2(\mathbb{R})$ că $A^{2020}=I_2$ .

### Exercitii rezolvate

**1. Să se calculeze** $A^n,\ n\in\mathbb{N}^*$ **unde** $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$**.**

Rezolvare: Se calculează mai întâi $A^2=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^3=\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^4=\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,..... și se observă că $A^n=\begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ care se va demonstra prin inducție matematică.

Fie (P(k)) $A^k=\begin{pmatrix}1 & 2k\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $k\in\mathbb{N}^*$ fixat și să demonstrăm pentru (P(k+1))

$A^{k+1}=\begin{pmatrix}1 & 2(k+1)\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

Demonstrație:

$A^{k+1}=A^k\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 2k)\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2(k+1)\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ adevărată, deci $A^n=\begin{pmatrix}1 & 2n\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$

**2.** **Fie** $A=\begin{pmatrix}4 & -2\\ 8 & -4\end{pmatrix}$**. Să se calculeze suma** $S=A+2A^2+3A^3+...+2011A^{2011}$**.**

Rezolvare: Se observă că $A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}4 & -2\\ 8 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & -2\\ 8 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow$

$S=A+2A^2+3A^3+...+2011A^{2011}=A.$

**3.** Să se calculeze $A^n$, unde $A=\begin{pmatrix}1 & i\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $n\in\mathbb{N}^*$.

Rezolvare: $A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}1 & i\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & i\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2i\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 2i\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & i\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3i\\ 0 & 1\end{pmatrix}$,

Se observă că $\boxed{A^n=A^{n-1}\cdot A=\begin{pmatrix}1 & ni\\ 0 & 1\end{pmatrix},\forall n\in\mathbb{N}^*}$ (*)

Pentru demonstraţie, vom folosi metoda inducţiei matematice:

Pentru n=1, relaţia (*) se verifică. Presupunem că $A^k=\begin{pmatrix}1 & ki\\ 0 & 1\end{pmatrix},k\in\mathbb{N}^*$, este adevărată şi

demonstrăm că $A^{k+1}=\begin{pmatrix}1 & (k+1)i\\ 0 & 1\end{pmatrix},k\in\mathbb{N}^*$, este adevărată.

$A^{k+1}=A^k\cdot A=\begin{pmatrix}1 & ki\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & i\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & (k+1)i\\ 0 & 1\end{pmatrix},k\in\mathbb{N}^*,$ *ceea ce trebuia demonstrat* .

**4.** Fie $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ . Să se calculeze $A^n$, $n\in\mathbb{N}^*$.

$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$\vdots$

$A^n=\begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

Inducţie matematică $P(k)\to P(k+1)$

$A^{n+1}=\begin{pmatrix}1 & n+1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$A^{n+1}=A^n\cdot A=\begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & n+1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ **(A)** Deci $A^n=\begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

**5.** **Se consideră matricea** $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & -1\end{pmatrix}$. **Să se determine** $n\in\mathbb{N}^*$ **pentru care** $\det(A+A^2+A^3+...+A^n)=0$**;**

**Rezolvare.** Se observă că $A^2=I_2$ şi $A^3=A$. Suma dată se va studia după paritatea lui n. Dacă n este par adică n=2k atunci $A+A^2+A^3+...+A^{2k}=\begin{pmatrix}2k & 3k\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ iar determinantul sumei este egal cu zero.

Dacă n este impar adică n=2k+1 atunci $A+A^2+A^3+...+A^{2k+1}=\begin{pmatrix}2k+1 & 3k+3\\ 0 & -1\end{pmatrix}$iar determinantul sumei este egal cu -2k-1 care este nenul, prin urmare,
$\det(A+A^2+A^3+...+A^n)=0\Leftrightarrow n$este par.

**6.** **Se consideră matricele** $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -1 & 2\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$ **şi** $X(a)=I_2+a\cdot A$**. Să se arate:**

**a)** $X(a)\cdot X(b)=X(a+b+a\cdot b)$**,** $a,b\in\mathbb{R}$ **;**

**b)** $X^2(a)=X((a+1)^2-1)$**, şi să se calculeze** $X^{2020}(1)$;

Rezolvare:

a) $X(a)\cdot X(b)=(I_2+aA)(I_2+bA)=I_2+(a+b+ab)A=X(a+b+a\cdot b)$;

b) $X^2(a)=X(a)\cdot X(a)=X(a+a+a^2)=X((a+1)^2-1)$,

$X^2(1)=X(2^2-1)$, $X^3(1)=X(2^2-1)\cdot X(1)=X(2^3-1)$, …… $X^{2020}(1)=X(2^{2020}-1)$.

## Exercitii propuse

**1.** Fie $A=\begin{pmatrix}6 & 4\\ -9 & -6\end{pmatrix}$. Să se calculeze suma $S=A+2A^2+3A^3+...+2011A^{2011}$.

**2.** Fie matricea $A=\begin{pmatrix}-6 & 3\\ 8 & 2\end{pmatrix}$. Determinaţi $X\in M_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea $X^2=A$.

**3.** Fie matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 12\\ -4 & 1\end{pmatrix}$. Determinaţi $X\in M_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea $X^2=A$.

**4.** Fie matricea $A=\begin{pmatrix}2 & -6\\ 1 & -3\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$.

a) Să se arate că $A^2+A^3=O_2$; b) Să se calculeze suma $A+2A^2+3A^3+.....+10A^{10}$;

**5**. a) Să se arate că pentru orice matrice $A\in M_2(\mathbb{R})$, $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$are loc egalitatea

$A^2-(a+d)\cdot A+(ad-bc)\cdot I_2=O_2$;

b) Să se calculeze $A^{100}$; pentru $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$.

**6.** Fie matricea $A=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$. Să se demonstreze că A verifică egalitatea $A^2-5A-2I_2=O_2$;

**7.** Fie matricea $A=\begin{pmatrix}a & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$. a) Să se verifice egalitatea $A^2-(a+1)\cdot A+(a-6)\cdot I_2=O_2$;

b) Să se determine $a\in\mathbb{R}$ știind că matricea A verifică egalitatea $A^2=7\cdot I_2$;

**8.** Fie matricea $A=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$.

a) Să se arate că $A^2=6(A-I_2)$;

b) Să se determine $a\in\mathbb{R}$ știind că matricea A verifică egalitatea $A^3-aA^2+6A=O_2.$;

**9.** Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}x-3 & 1\\ 1 & x-3\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R}),\ x\in\mathbb{R}$.

Să se arate că $A^2=(2x-6)\cdot A-(x^2-6x+8)\cdot I_2$;

**10.** Să se determine matricea $X\in M_2(\mathbb{C})$ astfel încât $X^2=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

**11.** Fie matricea $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 8 & 0\\ 0 & 0 & 8\end{pmatrix}$ Determinaţi $X\in M_3(\mathbb{R})$ cu proprietatea $X^3=A$.

**12.** În mulţimea $M_3(\mathbb{C})$ se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$.

**a)** Să se determine $X\in M_3(\mathbb{C})$ astfel încât $A\cdot X=X\cdot A$;

**b)** Să se determine numărul de soluţii ale ecuaţiei $X^5 = A$ în $M_3(\mathbb{C})$.

**13.** Determinaţi matricele $A\in M_2(\mathbb{R})$ astfel încât $A^4=\begin{pmatrix}4 & -2\\ 6 & -3\end{pmatrix}$.

**14.** Se consideră matricele $A(x)=\begin{pmatrix}1 & 0 & x\\ 0 & 2016^x & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\ x\in\mathbb{R}$.

a) Să se arate că $A(x)\cdot A(y)=A(x+y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}$;

b) Să se determine $x\in\mathbb{R}$ știind că $A(1)\cdot A(2)\cdot A(3)\cdot.....\cdot A(x)=A(2016)$;

c) Să se calculeze $A^n(x),\ n\in\mathbb{N}$.

**15.** Să se ridice la puterea $n\in\mathbb{N}$, matricele:

a) $A=\begin{pmatrix}1 & \sqrt{2} & 1\\ 0 & 1 & \sqrt{2}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$; b) $A=\begin{pmatrix}\sqrt{3} & \sqrt{2} & 1\\ 0 & \sqrt{3} & \sqrt{2}\\ 0 & 0 & \sqrt{3}\end{pmatrix}$;

**16.** Fie $A(x)=\begin{pmatrix}1-2x & x\\ -6x & 1+3x\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$.

a) Să se arate că $A(x)\cdot A(y)=A(x+y+xy),\ \forall x,y\in\mathbb{R}$;

b) Să se arate că $A^2(x)=A\left((x+1)^2-1\right)$;

c) Să se calculeze $A^{2016}(1)$.

**17**. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}x+1 & x^2-1\\ 1 & x-1\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{C})$.

a) Să se determine $x\in\mathbb{C}$ astfel încât $A^4(x)+A^2(x)=O_2$;

b) Să se demonstreze că, dacă $n\in\mathbb{N},n\geq 2$ atunci ecuația $X^n=A(0),\ X\in M_2(\mathbb{C})$ nu are soluții.

**18**. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 2\end{pmatrix}$. Determinați $n\in\mathbb{N}^*$, știind că $A^n+A^{n+2}=810A$.

**19**. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 2 & -1\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$. Notăm cu $A^n=\underbrace{A\cdot A\cdot.....\cdot A}_{n\ termeni},\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

a) Să se arate că $A^3+5A=O_2$, unde $O_2$ este matricea nulă;

b) Să se calculeze $A^{100}$.

**20**. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}-4 & 2\\ -6 & 3\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$. Notăm cu $A^n=\underbrace{A\cdot A\cdot.....\cdot A}_{n\ termeni},\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

a) Să se arate că $A^2+A^3=O_2$, unde $O_2$ este matricea nulă;

b) Să se calculeze suma $A+2A^2+3A^3+\ldots.+100A^{100}$.

21**.** Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ din $M_2(\mathbb{R})$.

a) Să se calculeze $C=A+BI_2$;

b) Să se calculeze suma $C+C^2+C^3+\ldots.+C^{2010}$.

# Cap. 2 DETERMINANȚI

## 2.1 Determinanţii de ordinul doi şi trei

Fie $A=(a_{ij}) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ o matrice pătratică. Vom asocia acestei matrice un număr notat **det(*A*)** numit **determinantul matricei** *A*.

***Definiţie.*** Determinantul matricei $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ este numărul

$$\det(A)=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

şi se numeşte **determinantul de ordin** 2. Termenii $a_{11}a_{22}$, $a_{12}a_{21}$ se numesc termenii dezvoltării determinantului de ordin 2.

***Exemplu: Să se calculeze determinantul:*** $\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$.

Rezolvare: $\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=4\cdot 1-(-3)\cdot 2=4+6=10.$

| **Activitate independentă** | | **Răspuns** |
|---|---|---|
| Să se calculeze determinantul: $\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}$. | | **-20** |

***Definiţie.*** Determinantul matricei

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{este numărul}$$

$$\det(A)=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{23}a_{32}a_{11}-a_{33}a_{12}a_{21}$$

şi se numeşte **determinantul de ordin** 3. Termenii care apar în formulă se numesc termenii dezvoltării determinantului.

Pentru calculul determinantului de ordin trei se pot folosi următoarele reguli:

**Regula lui Sarrus**

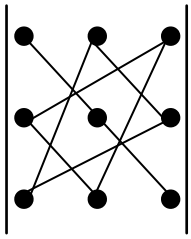
Fie determinantul de ordin 3, $d=(a_{ij})_{i,j=\overline{1,3}}$. Pentru a calcula un astfel de determinant se scriu primele două linii sub celelalte şi se face suma produselor elementelor de pe diagonale, primele trei cu plus, $a_{11}a_{22}a_{33}, a_{21}a_{32}a_{13}, a_{31}a_{12}a_{23}$ iar ultimele trei cu minus, $-a_{13}a_{22}a_{31}, -a_{23}a_{32}a_{11}, -a_{33}a_{12}a_{21}$. Suma celor şase produse dă valoarea determinantului *d* de ordin 3. Acest procedeu de calcul se numeşte „regula lui Sarrus”.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$ (am scris sub determinant primele două linii)

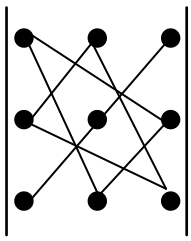
$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix}$$

**Regula triunghiului**

Am văzut că determinantul de ordin trei are în dezvoltarea sa şase termeni, trei cu semnul plus şi alţi trei cu semnul minus.



Primul termen cu plus se găseşte înmulţind elementele de pe diagonala principală, iar ceilalţi doi, înmulţind elementele situate în vârfurile celor două triunghiuri care au o latură paralelă cu diagonala principală.



După aceeaşi regulă, referitoare la diagonala secundară, se obţin termenii cu minus.

**Observaţie:** Atât „regula lui Sarrus" cât şi „regula triunghiului" se aplică **numai determinanţilor de ordin 3**.

***Exemple.1.***

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot 3\cdot 3 + 0\cdot 1\cdot 3 + 2\cdot 2\cdot(-1) - 3\cdot 3\cdot 2 - (-1)\cdot 1\cdot 1 - 3\cdot 2\cdot 0 = 9 - 4 - 18 + 1 = -12$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \end{matrix}$$

***2. Să se calculeze determinantul:***

$$d = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

**R.** Aplicăm una din regulile de calcul şi obţinem:

$$d = 3\cdot(-1)\cdot 0 + 1\cdot 2\cdot 1 + 1\cdot 2\cdot 3 - 1\cdot(-1)\cdot 1 - 3\cdot 2\cdot 3 - 0\cdot 2\cdot 1 = -9$$

Determinantul de ordin 3 are 6 ( = 3!) termeni dintre care trei sunt cu semnul plus, iar ceilalţi cu semnul minus.

Determinantul de ordinul trei se mai poate calcula şi astfel:

$$\det(A) = (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} a_{23} \\ a_{31} a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} a_{22} \\ a_{31} a_{32} \end{vmatrix} \text{ sau} \qquad (1)$$

$$= (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{2+1} a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} a_{13} \\ a_{32} a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{3+1} a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} a_{13} \\ a_{22} a_{23} \end{vmatrix} \quad . \qquad (2)$$

***Observaţii***

**1)** Egalitatea (1) se mai numeşte **dezvoltarea determinantului după elementele liniei întâi**, iar egalitatea (2) se numeşte **dezvoltarea determinantului după elementele coloanei întâi**.
**2)** Formulele (1) şi (2) sunt relaţii de **recurenţă**, deoarece determinantul de ordin 3 se exprimă cu ajutorul unor deteminanţi de ordin inferior (2).

| **Activitate independentă** | | **Răspuns** |
|---|---|---|
| Să se calculeze determinantul: | $d=\begin{vmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ | **-11** |

***Exemplu:***

***Să se rezolve ecuaţia:*** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & x^2 & 2x \end{vmatrix}=0$**.**

Rezolvare:
Ecuaţia dată este echivalentă cu $-2x+2x^2+6+3-x^2-8x=0$, de unde rezultă ecuaţia $x^2-10x+9=0$ cu soluţiile $x_1=1$ şi $x_2=9$.

| **Activitate independentă** | | **Răspuns** |
|---|---|---|
| Să se rezolve ecuaţia: | $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & x^2 & 2x+6 \end{vmatrix}=0$ | **x= -1, x=3** |

**Definiţie.** *Se numeşte* ***determinant de ordinul n*** *al matricei pătratice* $A=(a_{ij})\in \mathrm{M}_n(C)$ numărul $\det(A)=\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)\cdot a_{1\sigma(1)}\cdot a_{2\sigma(2)}\cdot\ldots\cdot a_{n\sigma(n)}$, unde $\mathbf{S_n}$ reprezintă numărul tuturor permutărilor de gradul n iar $\varepsilon(\sigma)$ se numeşte **semnul permutării** $\sigma$.

***Observaţii***

**1**. Noţiunea de determinant al unei matrice are sens numai pentru matricele pătratice.

**2**. A nu se confunda faptul că matricea reprezintă o funcţie $A:\mathbb{N}^2\to\mathbb{C}$ iar determinantul un număr.

**3**. $\det(\mathbf{I_n})=1$.

Vom defini în continuare determinantul de ordin ***n*** prin recurenţă cu ajutorul determinanţilor de ordin ***n – 1***.

Fie $A=(a_{ij})\in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

***Definiţie.*** Fie $A=(a_{ij})\in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Se numeşte **minor** asociat elementului $a_{ij}$, determinantul matricei pătratice $A_{ij}$ de ordin ***n – 1*** obţinut prin suprimarea liniei ***i*** şi a coloanei ***j*** din matricea ***A***. Se notează acest minor prin $\det(A_{ij})$ sau $d_{ij}$.

***Definiţie.*** Se numeşte **complement algebric** al elementului $a_{ij}$ numărul $(-1)^{i+j}\cdot d_{ij}$. Exponentul $i+j$ al lui (–1) este suma dintre numărul liniei ***i*** şi a coloanei ***j*** pe care se află $a_{ij}$.

***Definiţie.*** Determinantul matricei $A=(a_{ij})$de ordin ***n*** este suma produselor elementelor din prima linie cu complementii lor algebrici adică
$\det(A)=a_{11}d_{11}-a_{12}d_{12}+a_{13}d_{13}-...+(-1)^{n+1}a_{1n}d_{1n}$ iar dezvoltarea determinantului după elementele liniei ***i*** *este* $\det(A)=a_{i1}(-1)^{i+1}d_{i1}+a_{i2}(-1)^{i+2}d_{i2}+a_{i3}(-1)^{i+3}d_{i3}+...+a_{in}(-1)^{i+n}d_{in}$
Se va alege acea linie care are mai multe zerouri sau pe care se pot realiza (cât mai uşor) mai multe zerouri.

***Observaţii***

**1)** Elementelor, liniilor şi coloanelor matricii ***A*** le vom spune de asemenea elementele, liniile şi coloanele determinantului

$$\det(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

**2)** Formula din definiţie spunem că reprezintă **dezvoltarea determinantului de ordin *n* după elementele primei linii**.

***Exemplu . Să se calculeze determinantul de ordinul 4:***

$$d=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

**Rezolvare:** Aplicăm definiţia dată mai sus pentru $n = 4$ şi dezvoltăm determinantul după elementele liniei întâi. Avem:

$$d=1\cdot\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}-0\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}+(-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}=$$
$$=0-0-1+2=1\ .$$

## Exercitii rezolvate

**1. Să se calculeze determinanţii:**

**a)** $\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$; **b)** $\begin{vmatrix} \sqrt{3} & 2\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} & 1 \end{vmatrix}$; **c)** $\begin{vmatrix} 1+2i & -2i \\ i & 1-2i \end{vmatrix}$; **d)** $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$; e) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$;

**f)** $\begin{vmatrix} 1 & 1-i & 1-2i \\ 1-i & 1 & 1-2i \\ 1-2i & 1 & 1-i \end{vmatrix}$.

Rezolvare:

**a)** $\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) = -1;$

**b)** $\begin{vmatrix} \sqrt{3} & 2\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} & 1 \end{vmatrix} = \sqrt{3} - 2\sqrt{3} \cdot (1-\sqrt{3}) = \sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 6 = 6 - \sqrt{3};$

**c)** $\begin{vmatrix} 1+2i & -2i \\ i & 1-2i \end{vmatrix} = (1+2i)(1-2i) - (-2i)i = 1 + 4 - 2 = 3;$

**d)** $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 + 8 + 0 - 0 - 2 - 2 = 1;$

**e)** $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = abc + abc + abc - c^3 - a^3 - b^3 = 3abc - (a^3 + b^3 + c^3).$

**f)** 9(1-i).

**2. Să se rezolve ecuaţiile:**

**a)** $\begin{vmatrix} x+1 & x+2 & x \\ x & x-1 & x-2 \\ x-2 & x & x+1 \end{vmatrix} = 0;$ **b)** $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 1 & x+1 & 1 \\ x & x-1 & 3 \end{vmatrix} = 0;$ **c)** $\begin{vmatrix} 1 & x+3 & 1 \\ -1 & x & -x+3 \\ 1 & -x-3 & -x \end{vmatrix} = 16 - 2x;$

**d)** $\begin{vmatrix} x+2 & x \\ 2x & 3 \end{vmatrix} + x(x-1) = 3;$ **e)** $3 \cdot \begin{vmatrix} x-1 & 2 \\ x & x+1 \end{vmatrix} - 2x(x+2) = 8;$

Rezolvare:

**a**) Ecuaţia dată este echivalentă cu

$(x+1)(x^2-1) + x^3 + (x^2-4)(x-2) - x(x-1)(x-2) - (x^2+x)(x-2) - (x^2+x)(x+2) = 0 \Leftrightarrow$

$x^3 - x + x^2 - 1 + x^3 + x^3 - 2x^2 - 4x + 8 - x^3 + 2x^2 + x - 2x - x^3 + 2x^2 - x^2 + 2x$

$-x^3 - 2x^2 - x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow$

$-7x + 7 = 0 \Rightarrow x = 1.$

**b**) Ecuaţia dată este echivalentă cu $3x^2 + 3x + 2x - 2 + x - 2x^2 - 2x - x^2 + x - 3 = 0 \Rightarrow$

5x = 5. Rezultă x = 1.

**c**) Ecuaţia dată este echivalentă cu $-x^2 + x + 3 + 9 - x^2 - x - x^2 + 9 - x^2 - 3x = 16 - 2x$

$-4x^2 - 3x + 21 + 2x - 16 = 0 \Rightarrow$

$-4x^2 - x + 5 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 + x - 5 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm 9}{8} \Rightarrow x_1 = -\frac{5}{4}$ şi $x_2 = 1.$

**d)** $\begin{vmatrix} x+2 & x \\ 2x & 3 \end{vmatrix} + x(x-1) = 3 \Leftrightarrow -2x^2 + 3x + 6 + x^2 - x = 3$.

Rezultă, $-x^2 + 2x + 3 = 0 \Rightarrow x_1 = -1$ şi $x_2 = 3$.

**e)** $3 \cdot \begin{vmatrix} x-1 & 2 \\ x & x+1 \end{vmatrix} - 2x(x+2) = 8 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 - 6x - 2x^2 - 4x = 8$.

Rezultă, $x^2 - 10x - 11 = 0 \Rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 11$.

**3. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ inecuaţia:** $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ x & 1 & -1 \\ x^2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \geq 0$.

Rezolvare:
Calculând determinantul , inecuaţia dată este echivalentă cu $3x + 6 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2 \Rightarrow x \in [-2; +\infty)$.

**4. Să se rezolve inecuaţia** $\frac{D(x)}{x+1} \geq 0$ **unde** $D(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & x & 2 \end{vmatrix}$.

Rezolvare:

$$D(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & x & 2 \end{vmatrix} = 2 + 3x^2 - 2 - 2x + x - 6 = 3x^2 - x - 4 = (x+1)(3x-4).$$

Atunci, $\frac{D(x)}{x+1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)(3x-4)}{x+1} \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{4}{3}$.

**5. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuaţia** $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ x & 1 & 1 \\ x^2 & 3 & 2 \end{vmatrix} \geq 3$.

Rezolvare:

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ x & 1 & 1 \\ x^2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 6x - x^2 - 2x^2 - 3 + 2x = -3x^2 - 8x - 1$. Atunci inecuaţia dată este echivalentă cu

$-3x^2 + 8x - 1 \geq 3 \Leftrightarrow 3x^2 - 8x + 4 \leq 0 \Rightarrow x \in [\frac{2}{3}; 2]$.

## Exercitii propuse

**1.** Să se calculeze determinanţii:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ \frac{3}{2} & 1 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 2\sqrt{2} \end{vmatrix}$; e) $\begin{vmatrix} 1+\sqrt{3} & 3\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 1-\sqrt{3} \end{vmatrix}$;

f) $\begin{vmatrix} 2\sqrt{2}-\sqrt{3} & 1+\sqrt{2} \\ 1-\sqrt{2} & 2\sqrt{2}+\sqrt{3} \end{vmatrix}$; g) $\begin{vmatrix} \sin 30^0 & \cos 30^0 \\ tg30^0 & ctg30^0 \end{vmatrix}$; h) $\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x \end{vmatrix}$; i) $\begin{vmatrix} e^x & 5^x \\ 5^{-x} & e^{-x} \end{vmatrix}$; j) $\begin{vmatrix} 2i & 2 \\ 1 & i \end{vmatrix}$;

k) $\begin{vmatrix} 1+i & 2+i \\ 2-i & 1-i \end{vmatrix}$; l) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$; m) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ i & 0 & -1 \\ -1 & i & 1 \end{vmatrix}$; n) $\begin{vmatrix} 0! & 1! & 2! \\ 2! & 3! & 4! \\ 3! & 2! & 1! \end{vmatrix}$; o) $\begin{vmatrix} C_5^3 & C_5^4 & C_5^5 \\ C_4^2 & C_4^3 & C_4^4 \\ C_3^1 & C_3^2 & C_3^3 \end{vmatrix}$;

**2** . Să se calculeze $\Delta(1)$ pentru determinanții: a) $\Delta(x)=\begin{vmatrix} 2^x & \ln x \\ \sqrt{x^2-1} & 3^x \end{vmatrix}$; b) $\Delta(x)=\begin{vmatrix} \log_3 x & 2^{x-1} \\ 3^x & e^x \end{vmatrix}$

**3**. Fie matricea $A(x)=\begin{pmatrix} x+4 & 3 \\ 3 & x-4 \end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$; Să se rezolve ecuația $\det A(x)=0$;

**4.** Se consideră matricele $A(x)=\begin{pmatrix} x & -2 & -1 \\ 2 & x-4 & 3 \\ x+1 & -2 & 6 \end{pmatrix}, \forall x\in\mathbb{R}$;

a) Să se calculeze determinantul matricei $A(2)$;

b) Să se rezolve ecuația $\det A(x)=0$;

**5**. Se consideră determinantul $D(m)=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ m & 1 & -1 \\ 2 & 3 & m \end{vmatrix}$, $m\in\mathbb{R}$.

a) Calculați $D(0)$;

b) Arătați că $D(m)=(m+2)(m+3),\ \forall m\in\mathbb{R}$;

c) Determinați numerele naturale n pentru care $D(n^2-3n)=0$. ( Simulare BAC 2015)

**6**. Se consideră determinantul $D(a)=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ a+1 & a & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$, $a\in\mathbb{R}$.

a) Arătați că $D(a)=-12$;

b) Determinați numerele reale a pentru care $D(a)=a^2$; ( Simulare BAC 2017)

**7**. Se consideră determinantul $D(a)=\begin{vmatrix} a+1 & 2a+2 & a^2-1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$, $a\in\mathbb{R}$.

a) Arătați că $D(o)=-5$;

b) Demonstrați că $D(a)=(a-5)(a+1),\ \forall a\in\mathbb{R}$;

c) Determinați numerele întregi a pentru care $D(a)\langle -3a-3$. ( Simulare BAC 2019)

**8**. Se consideră determinantul $d(x)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & x+1 \\ 3 & 3 & x^2+2 \end{vmatrix}$, $x\in\mathbb{R}$.

a) Calculați d(0);

b) Demonstrați că $d(x)=-2(x-1)(x+1),\ \forall x\in\mathbb{R}$;

c) Arătați că dacă x și y sunt două numere reale diferite astfel încât d(x)=d(y), atunci x+y=0.

( Simulare BAC 2016)

**9**. Se consideră determinantul $D(x)=\begin{vmatrix} x & x & x \\ 3 & -1 & x \\ 2 & x & -1 \end{vmatrix}$, $x\in\mathbb{R}$.

a) Arătați că D(-2) = 16;

b) Demonstrați că $D(x)=x(x+1)(6-x),\ \forall x\in\mathbb{R}$.

c) Determinați numerele naturale a pentru care $D(\sqrt{a})=0$. ( Simulare BAC 2018).

**10.** Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$ și $O_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ din $M_2(\mathbb{R})$. Se notează

$A^n=\underbrace{A\cdot A\cdot.....\cdot A}_{n\ termeni},\ n\in\mathbb{N}^*$ .

a) Să se arate că $A^2+A=O_2$;

b) Să se determine matricele $X=\begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix}\in M_2(R)$, astfel încât det(X+A)=4;

c) Să se calculeze suma $A+2A^2+3A^3+\ldots+100A^{100}$.

**11.** Să se calculeze determinanţii:

a) $\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ a & a^2 & 1 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} a & a+1 & a+2 \\ 1 & -1 & 1 \\ a & a & a \end{vmatrix}$;

**12.** Să se rezolve ecuaţiile:

a) $\begin{vmatrix} x & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=1$; b) $\begin{vmatrix} x & 2 \\ 3 & x \end{vmatrix}=10$; c) $\begin{vmatrix} x+1 & x \\ x-1 & 1 \end{vmatrix}=3-x$; d) $\begin{vmatrix} x^2+2x & x+3 \\ 5 & 4x \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -6x & 19 \\ x+1 & x \end{vmatrix}$;

e) $\begin{vmatrix} x^2+3x & x \\ 5 & 2x \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2x & 2+x \\ 2x & x^2 \end{vmatrix}$; f) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & x-3 \\ 2 & 3 & x-1 \\ 3 & 1 & x-2 \end{vmatrix}=0$

**13.** Se consideră determinantul $D(a)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 1\\ a^2 & a & -3\end{vmatrix}$. Să se rezolve ecuaţia $D(2^x)=0$.

**14.** Să se rezolve ecuaţiile:

a) $\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\ 2^x & 3^x & 1\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}=0$; b) $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2^x & 3^x\\ 1 & 4^x & 9^x\end{vmatrix}=0$; c) $\begin{vmatrix}3^x & 1 & 1\\ 1 & 3^x & 1\\ 1 & 1 & 3^x\end{vmatrix}=0$;

**15.** Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ inecuaţia: $\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & x^2 & x\\ -2 & 1 & 2\end{vmatrix}\rangle 0$.

**16.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuaţia $\begin{vmatrix}2 & x+2 & -1\\ 1 & 1 & -2\\ 5 & -3 & x\end{vmatrix}\rangle 0$.

**17.** Se consideră matricele $H(a)=\begin{pmatrix}1 & \ln a & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & a\end{pmatrix}$, unde $a\rangle 0$. Să se calculeze determinantul matricei $H(1) + H(2) + H(3) + .....+H(2011)$.

**18.** Se consideră matricele $H(a)=\begin{pmatrix}\log_2 a & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ a & 0 & 1\end{pmatrix}, a\rangle 0$. Să se calculeze determinantul matricei $H(2) + H(2^2) + H(2^3) + .....+H(2^{2011})$.

**19.** Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & -1\end{pmatrix}$. Să se determine $n\in\mathbb{N}^*$ pentru care $\det(A+A^2+A^3+...+A^n)=0$;

**20.** Se consideră matricele $A_n=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2^n & 0\\ 0 & 0 & 4^n\end{pmatrix}$. Să se afle $n\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $\det(A_n)\cdot\det(A_{n+1})=512$.

**21.** Se consideră matricele $A(x)=\begin{pmatrix}x+1 & -1 & 2\\ 2 & x+3 & -1\\ 2 & 1 & x+1\end{pmatrix}, x\in\mathbb{R}$.

a) Să se arate că $\det(A(x)+A(-x))=0$;

b) Să se rezolve ecuaţia $\det(A(x))=0$.

**22.** Fie matricea $A=\begin{pmatrix}a & 1 & a\\ a+1 & a & a-1\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{R})$. Să se arate că ecuaţia $X^{2012}+X^{2010}=A^{2011}$ nu are soluţii în $M_3(\mathbb{R})$.

**23.** În mulţimea $M_3(\mathbb{C})$ se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze $A^2$ şi det(A);
b) Să se determine $X \in M_3(\mathbb{C})$ astfel încât $A \cdot X = X \cdot A$;
c) Să se determine numărul de soluţii ale ecuaţiei $X^2 = A$ în $M_3(\mathbb{C})$.

**24**. Se consideră determinantul $\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$, unde $a,b,c \in \mathbb{R}$.

a) Să se calculeze determinantul $\Delta$**;**
b) Să se arate că $\Delta = \frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$.
c) Să se rezolve în R ecuaţia: $8^x + 27^x + 125^x - 3\cdot(2\cdot 3\cdot 5)^x = 0$**.**

**25**. Se consideră determinantul $\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$, unde $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ sunt soluţiile ecuaţiei

$x^3$ -4x+3=0.
a) Să se calculeze $x_1 + x_2 + x_3$;
b) Să se arate că $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -9$;
c) Să se calculeze valoarea determinatului $\Delta$.

**26.** Se consideră determinantul $\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$, unde $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ sunt soluţiile ecuaţiei

$x^3$ -5$x^2$+2x+1=0.
a) Să se calculeze $x_1 + x_2 + x_3$;
b) Să se calculeze $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.
c) Să se calculeze valoarea determinatului $\Delta$.

**27**. Se consideră matricele de forma $M_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \ln a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, $a \rangle 0$.

a) Să se arate că $M_a \cdot M_b = M_{a\cdot b}, \forall a,b \rangle 0$.
b) Să se calculeze determinantul matricei $M_1 + M_2 + M_3 + ..... + M_{2010}$;
c) Să se calculeze $M(a)^{100}$.

## 2.2 Proprietăţile determinanţilor

**$P_1$. Determinantul unei matrice este egal cu determinantul matricei transpuse adică dacă $A \in M_n(C)$, atunci $\det(A) = \det(A^T)$;**

***Demonstraţie.*** Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ şi $A^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.

Atunci, $\det(A) = ad - bc$, iar $\det(A^T) = ad - bc$. Prin urmare , $\det(A) = \det(A^T)$.

***Exemplu***: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$;

**$P_2$. Dacă toate elementele unei linii (sau coloane) dintr-o matrice sunt nule, atunci determinantul matricei este nul.**

***Demonstraţie.*** Avem $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{vmatrix} = 0 \cdot d - 0 \cdot c = 0$ şi $\begin{vmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{vmatrix} = 0 \cdot d - 0 \cdot b = 0$.

***Exemplu***: $\begin{vmatrix} 3 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 0$;

**$P_3$. Dacă într-o matrice schimbăm două linii (sau două coloane) între ele obţinem o matrice care are determinantul egal cu opusul determinantului matricei iniţiale.**

***Demonstraţie.*** Prin schimbarea liniilor obţinem egalitatea $\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$. Evident $bc - ad = -(ad - bc)$.

***Exemplu***: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2 \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2 = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$;

**$P_4$. Dacă o matrice are două linii (sau coloane) identice, atunci determinantul său este nul.**

***Demonstraţie.*** Verificăm pentru linii (şi tot odată pentru coloane). Avem:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = a \cdot b - a \cdot b = 0 .$$

***Exemplu:*** $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0$;

**$P_5$. Dacă toate elementele unei linii (sau coloane) ale unei matrici sunt înmulţite cu un număr $\alpha$, obţinem o matrice al cărei determinant este egal cu $\alpha$ înmulţit cu determinantul matricei iniţiale.**

***Demonstraţie.*** Verificăm pentru linii proprietatea.

$$\begin{vmatrix} \alpha\cdot a & \alpha\cdot b \\ c & d \end{vmatrix} = \alpha\cdot a\cdot d - \alpha\cdot b\cdot c = \alpha(ad-bc) = \alpha\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

***Exemplu***: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 9 & 3 & 6 \\ 5 & 7 & 0 \end{vmatrix} = 3\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 7 & 0 \end{vmatrix} = 3\cdot(84-20-14) = 3\cdot 50 = 150;$

**$P_6$. Dacă elementele a două linii (sau coloane) ale unei matrice sunt proporţionale, atunci determinantul este nul.**

***Demonstraţie.*** Verificăm pentru linii.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ \lambda a & \lambda b \end{vmatrix} = \lambda\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = \lambda(ab-ab) = 0.$$

***Exemplu:*** $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3(6-6) = 0;$

**$P_7$. Dacă linia *i* a unei matrici *A* este suma a doi vectori, atunci determinantul ei este egal cu suma a doi determinanţi corespunzători matricelor care au aceleaşi linii ca *A*, cu excepţia liniei *i* unde au câte unul din cei doi vectori.**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1}+b_{i1} & \dots & a_{in}+b_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{i1} & \dots & b_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

***Demonstraţie.***

Să arătăm că: $\begin{vmatrix} a+a' & b+b' \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' \\ c & d \end{vmatrix}.$

Într-adevăr membrul stâng este egal cu $(a+a')d - c(b+b') = ad + a'd - bc - b'c$. Membrul drept este $ad - bc + a'd - b'c$ şi egalitatea se verifică.

**Obsservaţie:** O proprietate analogă are loc şi pentru coloane.

***Exemplu***: $\begin{vmatrix} a & a+1 & a+2 \\ b & b+1 & b+2 \\ c & c+1 & c+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ b & 1 & 2 \\ c & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ b & 1 & 1 \\ c & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$; S-au aplicat şi proprietăţile $P_4$ şi $P_5$;

**$P_8$. Dacă o linie (o coloană) a unei matrici pătratice este o combinaţie liniară de celelalte linii (coloane), atunci determinantul matricei este zero.**

***Exemplu***: $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & 4 \\ -1 & 5 & 8 \end{vmatrix} = 0$ deoarece $l_3 = l_1 + l_2$;

**$P_9$. Dacă la o linie (o coloană) a matricii *A* adunăm elementele altei linii (coloane) înmulţite cu acelaşi număr, atunci această matrice are acelaşi determinant ca şi matricea *A*.**

***Demonstraţie.*** Vom aduna la linia întâi $l_1$ linia a doua înmulţită cu $\lambda$. Vom nota acest fapt prin $l_1 + \lambda l_2$. Avem:

$$\begin{vmatrix} a+\lambda a_1 & b+\lambda b_1 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \overset{\mathbf{P_7}}{=\!=} \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda a_1 & \lambda b_1 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \overset{\mathbf{P_6}}{=\!=} \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} + 0 = \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}.$$

**$P_{10}$. Dacă *A*, *B*$\in M_n(C)$, atunci $\det(AB) = \det(A)\cdot\det(B)$ (Determinantul produsului a două matrici pătratice este egal cu produsul determinanţilor acelor matrici). În particular $\det(A^n) = (\det(A))^n$, *n*$\in N^*$.**

***Exemplu**: Dacă* $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A\cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ şi atunci se observă că

$\begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 7$ *şi* $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot 7 = 7$.

**$P_{11}$. Determinantul Vandermonde:**

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

***Demonstraţie:***

Se înmulţeşte coloana întâi cu (-a) respectiv cu ( $-a^2$) şi se adună la coloana a doua respectiv la a treia:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & b-a & b^2-a^2 \\ 1 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & b^2-a^2 \\ c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b).$$

**$P_{12}$. Dacă *A*=$(a_{ij})$ este o matrice triunghiulară (sau diagonală) (toate elementele de deasupra diagonalei principale sau de dedesubtul ei sunt egale cu zero), atunci $\det(A) = a_{11}a_{22}...a_{nn}$. (Valoarea determinantului este egală cu produsul elementelor de pe diagonala principală).**

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{vmatrix} = a\cdot c\cdot f$$

## Exercitii rezolvate

**1.** **Să se arate că următorii determinanți sunt nuli:**

a) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ 2020a & 2020b & 2020c \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 5 & 8 & 12 \\ 15 & 24 & 36 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ a+1 & b+1 & c+1 \end{vmatrix}$;

Rezolvare:

a) În determinanți se dă factor comun pe linii sau coloane: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ 2020a & 2020b & 2020c \end{vmatrix} = 2020 \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 2020 \cdot 0 = 0$ deoarece determinantul are două linii egale. ( conform proprietății 4).

b) linia a doua este un multiplu de 3 a elementelor de pe linia 1 și apoi se obține un determinant cu două linii identice.

$$\begin{vmatrix} 5 & 8 & 12 \\ 15 & 24 & 36 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 8 & 12 \\ 5 & 8 & 12 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 5 \cdot 0 = 0;$$

c) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ a+1 & b+1 & c+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, conform proprietăților 7 și 4.

**2.** **Să se rezolve ecuația** $\begin{vmatrix} x+1 & x+1 & x \\ x & x-1 & x-1 \\ x-1 & x & x+1 \end{vmatrix} = 0$.

Rezolvare: Se adună toate liniile la prima linie: $\begin{vmatrix} 3x & 3x & 3x \\ x & x-1 & x-1 \\ x-1 & x & x+1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$$3x \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x-1 & x-1 \\ x-1 & x & x+1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3x \cdot \begin{vmatrix} x-1 & x-1 \\ x & x+1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3x\left(x^2-1-x^2+x\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 1.$$

**3.** **Să se rezolve ecuaţia** $\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix} = 0$**;**

Rezolvare:

$$\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & a & a & a \\ a & a & a & a \\ a & a & a & a \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-a \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-a)\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} x-a & 0 & 0 \\ 0 & x-a & 0 \\ 0 & 0 & x-a \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (x-a)\left[(x-a)^3\right] = 0 \Rightarrow (x-a)^4 = 0 \Rightarrow x_{1,2,3,4} = a\,.$$

**4. Să se calculeze valoarea determinatului** $\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$**, unde** $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ **sunt soluţiile ecuaţiei** $x^3 - x^2 + 3x + 1 = 0$.

Rezolvare:

$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix} = 3x_1x_2x_3 - (x_1^3 + x_2^3 + x_3^3)$. Cum $x_1, x_2, x_3$ sunt soluţiile ecuaţiei date înseamnă că verifică această ecuaţie adică,

$x_1^3 = x_1^2 - 3x_1 - 1,$

$x_2^3 = x_2^2 - 3x_2 - 1,$

$x_3^3 = x_3^2 - 3x_3 - 1$

de unde rezultă că $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 3(x_1 + x_2 + x_3) - 3 =$

$= (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3) - 3(x_1 + x_2 + x_3) - 3 = 1 - 2\cdot 3 - 3\cdot 1 = -8$. S-au folosit relaţiile lui Viete.

## Exercitii propuse

**1.** Să se calculeze determinanţii:

a) $\begin{vmatrix} a+b & c & 1 \\ b+c & a & 1 \\ c+a & b & 1 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 2xy & x^2+y^2 & x+y \\ x^2+y^2 & 2xy & x+y \\ x+y & x+y & 2 \end{vmatrix}$.

**2**. Să se calculeze determinantul $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$.

**3.** Să se rezolve ecuația: $\begin{vmatrix} x & a & x+a \\ a & x+a & x \\ x+a & x & a \end{vmatrix} = 0,\ \forall a \in \mathbb{R}.$

**4**. Să se calculeze determinantul $\begin{vmatrix} a & 2a & 3a \\ a+1 & 3a+3 & 4a+5 \\ a+2 & 3a+4 & 4a+7 \end{vmatrix}$.

**5.** Fie $x_1$, $x_2$, $x_3$ soluţiile ecuaţiei $\begin{vmatrix} x & 3 & 1 \\ -1 & x & -1 \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix} = 0$. Să se calculeze $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

**6.** Să se calculeze valoarea determinatului $\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$, unde $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ sunt soluţiile ecuaţiilor: a) $x^3 - 2x^2 + 2x + 1 = 0$; b) $x^3 - 2x^2 + 2x + 17 = 0$; c) $x^3 - 7x + 6 = 0$;

**7.** Să se calculeze valoarea determinantului $\Delta = \begin{vmatrix} z & -z & 0 \\ 0 & z^2 & -1 \\ 1 & z & z+1 \end{vmatrix}$ unde z este soluţia ecuaţiei $z^3 - 1 = 0$.

**8.** Să se calculeze valoarea determinantului $\Delta = \begin{vmatrix} \overline{abc} & \overline{bca} & \overline{cab} \\ \overline{ab} & \overline{bc} & \overline{ca} \\ a & b & c \end{vmatrix}$ unde $a, b, c \in \{1; 2; 3; ...; 9\}$ şi $\overline{abc} = a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c$ reprezintă scrierea în baza zece a numărului abc.

## 2.3 Aplicaţii ale determinanţilor în geometria plană

Pentru început amintim câteva noțiuni teoretice de geometrie de la clasa a X-a:

Ecuația generală a unei drepte (d) este $ax+by+c=0,\ a\neq 0$ sau $b\neq 0$.
Condiția ca un punct $P(x_0,y_0)$ să aparțină dreptei (d) este $a\cdot x_0+b\cdot y_0+c=0$.
Ecuația dreptei care trece printr-un punct $P(x_0,y_0)$ și are panta m este $y-y_0=m(x-x_0)$

Două puncte distincte $A(x_1,y_1)$ şi $B(x_2,y_2)$ determină o dreaptă unică . Ecuaţia dreptei care trece prin A şi B este :

(AB): $\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$ cu $x_1\neq x_2,\ y_1\neq y_2$.

Dacă $x_1=x_2$ atunci ecuația dreptei este $x=x_1$ iar dacă $y_1=y_2$ rezukltă că ecuația dreptei este $y=y_1$.

Aceasta mai poate fi scrisă şi cu ajutorul determinanţilor astfel:

**Definiție: Ecuaţia dreptei determinată de punctele** $A(x_1,y_1)$ şi $B(x_2,y_2)$ **este :**

$$\begin{vmatrix} x & y & 1\\ x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\end{vmatrix}=0;$$

Pentru a demonstra dacă trei puncte **$A(x_1;y_1)$ , $B(x_2;y_2)$ $C(x_3;y_3)$** sunt coliniare, trebuie să arătăm că cel de-al treilea punct înlocuit în ecuaţia determinată de celelalte două puncte, o verifică.

**Definiție: Condiţia ca trei puncte** $A(x_1,y_1)$ **,** $B(x_2,y_2)$ și $C(x_3,y_3)$ **să fie coliniare este :**

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}=0;$$

De asemenea, cu ajutorul determinanţilor se poate calcula şi aria unui triunghi de vârfuri A,B,C.

**Definiție: Aria triunghiului de vârfuri** $A(x_1,y_1)$ **,** $B(x_2,y_2)$ și $C(x_3,y_3)$ **este** $A=\dfrac{1}{2}\cdot|\Delta|$,

unde $\Delta=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}$

***Exemplu***

***Se dau punctele A(3;-2), B(1;4), C(2;m).***

***a) Să se scrie ecuaţia dreptei AB;***

***b) Să se determine numărul real m astfel încât A, B, C să fie coliniare;***

***c) Fie P(-4;2). Să se calculeze aria triunghiului PAB.***

Rezolvare:

a) Din $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$, rezultă ecuaţia 6x + y -14=0;

b) A, B, C sunt coliniare dacă şi numai dacă $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & m & 1 \end{vmatrix} = 0$ de unde rezultă m=1;

c) $A = \frac{1}{2} \cdot |\Delta|$, $\Delta = \begin{vmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 34$, atunci $A = \frac{1}{2} \cdot 34 = 17$.

| **Activitate independentă** | **Răspuns** |
|---|---|
| Se consideră în plan punctele $A(1,6)$, $B(-5;2)$, $C(3;8)$, $D(m-2,m)$.<br>**a)** Să se scrie ecuația medianei $[AM]$ unde $M \in [BC]$ este mijlocul laturii.<br>**b)** Să se determine **m** astfel încât aria triunghiului ABD să fie egală cu 10. | **a)** $x-y+5=0$<br>**b)** $m \in \{2;22\}$ |

Rezolvare:

a) Se determină mai întâi mijlocul M (-1; 4). Apoi, ecuația dreptei AB este

$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 6 & 1 \\ -5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x-2y+10=0$ sau $x-y+5=0$.

b) $A = \frac{1}{2} \cdot |\Delta|$. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ -5 & 2 & 1 \\ m-2 & m & 1 \end{vmatrix} = -2m+24$. Rezultă,

$\frac{1}{2} \cdot |-2m+24| = 10 \Rightarrow |-2m+24| = 20 \Rightarrow$

$-2m+24 = \pm 20 \Rightarrow m \in \{2;22\}$.

| **Activitate independentă** | **Răspuns** |
|---|---|
| **Se consideră punctele** $A(1;3)$, $B(m-3;2)$, $C(m+2;-3)$**. Să se determine** $m \in \mathbb{R}$. **astfel încât aria triunghiului ABC să fie egală cu 10.** | $m \in \{1;9\}$ |

Rezolvare:

Se calculează mai întâi determinantul $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ m-3 & 2 & 1 \\ m+2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -5m+25$**. Cum** $A_{ABC} = \frac{1}{2}|\Delta| \Rightarrow$

$|-5m+25| = 20 \Rightarrow -5m+25 = \pm 20 \Rightarrow m \in \{1;9\}$**.**

## Exercitii rezolvate

**1.** **Se dau punctele A(- 2; - 1), B(1; 5), C(4; 2). Se cere:**
**a) ecuaţia dreptei BC;**
**b) ecuaţia paralelei prin B la AC;**
**c) ecuaţia dreptei care uneşte mijloacele segmentelor AC şi AB;**
**d) ecuaţia medianei dusă din A pe BC;**
Rezolvare:

a) Ecuaţia dreptei BC este $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 4x+2+5y-20-2x-y=0 \Rightarrow$

$2x+4y-18=0 \Rightarrow x+2y-9=0$.

b) Ecuaţia dreptei care trece prin B şi este paralelă cu dreapta AC are forma $y-y_B=m_{AC}(x-x_B)$.

Cum $m_{AC}=\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}=\frac{2-(-1)}{4-(-2)}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, rezultă $y-5=\frac{1}{2}(x-1)$. Aşadar, ecuaţia paralelei prin B la AC este x -2y + 9 =0.

c) Fie M mijlocul AB şi N mijlocul lui AC. Atunci, $M\left(-\frac{1}{2};2\right)$ şi $N\left(1;\frac{1}{2}\right)$. Ecuaţia dreptei MN este: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -\frac{1}{2} & 2 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2x-\frac{1}{4}+y-2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y=0 \Rightarrow$ 2x +2y-3 = 0.

d) Fie E mijlocul lui (BC). Atunci, $E\left(\frac{5}{2};\frac{7}{2}\right)$ şi ecuaţia dreptei AE devine:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ \frac{5}{2} & \frac{7}{2} & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -x-7+\frac{5}{2}y+\frac{5}{2}-\frac{7}{2}x+2y=0 \Rightarrow \ x-y+1=0\,.$$

e) $A=\frac{1}{2}|\Delta|$ unde $\Delta=\begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -27 \Rightarrow A=\frac{1}{2}\cdot|-27|=\frac{27}{2}=13,5.$

**2.** **Se dau punctele A(-3; -2), B(1; 6). Pentru ce valori ale lui m, punctul M(m; 4m+1) se află pe dreapta AB ?**
Rezolvare:

Ecuaţia dreptei AB este: $\begin{vmatrix} x & y & z \\ -3 & 1 & 1 \\ -2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x-18-2y+2-6x+3y=0 \Rightarrow$

(AB): $-5x+y-16=0$.

$M\in AB\Leftrightarrow -5m+4m+1-16=0\Rightarrow m=-15$.

Aşadar, pentru m= -15, punctul M este situat pe dreapta AB.

**3. Se consideră punctele** $A(-4;2)$, $B(1;6)$, $C(4;-3)$, $D(6;10)$.

**a) Să se scrie ecuația dreptei AB;**

**b) Să se arate că punctele A, B, D sunt coliniare;**

**c) Să se calculeze aria triunghiului ABC.**

**Rezolvare:**

**a)** Ecuația dreptei AB este $\begin{vmatrix} x & y & 1\\ -4 & 2 & 1\\ 1 & 6 & 1\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow -4x+5y-26=0$;

**b)** A, B, D sunt coliniare dacă și numai dacă punctul D este situat pe drepata AB, adică $-4\cdot 6+5\cdot 10-26=0$ ceea ce este adevărat. Altfel, se verifică cu fomula, $\begin{vmatrix} -4 & 2 & 1\\ 1 & 6 & 1\\ 6 & 10 & 1\end{vmatrix}=0$.

**c)** $\begin{vmatrix} -4 & 2 & 1\\ 1 & 6 & 1\\ 4 & -3 & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\cdot(-24-3+8-24-12-2)=\frac{-57}{2}$. Atunci, $A_{ABC}=\frac{1}{2}|\Delta|=\frac{1}{2}\cdot|-57|=\frac{57}{2}$.

**4. Să se determine** $m\in\mathbb{R}$ **astfel încât punctele** $A(1;9)$, $B(-2;m)$, $C(m-1,4m+1)$ **să fie coliniare.**

Rezolvare:

Cum A, B, C sunt coliniare atunci, conform formulei rezultă $\begin{vmatrix} 1 & 9 & 1\\ -2 & m & 1\\ m-1 & 4m+1 & 1\end{vmatrix}=0\Rightarrow$

$m^2+m-6=0\Rightarrow m\in\{-3;2\}$.

**5. Să se arate că aria triunghiului ABC, unde** $A(-3;1)$, $B(m^2;2)$, $C(m^2-1;2)$**, nu depinde de m,** $m\in\mathbb{R}$.

**Rezolvare:** $A_{ABC}=\frac{1}{2}|\Delta|=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$, deoarece

$$\Delta=\begin{vmatrix} -3 & 1 & 1\\ m^2 & 2 & 1\\ m^2-1 & 2 & 1\end{vmatrix}=-6+2m^2+m^2-1-2m^2+2+6-m^2=1.$$

**6. În triunghiul ABC se cunosc mijloacele laturilor (AB), (BC), respectiv (AC). Fie acestea**

**M(-1; 4), P(3; -2) respectiv N(6; 2). Să se determine cordonatele vârfurilor triunghiului ABC şi să se scrie ecuaţiile laturilor acestuia.**

Rezolvare:

Fie $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;\ y_B)$, $C(x_C;y_C)$. Cum M, P, N sunt mijloacele laturilor, rezultă relaţiile:

(1) $x_A+x_B=-2$ $\qquad$ $y_A+y_B=8$

(2) $x_B + x_C = 6$ $y_B + y_C = -4$
(3) $x_A + x_C = 12$ $y_C + y_A = 4$
$2(x_A + x_B + x_C) = 16$ $2(y_A + y_B + y_C) = 8$
(4) $x_A + x_B + x_C = 8.$ $y_A + y_B + y_C = 4.$
Din (4) şi (1) rezultă $x_C = 10$ şi $y_C = -4$;
Din (4) şi (2) rezultă $x_A = 2$ şi $y_A = 8$ ;
Din (4) şi (3) rezultă $x_B = -4$ şi $y_B = 0$;
Aşadar, se obţin A(2; 8), B(- 4; 0), C(10 ; - 4).

Ecuaţiile laturilor triunghiului ABC sunt:

(AB): $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 8 & 1 \\ -4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 8x - 4y + 32 - 2y = 0 \Rightarrow 4x - 3y + 16 = 0.$

(BC): $\begin{vmatrix} x & y & z \\ -4 & 0 & 1 \\ 10 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 16 + 10y + 4x + 4y = 0 \Rightarrow 2x + 7y + 8 = 0.$

(AC): $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 8 & 1 \\ 10 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 8x - 8 + 10y - 80 + 4x - 2y = 0 \Rightarrow 3x + 2y - 22 = 0.$

**7.** **Se dau punctele A(2; 6), B(- 5; - 1), C(4;0) şi fie D intersecţia dreptei AB cu axa Oy. Să se arate că punctele D, C şi mijlocul segmentului [AO] sunt coliniare, unde O este originea sistemului de axe de coordonate xOy.**
Rezolvare:
Fie E mijlocul segmentului [OA] atunci, E(1; 3).

Ecuaţia dreptei AB devine $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 6 & 1 \\ -5 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 6x - 2 - 5y + 30 + x - 2y = 0 \Rightarrow x - y + 4 = 0.$

Dacă dreapta AB se intersectează cu axa Oy în punctul D atunci coordonatele lui D se obţin înlocuind cu x=0 în ecuaţia dreptei AB. Astfel, pentru x = 0 rezultă y= 4, aşadar, D este de coordonate D(0; 4).
Pentru a verifica dacă punctele C, E, D sunt coliniare calculăm determinantul:

$\begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 16 - 12 - 4 = 0$, aşadar, punctele sunt coliniare.

**8.** **În reperul cartezian XOY se consideră punctele O(0,0) şi $A_n$( 2n, n-2),** $n \in \mathbb{N}$**.**
**a) Să se determine ecuaţia dreptei determinată de punctele $A_1$ şi $A_2$;**
**b) Să se calculeze aria triunghiului $OA_1A_2$;**
**c) Să se demonstreze că pentru orice** $n \in \mathbb{N}$**, punctele $A_1$, $A_2$ şi $A_n$ sunt coliniare.**
Rezolvare:

a) Ecuaţia dreptei $A_1A_2$ este dată de ecuaţia: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -x+4y+4-2y=0$. Aşadar ecuaţia dreptei $A_1A_2$ este –x+2y+4=0.

b) $A = \frac{1}{2}|\Delta|$, unde $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 \Rightarrow A = 2.$

c) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2n & n-2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ că punctele sunt coliniare.

## Exercitii propuse

**1.** Se dau punctele A(1; -3), B(-2; 4), C(5; 3). Se cere:
a) ecuaţia dreptei BC;
b) ecuaţia paralelei prin B la AC;
c) ecuaţia dreptei care uneşte mijloacele segmentelor AC şi AB;
d) ecuaţia medianei dusă din A pe BC;

**2.** Într-un sistem de axe XOY se consideră punctele A(-1; 1), B(3; 2), C(**a**; **a**+3), $a \in \mathbb{R}$. Determinaţi **a** astfel încât A, B, C să fie coliniare.

**3.** Într-un sistem de axe XOY, se consideră punctele A(m, m+1), B(m+2, m-1), C(m-2,m+2), $m \in \mathbb{R}$. Să se arate că aria triunghiului ABC nu depinde de m.

**4.** Într-un sistem de axe XOY, se consideră punctele $A_n$(4 - 2n; n+2), $n \in \mathbb{N}$. Să se verifice dacă aceste puncte sunt coliniare.

**5.** Se consideră punctele A(-1;2), B(-3;4), C(m;1), D(4;5).
a) Să se determine valorile parametrului real m pentru care punctele A, B, C nu sunt coliniare;
b) Să se calculeze aria patrulaterului ABCD dacă m = 2;
c) Să se scrie ecuaţia dreptei AB.

**6**. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ pentru care punctele $A(2;4)$, $B(-3;6)$, $C(4;m+1)$ sunt coliniare.

**7.** Se consideră în plan triunghiul ABC cu vârfurile $A(2;4)$, $B(4;-2)$, $C(-4;m)$.
a) Să se scrie ecuația dreptei AB;
b) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât punctele A, O, C să fie coliniare;
c) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât aria triunghiului ABC să fie egală cu 10.

**8.** În plan se consideră punctele $A(-3;2)$, $B(3;2)$ și dreapta (d) de ecuație 2x+ 6y +m=0.
a) Să se arate că mijlocul segmentului AB se găsește pe axa Oy;
b) Să se scrie ecuația dreptei AB;
c) Pentru m=2 să se determine distanța de la dreapta (d) la dreapta AB.

**9.** Se consideră punctele $A(-1;4)$, $B(-3;-2)$. Să se determine punctul C astfel încât triunghiul ABC să fie echilateral.

**10.** Se consideră în plan punctele $A(2;1)$ și $A_n(-n;n), n \in \mathbb{N}^*$.
a) Să se determine ecuația dreptei $A_1A_2$;
b) Să se afle aria triunghiului $AA_2A_3$;

c) Să se verifice dacă punctele $O, A_n A_{n+1}$ sunt coliniare, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

**11.** În reperul cartezian *XOY* se consideră punctele

$A_n(\log_2 8^n; \log_5\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1})$, $B_n(3n; 1-n)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Scrieți ecuația dreptei $B_1B_2$;

b) Arătați că $A_n = B_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

c) Arătați că punctele $A_n$ aparțin dreptei $A_1A_2$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

**12.** În reperul cartezian XOY se consideră punctele $A(3;1)$, $B(n+1, n)$, $C(1;3)$, $n \in \mathbb{N}$. Determinați numerele naturale n, știind că punctele A, B, C sunt vârfurile unui triunghi care are aria egală cu 1.

(Simulare BAC 2017)

**13.** Se dau punctele $A(-4;2)$, $B(3;5)$, $C(6;-2)$, $D(-3;-1)$. Să se reprezinte în plan și să se calculeze aria patrulaterului ABCD.

**14.** Fie $A(1;5)$, $B(3;4)$ puncte în plan. Să se determine punctul M situat pe dreapta $x - y - 2 = 0$ pentru care $A_{AMO} = A_{BMO}$, unde $O(0;0)$.

**15**. Să se verifice dacă următoarele puncte sunt coliniare:

a) $A(-2;-1)$, $B(1;5)$, $C(0;3)$;

b) $A(2;-1)$, $B(4;-4)$, $C(0;2)$;

c) $A(3;2)$, $B(-1;3)$, $C(-2;1)$;

d) $A(1+2m;1-m)$, $B(1;1)$, $C(1-2m;m+1)$;

**16**. În reperul cartezian XOY se consideră punctele A(-2,1), B(a,a) şi C(4,-3) unde $a \in \mathbb{R}$.

a) Pentru a=3, să se calculeze aria triunghiului ABC;

b) Pentru a=2, să se determine ecuaţia dreptei ce trece prin punctele B şi C;

c) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care orice punct P(x,-3), cu $x \in \mathbb{R}$ este coliniar cu punctele B şi C.

**17**. În reperul cartezian XOY se consideră punctele O(0,0) şi $A_n$( n, 2n-3), $n \in N$.

a) Să se determine ecuaţia dreptei $A_1A_2$;

b) Să se calculeze aria triunghiului $OA_1A_2$;

c) Să se arate că toate punctele $A_n$(n,2n-3), $n \in \mathbb{N}$ sunt coliniare.

**18.** În reperul cartezian XOY se consideră punctele O(0,0) şi $A_n$( 2n, n-2), $n \in \mathbb{N}$.

a) Să se determine ecuaţia dreptei determinată de punctele $A_1$ şi $A_2$;

b) Să se calculeze aria triunghiului $OA_1A_2$;

c) Să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, punctele $A_1$, $A_2$ şi $A_n$ sunt coliniare.

# Cap.3 MATRICE INVERSABILE

## 3.1 Calculul inversei unei matrice

***Definiţie.*** Fie $A \in \mathrm{M}_n(C)$. Matricea $A$ se numeşte **inversabilă** dacă există matricea $B \in \mathrm{M}_n(C)$ cu proprietatea că $A \cdot B = B \cdot A = I_n$, $I_n$ fiind matricea unitate.

Matricea $B$ din definiţie se numeşte **inversa** matricii $A$ şi se notează $B = A^{-1}$. Deci $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$.

**Teoremă.** Matricea $A \in \mathrm{M}_n(C)$ este **inversabilă** dacă şi numai dacă $\det(A) \neq 0$. O astfel de matrice se numeşte **nesingulară**.

**Teorema:** Inversa unei matrice dacă există este unică.

Construcţia lui $A^{-1}$ presupune următorii paşi:

**Pasul 1.** (**Construcţia transpusei**)

Dacă $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, atunci transpusa lui $A$ este , $A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

**Pasul 2.** (**Construcţia adjunctei**)

Matricea $A^* = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} d_{11} & (-1)^{1+2} d_{12} & \dots & (-1)^{1+n} d_{1n} \\ (-1)^{2+1} d_{21} & (-1)^{2+2} d_{22} & \dots & (-1)^{2+n} d_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (-1)^{n+1} d_{n1} & (-1)^{n+2} d_{n2} & \dots & (-1)^{n+n} d_{nn} \end{pmatrix}$ obţinută din $A^T$, prin înlocuirea fiecărui element cu complementul său algebric se numeşte **adjuncta** matricei $A$.

**Pasul 3.** (**Construcţia inversei**) Se ţine cont de teorema precedentă şi se găseşte că:

$A^* \cdot A = A \cdot A^* = \begin{pmatrix} d & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & d \end{pmatrix}$, iar de aici $\left(\frac{1}{d} A^*\right) A = A \left(\frac{1}{d} A^*\right) = I_n$.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot A^*$$

Ultimele egalităţi arată că

$A \to A^T \to A^* = ((-1)^{i+j} d_{ij})_{i,j} \to A^{-1}$ $\qquad$ $\mathbf{A^{-1}} \in M_n(Z) \Leftrightarrow \mathbf{det\ A} = \pm 1$.

***Exemple***

***Să se determine inversele matricelor: a)*** $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, ***b)*** $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 2 & 1\\ 0 & 3 & 2\end{pmatrix}$.

Rezolvare:

a) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} \Rightarrow \det(A)=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=4-6=-2\neq 0\Rightarrow$ A este inversabilă.

$A^T=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}$, $A^*=\begin{pmatrix}4 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}$ $A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot A^*=\frac{1}{-2}\cdot\begin{pmatrix}4 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}$.

Generalizare:

**În general, dacă matricea A este de forma** $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ atunci $A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$.

b) $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 2 & 1\\ 0 & 3 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow \det(B)=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 2 & 1\\ 0 & 3 & 2\end{vmatrix}=21\neq 0\Rightarrow$ B este inversabilă.

$B^T=\begin{pmatrix}1 & 4 & 0\\ 2 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$, Regula semnelor este: $\begin{pmatrix}+ & - & +\\ - & + & -\\ + & - & +\end{pmatrix}$, adică valoarea numerelor $(-1)^{i+j}$

$d_{11}=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1,\ d_{12}=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-5,\ d_{13}=\begin{vmatrix}2 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix}=-4,$

$d_{21}=\begin{vmatrix}4 & 0\\ 1 & 2\end{vmatrix}=8,\ d_{22}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 3 & 2\end{vmatrix}=2,\ d_{23}=\begin{vmatrix}1 & 4\\ 3 & 1\end{vmatrix}=-11,$

$d_{31}=\begin{vmatrix}4 & 0\\ 2 & 3\end{vmatrix}=12,\ d_{32}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{vmatrix}=3,\ d_{33}=\begin{vmatrix}4 & 0\\ 2 & 3\end{vmatrix}=12,$

$B^*=\begin{pmatrix}1 & 5 & -4\\ -8 & 2 & 11\\ 12 & -3 & 12\end{pmatrix}\Rightarrow B^{-1}=\frac{1}{\det B}B^*=\frac{1}{21}\begin{pmatrix}1 & 5 & -4\\ -8 & 2 & 11\\ 12 & -3 & 12\end{pmatrix}$.

| **Activitate independentă** | | **Răspuns** |
|---|---|---|
| **Să se determine inversele matricelor:**<br>**a)** $A=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ -4 & 2\end{pmatrix}$ **; b)** $B=\begin{pmatrix}2 & -3 & -1\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 4\end{pmatrix}$. | | a) $A^{-1}=\frac{1}{10}\cdot\begin{pmatrix}2 & -3\\ 4 & -1\end{pmatrix}$;<br>b) $B^{-1}=\frac{1}{-5}\begin{pmatrix}0 & 10 & -5\\ 2 & 9 & -4\\ -1 & -9 & 2\end{pmatrix}$. |

## Exercitii rezolvate

**1.** **Să se determine inversele matricelor:**

a) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & a \\ -a & a^2 \end{pmatrix}, a \neq 0$; d) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -4 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

Rezolvare:

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 7 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$;

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ -a & a^2 \end{pmatrix}, a \neq 0 \Rightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & a \\ -a & a^2 \end{vmatrix} = 2a^2 \neq 0 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2a^2}\begin{pmatrix} a^2 & -a \\ a & 1 \end{pmatrix}$.

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -4 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -4 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$; $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -4 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$,

$d_{11} = \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -14$; $d_{12} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -7$; $d_{13} = \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 7$;

$d_{21} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 7$; $d_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 4$; $d_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -1$;

$d_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 0$; $d_{32} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1$; $d_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = -2$;

$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^* = \frac{1}{-7}\begin{pmatrix} -14 & 7 & 7 \\ -7 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

e) $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = 1 \neq 0$ rezultă A este inversabilă. $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix}$;

$d_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{vmatrix} = 1$; $d_{12} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{vmatrix} = a$; $d_{13} = \begin{vmatrix} a & 1 \\ b & c \end{vmatrix} = ac - b$;

$d_{21} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ c & 1 \end{vmatrix} = 0$; $d_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{vmatrix} = 1$; $d_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ b & c \end{vmatrix} = c$;

$d_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$; $d_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a & 0 \end{vmatrix} = 0$; $d_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{vmatrix} = 1$;

$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^* = \begin{pmatrix} 1 & -a & ac-b \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**2.** **Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care matricea $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1\\ 1 & -1 & a\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$ este inversabilă:**

Rezolvare:
Matricea A este inversabilă dacă şi numai dacă determinantul matricei este nenul. Astfel,
$\det(A)=\begin{vmatrix} a & 1 & 1\\ 1 & -1 & a\\ 2 & 1 & 3\end{vmatrix}=-3a+1+2a+2-a^2-3=0$. Din $-a^2-a=0\Rightarrow -a(a+1)=0\Rightarrow a\in\{-1;0\}$
Aşadar, A este inversabilă $\Leftrightarrow \det(A)\neq 0\Leftrightarrow a\in\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$.

**3.** **Să se arate că matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\\ x-1 & x & x+1\\ x & x+1 & x+2\end{pmatrix}$ este singulară, $\forall x\in\mathbb{R}$.**

Rezolvare:
Matricea A este singulară dacă det(A)=0. Astfel,
$\det(A)=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3\\ x-1 & x & x+1\\ x & x+1 & x+2\end{vmatrix}=x^2+2x+3x^2-3+2x^2+2x-3x^2-x^2-2x-1-2x^2-2x+4=0$
pentru orice x real.

**4.** **Se consideră sistemul de ecuații** $\begin{cases}(m+2)x+y+2z=-1\\ x+3y-mz=-5\\ mx-2y+z=-3\end{cases}$ **și**

$A(m)=\begin{pmatrix} m+2 & 1 & 2\\ 1 & 3 & -m\\ m & -2 & 1\end{pmatrix}$, $m\in\mathbb{R}$, **matricea sistemului. Se cere:**

**a) Să se arate că matricea sistemului A este inversabilă pentru orice număr real m;**
**b) Pentru m= 0 să se determine inversa lui A.**

**Rezolvare:**

a) A este inversabilă dacă și numai dacă determinantul matricei este diferit de 0;

$\det\big(A(m)\big)=\begin{vmatrix}(m+2) & 1 & 2\\ 1 & 3 & -m\\ m & -2 & 1\end{vmatrix}=3m+6-4-m^2-6m+2m^2+4m-1=m^2+m+2.$

$m^2+m+2=0\Rightarrow\Delta=b^2-4ac=1-8=-7\langle 0$ rezultă că $m^2+m+2=0\rangle 0$ deci este diferit de 0.

b) Pentru m=0 matricea este $A(0)=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 0\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}$. Determinăm inversa lui A:

I. $\det\big(A(0)\big)=1$ ( de la subpunctul a) ).

II. Matricea transpusă: $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

III. Minorii $d_{ij}$ calculați la $A^T(a_{ij})$ :

$d_{11} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - (-2) \cdot 0 = 3$;

$d_{12} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - (-2) \cdot 2 = 5$ ;

$d_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 - 3 \cdot 2 = -6$ ;

$d_{21} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ , $d_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2$ , $d_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2$ ,

$d_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -2$, $d_{32} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4$, $d_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5$.

IV. Matricea semnelor: $\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$;

VI. Matricea adjunctă: $A^* = \begin{pmatrix} 3 & -5 & -6 \\ -1 & 2 & 2 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$;

VII. Inversa matricei A este $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^* = \begin{pmatrix} 3 & -5 & -6 \\ -1 & 2 & 2 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

**5.** **Fie** $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -10 & -4 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **şi** $M = \{X(a) \mid a \in \mathbb{R}, X(a) = I_2 - a \cdot A\}$.

**a) Să se arate că** $A^2 = A$;

**b) Să se arate că** $X(a) \cdot X(b) = X(a+b-ab)$ **;**

**c) Să se calculeze** $X(0) \cdot X(1) \cdot X(2) \cdot ... \cdot X(2011)$;

**d) Să se calculeze determinantul matricei X(a);**

**e) Să se arate că o singură matrice X(a) este neinversabilă;**

**f) Dacă X(a) e inversabilă, să se calculeze $(X(a))^{-1}$.**

Rezolvare:

a) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -10 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -10 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -10 & -4 \end{pmatrix} = A$;

b) $X(a) \cdot X(b) = (I_2 - aA)(I_2 - bA) = I_2 - bA - aA + abA^2 = I_2 - (a+b-ab)A = X(a+b-ab)$, deoarece $A^2 = A$;

c) Cum $X(a) \cdot X(1) = X(a+1-a \cdot 1) = X(1), \forall a \in \mathbb{R}$ şi $1 \in \{0;1;2;...,2011\} \Rightarrow$

$X(0) \cdot X(1) \cdot X(2) \cdot ... \cdot X(2011) = X(1) = I_2 - A = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 10 & 5 \end{pmatrix}$;

d) Cum $X(a) = I_2 - a \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5a & 2a \\ -10a & -4a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-5a & -2a \\ 10a & 1+4a \end{pmatrix}$. Atunci,

$\det(X(a))=\begin{vmatrix}1-5a & -2a\\ 10a & 1+4a\end{vmatrix}=(1-5a)(1+4a)+2a\cdot 10a=1-a$;

e) $\det(X(a))=0\Leftrightarrow 1-a=0\Rightarrow a=1.$

Pentru a = 1 rezultă că există o singură matrice neinversabilă;

f) Dacă X(a) este inversabilă, rezultă că există $(X(a))^{-1}$ astfel încât $X(a)\cdot(X(a))^{-1}=I_2$.

Vom nota cu X(b) pe $(X(a))^{-1}$ rezultând $X(a)\cdot X(b)=I_2\Leftrightarrow X(a+b-ab)=I_2\Leftrightarrow$

$\begin{pmatrix}1-5(a+b-ab) & -2(a+b-ab)\\ 10(a+b-ab) & 1+4(a+b-ab)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Leftrightarrow$ a+b-ab=0 de unde rezultă că $b=\frac{a}{a-1}$;

Aşadar, pentru $b=\frac{a}{a-1}$ se obţine inversa matricei X(a) şi anume $(X(a))^{-1}=X(b)=X\left(\frac{a}{a-1}\right)$.

## Exercitii propuse

**1**. Să se determine care din următoarele matrice sunt inversabile:

a) $\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix}-3 & -2\\ 6 & 4\end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 3 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & -2 & -1\\ 3 & 1 & 0\end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 2 & -3\\ -2 & 4 & -6\end{pmatrix}$

**2**. Să se calculeze inversele matricelor:

a) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix}2 & 8\\ 2 & 7\end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

**3.** Să se determine valorile lui $m\in\mathbb{R}$, pentru care matricele următoare sunt inversabile:

a) $\begin{pmatrix}m & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix}3 & m\\ m & 12\end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix}1 & 1 & m\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & m & 2\end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ m & m+1 & m-1\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}$;

**4.** Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}$. Să se arate că matricele sunt inversabile şi să se arate că $(A\cdot B)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$.

**5**. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 1 & 2\end{pmatrix}$. Să se arate că matricele sunt inversabile şi să se arate că $(A\cdot B)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$.

**6**. Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care matricele a) $A=\begin{pmatrix}1 & a-5 & 2\\ 0 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$,

b) $B=\begin{pmatrix}1 & a-2 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$ sunt inversabile:

**7.** Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & -2 & 0 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}$. . Să se determine valorile lui a pentru care matricea este inversabilă şi să se determine inversa ei în cazul a = 2.

**8**. Să se determine valorile parametrului real a astfel încât matricea $A=\begin{pmatrix} 2 & x & 3 \\ a & x-1 & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix}$ să fie inversabilă pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

**9**. Fie $A=\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $M=\left\{X(a) \middle|\ a \in \mathbb{R}, X(a)=I_2+a\cdot A\right\}$.

a) Să se arate că $A^2=A$;

b) Să se arate că $X(a)\cdot X(b)=X(a+b+ab)$;

c) Să se calculeze $X(-2011)\cdot X(-2010)\cdot ...\cdot X(2010)\cdot X(2011)$;

d) Să se calculeze determinantul matricei X(a);

e) Să se arate că o singură matrice X(a) este neinversabilă;

f) Dacă X(a) e inversabilă, să se calculeze $(X(a))^{-1}$.

**10**. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$şi

$X=\left\{M(x,y) \middle| M(x,y)=x\cdot I_2+y\cdot A, x,y \in \mathbb{R}\right\} \subset M_2(\mathbb{R})$.

a) Să se determine inversa matricei M(1;1);

b) Să se determine matricele inversabile din mulţimea X.

**11.** Fie $A \in M_3(\mathbb{R})$ cu det (A) = 1. Să se arate că pentru orice $m \geq 0$ rezultă $\det(A+mA^{-1}) \geq 0$.

**12.** Fie $A \in M_2(\mathbb{R})$ o matrice astfel încât $A^3 = O_2$.

a) Să se arate că $A+I_2$ este inversabilă şi să se calculeze $(A+I_2)^{-1}$;

b) Să se arate că det (A) = 0 şi că $A^2 = 0_2$ ;

**13.** Fie $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $O_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi $C(A)=\left\{X \in M_2(\mathbb{C}) \middle|\ X\cdot A=A\cdot X\right\}$.

a) Să se arate că A este inversabilă şi să se determine inversa sa;

b) Să se arate că dacă $U,V \in C(A) \Rightarrow U\cdot V \in C(A)$;

c) Să se arate că dacă $X \in C(A) \Rightarrow \exists a,b \in \mathbb{C}$ astfel încât $X=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$.

**14**. Să se arate că matricea $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$este inversabilă dacă $a=1+3+3^2+...+3^{2010}$, b = 1+2+3+....+2011, $c = 2011^{10}$ şi $d = 5^{2011}$.

**15**. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} -1 & x \\ 2 & x-3 \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$. Determinați valorile reale ale lui a pentru care matricea $B=I_2+aA(1)$ este inversabilă unde $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

( Simulare Bac 2017).

**16.** Fie $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -10 & -4 \end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $M=\{X(a)\mid\ a\in\mathbb{R}, X(a)=I_2-a\cdot A\}$.

a) Să se arate că $A^2-A=O_2$

b) Să se calculeze determinantul matricei X(a);

c) Dacă X(a) e inversabilă, să se calculeze $(X(a))^{-1}$.

**17.** Se consideră matricele $X=\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ şi $I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Definim matricele $A=X\cdot Y^T$ şi B(a)=aA+$I_3$, $a\in R$ şi $Y^T$ e transpusa lui Y.

a) Să se calculeze A.

b) Să se calculeze determinantul matricei A.

c) Să se arate că matricea B(**a**) este inversabilă, pentru orice **a** real.

**18**. Se consideră mulţimea $G=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 5b & a \end{pmatrix}\middle|a,b\in Z, a^2-5b^2=1\right\}\subset M_2(\mathbb{Z}).$

a) Să se calculeze $A^2$ unde $A=\begin{pmatrix} a & b \\ 5b & a \end{pmatrix}\in G$;

b) Să se arate că $A\cdot B=B\cdot A, \forall A,B\in G;$

c) Să se demonstreze că inversa oricărei matrice din G aparţine mulţimii G.

**19**. Se consideră mulţimea $G=\left\{\begin{pmatrix} a+b & -b \\ 0 & a+b \end{pmatrix}\middle|a,b\in Z\right\}\subset M_2(\mathbb{Z}).$

a) Să se verifice dacă matricele $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & -100 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ aparţin mulţimii G.

b) Să se determine matricea $X\in M_2(\mathbb{Z})$ astfel încât $A=a\cdot I_2+b\cdot X, \forall a,b\in\mathbb{Z}$ unde $A=\begin{pmatrix} a+b & -b \\ 0 & a+b \end{pmatrix}$.

c) Să se calculeze $X^{100}$ unde X este matricea aflată la punctul b).

**20.** Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 5 & -4 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ din $M_3(\mathbb{R})$.

a) Să se arate că $(A+I_3)^2=B$;

b) Să se calculeze determinantul matricei B;

c) Să se calculeze inversa matricei B.

**21**. În mulţimea $M_2(\mathbb{R})$ se consideră matricele $A(x)=\begin{pmatrix} x+5 & 3x \\ 2x & 6x-4 \end{pmatrix}, x\in\mathbb{R}$.

a) Să se calculeze $A(-1)\cdot A(1)$;

b) Să se rezolve ecuaţia $\det(A(x))=6$;

c) Să se determine inversa matricei A(-1).

**22.** Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ din $M_2(\mathbb{R})$.

a) Să se calculeze det ($A^2$);

b) Să se demonstreze că $A^{100}$=-A;

c) Să se calculeze inversa matricei $A^2$.

## 3.2 Ecuaţi matriceale

Vom prezenta în continuare o tehnică de rezolvare a unor ecuaţii de forma $A\cdot X=B$, $X\cdot A=B$, $A\cdot X\cdot B=C$, unde $A$, $B$, $C$ sunt matrice cunoscute, iar $X$ este matricea de aflat. Astfel de ecuaţii se numesc **ecuaţii matriceale**.

Astfel de ecuaţii se pot rezolva numai atunci când $A$, $B$ sunt **matrice pătratice inversabile**.

Fie $A, B\in M_n(C)$. Pentru rezolvarea ecuaţiei $A\cdot X=B$ înmulţim la stânga egalitatea cu $A^{-1}$ şi avem:

$$A^{-1}\Big|\ A\cdot X=B\Rightarrow X=A^{-1}\cdot B\Rightarrow X_j=\frac{1}{\det A}\cdot\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\cdot b_i,\ \overline{j=1,n}$$

***Exemplu***

***Să se rezolve ecuaţia matriceală*** $A\cdot X=B$ ***unde*** $A=\begin{pmatrix}2&1&-1\\0&2&3\\1&-1&2\end{pmatrix}$ ***şi*** $B=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$**.**

Rezolvare:

$\det(A)=\begin{vmatrix}2&1&-1\\0&2&3\\1&-1&2\end{vmatrix}=19\neq 0\Rightarrow$ A este inversabilă.

Din $A\cdot X=B\Rightarrow X=A^{-1}\cdot B$ unde $A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot A^{*}$ Trebuie mai întâi determinată matricea transpusă după care se află şi matricea adjunctă.

$$A^T=\begin{pmatrix}2&0&1\\1&2&-1\\-1&3&2\end{pmatrix},\ A^{*}=\begin{pmatrix}1&-1&5\\3&5&-6\\-2&3&4\end{pmatrix}\Rightarrow X=\frac{1}{19}\begin{pmatrix}1&-1&5\\3&5&-6\\-2&3&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{19}\begin{pmatrix}4\\-9\\6\end{pmatrix}.$$

| **Activitate independentă** | | **Răspuns** |
|---|---|---|
| **Să se rezolve ecuaţia matriceală** $A\cdot X=B$ **unde** $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&0&-1\\-1&1&2\end{pmatrix}$ **şi** $B=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$**.** | | $X=\begin{pmatrix}-4\\9\\-6\end{pmatrix}$ |

Pentru determinarea soluţiei ecuaţiei $XA=B$ vom înmulţi la dreapta cu $A^{-1}$ şi analog vom găsi $X=BA^{-1}$, soluţia ecuaţiei matriceale.

Pentru găsirea soluţiei ecuaţiei $A\cdot X\cdot B=C$ înmulţim egalitatea la stanga cu $A^{-1}$ şi la dreapta cu $B^{-1}$ şi obţinem $X=A^{-1}CB^{-1}$.

Exercitii rezolvate

**1.** **Să se rezolve ecuaţia:** $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.

Rezolvare: Notăm cu $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Atunci, $\det(A) = 3 \neq 0 \Rightarrow$ A este inversabilă.

Vom determina inversa lui A.

$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A^* = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Pentru a rezolva ecuaţia dată înmulţim ecuaţia la dreapta cu $A^{-1}$. Rezultă $X = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$

**2.** **Să se rezolve ecuaţia matriceală** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ -2 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Rezolvare: Notăm cu A matricea $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Se calculează determinantul matricei A.

$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -10 \neq 0 \Rightarrow$ A este inversabilă. Vom determina inversa lui A.

$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A^*$. Pentru aceasta se scrie matricea transpusă $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ şi apoi se determină minorii caracteristici:

$d_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -5;$ $d_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 5;$ $d_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0;$

$d_{21} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1;$ $d_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 7;$ $d_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2;$

$d_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1;$ $d_{32} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3;$ $d_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2;$

Matricea adjunctă este egală cu $A^* = ((-1)^{i+j} \cdot d_{ij})_{i,j=\overline{1,3}}$. Matricea semnelor este :

$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$

Atunci, $A^* = \begin{pmatrix} -5 & -5 & 0 \\ 1 & 7 & -2 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$. Rezultă, $A^{-1} = \frac{1}{-10}\begin{pmatrix} -5 & -5 & 0 \\ 1 & 7 & -2 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$.

Se înmulţeşte ecuaţia dată la stanga cu inversa lui A. Obţinem:

$X = \frac{1}{-10}\begin{pmatrix} -5 & -5 & 0 \\ 1 & 7 & -2 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ -2 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{-10}\begin{pmatrix} -5 & -30 & 15 \\ -17 & 34 & 7 \\ 3 & -6 & -13 \end{pmatrix}$.

## Exercitii propuse

**1.** Să se rezolve ecuaţia A·X·B=C unde $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ şi $C=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}$.

**2.** Să se rezolve ecuaţia A·X=B unde $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$..

**3.** Să se rezolve ecuaţia matriceală $\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -3 & 8\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}4 & 6\\ 5 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 13\\ -4 & -7\end{pmatrix}$.

**4.** Să se rezolve ecuaţia matriceală $X\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 5 & 3\\ 2 & 1 & -1\\ -3 & 4 & -5\end{pmatrix}$.

**5.** Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

a) Calculați det A;

b) Arătați că $(A-I_3)\cdot(A-I_3)\cdot(A-I_3)=O_3$;

c) Rezolvați ecuația matriceală $A\cdot X=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$, *unde* $X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$. ( Simulare BAC 2016)

**6.** Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & -1\\ a & 3\end{pmatrix}$, $a\in\mathbb{R}$.

a) Arătați că A(-1) + A(1) = 2 A(0);

b) Determinați numărul real a pentru care $A(a)\cdot\begin{pmatrix}3 & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix}=5I_2$, unde $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

c) Determinați matricea $X\in M_2(\mathbb{R})$ știind că $A(1)\cdot X=4A(2)$.

( Simulare BAC 2015)

**7**. Se consideră matricele $X=(x,y)\in M_{1,2}(\mathbb{R}), A=\begin{pmatrix}a & 4\\ 1 & a\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R}), a,x,y\in\mathbb{R}$ şi B=(0 0).

a) Să se arate că dacă $X\cdot A=B$, atunci $X(4-a^2)=0$;

b) Să se calculeze $\det(A^2)$;

c) Pentru a= -1 să se rezolve ecuaţia $(x\quad y)\cdot A=(2\quad 1)$.

8. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$. Se cere:

a) Să se determine matricea B= A – 3 $I_2$;

b) Să se arate că A·B= B·A= $O_3$;

c) Să se calculeze determinantul matricei C = $(A+B)^3$ ;

# Cap. 4 SISTEME DE ECUAŢII LINIARE

În 1750, matematicianul elveţian **Gabriel Cramer** (31.07.1704 – 04.01.1752) introduce noţiunea şi notaţia pentru determinant în urma rezolvării sistemelor liniare de ecuaţii. De exemplu, pentru sistemul de trei ecuaţii liniare cu trei necunoscute, $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$, soluţia este



$(x,y,z)=\left(\frac{\Delta_x}{\Delta},\frac{\Delta_y}{\Delta},\frac{\Delta_z}{\Delta}\right)$, unde determinantul $\Delta$ este format din coeficienţii necunoscutelor,

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=a_1\cdot b_2\cdot c_3+a_2\cdot b_3\cdot c_1+a_3\cdot b_1\cdot c_2-c_1\cdot b_2\cdot a_3-c_2\cdot b_3\cdot a_1-c_3\cdot b_2\cdot a_1.$$

Metoda de rezolvare a sistemelor cu ajutorul determinanţilor introduşi de Cramer poartă denumirea de *metoda lui Cramer*.

În 1772, matematicianul , chimistul şi muzicianul **Theophile Vandermonde**(28.02.1735 – 01.01.1796) introduce prin lucrarea "Mémoire sur l'élimination", determinantul ce-i poartă numele, *determinantul Vandermonde*:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}=(b-a)(c-a)(c-b)$$, în urma preocupărilor lui pentru teoria matricelor şi determinanţilor.

## 4.1 Rangul unei matrice

Fie $A\in M_{m,n}(\mathbb{C})$, $r\in\mathbb{N}$, $1\le r\le \min(m,n)$.

***Definiţie:*** Se numeşte minor de ordinul **r** al matricei A, determinantul format cu elementele matricei A situate la intersecţia celor **r** linii şi **r** coloane.

Observaţie: O matrice $A\in M_{m,n}(\mathbb{C})$ are un număr de $C_m^r\cdot C_n^r$ minori de ordin r.

***Definiţie:*** Fie $A\neq O_{m,n}$ o matrice . Numărul natural **r** este rangul matricei A dacă şi numai dacă există un minor de ordinul **r** al lui A, nenul, iar toţi minorii de ordin mai mare decât **r** (dacă există) sunt nuli.

**Teorema:** Matricea A are rangul **r** dacă şi numai dacă există un minor nenul de ordin **r** al lui A iar toţi minorii de ordin **r +1** sunt zero.

**Teorema:** Fie $A\in M_{m,n}(\mathbb{C}), B\in M_{n,s}(\mathbb{C})$. Atunci orice minor de ordinul **k** , $1\le k\le \min(m,s)$ al lui AB se poate scrie ca o combinaţie liniară de minorii de ordinul **k** al lui A (sau B).

**Teorema:** Rangul produsului a două matrice este mai mic sau egal cu rangul fiecărei matrice.

**Stabilirea rangului unei matrice:**

Se ia determinantul de ordinul **k-1** şi se bordează cu o linie (respectiv cu o coloană). Dacă noul determinant este nul rezultă că ultima linie(respectiv coloană ) este combinaţie liniară de celelalte linii (respectiv coloane).

Este utilă în continuare reamintirea **Proprietăţii 8** de la capitolul „Determinanţi".

**Teorema:** Un determinant este nul dacă şi numai dacă una din coloanele (respectiv liniile ) sale este o combinaţie liniară de celelalte coloane(respectiv linii).

**Teorema:** Rangul **r** al unei matrice A este egal cu numărul maxim de coloane(respectiv linii) care se pot alege dintre coloanele (respectiv liniile) lui A astfel încât nici una dintre ele să nu fie combinaţie liniară a celorlalte.

***Exemplu***

***Să se stabilească rangul următoarei matrice:***

$A=\begin{pmatrix}5 & -2 & 4\\ 1 & 0 & 2\\ 4 & -2 & 2\end{pmatrix}$.

**Rezolvare:**

Observăm că matricea admite un minor de ordinul doi nenul, $\begin{vmatrix}5 & -2\\ 1 & 0\end{vmatrix}=2\neq 0$ prin urmare rangul matricei este cel puţin doi şi verificăm dacă poate avea rangul trei.

În continuare se calculează determinantul matricei şi se obţine $\begin{vmatrix}5 & -2 & 4\\ 1 & 0 & 2\\ 4 & -2 & 2\end{vmatrix}=0$ adică rangul matricei nu poate fi trei. Astfel, matricea are rangul doi.

## Exercitii rezolvate

**1. Să se stabilească rangul următoarelor matrice:**

**a)** $A=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ **; b)** $B=\begin{pmatrix}-6 & -1\\ 12 & 2\end{pmatrix}$**; c)** $C=\begin{pmatrix}1 & 3 & -4\\ 2 & 1 & 5\\ 3 & 4 & 1\end{pmatrix}$**; d)** $D=\begin{pmatrix}-3 & 1 & 2\\ 4 & -1 & 2\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}$**;**

**e)** $E=\begin{pmatrix}2 & 4 & -2 & 1\\ 3 & -2 & 1 & 3\\ -2 & -4 & 2 & -1\end{pmatrix}$**;**

**Rezolvare:**

**a)** $\det(A)=\begin{vmatrix}3 & 4\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-2\neq 0\Rightarrow rang(A)=2$; **b)** $\det(B)=\begin{vmatrix}-6 & -1\\ 12 & 2\end{vmatrix}=0\Rightarrow rang(A)=1$;

**c)** $\det(C)=\begin{vmatrix}1 & 3 & -4\\ 2 & 1 & 5\\ 3 & 4 & 1\end{vmatrix}=0\Rightarrow rang(C)=2$; **d)** $\det(D)=\begin{vmatrix}-3 & 1 & 2\\ 4 & -1 & 2\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}=33\neq 0\Rightarrow rang(D)=3$;

**e)** $\begin{vmatrix}2 & 4 & -2\\ 3 & -2 & 1\\ -2 & -4 & 2\end{vmatrix}=0$, $\begin{vmatrix}2 & 4 & 1\\ 3 & -2 & 3\\ -2 & -4 & -1\end{vmatrix}=0$, $\begin{vmatrix}2 & 4\\ 3 & -2\end{vmatrix}=-16\neq 0\Rightarrow rang(E)=2.$

**2. Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât rangul matricelor următoare să fie 2.**

**a)** $\begin{pmatrix}1 & a & -2\\ 3 & 1 & 4\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$; **b)** $\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 2 & 1 & a\\ -1 & a & -4\end{pmatrix}$; **c)** $\begin{pmatrix}a & 1 & 2\\ 2 & a-1 & 3\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}$;

Rezolvare:
a) rang (A) = 2 dacă şi numai dacă determinantul matricei este nul şi există cel puţin un minor de ordinul doi nenul.

$\det(A)=\begin{vmatrix}1 & a & -2\\ 3 & 1 & 4\\ 0 & 1 & 2\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow -8-6a=0\Rightarrow a=\frac{-4}{3}$. Pentru $a=\frac{-4}{3}$ rezultă rang (A) = 2.

b) $\det(A)=\begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\ 2 & 1 & a\\ -1 & a & -4\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow a^2-6a-16=0\Rightarrow a\in\{-2;8\}$. Pentru $a=-2$ sau $a=8$ rezultă rang(A)= 2.

c) $\det(A)=\begin{vmatrix}a & 1 & 2\\ 2 & a-1 & 3\\ 2 & 1 & 2\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow 2a^2-9a+10=0\Rightarrow a\in\left\{0;\frac{9}{2}\right\}$. Pentru a = 0 sau $a=\frac{9}{2}$ rezultă rang (A) = 2.

## Exercitii propuse

**1.** Stabiliţi rangul următoarelor matrice:

**a)** $\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 1\end{pmatrix}$; **b)** $\begin{pmatrix}3 & 6\\ -1 & -2\end{pmatrix}$; **c)** $\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 0\\ -1 & 3 & 6\end{pmatrix}$; **d)** $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$; **e)** $\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & -2 & 4\\ 3 & -3 & 6\end{pmatrix}$;

**f)** $\begin{pmatrix}2 & 1 & -1 & 3\\ 6 & 3 & -3 & 9\\ 4 & 2 & -2 & 6\end{pmatrix}$; **g)** $\begin{pmatrix}-3 & 2 & 1\\ 1 & -2 & 2\\ -6 & 4 & 2\\ 2 & -4 & 4\end{pmatrix}$.

**2**. Să se determine rangul următoarelor matrice:

a) $A=\begin{pmatrix} 2 & x & -5 \\ y & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; b) $B=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -2 & 6 & 4 \\ -3 & x & y \end{pmatrix}$.

**3.** Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât matricele A şi B să aibă acelaşi rang.

$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

**4.** Să se determine rangul matricei $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ a & b & c & a & b \end{pmatrix}$, $a,b,c \in \mathbb{R}$.

**5.** În mulţimea $M_2(\mathbb{C})$ se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ şi $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Să se determine în funcţie de $a \in \mathbb{C}$, rangul matricei $A+aI_2$.

**6.** Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Să se determine rang($A^{2010}$).

## 4.2 Metode de rezolvare a sistemelor de ecuaţii liniare

Forma generală a unui sistem de **m** ecuaţii cu **n** necunoscute este:

$$(1)\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad \text{sau } \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, i = \overline{1,m}$$

unde $A(a_{ij})$ $1 \le i \le m$ , $1 \le j \le n$ - este **matricea coeficienţilor necunoscutelor**.

Matricea $\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ & \ldots & & \\ a_{m1} & \ldots. & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$ se numeşte **matricea extinsă** a sistemului.

***Definiţie:*** Un sistem de numere $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_n$ se numeşte **soluţie** a sistemului (1) $\Leftrightarrow$ $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_j = b_i, i = \overline{1,m}$ .

***Definiţie:***
- Un sistem se numeşte **incompatibil** dacă şi numai dacă nu are soluţie;
- Un sistem se numeşte **compatibil** dacă şi numai dacă are cel puţin o soluţie;
- Un sistem se numeşte **compatibil determinat** dacă şi numai dacă are o singură soluţie;
- Un sistem se numeşte **compatibil nedeterminat** dacă şi numai dacă are o infinitate de soluţii;

***Definiţie:*** Forma generală a unui sistem de 3 ecuaţii cu 3 necunoscute este:

$$(*)\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad \text{sau } \sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_j = b_i, i = \overline{1,3} \quad \text{unde } A(a_{ij})\ 1 \le i \le 3 \ ,$$

$1 \le j \le 3$ - este matricea coeficienţilor necunoscutelor.

***Definiţie:*** Un sistem de numere $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ se numeşte soluţie a sistemului (1) $\Leftrightarrow$ $\sum_{j=1}^{3} a_{ij}\alpha_j = b_i, i = \overline{1,3}$ . ( adică, dacă în ecuațiile sistemului în locul lui $x_1$ punem $\alpha_1$ , în locul lui $x_2$ punem $\alpha_2$ și în locul lui $x_3$ punem $\alpha_3$ se obțin propoziții adevărate).

**Exemplu**: 1. Se consideră sistemul de ecuaţii $\begin{cases} 2x - y + z = -3 \\ x + y + 2z = 0 \\ 3x + y + mz = 2 \end{cases}$ . Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât tripletul (1; 3; -2) să fie soluţie a sistemului.

**Rezolvare:**

Este suficient să înlocuim soluțiile doar în ultima ecuație unde există m. Cum (1; 3; -2) este soluție a sistemului rezultă
$3\cdot 1+3+m\cdot(-2)=2\Rightarrow 6-2m=2\Rightarrow -2m=-4\Rightarrow m=2.$

| **Activitate independentă** | | **Răspuns** |
|---|---|---|
| Se consideră sistemul de ecuaţii $\begin{cases}3x+y-z=2\\2x-y+z=-1\\x+my+z=2\end{cases}$. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât tripletul (-1; 2; -3) să fie soluţie a sistemului. | | **1.** m=3; |

## Rezolvarea sistemelor prin metoda lui Cramer

**Teorema lui Cramer**: Fie $A\in M_n(\mathbb{C})$. Dacă det A *not* $\Delta\neq 0$, atunci sistemul AX=B are o soluţie unică $X_i=\frac{\Delta_i}{\Delta},\forall i=\overline{1,n}.$

Pentru n=3 şi cu necunoscutele x,y,z, **formulele lui Cramer** sunt de forma: $x=\frac{\Delta_x}{\Delta},y=\frac{\Delta_y}{\Delta},z=\frac{\Delta_z}{\Delta}.$

***Exemplu:***
***Să se rezolve sistemul de ecuaţii:***

$$\begin{cases}2x-4y+z=0\\x+2y+3z=1\\-x+y-2z=-2\end{cases}.$$

Rezolvare:

Matricea asociată sistemului are determinantul

$$\begin{vmatrix}2&-4&1\\1&2&3\\-1&1&-2\end{vmatrix}=-8+1+12+2-6-8=-7\neq 0.$$

Conform **Teoremei lui Cramer**, rezultă că sistemul este compatibiul determinat adică are soluţie unică, soluţie dată de formulele lui Cramer: $x=\frac{\Delta_x}{\Delta},y=\frac{\Delta_y}{\Delta},z=\frac{\Delta_z}{\Delta},$ unde

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}0&-4&1\\1&2&3\\-2&1&-2\end{vmatrix}=21\Rightarrow x=-3;$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix}2&0&1\\1&1&3\\-1&-2&-2\end{vmatrix}=7\Rightarrow y=-1;$$

$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -14 \Rightarrow z = 2$; Aşadar, $S = \{(-3;-1;2)\}$.

| **Activitate independentă** | | **Răspuns** |
|---|---|---|
| Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases} (m+2)x + y + 2z = -1 \\ x + 3y - mz = -5 \text{ și} \\ mx - 2y + z = -3 \end{cases}$ $A(m) = \begin{pmatrix} m+2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -m \\ m & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $m \in \mathbb{R}$, matricea sistemului. Pentru m = 2 să se rezolve sistemul; | | $S = \{(-2;1;3)\}$ |

**Rezolvare:**

Pentru m =2 rezultă $\begin{cases} 4x + y + 2z = -1 \\ x + 3y - 2z = -5 \\ 2x - 2y + z = -3 \end{cases}$. Determinantul sistemului este

$\Delta_s = \Delta = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 12 - 4 - 4 - 12 - 16 - 1 = -25$,

$\Delta_x = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -5 & 3 & -2 \\ -3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -3 + 20 + 6 + 18 + 4 + 5 = 50$,

$\Delta_y = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -20 - 6 + 4 + 20 - 24 + 1 = -25$,

$\Delta_z = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -5 \\ 2 & -2 & -3 \end{vmatrix} = -36 + 2 - 10 + 6 - 40 + 3 = -75$. Atunci, conform formulelor lui Cramer

obținem: $x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{50}{-25} = -2$, $y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-25}{-25} = 1$, $z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-75}{-25} = 3$, aşadar, $S = \{(-2;1;3)\}$.

**Teorema lui Kronecker- Capelli**: Un sistem de ecuaţii liniare este compatibil dacă şi numai dacă rangul matricei sistemului este egal cu rangul matricei extinse.

***Exemplu:***

***Să se determine a şi b astfel încât sistemul de mai jos să fie compatibil:***

$\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ x - y = -3 \\ 2x - y = a \\ x + y = b \end{cases}$.

Rezolvare:

Matricea asociată sistemului este $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & -1\\ 2 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ şi are rangul doi deoarece există un minor de ordinul doi nenul: $\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-5\neq 0$;

Conform **Teoremei lui Kronecker- Capelli**, sistemul este compatibil dacă şi numai dacă rangul matricei sistemului, rang(A), este egal cu rangul matricei extinse a sistemului, rang($\overline{A}$**).**

Cum rang(A) = 2, rezultă că rang($\overline{A}$) trebuie să fie 2.

Atunci, următorii determinanţi trebuie să fie zero.

$$\begin{vmatrix}2 & 3 & 4\\ 1 & -1 & -3\\ 2 & -1 & a\end{vmatrix}=0\Rightarrow a=-4;$$

$$\begin{vmatrix}2 & 3 & 4\\ 1 & -1 & -3\\ 1 & 1 & b\end{vmatrix}=0\Rightarrow b=1;$$ Aşadar, pentru a = - 4 şi b = 1 , sistemul este compatibil.

**Teorema lui Rouche**: Un sistem de ecuaţii liniare este compatibil dacă şi numai dacă toţi minorii caracteristici sunt nuli.

***Exemplu:***

***Să se rezolve sistemul:*** $\begin{cases}2x-y+z+2t=1\\ x+y+2z+t=2\\ 3x-2y+z+3t=1\end{cases}$ ***;***

Rezolvare:

Matricea asociată sistemului este $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 2 & 1\\ 3 & -2 & 1 & 3\end{pmatrix}$. Se observă că toţi determinanţii caracteristici de ordinul trei sunt nuli $\Delta_{car1}=\begin{vmatrix}2 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ 3 & -2 & 1\end{vmatrix}=0;\ \Delta_{car2}=\begin{vmatrix}2 & -1 & 2\\ 1 & 1 & 1\\ 3 & -2 & 3\end{vmatrix}=0,$

şi există un determinant de ordinul doi nenul, $\Delta_{principal}=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=3\neq 0$, rezultă atunci că rangul matricei este doi şi că sistemul este compatibil dublu nedeterminat. Făcând notaţiile $z=\alpha, t=\beta$ rezultă sistemul $\begin{cases}2x-y=1-\alpha-2\beta\\ x+y=2-2\alpha-\beta\end{cases}$ de unde se obţine $x=1-\alpha-\beta$ şi $y=1-\alpha$.

Sintetizând cele de mai sus referitor la compatibilitatea sistemelor de ecuaţii liniare, putem avea următoarele situaţii:
Notăm cu **m**-numărul de ecuaţii;
**n**- numărul de necunoscute;
**r** -rangul matricei coeficienţilor. Atunci,

| | | | |
|---|---|---|---|
| I | **m=n=r** | Sistem compatibil determinat | $\Delta \neq 0$ |
| II | **m=r**$\langle n$ | Sistem compatibil nedeterminat | minorul principal este nenul |
| III | **n=r**$\langle m$ | Sistem compatibil determinat sau | Dacă toţi minorii caracteristici sunt nuli |
| | | Sistem incompatibil | Există cel puţin un minor caracteristic nenul |
| IV | $r\langle n, r\langle m$ | Sistem compatibil nedeterminat sau | Dacă toţi minorii caracteristici sunt nuli |
| | | Sistem incompatibil | Există cel puţin un minor caracteristic nenul |

**Tabel nr. 1 Studiul compatibilităţii sistemelor de ecuaţii**

**Teorema**: Un sistem liniar şi omogen admite numai soluţia banală $\Leftrightarrow \Delta \neq 0$

***Exemplu 1.***

***Se consideră sistemul*** $\begin{cases} 2x+y-z=0 \\ x+y+2z=0 \\ -x+2y+mz=0 \end{cases}$ ***;*** $m \in \mathbb{R}$**.**

***a) Pentru m = 13 să se rezolve sistemul;***
***b) Pentru*** $m \neq 13$ ***să se arate că sistemul admite numai soluţia banală.***
**Rezolvare:**

a) Sistemul $\begin{cases} 2x+y-z=0 \\ x+y+2z=0 \\ -x+2y+13z=0 \end{cases}$ are determinantul $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 13 \end{vmatrix} = 0$ şi cum există un minor principal nenul, $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ rezultă că este sistem compatibil simplu nedeterminat.

Notăm necunoscuta secundară $z = \alpha \in \mathbb{R}$ şi se obţine sistemul:

$\begin{cases} 2x+y=\alpha \\ x+y=-2\alpha \end{cases}$. Soluţia finală este: $S = \{(3\alpha; -5\alpha; \alpha) | \alpha \in \mathbb{R}\}$.

b) Pentru $m \neq 13$ determinantul sistemului este nenul prin urmare se pot aplica formulele lui Cramer $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$. Dar, $\Delta_x = 0, \Delta_y = 0, \Delta_z = 0$ ceea ce înseamnă că sistemul admite numai soluţia nulă.

**Exemplu 2. Să se determine valorile parametrului real m pentru care sistemul dat să admită soluţii nenule**

$$\begin{cases} mx + y - z = 0 \\ x + (m+1)y + 2z = 0 \\ x + 3y + z = 0 \end{cases},$$

Rezolvare: Un sistem omogen şi liniar admite soluţie nenulă dacă şi numai dacă determinantul sistemului este egal cu zero. Astfel, se pune condiţia ca determinantul sistemului să fie nul.

$$\begin{vmatrix} m & 1 & -1 \\ 1 & m+1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow m^2 + m - 3 + 2 + m + 1 - 6m - 1 = 0.$$

Din $m^2 - 4m - 1 = 0$ se obţine $m_{1,2} = 2 \pm \sqrt{5}$.

| **Activitate independentă** | | **Răspuns** |
|---|---|---|
| **Să se rezolve sistemul omogen:** $\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ 3x + y + z = 0 \\ -x + 2y + 4z = 0 \end{cases}$ **;** | | $S = \{(0;0;0)\}$ |

Cum determinantul sistemului $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 12 - 1 - 2 - 2 - 12 = -25 \neq 0$ rezultă că sistemul admite numai soluţia banală. $S = \{(0;0;0)\}$.

## Exercitii rezolvate

**1. Scrieţi matricele asociate următoarelor sisteme:**

**a)** $\begin{cases} 3x + 6y = 4 \\ 2x - 5y = 3 \end{cases}$**;** **b)** $\begin{cases} 4x - 6y = 2 \\ 5x + 4y = 5 \end{cases}$**;**

Rezolvare:

a) Matricea coeficienţilor necunoscutelor sistemului este $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$.

**2. Determinaţi $m,n\in\mathbb{R}$ astfel încât perechea (2; 4) să fie soluţia sistemului** $\begin{cases}(m+1)x+y=6\\4x-ny=10\end{cases}$.

Rezolvare:

Pentru x = 2 şi y = 4 rezultă $\begin{cases}2m+2+4=6\\8-4n=10\end{cases}\Rightarrow m=0,n=-\frac{1}{2}.$

**3. Determinaţi valorile parametrului real m astfel încât următoarele sisteme să fie de tip Cramer:**

**a)** $\begin{cases}3x-4y=8\\mx+2y=10\end{cases}$; **b)** $\begin{cases}2x-y=6\\4x+(m+1)y=5\end{cases}$;

Rezolvare:

a) Pentru ca sistemul să fie de tip Cramer trebuie ca determinantul sistemului să fie nenul. Astfel,

se pune condiţia ca determinantul $\begin{vmatrix}4&-6\\2&1\end{vmatrix}\neq 0$ de unde rezultă $m\neq-\frac{3}{2}$;

b) Analog, se pune condiţia $\begin{vmatrix}2&-1\\4&m+1\end{vmatrix}\neq 0\Rightarrow\ m\neq-\frac{3}{2}$;

**4. Să se rezolve sistemele omogene:**

**a)** $\begin{cases}4x-6y=0\\2x+y=0\end{cases}$; **b)** $\begin{cases}x+y-2z=0\\3x+y+z=0\\-x+2y+4z=0\end{cases}$ **; c)** $\begin{cases}x-3y+z=0\\3x+4y-z=0\\2x-6y+2z=0\end{cases}$ **;**

Rezolvare:

a) Cum determinantul sistemului $\begin{vmatrix}4&-6\\2&1\end{vmatrix}=4+12=16\neq 0\Rightarrow$ sistemul admite numai soluţia banală.

$S=\{(0;0)\}$.

b) Cum determinantul sistemului $\begin{vmatrix}1&1&-2\\3&1&1\\-1&2&4\end{vmatrix}=4-12-1-2-2-12=-25\neq 0$ rezultă că sistemul admite numai soluţia banală.

$S=\{(0;0;0)\}$

c) Observăm că după ce dăm pe 2 factor comun după linia a treia determinatul sistemului este $\begin{vmatrix}1&-3&1\\3&4&-1\\2&-6&2\end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix}1&-3&1\\3&4&-1\\1&-3&1\end{vmatrix}=0$ deoarece are două linii identice. Atunci, sistemul este compatibil simplu nedeterminat , adică admite o infinitate de soluţii deoarece există un minor principal $\Delta_{principal}=\begin{vmatrix}1&-3\\3&4\end{vmatrix}=13\neq 0$ iar necunoscutele se află rezolvând sistemul format din ecuaţiile principale, în cazul nostru primele două ecuaţii după ce în prealabil s-a făcut notaţia $z=\alpha\in\mathbb{R}$.

$\begin{cases} x-3y=-\alpha \,\big|\cdot(-3) \\ 3x+4y=\alpha \ ,\alpha\in\mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x+9y=3\alpha \\ 3x+4y=\alpha \end{cases} \Rightarrow 13y=4\alpha \Rightarrow y=\frac{4\alpha}{13}.$

Atunci, $x=-\alpha+3\cdot\frac{4\alpha}{13}=-\frac{\alpha}{13}$. Aşadar, $S=\left\{\left(\frac{-\alpha}{13};\frac{4\alpha}{13};\alpha\right)\middle|\alpha\in\mathbb{R}\right\}$.

**5. Să se determine valorile parametrului real m pentru care sitemele**

**a)** $\begin{cases} mx+y-z=0 \\ x+(m+1)y+2z=0 \\ x+3y+z=0 \end{cases}$, **b)** $\begin{cases} x-my+z=0 \\ 2x+3y-z=0 \\ (m+2)x-y+2z=0 \end{cases}$ **să aibă soluţii nenule.**

Rezolvare:

a) Un sistem omogen şi liniar admite soluţie nenulă dacă şi numai dacă determinantul sistemului este egal cu zero. Astfel, se pune condiţia ca determinantul sistemului să fie nul.

$\begin{vmatrix} m & 1 & -1 \\ 1 & m+1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow m^2+m-3+2+m+1-6m-1=0$. Din $m^2-4m-1=0$ se obţine

$m_{1,2}=2\pm\sqrt{5}$.

b) Analog, se pune condiţia ca determinantul sistemului să fie nul.

$\begin{vmatrix} 1 & -m & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ m+2 & -1 & 2 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow 6-2+m^2+2m-3m-6-1+4m=0.$

Din $m^2+3m-3=0 \Rightarrow m_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{21}}{2}$.

**6. Determinaţi** $m\in\mathbb{R}$ **astfel încât sistemul** $\begin{cases} 2x-y+3z=5 \\ x-2y+z=4 \\ x+my-z=-2 \end{cases}$ **să fie incompatibil.**

Rezolvare:

Pentru ca sistemul să fie incompatibil trebuie ca determinantul sistemului să fie nul şi să existe cel puţin un minor caracteristic nenul.

Astfel, din condiţia ca determinantul sistemului să fie nul rezultă,

$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & m & -1 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow 4+3m-1+6-2m-1=0 \Rightarrow m=-8.$

Există un minor principal nenul, $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-3\neq 0$ şi înlocuind pe m cu – 8 se obţine că

singurul minor caracteristic $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & -8 & -2 \end{vmatrix}=36\neq 0$, prin urmare sistemul este incompatibil

pentru m = - 8.

**7.** **Fie sistemul** $\begin{cases} x-y=3 \\ 2x+3y=4 \\ x+my=1 \end{cases}$**. Să se determine** $m\in\mathbb{R}$ **astfel încât sistemul să fie compatibil şi să se determine soluţia acestuia.**

Rezolvare:

Observăm că există un minor principar de ordinul doi nenul, $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=5\neq 0$, atunci sistemul este compatibil dacă toţi minorii caracteristici sunt nuli. În cazul nostru există un singur minor caracteristic $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix}=3+6m-4-9-4m+2=0\Rightarrow 2m-8=0\Rightarrow m=4.$

Aşadar, pentru m= 4 sistemul este compatibil iar soluţiile se obţin din rezolvarea primelor două ecuaţii ale sistemului:

$\begin{cases} x-y=3 \,|\cdot 3 \\ 2x+3y=4 \end{cases}\Rightarrow 5x=13\Rightarrow x=\frac{13}{5}, y=-\frac{2}{5}.$ Cum cele două soluţii verifică şi cea de a treia ecuaţie rezultă că sistemul este compatibil determinat cu soluţia $S=\left\{\left(\frac{13}{5};-\frac{2}{5}\right)\right\}$.

**8.** **Să se rezolve sistemul:**

$$\begin{cases} 2x+y-2z-3t=2 \\ 2x-y+2z-5t=2 \\ 3x-y-z-t=6. \end{cases}$$

**Rezolvare:** Observăm că sistemul este de trei ecuaţii cu patru necunoscute, m = 3, n= 4. Trebuie sa determinăm rangul matricei asociate coeficienţilor necunoscutelor sistemului. Aceasta este:

$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & 2 & -5 \\ 3 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, rezultă că rangul nu poate fi mai mare decât trei. Căutăm un minor de ordinul trei nenul:

$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix}=12\neq 0\Rightarrow rang(A)=3$. Aceasta înseamnă că sistemul are trei ecuaţii principale şi niciuna secundară, trei necunoscute principale, x,y,z, şi una secundară, t; Aşadar, m=r, m⟨ n, r⟨ n, şi conform tabelului 1, caz II, rezultă că sistemul este **compatibil simplu nedeterminat**. Se notează t cu $\alpha\in$R, iar celelalte necunoscute vor fi exprimate în funcţie de $\alpha$.

$\begin{cases} 2x+y-2z=3t+2 \\ 2x-y+2z=5t+2 \\ 3x-y-z=t+6. \end{cases}$ Determinantul acestui sistem este 12 şi fiind nenul admite o soluţie unică dată de **formulele lui Cramer:** $X_i=\frac{\Delta_i}{\Delta}$.

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{12(2\alpha+1)}{12}=2\alpha+1,\quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{12(3\alpha-2)}{12}=3\alpha-2,\quad z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=\frac{12(2\alpha-1)}{12}=2\alpha-1$$

**9.** **Să se discute sistemul în funcţie de** $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$**.**

$$\begin{cases} x-3y=-2 \\ x+2y=3 \\ 3x-y=\alpha \\ 2x+y=\beta \end{cases}$$

**Rezolvare**: Observăm că rangul matricei asociate sistemului este 2, egal cu numărul de necunoscute, minorul principal fiind $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$ Cum r=n şi r$\langle$ m, n$\langle$ m, suntem în caz III, conform studiului compatibilităţii sistemului, aşadar, conform **Teoremei lui Rouche** sistemul poate fi **compatibil determinat** dacă toţi minorii caracteristici sunt nuli adică $\begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & \alpha \end{vmatrix} = 0$ şi $\begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & \beta \end{vmatrix} = 0$, de unde rezultă $\alpha = 2$ şi $\beta = 3$. Aşadar, dacă $\alpha = 2$ şi $\beta = 3$ rezultă că sistemul este compatibil determinat, soluţiile aflându-se din rezolvarea primelor două ecuaţii, adică $\begin{cases} x-3y=-2 \\ x+2y=3 \end{cases}, \Rightarrow x=1, y=1.$

Dacă $\alpha \neq 2, \beta \neq 3$ atunci sistemul este **incompatibil** adică nu are soluţii.

**10. Să se discute sistemul în funcţie de $\alpha \in \mathbb{R}$.**

$$\begin{cases} 2x-y+z+2t=1 \\ 2x+2y+4z+2t=\alpha \\ 3x-2y+z+3t=1. \end{cases}$$

**Rezolvare**: Matricea asociată sistemului este, $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Cum minorii de ordinul trei $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ şi $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0$, rezultă că rangul matricei este 2 deoarece există un minor de ordinul doi nenul, $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$. Aşadar r$\langle$ m=3, r$\langle$ n=4, şi conform cazului IV din tabelul 1, rezultă că sistemul poate fi **compatibil nedeterminat** (dacă toţi minorii caracteristici sunt nuli) sau poate fi sistem **incompatibil** (dacă există cel puţin un minor caracteristic nenul).

Având o singură ecuaţie secundară (cea de a treia), avem prin urmare un singur minor caracteristic. Acesta se obţine bordând minorul principal cu elementele din linia a treia şi termenii liberi ai sistemului. Astfel $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & \alpha \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \alpha - 4 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 4.$

Prin urmare, pentru $\alpha = 4$. sistemul este compatibil dublu nedeterminat(x şi y necunoscute principale care se află din primele două ecuaţii şi z respectiv t necunoscutele secundare le vom nota cu parametrii u respectiv v ).

$\begin{cases} 2x-y=-u-2v+1 \\ 2x+2y=-4u-2v+4 \end{cases}$ Rezultă x=-u-v+1, y=-u+1, $u\in\mathbb{R}$, $v\in\mathbb{R}$.

Pentru $\alpha\neq 4$ sistemul este incompatibil.

**11. Se consideră sistemul:**

$\begin{cases} 2x+y+2z=-2 \\ x+y+z=\beta \\ \alpha\cdot x-3y-z=-1. \end{cases}$ a) pentru $\alpha=1 \;\; si \;\; \beta=0$ să se rezolve sistemul;

b) să se discute sistemul după parametrii reali $\alpha,\beta$.

Rezolvare:

a) Pentru $\alpha=1 \;\; si \;\; \beta=0$, rezultă det(A)= -2, unde A este matricea asociată sistemului;
Conform **formulelor lui Cramer**, obţinem

$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{-3}{-2}=\frac{3}{2},\;\; y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{-4}{-2}=2,\;\; z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=\frac{7}{-2}=-\frac{7}{2}.$

b)

$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ \alpha & -3 & -1 \end{vmatrix}=-\alpha-1$. Dacă $\alpha=-1$, atunci rangul(A)=2, $\Delta_{car}=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & \beta \\ -1 & -3 & -1 \end{vmatrix}=5\beta+3$,

$\Delta_{car}=0\Leftrightarrow\beta=-\frac{3}{5}\Rightarrow$ sistemul este compatibil simplu nedeterminat. Notăm pe z cu t$\in\mathbb{R}\Rightarrow$

şi din primele două ecuaţii ale sistemului că soluţia acestuia este : $(\frac{-7}{5}-t,\frac{4}{5},t), t\in\mathbb{R}$

Dacă $\beta\neq\frac{-3}{5}$ atunci sistemul este incompatibil.

## Exercitii propuse

**1.** Se consideră sistemul de ecuaţii $\begin{cases} 3x+y-z=2 \\ 2x-y+z=-1 \\ x+my+z=2 \end{cases}$. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât tripletul (-1; 2; -3) să fie soluţie a sistemului.

**2.** Se consideră sistemul de ecuaţii $\begin{cases} 2x-y+z=-3 \\ x+y+2z=0 \\ 3x+y+mz=2 \end{cases}$. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât tripletul (1; 3; -2) să fie soluţie a sistemului.

**3.** Să se rezolve sistemele:

a) $\begin{cases} 4x+2y=2 \\ 3x-y=9 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x+2y=5 \\ 2x+y=1 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 2x-y+z=1 \\ x+3y-2z=9 \\ -3x+2y+3z=-10 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x+y=3 \\ x+2y=5 \\ 2x+y=4 \\ 2x+3y=1 \end{cases}$;

e) $\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x+3y-2z=1 \\ 3x+y-3z=-2 \end{cases}$; f) $\begin{cases} 2x-3y+z=0 \\ x-2y+2z=2 \\ 3x-4y+z=-1 \end{cases}$; g) $\begin{cases} 3x-2y+z=-3 \\ x+2y+2z=5 \\ -x+3y-z=2 \end{cases}$; h) $\begin{cases} 2x+3y-z=-3 \\ -3x+4z=5 \\ x+2y-z=0 \end{cases}$;

**4.** Să se rezolve sistemele omogene:

a) $\begin{cases} 3x+2y=0 \\ -4x-y=0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 4x+6y=0 \\ -2x-3y=0 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 3x+y+z=0 \\ 2x-4y+3z=0 \\ x+5y-2z=0 \end{cases}$;

**5.** Să se rezolve sistemele:

a) $\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 2x+3y+4z=1 \\ 3x+4y+5z=1 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} x+2y+3z=6 \\ 3x-y+2z=4 \\ x-5y-4z=-8 \end{cases}$; **c)** $\begin{cases} x-y+3z=0 \\ 3x+y+z=0 \\ -x+y-3z=0 \end{cases}$; **d)** $\begin{cases} x+y+2z=2 \\ 2x+3y+4z=5 \\ 3x+5y+6z=8 \end{cases}$

**6.** Pentru următoarele sisteme de ecuaţii liniare, să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât sistemele să aibă soluţie unică.

**a)** $\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+2ay+z=2 \\ x+y+z=3 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} x+y+az=3 \\ x+ay+z=-2 \\ ax+y+z=4 \end{cases}$.

**7.** Să se determine valorile parametrului real m pentru care sitemul $\begin{cases} mx+y+z=0 \\ x+(m-1)y+z=0 \\ x+2y+mz=0 \end{cases}$,

să aibă soluţii nenule.

**8.** Determinaţi $m \in \mathbb{R}$ astfel încât sistemul $\begin{cases} x+y-z=8 \\ x-2y+3z=5 \\ mx-2y+z=-1 \end{cases}$ să fie incompatibil.

**9.** Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât sistemul $\begin{cases} mx+y+z=0 \\ x+3y+2z=0 \\ -x-y+4z=0 \end{cases}$ să admită cel puţin două

soluţii.

**10.** Fie sistemul $\begin{cases} 2x+y=8 \\ x-y=1 \\ 5x+4y=m \end{cases}$. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât sistemul să fie

compatibil şi să se determine soluţia acestuia.

**11**. Se consideră sistemul $\begin{cases} x-y+z=1 \\ 2x+3y+z=3 \\ 3x+2y+2z=4 \end{cases}$. Să se determine o soluţie particulară care

verifică relaţia x+ y + z = 1.

**12.** Să se rezolve sistemul $\begin{cases} x+my+3z=2 \\ 3x-y+2z=-3 \\ mx-y+2z=-4 \end{cases}$, $m\in\mathbb{R}$.

**13.** Să se rezolve sistemul $\begin{cases} x-y+z=1 \\ x+y+z=3 \\ mx+y+z=3m \end{cases}$, $m\in\mathbb{R}$.

**14.** Să se rezolve $\begin{cases} x+4y-2z=3a \\ 3x-2y+z=2a \\ x+2y-z=3a \end{cases}$ şi să se arate că soluţiile sunt în progresie aritmetică, pentru orice număr real nenul a.

**15.** Se consideră sistemul $\begin{cases} x-y+z=0 \\ x-2y+3z=0 \\ 3x-2y+z=0 \end{cases}$. Să se determine soluţia particulară $(x_0;y_0;z_0)$ a sistemului ştiind că $x_0+y_0+z_0=8$.

**16.** Să se rezolve sistemul $\begin{cases} x+y+mz=1 \\ x+my+z=n \\ mx+y+z=1 \end{cases}$.

**17**. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases} x+2y+2z=0 \\ 2x+3y+z=-4 \\ mx-2y+3z=10 \end{cases}$, $m\in\mathbb{R}$ și $A(m)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ m & -2 & 3 \end{pmatrix}$ este matricea sistemului;

a) Să se arate că pentru orice m, număr real, tripletul (0;-2;2) este soluție a sistemului;

b) Să se determine $m\in\mathbb{R}$, pentru care sistemul admite soluție unică;

**18 .** Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases} -x+2y+z=b \\ x+2y+az=3 \\ x+y+3z=4 \end{cases}$, $a,b\in\mathbb{R}$.

a) Să se calculeze determinantul matricei asociate sistemului;

b) Pentru a =2 și b = 8, să se rezolve sistemul;

c) Să se determine $b\in\mathbb{R}$, știind că tripletul $(x_0,y_0,z_0)$ este soluție a sistemului și că $x_0+y_0+z_0=4$.

**19.** Se consideră sistemul $\begin{cases} 2x+y+(m+1)z=-1 \\ x+y-3z=2 \\ mx-2y+4z=4 \end{cases}$ și $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & m+1 \\ 1 & 1 & -3 \\ m & -2 & 4 \end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{R})$, matricea sistemului; Se cere:

a) Să se arate că matricea A este inversabilă pentru orice număr real m;

b) Pentru m = 1 să se rezolve sistemul;

**20**. Se consideră sistemul de ecuaţii $\begin{cases} x+my+z=m-3 \\ 2x-3y+z=-1 \\ (m+1)x+y-2z=4 \end{cases}$, unde $m\in\mathbb{R}$. Pentru m= 2, să se rezolve sistemul de ecuaţii.

**21**. Se consideră sistemul de ecuaţii

$\begin{cases} x+3y+z=3 \\ 3x+y+2z=2 \\ mx-3y+6z=1 \end{cases}$, unde $m \in \mathbb{R}$.

a) Să se determine $m \in \mathbb{R}$, astfel încât soluţia sistemului să fie (-2;1;2).

b) Să se rezolve ecuaţia: $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ m & -3 & 6 \end{vmatrix} = m^2 - 7m - 15.$

c) Pentru m=0, să se rezolve sistemul de ecuaţii.

## 4.3 Metoda lu Gauss de rezolvare a sistemelor de ecuații liniare

**Metoda lui Gauss** este o metodă de rezolvare a sistemelor liniare de ecuaţii utilă mai ales atunci când sistemele au mai mult de trei ecuaţii şi trei necunosute.

**Definiţie: Se numeşte matrice triunghiulară, o matrice** $A=(a_{i,j})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}$ **în care**

$a_{i,j}=0,\ \forall j\langle i.$

***Exemple***

$$\begin{pmatrix}1&2&-3\\0&1&2\\0&0&4\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}-2&3&1&2\\0&2&1&-1\\0&0&3&1\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}1&3\\0&2\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}1&2&5\\0&1&2\\0&0&3\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Pentru a aduce o matrice la forma triunghiulară dacă $a_{11}\neq 0$ după care o vom înmulţi pe aceasta cu $-\frac{a_{i1}}{a_{11}}$ şi o adunăm la linia i, pentru fiecare $i=\overline{2,m}$ obţinând astfel prima coloană nulă cu excepţia elementului $a_{i2}\neq 0.$

Dacă, $a_{22}\neq 0$ se procedează ca mai înainte, înmulţind linia a doua cu $-\frac{a_{i2}}{a_{22}}$ şi o adunăm la linia i pentru fiecare $i=\overline{3,m}.$

Acest procedeu se continuă până se ajunge la elementul $a_{k\,k}$ unde k = min(m,n).

***Exemplu***

***Să se aducă următoarea matrice la o formă triunghiulară:***

$$A=\begin{pmatrix}2&3&-1&2\\3&2&1&-2\\1&-2&2&3\\0&2&1&-1\end{pmatrix}.$$

Pentru început se schimbă între ele prima linie cu linia a treia pentru a obţine $a_{11}=1.$

Înmulţim prima linie cu -3 respectiv – 2 şi o adunăm la linia a doua respectiv la a treia.

$\begin{pmatrix}1&-2&2&3\\0&8&-5&-11\\0&7&-5&-4\\0&2&1&-1\end{pmatrix}$. S-a obţinut aşadar, prima coloană nulă cu excepţia lui $a_{11}=1.$

În continuare, înmulţim a doua linie cu $-\frac{7}{8}$ respectiv $-\frac{2}{8}$ şi adunăm la linia a treia respectiv a patra.

$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 8 & -5 & -11 \\ 0 & 0 & \frac{-5}{8} & \frac{45}{8} \\ 0 & 0 & \frac{18}{8} & \frac{14}{8} \end{pmatrix}$. Pentru a obţine $a_{43}=0$ înmulţim linia a treia cu $\frac{18}{5}$ şi o adunăm la linia a patra. Rezultă astfel o matrice triunghiulară. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 8 & -5 & -11 \\ 0 & 0 & \frac{-5}{8} & \frac{45}{8} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{176}{8} \end{pmatrix}$

Pentru a rezolva un sistem prin **metoda lui Gauss** procedăm astfel:

- Se scrie matricea extinsă asociată sistemului şi se desparte printr-o linie punctată coloana termenilor liberi;
- Se aduce matricea extinsă la forma de matrice triunghiulară;
- Se scrie sistemul corespunzător matricei triunghiulare;
- Se determină necunoscutele începând de la ultima linie spre prima.

***Exemplu***

***Să se rezolve următorul sistem prin metoda lui Gauss,*** $\begin{cases} 3x-2y+z=-3 \\ -2x+3y-3z=-1 \\ x+4y-z=1 \end{cases}$**.**

Rezolvare:

Pentru început scriem matricea extinsă a sistemului:

$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & -3 \\ -2 & 3 & -3 & -1 \\ 1 & 4 & -1 & 1 \end{array}\right)$ şi se schimbă între ele liniile întâi şi a treia pentru a obţine $a_{11}=1$.

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -3 & -1 \\ 3 & -2 & 1 & -3 \end{array}\right)$. Mai departe, se înmulţeşte cu 2 prima linie şi se adună la linia a doua. De asemenea se înmulţeşte cu - 3 linia întâi şi se adună la linia a treia pentru a obţine zerouri pe prima coloană.

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 11 & -5 & 1 \\ 0 & -14 & 4 & -6 \end{array}\right)$. În continuare, se înmulţeşte linia a doua cu $\frac{14}{11}$ şi se adună la linia a treia:

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 11 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{-26}{11} & \frac{-52}{11} \end{array}\right)$. Obţinem astfel sistemul

$\begin{cases} x+4y-z=1 \\ 11y-5z=1 \\ -\frac{26}{11}z=-\frac{52}{11} \end{cases}$. Plecând de la ultima ecuaţie, se obţine: z = 2; y = 1 şi x = -1.

$S=\{(-1;1;2)\}$.

## Exercitii propuse

**1.** Să se rezolve sistemele următoare prin metoda lui Gauss.

**a)** $\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x+3y-2z=1 \\ 3x+y-3z=-2 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} 2x-3y+z=0 \\ x-2y+2z=2 \\ 3x-4y+z=-1 \end{cases}$; **c)** $\begin{cases} 3x-2y+z=-3 \\ x+2y+2z=5 \\ -x+3y-z=2 \end{cases}$; **d)** $\begin{cases} 2x+3y-z=-3 \\ -3x+4z=5 \\ x+2y-z=0 \end{cases}$;

# PARTEA a II-a
# ANALIZĂ MATEMATICĂ

## Cap. 5. LIMITE DE FUNCȚII

### 5.1 Limita unei funcții într-un punct de acumulare.

Prin convenţie, $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty;\infty\}$ și se numește dreapta reală încheiată.

$$\mathbb{R} = (-\infty;\infty) \text{ iar } \overline{\mathbb{R}} = [-\infty;\infty]$$

**Definiţie**: Fie $a \in \mathbb{R}$. Se numește **vecinătate** a punctului „ **a** ” , o mulțime V pentru care există $\varepsilon\rangle 0$ și un interval deschis centrat în a de forma $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ inclus în V.

**Observaţie:** Orice mulțime deschisă care-l conține pe a este o vecinătate a lui a.
Exemple de vecinătăți: a lui $\infty$ este $(\varepsilon,\infty]$ iar a lui $-\infty$ este $[-\infty,\varepsilon)$.

**Definiţie**: Fie $D \subseteq \mathbb{R}$ o submulțime. Un punct $a \in \overline{\mathbb{R}}$ se numește **punct de acumulare pentru D** dacă în orice vecinătate a lui **a** există cel puțin un punct din $D \setminus \{a\}$, adică $V \cap (D \setminus \{a\}) \neq \varnothing$ .

$a \in D$ se numește punct izolat al mulțimii D dacă nu este punct de acumulare al mulțimii D.

Exemple:
Pentru mulțimile A de mai jos să se determine $A^I$ adică mulțimea punctelor de acumulare:
a) $A = \{0;1\}$; b) $A = [0;1]$; c) $A = (-\infty;1)$; d) $A = \mathbb{N}$; e) $A = \mathbb{Q}$; f) $A = \mathbb{R}$;
Rezolvare:
a) $A^I = \varnothing$; b) $A^I = [0;1]$; c) $A^I = [-\infty;1]$; d) $A^I = \varnothing$; e) $A^I = \overline{\mathbb{R}}$; f) $A^I = \overline{\mathbb{R}}$;

**Limita unei funcții într-un punct**

**Definiţie**: O funcţie $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are limita $l \in \overline{\mathbb{R}}$ în punctul de acumulare $x_0$ dacă pentru orice vecinătate V a lui **l** , există o vecinătate U a lui $x_0$ astfel încât pentru orice $x \in D \cap (U \setminus \{x_0\})$ să rezulte $f(x) \in V$ .

**În general,** $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),\ \forall x_0 \in \mathbb{R}$

**Observaţie: Problema existenței limitei unei funcții într-un punct $x_0$ se poate pune chiar dacă f(x) nu este definită în acest punct, însă condiția necesară este ca $x_0$ să fie punct de acumulare.**

Exemplu:
Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x + 6$. Să se arate că: a) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 10$; b) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$

Rezolvare:

**a)** Fie $V=(10-\varepsilon;10+\varepsilon),\ \varepsilon\rangle 0$. Din condiția $f(x)\in V$ rezultă că $10-\varepsilon\ \langle\ 2x+6\ \langle\ 10+\varepsilon\Rightarrow$ $4-\varepsilon\ \langle\ 2x\langle\ 4+\varepsilon\Rightarrow\frac{4-\varepsilon}{2}\langle\ x\ \langle\frac{4+\varepsilon}{2}$ sau $x\in\left(\frac{4-\varepsilon}{2};\frac{4+\varepsilon}{2}\right)=U$. Observăm că $U=\left(2-\frac{\varepsilon}{2};2+\frac{\varepsilon}{2}\right)\in V(2)$ care este o vecinătater a lui 2. Așadar, $f(x)\in V,\forall x\in U$ și deci $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=10$.

**b)** Fie $V=(\varepsilon;\infty),\ \varepsilon\rangle 0$ o vecinătate oarecare a lui $+\infty$. Din condiția $f(x)\in V$ rezultă $\varepsilon\langle f(x)\Leftrightarrow\varepsilon\langle 2x+6\Rightarrow 2x\rangle\varepsilon-6\Rightarrow x\rangle\frac{\varepsilon-6}{2}$ deci $x\in\left(\frac{\varepsilon-6}{2},\infty\right)$. Așadar există vecinătatea $U=\left(\frac{\varepsilon-6}{2},\infty\right)$ a lui $+\infty$ cu proprietatea că $f(x)\in V,\forall x\in U$ deci $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$.

## OPERAŢII CU LIMITE DE FUNCŢII

**TEOREMĂ**: Fie $f,g:D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x_0$ punct de acumulare pentru mulţimea D. Dacă funcţiile f şi g au limită finită în punctul $x_0$ atunci şi funcţiile $f\pm g,\ f\cdot g,\ a\cdot f,\ \frac{f}{g}$ au limită în $x_0$, $a\in\mathbb{R},g\neq 0$;

**Convenţii:**

**Au sens operațiile:** $\infty+\infty=\infty,\ \infty\pm a=\infty,\ \forall a\in\mathbb{R},\ \infty^n=\infty,\ \forall n\in\mathbb{N}^*,$
$(-\infty)^n=(-1)^n\infty,\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\quad 0^\infty=-\infty,\ \infty^\infty=\infty,\ \infty^{-\infty}=0,$
$a^\infty=\begin{cases}\infty,\ a\rangle 1\\ \infty,\ a\in(0;1)\end{cases};\quad \infty\cdot a=\begin{cases}\infty\ ,a\rangle 0\\ -\infty,a\langle 0\end{cases},\quad \frac{1}{\pm\infty}=0,\ \frac{a}{\pm\infty}=0,,\ \frac{1}{0_+}=\infty,\ \frac{1}{0_-}=-\infty;$

**Nu au sens operaţiile:** $\infty-\infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $1^\infty,\ 0\cdot\infty,\ \infty^0$.

Dacă operaţiile au sens atunci, au loc relaţiile:

**1.** $\lim\limits_{x\to x_0}(f+g)(x)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)+\lim\limits_{x\to x_0}g(x);$

Limita într-un punct $x_0$ a unei sume de funcții este egală cu suma limitelor acestor funcții în $x_0$.

**2.** $\lim\limits_{x\to x_0}af(x)=a\cdot\lim\limits_{x\to x_0}f(x);$

Limita într-un punct $x_0$ a unei funcții înmulțită cu o constantă **a** este egală cu constanta înmulțită cu limita funcției în $x_0$.

**3.** $\lim\limits_{x\to x_0}(f\cdot g)(x)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}g(x);$

Limita într-un punct $x_0$ a unui produs de funcții este egală cu produsul limitelor acestor funcții în $x_0$.

**4.** $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)};\ g\neq 0;$

Limita într-un punct $x_0$ a unui raport de funcții este egală cu raportul limitelor acestor funcții în $x_0$.

**5.** $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)^{g(x)}=\left[\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\right]^{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)};$

Limita într-un punct $x_0$ a unei puteri de funcții este egală cu puterea limitelor acestor funcții în $x_0$.

**6.** $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=\sqrt{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)};\ f(x)\geq 0,\forall x\in D.$ Analog pentru $\sqrt[3]{f(x)},\ f(x)\in\mathbb{R}..$

Limita într-un punct $x_0$ a unui radical dintr-o funcție este egală cu radicalul din limita funcției de sub radical în $x_0$.

## Exercitii rezolvate

**1. Să se determine punctele de acumulare pentru mulțimile:**

a) $A=\{0;1;2\}$; b) $A=(2;3)$; c) $A=(3;5]$; d) $A=[1;8]-\{6\}$; e) $A=(-1;1)\cup(1;\infty)$;

f) $A=\mathbb{Z}$; g) $A=\mathbb{R}-\mathbb{Q}$; h) $A=\mathbb{R}-\mathbb{Z}$;

Rezolvare: Vom nota cu $A^I$ mulțimea punctelor de acumulare a lui A.

a) $A^I=\varnothing$; b) $A^I=[2;3]$; c) $A^I=[3;5]$; d) $A^I=[1;8]$; e) $A^I=[-1;\infty]$;

f) $A^I=\varnothing$; g) $A^I=\overline{\mathbb{R}}$; h) $A^I=\overline{\mathbb{R}}$.

**2.Să se precizeze care dintre următoarele intervale sunt vecinătăți ale punctului 1?**

a) $A=(0;3)$; b) $A=(-1;1)$; c) $A=\{-1\}\cup(1;2)$; d) $A=\mathbb{Q}$; e) $A=\mathbb{N}$; f) $A=[0;5]$.

Rezolvare: a) și f). deoarece 1 se află în interiorul intervalului dat;

**3. Să se precizeze care dintre următoarele intervale sunt vecinătăți ale punctului 0?**

a) $A=(0;3)$; b) $A=(-1;1)$; c) $A=\{0\}\cup(1;2)$; d) $A=\mathbb{N}$; e) $A=\mathbb{R}$; f) $A=\mathbb{R}-\{0\}$,

g) $A=(-1;0)\cup[0;3)$.

Rezolvare: a) , b), e) și g).

**4. Să se precizeze care dintre următoarele intervale sunt vecinătăți pentru $\infty$ ?**

a) $A=(0;\infty)$; b) $A=(-\infty;\infty)$; c) $A=\mathbb{Z}$; d) $A=\mathbb{Q}$; e) $A=(-\infty;3)\cup(4;\infty)$;

Rezolvare: a) , b), e).

## 5.2 Calculul limitelor de funcţii

**1. Funcţia putere.** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^n,\ n\in\mathbb{N}^*$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} x^n=+\infty} \qquad \boxed{\lim_{x\to-\infty} x^{2n}=+\infty} \qquad \boxed{\lim_{x\to-\infty} x^{2n+1}=-\infty}$$

Exemple:

**a)** $\lim\limits_{x\to+\infty} x^7=\infty$; **b)** $\lim\limits_{x\to+\infty} 4x^3=\infty$; **c)** $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x^3=-\infty$ ; **d)** $\lim\limits_{x\to-\infty} 6x^2=\infty$;

**2. Funcţia polinomială** $\mathbf{f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+a_n\ ,a_0\neq 0}$

$$\boxed{\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=a_0(\pm\infty)^n}$$

Exemple:

**a)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(4x^3+3x+4\right)=4\cdot\infty^3=\infty;$

**b)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-2x^4+4x^2-3\right)=-2\cdot\infty^4=-\infty;$

**c)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-3x^5+2x^3+7\right)=-3\cdot(-\infty)^5=\infty;$

**3. Funcţia radical ( de ordin 2).** $f:[0;\infty)\to\mathbb{R}_+,\ f(x)=\sqrt{x}$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty}$$

Exemple:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{5x+1}=\sqrt{\infty}=\infty$, pentru că $2x+10\to 2\cdot(+\infty)+10=+\infty+10=+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-20}=+\infty$, pentru că $x^2-20\to(-\infty)^2-20=+\infty-20=+\infty$

**4. Funcţia radical ( de ordin 3).** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt[3]{x}$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x}=+\infty}\ ,\qquad \boxed{\lim_{x\to-\infty}\sqrt[3]{x}=-\infty}$$

Exemple:

**a)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{2x+4}=\sqrt[3]{\infty}=+\infty$;

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{2-3x}=\sqrt[3]{-\infty}=-\infty$;

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[3]{x^3+2x+5}=\sqrt[3]{-\infty}=-\infty$;

**5. Funcţia exponenţială** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+^*,\ f(x)=a^x\quad a\rangle 0,\ a\neq 1$

**Dacă** $a\rangle 1$ $\qquad\boxed{\lim\limits_{x\to\infty} a^x=\infty}$ **,** $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} a^x=0}$

**Dacă** $a\in(0;1)$ $\qquad\boxed{\lim\limits_{x\to\infty} a^x=0}$ **,** $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} a^x=\infty}$

Exemple:

**a)** $\lim\limits_{x\to+\infty} 7^x=\infty$; **b)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{x+4}=0$; **c)** $\lim\limits_{x\to-\infty} 5^x=0$; **d)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3}=\infty$;

**6. Funcţia logaritmică în baza a ,** $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\log_a x$**,** $a\rangle 0,\ a\neq 1.$

**Dacă** $a\rangle 1$ $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty}\log_a x=\infty}$ , $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\log_a x=-\infty}$

**Dacă** $a\in(0;1)$ $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty}\log_a x=-\infty}$ , $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\log_a x=\infty}$

**Funcţia logaritm natural** , $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln x$ , logaritmul natural în baza e = 2,71..., numărul lui Euler

$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty}$ , $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\ln x=-\infty}$

Exemple:

**a)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_3(2x+1)=+\infty$; **b)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_{\frac{1}{7}}(x+5)=-\infty$; **c)** $\lim\limits_{x\to-4}\log_{\frac{3}{4}}(x+4)=\infty$;

**d)** $\lim\limits_{x\to-5}\log_3(5x+25)=-\infty$; **e)** $\lim\limits_{x\to\infty}\ln(2x+10)=+\infty$; **f)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(2x^4-1)=+\infty$;

**7. Funcţia raţională** $R(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)},\ g\neq 0$ unde f şi g sunt funcţii polinomiale.

**$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots\ldots\ldots\ldots+a_n$ , $a_0\neq 0$**
**$g(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots\ldots\ldots\ldots+b_n$ , $b_0\neq 0$.**

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\begin{cases}\mathbf{0} & n<m\\ \dfrac{a_0}{b_0} & n=m\\ \mathbf{x\to\infty}\ \left(\dfrac{a_0}{b_0}\right)\infty \begin{cases}\infty, & n>m,\ \dfrac{a_0}{b_0}>0\\ -\infty, & n>m,\ \dfrac{a_0}{b_0}<0\end{cases}\\ \mathbf{x\to-\infty}\ \left(\dfrac{a_0}{b_0}\right)(-\infty)^{\mathbf{n-m}} \begin{cases}\left(\dfrac{a_0}{b_0}\right)\infty & n>m,\ \text{n-m par}\\ \left(\dfrac{a_0}{b_0}\right)(-\infty) & n>m,\ \text{n-m impar}\end{cases}\end{cases}$$

Exemple:

**a)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x-6}{2x-7}=\dfrac{3}{2}$ deoarece au gradele egale cu 1;

**b)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+3}{4x+1}=\dfrac{1}{4}\cdot(+\infty)=\infty$, deoarece gradul numărătorului este mai mare;

**c)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-1}{-3x}=-\dfrac{1}{3}\cdot\infty^{2-1}=-\infty$, gradul de sus este mai mare, iar numerele 1 şi -3 au semne diferite

**d)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+4}{4x^2+5}=0$, deoarece gradul numitorului este mai mare;

## Limite laterale

**Definiţie**: O funcţie $f:D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ are limită laterală la stânga ( respectiv la dreapta) în punctul de acumulare $x_0 \Leftrightarrow \exists\, l_s\in\overline{\mathbb{R}}$ (respectiv $l_d\in\overline{\mathbb{R}}$) astfel încât $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x)=l_s$ (respectiv $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x)=l_d$).

Un criteriu care asigură existența limitei unei funcții într-un punct este dat de următoarea:

**Definiţie**: Fie $f:D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x_0$ un punct de acumulare pentru D. Funcţia f are limită în $x_0 \Leftrightarrow l_s(x_0)=l_d(x_0)$

**Observație: Limita unei funcţii într-un punct dacă există este unică.**

Exemplu: Să se determine limitele laterale ale funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}-4x+2\ , x\le 1\\ 3x+1\ \ \ , x>1\end{cases}$ în punctul 1.

Rezolvare: $l_s(1)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}(-4x+2)=-2$ și $l_d(1)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}(3x+1)=4$.

## Proprietăţi ale limitelor de funcţii

Fie $f:D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x_0$ punct de acumulare pentru mulţimea D.

**1**. Dacă f are limită în $x_0$ atunci $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=\left|\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right|$;

**2**. Fie U o vecinătate a lui $x_0$. Dacă $f(x)\le g(x),\ \forall x\in U\setminus\{x_0\}$ atunci $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\le\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

**3. Dacă** $f(x)\le g(x)\le h(x),\ \forall x\in D\cap(U\setminus\{x_0\})$ şi $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=l\Rightarrow\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=l$;

**4**. **Dacă** $|f(x)-l|\le g(x)$**,** $\forall\ \ x\in D\cap U\setminus\{x_0\}$ *şi* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$.

**Exemplu:** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}=0,\ \forall n\in\mathbb{N}$.

Demonstrație:

Fie $x\ge 1$ și $m\in\mathbb{N}$ astfel încât $m\le x\le m+1$. Atunci, $e^m\le e^x$. Folosind inegalitatea lui Bernoulli deducem: $e^m\ge m+1$. Atunci, $e^x\ge e^m\ge m+1\ge x\Rightarrow e^x\ge x$. Prin logaritmarae acestei inegalități rezultă $\ln x\le x$.

Cum $\dfrac{\ln x}{x^n}=\dfrac{\ln(x^{\frac{n}{2}})^{\frac{2}{n}}}{x^n}=\dfrac{2}{n}\cdot\dfrac{\ln x^{\frac{n}{2}}}{x^n}\le\dfrac{2}{n}\cdot\dfrac{x^{\frac{n}{2}}}{x^n}=\dfrac{2}{n}\cdot\dfrac{1}{x^{\frac{n}{2}}}\to 0$ când $n\to\infty$ atunci $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}=0,\ \forall n\in\mathbb{N}$.

**5**. **Dacă** $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ *şi* $\exists M>0$ *a.î.* $|g(x)|\le M\Rightarrow\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x)=0$.

**6**. **Dacă** $f(x)\ge g(x)$ *şi* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$.

**Dacă** $f(x) \le g(x)$ *şi* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty.$

**Exemplu:** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = \infty,\ \forall n \in \mathbb{N}.$

Demonstrație:

Știm că $e^x \ge x,\ \forall x \ge 1$.

$$\frac{e^x}{x^n} = \frac{\left(e^{\frac{x}{2n}}\right)^{2n}}{\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{2n}} = \left(\frac{e^{\frac{x}{2n}}}{x^{\frac{1}{2}}}\right) \rangle \left(\frac{x}{\frac{2n}{x^{\frac{1}{2}}}}\right)^{2n} = \left(\frac{1}{2n}\right)^{2n} \cdot x^n \to \infty \text{ când } n \to \infty, \text{ deci } \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

## Exercitii rezolvate

**1. Să se calculeze limitele de funcţii:**

**a)** $\lim\limits_{x\to\infty} 2x^8 = 2\cdot\infty^8 = \infty;$

**b)** $\lim\limits_{x\to\infty}(-3x^5) = -3\cdot\infty^5 = -\infty;$

**c)** $\lim\limits_{x\to\infty} 4x^3 = 4\cdot\infty^3 = \infty;$

**d)** $\lim\limits_{x\to-\infty} 5x^2 = 5\cdot(-\infty)^2 = \infty;$

**e)** $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x^3 = 2\cdot(-\infty)^3 = -\infty;$

**f)** $\lim\limits_{x\to-\infty}(-3x^7) = -3\cdot(-\infty)^7 = \infty;$

**2. Să se calculeze limitele de funcţii:**

**a)** $\lim\limits_{x\to 2}(x^3 - 3x + 2) = 2^3 - 3\cdot 2 + 2 = 4;$

**b)** $\lim\limits_{x\to\infty}(2x^3 + x + 2) = 2\cdot\infty^3 = \infty;$

**c)** $\lim\limits_{x\to\infty}(4x^2 + 5) = 4\cdot\infty^2 = \infty;$

**d)** $\lim\limits_{x\to\infty}(-3x^2 + 2x + 1) = -3\cdot\infty^2 = -\infty;$

**e)** $\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x^5 + 3x + 4) = -2\cdot(-\infty)^5 = \infty;$

**f)** $\lim\limits_{x\to-\infty}(4x^3 + 2x + x) = 4\cdot(-\infty)^3 = -\infty;$

**g)** $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x^7 + 3x^5 + 2) = -(-\infty)^7 = \infty;$

**3. Să se calculeze limitele de funcţii:**

**a)** $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{2x+10} = \sqrt{16} = 4;$

**b)** $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x+3} = \sqrt{\infty} = \infty;$

**c)** $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{3x+2} = \sqrt{\infty} = \infty;$

**d)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{-2x+1} = \sqrt{-2\cdot(-\infty)} = \sqrt{\infty} = \infty;$

**e)** $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{3x^4 - 10} = \sqrt{\infty} = \infty;$

**f)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{-2x^3 + +3x + 7} = \sqrt{-2\cdot(-\infty)^3} = \sqrt{\infty} = \infty;$

**g)** $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[3]{2x+3} = \sqrt[3]{\infty} = \infty;$

**h)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[3]{-4x+1} = \sqrt[3]{\infty} = \infty;$

**i)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[3]{x^3+1} = \sqrt[3]{-\infty} = -\infty;$

**4. Să se calculeze limitele de funcţii:**

**a)** $\lim\limits_{x\to 3} 2^{x+3} = 2^6 = 64;$

**b)** $\lim\limits_{x\to\infty} 3^{2x+1} = 3^\infty = \infty;$

**c)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{6x} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^\infty = 0;$

**d)** $\lim\limits_{x\to-\infty} 2^{-3x} = 2^\infty = \infty;$

**e)** $\lim\limits_{x\to\infty} 0,2^{4x+1} = 0;$

**f)** $\lim\limits_{x\to-\infty} 0,3^{x+2} = \infty;$

**g)** $\lim\limits_{x\to-\infty} 0,2^{-3x+2} = 0,2^\infty = 0;$

**h)** $\lim\limits_{x\to\infty}(-4)^{2x} = 4^\infty = \infty;$

**i)** $\lim\limits_{x\to\infty} 3,2^{-x} = 3,2^{-\infty} = 0;$

**5. Să se calculeze limitele de funcţii:**

**a)** $\lim\limits_{x\to 5} \log_2(x-4) = \log_2 1 = 0;$

**b)** $\lim\limits_{x\to\infty} \ln(x+3) = \ln\infty = \infty;$

**c)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(1-3x) = \ln\infty = \infty;$

**d)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(-5x+2) = \ln\infty = \infty;$

**e)** $\lim\limits_{x\to\infty} \log_2(x+1) = \infty;$

**f)** $\lim\limits_{x\to\infty} \log_{\frac{1}{2}}(x+2) = \log_{\frac{1}{2}}\infty = -\infty;$

**g)** $\lim\limits_{x\to 5} \log_3(x-5) = -\infty;$

**h)** $\lim\limits_{x\to 2} \log_2(3x-6) = -\infty;$

**i)** $\lim\limits_{x\to 4} \log_{\frac{1}{3}}(2x-8) = \infty;$

**6. Să se calculeze limitele de funcţii:**

**a)** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x+2}{x-5} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x(3+\frac{2}{x})}{x(1-\frac{5}{x})} = 3;$

**b)** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-2x+3}{4x+2} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x(-2+\frac{3}{x})}{x(4+\frac{2}{x})} = -\dfrac{2}{4} = -\dfrac{1}{2};$

**c)** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-1}{8x+1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2(1-\frac{1}{x^2})}{x(8+\frac{1}{x})} = \infty;$

**d)** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2+4x+1}{3x^2+5} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2(2+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2})}{x^2(3+\frac{5}{x^2})} = \dfrac{2}{3};$

**e)** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x}{x^2+5} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x}{x^2(1+\frac{5}{x^2})} = 0;$

**f)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-2x+6}{5x+2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x(-2+\frac{6}{x})}{x(5+\frac{2}{x})} = -\dfrac{2}{5};$

**g)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2+3x+2}{2x+3} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2(1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2})}{x(2+\frac{3}{x})} = -\infty;$

**h)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4x^2+2}{3x^2-5x+2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2(4+\frac{2}{x^2})}{x^2(3-\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2})} = \dfrac{4}{3};$

**7. Să se calculeze limitele de funcţii:**

**a)** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+x+1}{\sqrt{x^2+1}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \infty;$

**b)** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-2x+5}{\sqrt{x^2+4x+1}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x(-2+\frac{5}{x})}{\sqrt{x^2(1+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2})}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x(-2+\frac{5}{x})}{x\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}} = -2;$

**c)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+4}}{3x+6} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2(1+\frac{4}{x^2})}}{x(3+\frac{6}{x})} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{|x|\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}{x(3+\frac{6}{x})} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-x\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}{x(3+\frac{6}{x})} = -\dfrac{1}{3};$

**d)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^2+6x+1}{\sqrt{x^2+5x+2}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2(2+\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2})}{|x|\sqrt{1+\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2}}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2(2+\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2})}{-x\sqrt{1+\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2}}} = \infty;$

**e)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3+x^2-2x}{x^2+3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(x^2+x-2)}{x(x+3)}=-\dfrac{2}{3}$;

**f)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+2x}{x^3+3x^2+2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(x+2)}{x(x^2+3x+2)}=1$;

**g)** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-2x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x+1)}=\dfrac{6}{4}=\dfrac{3}{2}$;

## Exercitii propuse

**1. Să se calculeze limitele:**

**a)** $\lim\limits_{x\to\infty}3x^5$; **b)** $\lim\limits_{x\to\infty}(-3x^9)$; **c)** $\lim\limits_{x\to-\infty}6x^3$; **d)** $\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x^4)$; **e)** $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-4x+6)$;

**f)** $\lim\limits_{x\to 3}(x^3-4x+5)$; **g)** $\lim\limits_{x\to\infty}(-3x^2+x+25)$; **h)** $\lim\limits_{x\to-\infty}(-6x^2+1)$; **i)** $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{6x-2}$;

**j)** $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{3x+7}$; **k)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{3-5x}$; **l)** $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[3]{5x-7}$; **m)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[3]{-2x+5}$;

**n)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[3]{2x^5+9}$; **o)** $\lim\limits_{x\to 2}3^{2x+1}$; **p)** $\lim\limits_{x\to\infty}2^{3-4x}$; **q)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{4x}$; **r)** $\lim\limits_{x\to-\infty}5^{-2x}$;

**s)** $\lim\limits_{x\to 3}\log_2(x^2-8)$; **t)** $\lim\limits_{x\to\infty}\ln(4x+2)$; **u)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(1-x)$; **v)** $\lim\limits_{x\to\infty}\log_{\frac{1}{3}}(2x+6)$;

**x)** $\lim\limits_{x\to 4}\log_2(3x-4)$; **y)** $\lim\limits_{x\to 2}\log_3(4x-7)$; **z)** $\lim\limits_{x\to 2}\log_{\frac{1}{6}}(5x-4)$;

**2. Să se calculeze limitele:**

**a)** $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x^3-6x^2+9)$; **b)** $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x^3-5x^2+4x+6)$; **c)** $\lim\limits_{x\to+\infty}(-4x^2+2x-6)$; **d)** $\lim\limits_{x\to-\infty}(-7x^2+8)$;

**e)** $\lim\limits_{x\to-\infty}(-5x^3-8x^2+3x-2)$; **f)** $\lim\limits_{x\to\infty}(4x^2-6)$; **g)** $\lim\limits_{x\to-\infty}(-3x^5+4x+5)$; **h)** $\lim\limits_{x\to 1}(-2x^4+5x^2-4x+3)$;

**i)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+8}{2x^2+5x}$; **j)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x+6}{5x^2+5x}$; **k)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4-x^2}{3x^3+x+2}$; **l)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-5x^2+2}{2-3x}$;

**m)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-3x^5+6x^2+2}{1-3x^2}$; **n)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x^3+x^2}{2x^2+4}$; **o)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-7x^2+3x-5}{4x^2-1}$; **p)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^3-5x+11}{-2x^3+4x^2-\sqrt{6}}$;

**q)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x+3}{\sqrt{2}x^2-5}$; **r)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(x+1)^3-x^3}{3x^2+2x}$; **s)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2-5x+3}{3x^2+4x+6}$; **t)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-4x}{3x-9}$;

**u)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2-4x+7}{2x+6}$; **v)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+4}{2x^3}$;

**3. Să se calculeze limitele:**

**a)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+2}{|x-1|}$; **b)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+2}{|x-1|}$; **c)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{|x|}{\sqrt{x^2+4}}$; **d)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-2x+3}{\sqrt{x^2+5}}$;

**e)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x+5}{\sqrt{4x^2+6}}$; **f)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{6x}{\sqrt{9x^2+5}}$; **g)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x^3-4x+4}{\sqrt{x^6-1}}$; **h)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+1}{\sqrt{x^2-1}}$;

**i)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2}{\sqrt{4x^2+4}}$; **j)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2x+8}{\sqrt{x^2-7}}$; **k)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+5}{\sqrt{9x^2+6x+1}}$;

**4. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât să aibă loc egalitățile:**

**a)** $\lim\limits_{x\to1}(4x+m)=10;$ **b)** $\lim\limits_{x\to-1}(2x^2+mx+4)=8;$ **c)** $\lim\limits_{x\to2}\sqrt{3x+m}=3;$

**d)** $\lim\limits_{x\to3}\log_3(2x+m)=2;$ **e)** $\lim\limits_{x\to2}\log_2(2x+4)=m;$ **f)** $\lim\limits_{x\to-2}\sqrt[3]{10x-7}=m;$

**g)** $\lim\limits_{x\to-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2mx+3}=32;$ **h)** $\lim\limits_{x\to-\infty}4^{m^2x}=m+2;$ **i)** $\lim\limits_{x\to m}\sqrt[3]{3mx-3x+1}=m;$

**5. Să se calculeze limitele laterale în punctele specificate și să se verifice dacă f(x) are limită în punctul respectiv.**

**a)** $f(x)=\begin{cases}-3x+2, & x\le0\\ 8x+6, & x\rangle0\end{cases}$, $în\ \ x_0=0;$ **b)** $f(x)=\begin{cases}2x+4, & x\le1\\ x^2+3x+2, & x\rangle1\end{cases}$, $în\ \ x_0=1;$

**c)** $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x+3}, & x\langle1\\ \sqrt[3]{2x^2+5x+1}, & x\ge1\end{cases}$, $în\ \ x_0=1;$ **d)** $f(x)=\begin{cases}2^x-8, & x\langle4\\ 3\cdot\log_2 x+2, & x\ge4\end{cases}$, $în\ \ x_0=4;$

**e)** $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3x+4}{x+3}, & x\langle2\\ e^{x-2}+1, & x\ge2\end{cases}$, $în\ \ x_0=2$

**6. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât funcțiile f(x) să aibă limită în punctl specificat.**

**a)** $f(x)=\begin{cases}3x-2m, & x\le1\\ x^2+4x+2, & x\rangle1\end{cases}$, $în\ \ x_0=1;$ **b)** $f(x)=\begin{cases}\sqrt{-x+m+1}, & x\langle2\\ m-3, & x\ge2\end{cases}$, $în\ \ x_0=2;$

**c)** $f(x)=\begin{cases}3^x, & x\le1\\ m^2x^2+mx+1, & x\rangle1\end{cases}$, $în\ \ x_0=1;$ **d)** $f(x)=\begin{cases}m\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}, & x\le64\\ \log_2 x+6m, & x\rangle64\end{cases}$, $în\ \ x_0=64$

## 5.3 Limite fundamentale. Cazuri de nedeterminare

**1.** $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1}$ **a)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{5x}=1;$

$\boxed{\lim\limits_{u(x)\to 0}\dfrac{\sin u(x)}{u(x)}=1}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x}{4x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x}{8x}\cdot 4=4;$

**2.** $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx}{x}=1}$ **a)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg3x}{3x}=1;$

$\boxed{\lim\limits_{u(x)\to 0}\dfrac{tgu(x)}{u(x)}=1}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9x}{tg2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{tg2x}\cdot\dfrac{9}{2}=\dfrac{9}{2};$

**3.** $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1}$ **a)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{3x}=1;$

$\boxed{\lim\limits_{u(x)\to 0}\dfrac{\arcsin u(x)}{u(x)}=1}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 4x}{7x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 4x}{4x}\cdot\dfrac{4}{7}=\dfrac{4}{7};$

**4.** $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctgx}{x}=1}$ **a)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg2x}{2x}=1;$

$\boxed{\lim\limits_{u(x)\to 0}\dfrac{arctgu(x)}{u(x)}=1}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg6x}{5x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg6x}{6x}\cdot\dfrac{6}{5}=\dfrac{6}{5};$

**5.** $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1}$ **a)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+4x)}{4x}=1;$

$\boxed{\lim\limits_{u(x)\to 0}\dfrac{\ln(1+u(x))}{u(x)}=1}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+8x)}{\ln(1+2x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+8x)}{8x}\cdot\dfrac{2x}{\ln(1+2x)}\cdot\dfrac{8x}{2x}=4;$

**6.** $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a}$ **a)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^x-1}{x}=\ln 4;$

$\boxed{\lim\limits_{u(x)\to 0}\dfrac{a^{u(x)}-1}{u(x)}=\ln a}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2^{x-3}-1}{x^2-3x}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2^{x-3}-1}{(x-3)}\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{3}\ln 3;$

**7.** $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^r-1}{x}=r}$ **a)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^4-1}{x}=4$**;**

$\boxed{\lim\limits_{u(x)\to 0}\dfrac{(1+u(x))^r-1}{u(x)}=r}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+6x)^3-1}{6x}=3$**;**

Demonstrație.

1. Se știe că $\sin x \langle x \langle tgx,\ \forall x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)\Rightarrow|\sin x|\ \langle|x|\ \langle|tgx|,\ \forall x\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)\Rightarrow$

$\dfrac{|\sin x|}{|\sin x|}\le\dfrac{|x|}{|\sin x|}\le\dfrac{|tgx|}{|\sin x|}\Rightarrow 1\le\left|\dfrac{x}{\sin x}\right|\le\left|\dfrac{1}{\cos x}\right|\Rightarrow 1\le\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}\le\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}=1\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1.$

Inversând funcția se obține $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1.$

**2.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\ x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\ x}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\ x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}=1\cdot 1=1.$

**5.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{x}=\ln\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1.$ S-a aplicat formula $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$( care se demonstrează cu ajutorul șirurilor de numere).

**6.** În limita $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}$ facem notația $a^x-1=y\Rightarrow x\ln a=\ln y\Rightarrow x=\dfrac{\ln y}{\ln a}\Rightarrow$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y}{\frac{\ln(1+y)}{\ln a}}=\ln a\cdot\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y}{\ln(1+y)}=\ln a$ deoarece $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y}{\ln(1+y)}=1$( conform lui 5.)

**7.** În limita $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^r-1}{x}$ facem notația $1+x=2^y,\ 1+x\rangle 0$ și când $x\to 0\Rightarrow y\to 0$ iar

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^r-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{2^{yr}-1}{2^y-1}=\lim_{y\to 0}\frac{\frac{2^{yr}-1}{yr}\cdot r}{\frac{2^y-1}{y}}=\frac{\ln 2\cdot r}{\ln 2}=r.$$

## Exercitii rezolvate

**1. Să se calculeze limitele de funcţii:**

**a)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 14x}{14x}=1;$ **b)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 9x}{3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 9x}{9x}\cdot 3=3;$

**c)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7x}{\sin 8x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8x}{\sin 8x}\cdot\dfrac{7x}{8x}=\dfrac{7}{8};$ **d)** $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{\sin(x-6)}{x^2-6x}=\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{\sin(x-6)}{(x-6)}\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{6};$

**e)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x-\sin 2x}{4x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x}{4x}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{4x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x}{8x}\cdot 2-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x}\cdot\dfrac{1}{2}=2-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2};$

**f)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{3x}=\dfrac{1}{3}$;

**g)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg9x}{tg2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg9x}{9x}\cdot\dfrac{2x}{tg2x}\cdot\dfrac{9}{2}=\dfrac{9}{2}$;

**h)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg(xtgx)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg(xtgx)}{xtgx}\cdot\dfrac{xtgx}{x^2}=1$;

**2. Să se calculeze limitele de funcţii:**

**a)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6^x-1}{x}=\ln 6$;

**b)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{2x}=1$;

**c)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^{3x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^{3x}-1}{3x}\cdot 3=3\ln 4$;

**d)** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3^x-27}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3^x-3^3}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3^3(3^{x-3}-1)}{x-3}=27\ln 3$;

**e)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{tg2x}-1}{8x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{tg2x}-1}{tg2x}\cdot\dfrac{tg2x}{8x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg2x}{2x}\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{4}$;

**3. Să se calculeze limitele de funcţii:**

**a)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+7x)}{5x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+7x)}{7x}\cdot\dfrac{7}{5}=\dfrac{7}{5}$;

**b)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin x)}{\sin x}\cdot\dfrac{\sin x}{x}=1$;

**c)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(1+x^2-x)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(1+x^2-x)}{x(x-1)}\cdot x=\lim\limits_{x\to 1}x=1$;

**d)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{\ln(1+8x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{2x}\cdot\dfrac{8x}{\ln(1+8x)}\cdot\dfrac{2x}{8x}=\dfrac{2}{8}=\dfrac{1}{4}$;

**4. Să se calculeze limitele de funcţii:**

**a)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3x-x^2}{\sqrt{x^2+3x}+x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x}{x\left(\sqrt{1+\dfrac{3}{x}}+1\right)}=\dfrac{3}{2}$;

**b)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+5}-\sqrt{x^2+x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x+5-x^2-x}{\sqrt{x^2+2x+5}+\sqrt{x^2+x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x(1+\dfrac{5}{x})}{x\left(\sqrt{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{x^2}}+\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}\right)}=\dfrac{1}{2}$;

**c)**

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2-6x+2}+2x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2-6x+2-4x^2}{\sqrt{4x^2-6x+2}-2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-6x+2}{|x|\sqrt{4-\dfrac{6}{x}+\dfrac{2}{x^2}}-2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x(-6+\dfrac{2}{x})}{-x\left(\sqrt{4-\dfrac{6}{x}+\dfrac{2}{x^2}}+2\right)}=\frac{3}{2}$$

## Exercitii propuse

**1. Să se calculeze limitele:**

**a)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 12x}{6x}$; **b)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 8x}{3x}$; **c)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{\sin 2x}$; **d)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 4x}{8x^2}$;

**e)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg4x}{5x}$; **f)** $\lim\limits_{x\to 2}\frac{tg(x-2)}{x^2-2x}$; **g)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg\ 6x}{tg\ 3x}$; **h)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(2x\sin 4x)}{2x^2}$; **i)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x}$; **j)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x+\sin 4x}{\sin 5x+\sin 6x}$; **k)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 8x+\sin 2x}{x}$;

**l)** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{x^2-1}$;

**m)** $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\arcsin(x-3)}{x^2-4x+3}$; **n)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg3x}{\sin 9x}$; **o)** $\lim\limits_{x\to -4}\frac{\sin(x^2-16)}{\arcsin(x^2+2x-8)}$; **p)** $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sin(x^2-4)}{\sin(x^2-x-6)}$;

**q)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

**2. Să se calculeze limitele:**

**a)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^{8x}-1}{8x}$; **b)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{e^{5x}-1}$; **c)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-1}{2x}$; **d)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\sin 3x}-1}{6x}$;

**e)** $\lim\limits_{x\to 3}\frac{e^{x-3}-1}{x^3-27}$; **f)** $\lim\limits_{x\to 3}\frac{3^x-x^3}{x^2-4x+3}$; **g)** $\lim\limits_{x\to 2}\frac{5^x-25}{x^2-3x+2}$; **h)** $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2^x-x^2}{x^2-x-2}$;

**i)** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2^x+3^x}{5\cdot 3^x-2^x}$; **j)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{tgx}-e^{\sin x}}{x^3}$; **k)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{9^{tg15x}-1}{30x}$; **l)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{8^x+7^x-6^x-5^x}{4^x-3^x}$; **m)** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3^{3x}+4^{3x}}{2^{5x}+4^{5x}}$; **n)** $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2^x-4}{x-2}$; **o)** $\lim\limits_{x32}\frac{4^x-64}{x-3}$;

**p)** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3^{x+2}-27}{x^2-x}$;

**3. Să se calculeze limitele:**

**a)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+8x)}{8x}$; **b)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+6x)}{3x}$; **c)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+4x)}{\ln(1+8x)}$; **d)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+7x)}{\ln(1+5x)}$;

**e)** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(1+4^{2x})}{x+3}$; **f)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin 12x)}{\ln(1+\sin 6x)}$; **g)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+tg\ 3x)}{4x}$; **h)** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(x^2+x)}{\ln(x^4+2x)}$;

**i)** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(x^3+3x)}{\ln(x^5-5x)}$; **j)** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(e^{3x}+1)}{\ln(e^x+1)}$; **k)** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(x^2-4x)}{\ln(x^2-5x)}$; **l)** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(3^{2x}+5^{2x})}{\ln(3^x+5^x)}$;

**m)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\arcsin x)}{\sin 3x}$; **n)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+tg3x)}{9x}$; **o)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+4x-x^2)}{x}$; **p)** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln(1+x^4-x^2)}{x-1}$;

**4. Să se calculeze limitele:**

**a)** $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x^2+3x+2}$; **b)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^5+x^3}{x^3}$; **c)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^4+8x}{x^3-4x}$; **d)** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-4x+3}{x^3-2x^2+2x-1}$;

**e)** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-5x+6}$; **f)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^3-8}$; **g)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x^2-x+1}$; **h)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$;

**i)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(x^2-6x+8)}{\sin(x^2-5x+6)}$; **j)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-2}{\sqrt{10-x}-3}$; **k)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+27}-3}{x}$; **l)** $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x+5}-3}{\sqrt{5-x}-1}$;

**m)** $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{2x-6}}{x-5}$; **n)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+8}-2}{x^2+4x}$; **o)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^7-7(x-1)-1}{(x-1)^2}$;

**5. Să se calculeze limitele:**

**a)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2+1}-2x\right)$; **b)** $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\sqrt{x^2+4}-x\right)$; **c)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)$;

**d)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-2x\right)$; **e)** $\lim\limits_{x\to\infty} 2x\left(\sqrt{x^2+3}-x\right)$; **f)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}+x\right)$;

**g)** $\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(\sqrt{9x^2+5}+3x\right)$; **h)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2-3}\right)$; **i)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+2-\sqrt{x^2+4x+1}\right)$;

**j)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x-1}-\sqrt{x^2+x-1}\right)$; **k)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}+x\right)$; **l)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(x-\sqrt{2x^2-3x+5}\right)}{x}$;

**m)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-3-\sqrt{x^2-6x+5}\right)$; **n)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-2\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3}\right)$; **o)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{5x^3}{x^2+1}-5x\right)$;

**p)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x^3}{x^2+4}-2x\right)$; **q)** $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x\rangle 2}}\left(\dfrac{3x}{x-2}-\dfrac{1}{x^2-4}\right)$; **r)** $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\rangle 1}}\left(\dfrac{2x}{x-1}-\dfrac{5}{x^2-1}\right)$;

**s)** $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x(x-2)^2}-\dfrac{1}{x^2-3x+2}\right)$; **t)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\ln(3x+2)-\ln(2x-1)\right)$; **u)** $\lim\limits_{x\to\infty}$

$\left(\ln(4x-5)-\ln(4x+3)\right)$; **v)** $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x\rangle 3}}\left(\dfrac{5x}{x-3}-\dfrac{2}{x(x-3)}\right)$; **x)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt{2x^2-3x}-\sqrt{2x^2-5}}{\sqrt{x^2+4x-2}-\sqrt{x^2+3x-3}}\right)$; **y)**

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\ln(2x^3-6)-\ln(3x^2+2)\right)$;

**z)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+4x}-\sqrt[3]{x^3+2}\right)$; **w)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-\sqrt[3]{x^3-x^2+1}\right)$;

## 5.4 Asimptotele graficului funcţiilor reale

**Asimptote verticale**

**Definiţie: Fie o** funcţie $f:D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, şi "a" un punct de acumulare pentru D. Dreapta **x = a** este **asimptotă verticală** la stânga (respectiv la dreapta ) la graficul funcţiei f dacă şi numai dacă $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)=\pm\infty$ ( respectiv $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)=\pm\infty$ ) .

Exemplu: Funcţia $f:\mathbb{R}\setminus\{3\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1}{x-3}$ admite asimptota verticală x = 3 la stânga spre $-\infty$ iar la dreapta spre $+\infty$ deoarece $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x<3}} f(x)=-\infty$ şi $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}} f(x)=+\infty$ ;

**Asimptote orizontale**

**Definiţie: Fie o** funcţie $f:D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ şi $a\in\mathbb{R}$ . Dreapta y **= a** este **asimptotă orizontală la** $\infty$ (respectiv la $-\infty$) la graficul funcţiei f dacă şi numai dacă $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=a$ ( respectiv $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=a$ ) .

Exemplu: Funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{3x^2}{x^2+4}$ admite asimptota orizontală y = 3 la $\pm\infty$ deoarece $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{3x^2}{x^2+4}=3$;

**Asimptote oblice**

**Definiţie: Fie o** funcţie $f:D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ şi $m,n\in\mathbb{R}$ . Dreapta **y = mx+n** este **asimptotă oblică la** $\infty$ (respectiv la $-\infty$) la graficul funcţiei f dacă şi numai dacă $m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ şi $n=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-mx)$

( respectiv $m=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ , $n=\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-mx)$ ) .

Exemplu: Funcţia $f:\mathbb{R}\setminus\{2\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x^2-16x}{x+2}$ admite asimptota oblică y = x - 18 la $\pm\infty$ deoarece $m=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2-16x}{x(x+2)}=1$, $n=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{x^2-16x}{x+2}-x\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{x^2-16x-x^2-2x}{x+2}\right)=-18$.

| **Activitate independentă** | **Răspuns** |
|---|---|
| Să se determine $m,n\in\mathbb{R}$ astfel încât funcţia $f:\mathbb{R}\setminus\{-3\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{2x^2-4x+1}{x+3}$ să admită asimptota oblică $y=mx+n$ către $+\infty$. | $m=2;$ $n=-10.$ |

## Exercitii rezolvate

**1. Să se determine asimptotele următoarelor funcţii:**

**a)** $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=1+\frac{1}{x}$; **b)** $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+\frac{8}{x}$;

**c)** $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+2}{x}$; **d)** $f:\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^3}{1-x^2}$;

**e)** $f:(-\infty;-2]\cup[0;+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\sqrt{x^2+2x}$; **f)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{x^3+x^2}$;

Rezolvare:

**a)** $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x+1}{x}=1\Rightarrow y=1$ este asimptotă orizontală la $+\infty$ respectiv la $-\infty$;

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{x+1}{x}=-\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{x+1}{x}=+\infty\Rightarrow x=0$ este asimptotă verticală la stânga respectiv la dreapta în punctul 0 la graficul funcţiei; Nu există asimptote oblice;

**b)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{x^3+8}{x}=-\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{x^3+8}{x}=+\infty\Rightarrow x=0$ este asimptotă verticală la stânga respectiv la dreapta în punctul 0 la graficul funcţiei; Nu există asimptote oblice;

**c)** ) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{x^2+2}{x}=-\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{x^2+2}{x}=+\infty\Rightarrow x=0$ este asimptotă verticală la stânga respectiv la dreapta în punctul 0 la graficul funcţiei;

$m=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+2}{x\cdot x}=1$, $n=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+2}{x}-x\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+2-x^2}{x}=0\Rightarrow y=x$ este asimptotă oblică la $\pm\infty$

**d)** $m=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x\cdot(1-x^2)}=-1$, $n=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{1-x^2}+x\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x}{1-x^2}=0\Rightarrow y=-x$ este asimptotă oblică la $\pm\infty$;

$\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}}\frac{x^3}{1-x^2}=+\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}}\frac{x^3}{1-x^2}=-\infty\Rightarrow x=-1$ este asimptotă verticală la stânga şi la dreapta;

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{x^3}{1-x^2}=+\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{x^3}{1-x^2}=-\infty\Rightarrow x=1$ este asimptotă verticală la stânga şi la dreapta;

**e)** $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2+2x})=\lim\limits_{y\to\infty}(-y+\sqrt{y^2-2y})=\lim\limits_{y\to\infty}\frac{y^2-2y-y^2}{\sqrt{y^2-2y}+y}=\lim\limits_{y\to\infty}\frac{-2y}{y\left(\sqrt{1-\frac{2}{y}}+1\right)}=-1\Rightarrow$

y = -1 este asimptotă orizontală la $-\infty$;

f nu are asimptotă orizontală la $+\infty$; $m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sqrt{x^2+2x}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\sqrt{1+\frac{2}{x}}\right)=2$,

$n=\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+\sqrt{x^2+2x}-2x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-x^2}{\sqrt{x^2+2x}+x}=1\Rightarrow$ y = 2x + 1 este asimptotă oblică spre $+\infty$;

**f**) f nu are asimptote orizontale;

$m=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\sqrt[3]{\dfrac{x^3+x^2}{x^3}}=1,\ n=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}-x\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2}{\sqrt[3]{\left(x^3+x^2\right)^2}+\sqrt[3]{x^3+x^2}\cdot x+x^2}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow$

$y=x+\dfrac{1}{3}$ este asimptotă oblică la $+\infty$ respectiv la $-\infty$;

**2. Să se determine asimptota orizontală către $\infty$ la graficul funcției**

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{3x^2+4x+6}{x^2+1}$.

**Rezolvare:**

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+4x+6}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2(3+\frac{4}{x}+\frac{6}{x^2})}{x^2(1+\frac{1}{x^2})}=3.$ Rezultă , $y=3$ este asimptota orizontală către $\infty$.

**3. Să se determine asimptotele la graficului funcției** $f:\mathbb{R}\setminus\{2\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+6x}{x-2}$.

Rezolvare:

**Asimptote verticale:**

$l_s(2)=\lim\limits_{\substack{x\to2\\x\langle2}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to2\\x\langle2}}\dfrac{x^2+6x}{x-2}=\dfrac{16}{0_-}=-\infty.$ $\quad l_d(2)=\lim\limits_{\substack{x\to2\\x\rangle2}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to2\\x\rangle2}}\dfrac{x^2+6x}{x-2}=\dfrac{16}{0_+}=+\infty.$ Așadar, f admite asimptotă verticală, la stânga lui 2 către $-\infty$ iar la dreapta lui 2 către $+\infty$.

Asimptote orizontale:

f nu admite asimptote orizontale deoarece $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+6x}{x-2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2(1+\frac{6}{x})}{x(1-\frac{2}{x})}=\infty.$

Analog , la $-\infty$. $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+6x}{x-2}=-\infty.$

**Asimptote oblice**:

Ecuația asimptotei oblice este $y=mx+n$, unde $m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+6x}{x^2-2x}=1$ iar

$n=\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^2+6x}{x-2}-x\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x}{x-2}=8$. Analog, la $+\infty$. Așadar, f admite asimptota oblică $y=x+8$ către $\pm\infty$.

**4. Se consideră funcţia** $f:(-\infty;+2)\cup(2;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}}$. **Să se determine asimptotele la graficul funcţiei .**

Rezolvare:

Asimptote verticale: $l_s(-2)=\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x\langle-2}}\dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}}=\dfrac{-2}{0_+}=-\infty;$ $\quad l_d(2)=\lim\limits_{\substack{x\to2\\x\rangle2}}\dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}}=\dfrac{2}{0_+}=\infty;$ .

Rezultă, dreapta de ecuaţie $x=-2$ este asimptotă verticală la stânga lui - 2 către $-\infty$;

Dreapta de ecuaţie $x=2$ este asimptotă verticală la dreapta lui 2 către $\infty$;

Asimptote orizontale:

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{x\sqrt{1-\dfrac{4}{x^2}}}=1$. Rezultă, dreapta de ecuaţie $y=1$este asimptotă orizontală la $\infty$;

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{-x\sqrt{1-\dfrac{4}{x^2}}}=-1$. Rezultă, dreapta de ecuaţie $y=-1$este asimptotă orizontală la $-\infty$;

Aşadar, f nu are asimptote oblice;

**5. Se consideră funcţia $f:(0;\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1}{\ln x}$. Să se determine asimptotele funcţiei.**

Rezolvare:

$l_d(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\rangle 0}}\dfrac{1}{\ln x}=\dfrac{1}{-\infty}=0$; Nu există asimptotă vericală.

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\ln x}=\dfrac{1}{\infty}=0\Rightarrow$ dreapta de ecuaţie $y=0$este asimptotă orizontală la $\infty$;

**6. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x+e^{-x}$. Să se determine asimptota oblică către $\infty$;**

Rezolvare:

$y=mx+n,$ unde $m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+e^{-x}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{xe^x}\right)=1,$

$n=\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+\dfrac{1}{e^x}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{e^x}=0.$ Rezultă, că ecuaţia asimptotei oblice către $\infty$ este $y=x$.

**7. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\setminus\{-3\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{ax^2+bx+3}{2x+6}$. Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ ştiind că ecuaţia asimptotei la graficul funcţiei la $\infty$ este $y=3x-2.$**

Rezolvare:

Din $y=mx+n\Rightarrow m=3,n=-2$. $m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax^2+bx+3}{2x^2+6x}=\dfrac{a}{2}\Rightarrow 3=\dfrac{a}{2}\Rightarrow a=6.$

$n=\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{ax^2+bx+3}{2x+6}-3x\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(b-18)x+3}{2x+6}=\dfrac{b-18}{2}\Rightarrow -2=\dfrac{b-18}{2}\Rightarrow b=14.$

**8. Fie $f:\mathbb{R}\setminus\{2\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x^2-a}{x-2}$. Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât f să nu admită asimptotă verticală în punctul 2.**

Rezolvare:

Observăm că pentru a = 4 rezultă $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}=\dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2}=x+2$, adică f nu are asimptote verticale.

**9. Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât dreapta de ecuaţia y =3 x - 2 să fie asimptotă pentru graficul funcţiei $f:\mathbb{R}\setminus\{-2\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+5}{x+2}$;**

Rezolvare:

Dacă y = 3x – 2 este asimptotă pentru graficul lui f rezultă :

$m=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}\Leftrightarrow 3=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{ax^2+bx+5}{x(x+2)}\Rightarrow a=3$ şi

$n=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-mx)\Leftrightarrow -2=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{3x^2+bx+5}{x+2}-3x\right)\Rightarrow -2=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{(b-6)x+5}{x+2}\Rightarrow b=4$ ;

Aşadar, a = 3 şi b = 4;

## Exercitii propuse

**1. Să se determine asimptotele vericale ale funcțiilor**:

**a)** $f(x)=\dfrac{1}{x-4}$; **b)** $f(x)=\dfrac{1}{x+3}$; **c)** $f(x)=\dfrac{2x-6}{x+2}$; **d)** $f(x)=\dfrac{3x}{x-1}$;

**e)** $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$; **f)** $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-2}$; **g)** $f(x)=\dfrac{x}{(x-1)(x-3)}$; **h)** $f(x)=\dfrac{|x|}{x-3}$;

**i)** $f(x)=\dfrac{x+3}{|x|-1}$; **j)** $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x-4}}$;

**2. Să se determine asimptotele orizontale ale funcțiilor** $f:D\to\mathbb{R}$ **:**

**a)** $f(x)=\dfrac{1}{x}$; **b)** $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$; **c)** $f(x)=\dfrac{1}{x-6}$; **d)** $f(x)=\dfrac{1}{3x-9}$

**e)** $f(x)=\dfrac{x+4}{x+3}$; **f)** $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+1}$; **g)** $f(x)=\dfrac{2x^2}{x^2+2}$; **h)** $f(x)=\dfrac{|x|}{x-2}$;

**i)** $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^3}$; **j)** $f(x)=\dfrac{2x+6}{x+2}$; **k)** $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2+4}$; **l)**

$f(x)=\dfrac{x^2+2x+4}{(x-3)(x+3)}$.

**3. Să se determine asimptotele oblice ale funcțiilor** $f:D\to\mathbb{R}$ **:**

**a)** $f(x)=\dfrac{x^2}{x-4}$; **b)** $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+3}$; **c)** $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x+1}$; **d)** $f(x)=\dfrac{2x^2}{x+3}$;

**4. Să se determine asimptotele funcţiilor** $f:D\to\mathbb{R}$ **unde D este domeniul maxim de definiţie al funcţiilor următoare:**

**a)** $f(x)=\dfrac{x+2}{x-1}$; **b)** $f(x)=\dfrac{x^2+4}{x}$; **c)** $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-1}$; **d)** $f(x)=\dfrac{x^2}{x+3}$;

**e)** $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-2}$; **f)** $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x+1}$; **g)** $f(x)=\dfrac{3x^2}{9+3x}$; **h)** $f(x)=\dfrac{(x+1)^3}{x^2-x+1}$;

**i)** $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$; **j)** $f(x)=x\cdot e^{\frac{1}{x-2}}$; **k)** $f(x)=\sqrt{x^2-1}$; **l)** $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$;

**m)** $f(x)=\ln(1-x^2)$; **n)** $f(x)=\sqrt[3]{x^3+3x^2-4}$;

**5. Să se determine asimptotele verticale ale funcţiilor:**

**a)** $f:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x}{x+1}$**;** **b)** $f:\mathbb{R}\setminus\{3\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x+4}{x-3}$**;**

**c)** $f:\mathbb{R}\setminus\{-3\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{5x-2}{2x+6}$**;** **d)** $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x^2+4}{x^2}$**;**

**e)** $f:\mathbb{R}\setminus\{-3;3\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-9}$**;** **f)** $f:\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{2x+4}{x^2-1}$**;**

**g)** $f:(0;1)\cup(1,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}$**;** **h)**

$f:(-\infty;-3)\cup(3,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-9}}$

**i)** $f:(8;\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x-8}}$**;** **j)** $f:(-2,2)\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}$**.**

**6. Să se determine asimptotele orizontale ale funcţiilor:**

**a)** $f:\mathbb{R}\setminus\{2\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x+3}{x-2}$; **b)** $f:\mathbb{R}\setminus\{3\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{4x-5}{2x+6}$;

**c)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{3x^2+x-1}{x^2+1}$**;** **d)** $f:\mathbb{R}\setminus\{-3\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{|x|}{x+3}$**;**

**e)** $f:\mathbb{R}\setminus\{1;2\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x^2+1}{(x-1)(x-2)}$**;** **f)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$**;**

**g)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{2x+1}{\sqrt{9x^2+5x+1}}$**;** **h)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$**;**

**i)** $f:\mathbb{R}\setminus\{-1;-2\}\to\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right],\ f(x)=arctg\dfrac{1}{x^2-1}$**;** **j)** $f:[0;\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{9x^2+x}-3x$**.**

**7. Să se determine asimptotele oblice ale funcţiilor:**

**a)** $f:\mathbb{R}\setminus\{-2\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{4x^2+1}{2x+4}$; **b)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{3x^3+2}{x^2+1}$ ;

**c)** $f:\mathbb{R}\setminus\{-5\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x^2}{x+5}$ ; **d)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x|x|}{x^2-x+1}$ ;

**e)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$ ; **f)** $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x^2+x+4}{x-1}$;

**g)** $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x^2+8x}{x-2}$; **h)**

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{x^2+x+1}-(x+3)$;

**i)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x^2+4x+3}{\sqrt{x^2+9}}$; **j)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt[3]{x^3+2x+1}$;

**k)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt[3]{8x^3+x^2-5}$.

**8.** Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât dreapta de ecuaţia y = 2x + 1 să fie asimptotă pentru graficul funcţiei $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+8}{x-1}$;

**9.** Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât dreapta de ecuaţia y = x + 1 să fie asimptotă pentru graficul funcţiei $f:\mathbb{R}\setminus\{2\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+3}{x-2}$;

**10**. Fie $f:\mathbb{R}-\{2\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+(a+2)x}{x-2}$. Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât dreapta de ecuație $y=x+2a$ să fie asimptotă oblică spre $+\infty$.

**11**. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^3-mx^2+m^2x-1}{x^2+1}$. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât dreapta de ecuație $y=x+m-2$ să fie asimptotă oblică spre $+\infty$.

**12**. Fie $f:(0;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+4}{x}$. Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât graficul funcţiei să admită asimptotă oblică la $+\infty$, dreapta de ecuaţie $y=3x-2$.

**13**. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+ax+8}{x-1}$. Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care dreapta $y=x+a^2-5$ este asimptotă spre $+\infty$.

**14.** Fie $f:[0;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{mx+2}-\sqrt{x+1}$. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât graficul funcţiei f să admită asimptota la $\infty$.

## 5.5 Aplicații practice ale limitelor de funcții

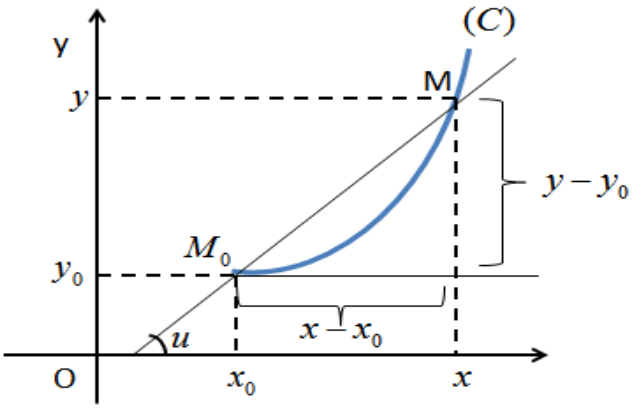
Aplicațiile conceptului de limită îl întâlnim în cele mai variate contexte, de la calculul unor numere respectiv sume de numere sau determinarea ariilor unor figuri geometrice până la definirea conceptelor de viteză, accelerație, debit a unui lichid, intensitate a curentului electric precum și în probleme de determinare a probabilității de câștig sau în probleme de economie.

**Conceptul de limită la definirea ecuației tangentei la graficul unei funcții**

Se va considera în plan o curbă ( C) de ecuație y=f(x) și două puncte $M_0(x_0, y_0)$ unde $y_0 = f(x_0)$ și $M(x, y)$ cu $y = f(x)$. Știm că panta secantei $MM_0$ este tangenta unghiului u format de semidreapta OX cu dreapta $MM_0$, unghi măsurat în sens trigonometric. $m = tgu = \frac{y - y_0}{x - x_0}$.

Atunci când M se deplasează pe curbă oricât de mult astfel încât se apropie de $M_0$ observăm că dreapta $MM_0$ se apropie la limită de tangenta în $M_0$ la curbă.

Atunci, valoarea limitei $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{y - y_0}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = m$ reprezintă panta tangentei la curbă în punctul $M_0$ ce are următoarea formulă $y - y_0 = m(x - x_0)$.




**Viteza instantanee**

În fizică întâlnim situația deplasării unui mobil pe o anumită traiectorie și după o anumită lege de mișcare dată ca o ecuație a spațiului parcurs în funcție de timp, $s = s(t)$. Viteza medie a punctului mobil în intervalul $t - t_0$ parcurs de la momentul inițial $t_0$ la momentul arbitrar t, este $v_m = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$. Dacă însă vom lua intervale din ce în ce mai mici de timp, astfel încât t se apropie foarte mult de $t_0$, vom obține valori ale vitezei medii tot mai apropiate de viteza la momentul $t_0$.

Astfel că, trecînd la limită acest șir al valorilor medii obținem $\lim\limits_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = v(t_0)$ care se numește în fizică **viteza instantanee** în momentul $t_0$.

De exemplu, dacă legea mișcării este $s(t)=3t+1$, atunci la momentul $t_0=8\ s$, viteza este egală cu $v(8)=\lim\limits_{t\to 8}\dfrac{3t+1-24-1}{t-8}=\lim\limits_{t\to 8}\dfrac{3(t-8)}{t-8}=3\ m/s$, fiind constantă deoarece mișcarea este uniformă.

Analog, în mișcarea rectilinie uniform accelerată, **accelerația instantanee** în momentul $t_0$ se definește ca fiind $\lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{v(t)-v(t_0)}{t-t_0}=a(t_0)$.

De exemplu, dacă viteza este $v(t)=2t-3$, $t_0=10,$ atunci accelerația la momentul $t_0=10\ s$ va fi egală cu $a(10)=\lim\limits_{t\to 10}\dfrac{v(t)-v(10)}{t-10}=\lim\limits_{t\to 10}\dfrac{2t-3-20+3}{t-10}=\lim\limits_{t\to 10}\dfrac{2(t-10)}{t-10}=2m/s^2$, adică este constantă întrucât mișcarea este uniform accelerată.

**1. Să se calculeze cu ajutorul conceptului de limită următorul număr:** $0,(3)$**;**

Rezolvare: Se cunoaște faptul că $0,(3)$ înseamnă numărul rațional $0,\ 33333.....$ cu o infinitate de zecimale care se repetă.

Pentru a determina valoarea ca fracție ordinară a acestui număr procedăm astfel:

$$0,(3)=0,\underbrace{33333.....33}_{n\ termeni}...=\frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{3}{10^3}+.....+\frac{3}{10^n}+.....=$$

$$=\frac{3}{10}\left(1+\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+.....+\frac{1}{10^n}+.....\right)=\quad=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{10}\left(\frac{\left(\frac{1}{10}\right)^{n+1}-1}{\frac{1}{10}-1}\right)=\frac{\cancel{3}}{\cancel{10}}\cdot\frac{-1}{\cancel{-9}}=\frac{1}{3}.$$

**2. Ionuț și Andrei joacă un joc cu aruncatul aceleiași monezi în mod succesiv astfel că este declarat câștigător cel care obține primul „stema”.**

**Care este probabilitatea de câștig pentru primul jucător dacă se aruncă moneda până când acesta câștigă?**

Rezolvare:

Pentru ca primul jucător să câștige, stema trebuie să apară la efectuarea aruncării în una din situațiile: S; MMS, MMMMS, unde S= stema, M= marca.

Pentru fiecare situație avem probabilitățile: $P_1=\dfrac{1}{2};\ P_2=\left(\dfrac{1}{2}\right)^3;P_2=\left(\dfrac{1}{2}\right)^5;$ etc.

Atunci, probabilitatea ca primul jucător să câștige este dată de calulul următoarei sume infinite:

$$P=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^5+.....+\left(\frac{1}{2}\right)^n+.....=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^5+\left(\frac{1}{2}\right)^7+.....+\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}\right]=$$

$=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^n-1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2-1}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}}{1-\frac{1}{4}}=\dfrac{2}{3}$, deoarece, atunci când n tinde la infinit, fracția $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2n}$ tinde la 0.

Așadar, calulul probabilității conduce la calculul unei sume de probabilități parțiale ce formează o serie matematică a cărei sumă se calculează cu ajutorul limitei șirului sumelor parțiale.

**3. O sursă de căldură încălzește uniform un corp. Experimental, se constată că temperatura corpului este dată de legea** $T(t)=t+a-\sqrt{t^2+10t+16}$**, cu** $a\rangle 0$**, unde numărul** $t\geq 0$ **reprezintă momentul măsurării, exprimat în minute, iar numărul T(t) reprezintă temperatura corpului, exprimat în grade Celsius, la fiecare moment** $t\geq 0$ **ales. Se știe că la momentul inițial t = 0 temperatura corpului este de 5 grade Celsius. Să se determine către ce valoare se va apropia infinitezimal temperatura corpului, atunci cînd** $t\to\infty$**.**

Rezolvare: Știind că la momentul inițial pentru t = 0 se obține temperatura corpului de 5 grade Celsius, atunci, $T(0)=5\Rightarrow\ a-4=5\Rightarrow a=9$, așadar $T(t)=t+9-\sqrt{t^2+10t+16}$.

Pentru a calcula valoarea lui $T(t)$ când $t\to\infty$, calculăm

$$\lim_{t\to\infty}T(t)=\lim_{t\to\infty}\left[t+9-\sqrt{t^2+10t+16}\right]=\lim_{t\to\infty}\frac{(t+9)^2-t^2-10t-16}{t+9+\sqrt{t^2+10t+16}}=\lim_{t\to\infty}\frac{8t+65}{t\left(1+\frac{9}{t}+\sqrt{1+\frac{10}{t}+\frac{16}{t^2}}\right)}=8$$

grade Celsius.

**4. Debitul unui lichid**, (adică cantitatea de lichid scursă în unitatea de timp) la momentul $t_0$ se calculează utilizând limita debitului mediu, după formula $D(t_0)=\lim_{t\to t_0}\frac{Q(t)-Q(t_0)}{t-t_0}$.

De exemplu, dacă cantitatea de lichid care se scurge într-un interval de timp t, Q(t) este definită prin legea $Q(t)=t+\sqrt{t+6}$, exprimată în litri, atunci debitul lichidului după 10 min este egal cu

$$D(10)=\lim_{t\to 10}\frac{t+\sqrt{t+6}-10-4}{t-10}=\lim_{t\to 10}\frac{t-10+(\sqrt{t+6}-4)}{t-10}=1+\lim_{t\to 10}\frac{(\sqrt{t+6}-4)\cdot(\sqrt{t+6}-4)}{(t-10)(\sqrt{t+6}-4)}=$$

$$=1+\lim_{t\to 10}\frac{t+6-16}{(t-10)(\sqrt{t+6}+4)}=1+\frac{1}{8}=\frac{9}{8}\ \text{l/min.}$$

**5. Densitatea liniară a unei bare OA într-un punct de abscisă** $x_0$**, notată cu** $\rho(x_0)$**,** având masa m(x) a unei porțiuni Ox din bară unde O este punctul origine al barei este dată de formula $\rho(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{m(x)-m(x_0)}{x-x_0}$.

**6. Intensitatea de radiație**

Radiația este o emisie continuă de energie de pe suprafața tuturor corpurilor. Această energie este numită energie radiant și se prezintă sub formă de undă electromagnetic.

Intensitatea de radiație se definește ca fiind , $I=\lim_{\Delta S\to 0\to t_0}\frac{\Delta P}{\Delta S}=\frac{dP}{dS}$, și reprezintă limita raportului dintre fluxul de energie radiantă $\Delta P$ care străbate suprafața și aria acestei suprafețe, $\Delta S$.

# Cap.6. FUNCȚII CONTINUE

## 6.1 Funcții continue într-un punct de acumulare

Continuitatea unei funcții face referire la felul cum este graficul acesteia și anume fără întreruperi adică un grafic continuu sau cu întreruperi adică discontinuu.

**Definiție:** O funcție $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se numeşte **continuă** în punctul de acumulare $x_0 \in D \Leftrightarrow$ oricare ar fi vecinătatea V a lui $f(x_0)$ , există o vecinătate U a lui $x_0$, astfel încât pentru orice $x \in U \cap D \Rightarrow f(x) \in V$.

**Definiție:** $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este **continuă în** $x_0 \in D \Leftrightarrow f$ are limită în $x_0$ şi $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
sau $l_s(x_0) = l_d(x_0) = f(x_0)$. ($x_0$ se numeşte punct de continuitate).

Observație:

Pentru ca graficul unei funcții să fie continuu în punctul $x_0$ observăm că nu este suficientă numai existența limitei funcției în punctul $x_0$; în plus trebuie ca aceasta să fie egală și cu valoarea funcției în punctul $x_0$.

**Exemple**:

**a**) Funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ este continuă în punctul $x_0 = 1$ deoarece $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2 = f(1)$;

**b**) Funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x+3, & x \le 0 \\ \sqrt{x^2+x+9}, & x > 0 \end{cases}$ este continuă în punctul $x_0 = 0$ deoarece

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = f(0) = 3$;

Dacă funcţia nu este continuă în $x_0 \Rightarrow$ f se numeşte discontinuă în $x_0$ şi $x_0$ se numeşte punct de discontinuitate. Acesta poate fi:

- punct de discontinuitate de prima speţă dacă $l_s(x_0)$, $l_d(x_0)$ sunt finite, dar diferite de $f(x_0)$;
- punct de discontinuitate de a doua speţă dacă cel puţin o limită laterală e infinită sau nu există.

**Definiție:** O funcție $f$ este **continuă** pe o mulţime ( interval) $\Leftrightarrow$ este continuă în fiecare punct a mulţimii ( intervalului).

- Funcţiile elementare sunt continue pe domeniile lor de definiţie.

***Exemple de funcţii elementare***: funcţia constantă $c$, funcţia identică $x$, funcţia polinomială $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots\ldots a_n$ , funcţia **raţională** $\frac{f(x)}{g(x)}$, funcţia radical $\sqrt[n]{f(x)}$ , funcţia logaritmică $\log_a x$, funcţia putere $x^a$, funcţia exponenţială $a^x$, funcţiile trigonometrice ***sin x, cos x, tg x, ctg x.***

Observație: În punctele în care funcția nu este definită, nu are sens să se pună problema continuității sau a discontinuității.

De exemplu, funcția tg x nu e definită în punctul $\frac{\pi}{2}$ așadar nu se poate spune că funcția nu este nici continuă nici discontinuă în $\frac{\pi}{2}$, problema continuității nu are sens.

## PRELUNGIREA PRIN CONTINUITATE a unei funcţii într-un punct de acumulare

**Definiție:** Fie $f: D \subset R \to R$. Dacă $f$ are limita $l \in R$ în punctul de acumulare $x_0 \notin D \Rightarrow$ $f: D \cup \{x_0\} \to R$, $f(x) = \begin{cases} f(x), x \in D \\ l, x = x_0 \end{cases}$ este o funcţie continuă în $x_0$ şi se numeşte **prelungirea prin continuitate a lui $f$ în $x_0$.**

## OPERAŢII CU FUNCŢII CONTINUE

**TEOREMĂ**. Dacă $f, g: D \to R$ sunt continue în $x_0$ ( respectiv pe D) atunci $f+g, f \cdot g, \sqrt{f}, a \cdot f, \frac{f}{g}, f^g$ sunt continue în $x_0$ ( respectiv pe D); $\alpha \in R$, $g \neq 0$.

**TEOREMĂ**. Dacă $f: D \to R$ e continuă în $x_0 \in D$ ( respectiv pe D) $\Rightarrow |f(x)|$ e continuă în $x_0 \in$ ( respectiv pe D). Reciproca nu e valabilă.

**TEOREMĂ**. Fie $f: D \to R$ continuă în în $x_0 \in A$ şi $g: B \to A$ continuă în $x_0 \in B$, atunci $g \bullet f$ e continuă în $x_0 \in A$.

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to x_0} g(x)\right)$$

***Orice funcţie continuă comută cu limita.***

### Exercitii rezolvate

**1. Să se arate că funcţia** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} e^x + 2x, & x \in (-\infty; 0) \\ 3\ln(x+1) + 1, x \in [0; \infty) \end{cases}$ **este continuă pe** $\mathbb{R}$ **.**

Rezolvare:

f este continuă pe $(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$ deoarece restricţiile sunt funcţii continue ca sume de funcţii elementare; Rămâne să studiem continuitatea lui f în punctul 0;

Din $l_s(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} (e^x + 2x) = 1$, $l_d(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (3\ln(x+1) + 1) = 1$ şi f( 0) = 1 rezultă că f este continuă în 0 deci f este continuă pe $\mathbb{R}$ .

**2. Să se arate că funcţia** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{3x-4}{x^2+3x-3}, & x \leq 1 \\ \sqrt[3]{x^2-3x+1}, x > 1 \end{cases}$ **este continuă pe** $\mathbb{R}$ **.**

Rezolvare:
f este continuă pe $(-\infty;1)\cup(1;\infty)$ deoarece restricţiile sunt funcţii continue ca funcţii elementare respectiv compunere de funcţii elementare; Rămâne să studiem continuitatea lui f în punctul 1;

Din $l_s(1)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\langle 1}}(\frac{3x-4}{x^2+3x-3})=-1$, $l_d(1)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\rangle 1}}\sqrt[3]{x^2-3x+1}=-1$ şi f( 1) = -1 rezultă că f este continuă în 1 deci f este continuă pe $\mathbb{R}$.

**3. Să se arate că funcţia** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 3(x-2)}{x^2-5x+6}, & x\langle 2\\ 2x-1\ , & x\geq 2\end{cases}$ **nu este este continuă pe** $\mathbb{R}$**.**

Rezolvare:
Studiem continuitatea lui f în punctul 2;

Din $l_s(2)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x\langle 2}}\dfrac{\sin 3(x-2)}{x^2-5x+6}=-3$, $l_d(2)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x\rangle 2}}(2x-1)=3$ şi f( 2) = 3 rezultă că f nu este continuă în 2 deci f nu este continuă pe $\mathbb{R}$ ci doar pe $(-\infty;2)\cup(2;\infty)$ deoarece restricţiile sunt funcţii continue.

**4. Să se determine** $a\in\mathbb{R}$ **astfel încât funcţia** $f:[1;\infty)\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2(\sqrt{x-1}-1)}{x-2}, & x\in[1;2)\\ ax+3\ , & x\geq 2\end{cases}$$

**să fie continuă pe domeniul său de definiţie .**

Rezolvare:
f este continuă pe $(1;2)\cup(2;\infty)$ deoarece restricţiile sunt funcţii continue ca funcţii elementare. Rămâne să impunem condiţia de continuitate în punctul 2;

Din $l_s(2)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x\langle 2}}\dfrac{2(\sqrt{x-1}-1)}{x-2}=1$, $l_d(2)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x\rangle 2}}(ax+3)=2a+3$ şi f( 2) = 2a + 3 rezultă $2a+3=1\Rightarrow a=-1$.

**5. Să se determine** $a,b\in\mathbb{R}$ **astfel încât funcţia** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2-3}-1}{x-2}, & x\langle 2\\ bx+6, & x=2\\ \dfrac{a\sin(x-2)}{x^2-2x}\ , & x\rangle 2\end{cases}$

**să fie continuă în punctul 2 .**

Rezolvare: f este continuă în punctul 2 $\Leftrightarrow l_s(2)=l_d(2)=f(2)$ .

Din $l_s(2)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x\langle 2}}\dfrac{\sqrt{x^2-3}-1}{x-2}=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x\langle 2}}\dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(\sqrt{x^2-3}+1)}=2$, $l_d(2)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x\rangle 2}}\dfrac{a\sin(x-2)}{x(x-2)}=\dfrac{a}{2}$ şi

$f(2)=2b+6$ rezultă $2=\dfrac{a}{2}\Rightarrow a=4$ şi $2=2b+6\Rightarrow b=-2$.

## Exercitii propuse

**1.** Să se studieze continuitatea funcţiilor pe domeniul lor de definiţie:

**a)** $f:[-2,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{25-x^2}}, x\in[-2,0)\\ \dfrac{x^5+5^x}{5}, x\geq 0\end{cases}$ ; **b)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}e^x(x+3), x\in(-\infty,0)\\ x+3, x\in[0,1]\\ 3x+1, x\in(1,+\infty)\end{cases}$

**c)** $f:[0,4]\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}4x-1, x\in[0,1]\\ x^2+2, x\in(1,2]\\ \dfrac{7x+4}{x^2-x+1}, x\in(2,4]\end{cases}$ ; **d)**

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+3x+2}{x+1}, x\in(-\infty,-1)\\ x^2+2, x=-1\\ \dfrac{\ln(x+2)}{x+1}, x\in(-1,\infty]\end{cases}$

**e)** $f:(0;\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}e^x+\ln x, x\in(0;1]\\ x^{\frac{1}{x-1}}, \quad x\rangle 1\end{cases}$;

**2**. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x^2-1}, x\leq 1\\ \ln x, \quad x\rangle 1.\end{cases}$. Să se studieze continuitatea funcţiei f în $x_0$ =1;

**3**. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}4x^3+6, & x\langle 1\\ 2x^2+8x, & x\geq 1\end{cases}$. Să se studieze continuitatea lui f în $x_0$ =1;

**4.** Să se determine parametrul real m astfel încât f să fie continuă pe domeniul de definiţie:

**a)** $f\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}m\cdot e^{2x}, x\leq 0\\ x^2+7, x\rangle 0\end{cases}$; **b)**. $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x+3}{x^2+4}, x\in[0,1]\\ x+m, x\in(1,\infty)\end{cases}$

**c)** $f:[2,4]\to R, f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x-2}-1}{x-3}, x\in[2,3)\\ \dfrac{mx+3}{9}, x\in[3,4]\end{cases}$ **d)**

$f:[0,5]\to R, f(x)=\begin{cases}\dfrac{3\sin m(x-2)}{x-2}, x\in[0,2)\\ 2x-m, x\in[2,5]\end{cases}$

**e)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{m\sin(x-1)}{x^2-5x+4}, x\in(-\infty;1)\\ 2\cos(2x-1)\dfrac{\pi}{4},\quad x\geq 1\end{cases}$; **f)**

$f:[0;5]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{3\sin m(x-3)}{x^2-9}, x\in[0;3)\\ \cos(x-2)\dfrac{\pi}{3}, x\geq 3\end{cases}$;

**g)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}x^2+4m^2x, x\in(-\infty;1]\\ x^2+m^3\ ,\quad x\in(1;\infty)\end{cases}$;

**5**. Se consideră funcţia $f:(-7;\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\sqrt{x+7}, x\leq 2\\ \dfrac{x+a}{2x+1}, x\rangle 2\end{cases}$ $a\in\mathbb{R}$. Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât f să fie continuă în 2;

**6**. Se consideră funcţia $f:[0;\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+5x+a}, x\in[0;2]\\ \dfrac{9x+14}{8}, x\in(2;\infty)\end{cases}$ $a\in\mathbb{R}$. Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât f să fie continuă în 2.

**7**. Se consideră funcţia $f:(0;\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}4+\ln x,\quad 0\langle x\leq 1\\ a\sqrt{x^2+8x}, x\rangle 1\end{cases}, a\in\mathbb{R}$. Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât f să fie continuă pe $(0;\infty)$;

**8.** Să se studieze continuitatea funcţiei pe domeniul de definiţie:

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2+\sin^3 x}}{x}, x\neq 0\\ 1\qquad\quad , x=0\end{cases}$

**9.** Să se studieze continuitatea funcţiei pe domeniul de definiţie:

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{\cos x}-1}{x}, x\neq 0\\ 1\qquad\quad , x=0\end{cases}$

**10.** Să se studieze continuitatea funcţiei pe domeniul de definiţie:

$f:(0;+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(tgx)}{1-ctgx}, x\in(0;\dfrac{\pi}{4})\\ \dfrac{4}{\pi}\qquad , x\in[\dfrac{\pi}{4};+\infty)\end{cases}$

**11.** Să se studieze continuitatea funcţiei pe domeniul de definiţie:

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\left|x^2-9\right|$

**12.** Să se studieze continuitatea funcţiei pe domeniul de definiţie:

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\left|x^2-5x+6\right|$

**13.** Să se studieze continuitatea funcţiei pe domeniul de definiţie:

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 3x}{5x}, x\in[-1;0]\\ \dfrac{x}{tg2\sqrt{x}}+\dfrac{3}{5}, x=0\end{cases}$$

**14.** Să se determine parametrul real m astfel încât f să fie continuă:

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+3x)}{6x}, x\neq 0\\ x^2-2m\ \ , x=0\end{cases};$$

**15.** Să se determine parametrul real m astfel încât f să fie continua în punctul 1:

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\sqrt{m^2x^2+1}, x\in(-\infty;1]\\ 2mx+1\ \ , x\in(1;\infty)\end{cases};$$

**16**. Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}e^{2x}, x\in(-\infty;0]\\ 3x^2+4x+a\ \ , x\in(0;\infty)\end{cases}$ să fie continuă pe $\mathbb{R}$ ;

**17**. Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât funcţia $f:[0;\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}a+x\cdot e^{\frac{1}{x}}, x\rangle 0\\ 0\qquad\ \ , x=0\end{cases}$ să fie continuă pe $\mathbb{R}$ ;

**18**. Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât funcţia $f:(-\infty;1)\cup(1;\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}a\ln(3-x), x\leq 1\\ \dfrac{2^x-2}{x-1}\ \ , x\rangle 1\end{cases}$ să fie continuă în punctul 1;

**19**. Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât funcţia $f:(0;\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}(\ln x)^3, x\in(0;e)\\ \dfrac{1}{e^2}x^2+ax-e, x\rangle e\end{cases}$ să fie continuă în punctul **e**;

## 6.2 Proprietățile funcțiilor continue pe un interval

**Definiție:** Fie $f : I \subset R \to R$ ( I = interval) $f$ **are proprietatea lui Darboux**.
$\Leftrightarrow \forall a,b \in I$ cu $a < b$ şi $\forall \lambda \in (f(a), f(b))$ sau $\lambda \in (f(b), f(a)) \Rightarrow \exists c \in (a,b)$, a.î. $f(c) = \lambda$.

**Observație:** Proprietatea lui Darboux înseamnă că dacă ducem o dreaptă paralelă la oxa OX situată între f(a) și f(b) atunci aceasta va intersecta graficul funcției în cel puțin un punct.

**TEOREMĂ**. ***Orice funcţie continuă pe un interval are P.D.***
Dacă $f : I \to R$ are P.D. atunci $\Rightarrow f(I)$ e interval.( Reciproca e în general falsă).

**STABILIREA SEMNULUI UNEI FUNCŢII**

**TEOREMĂ** . O funcţie continuă pe un interval, care nu se anulează pe acest interval păstrează semn constant pe el.

**LEMĂ**. Dacă $f$ este o funcţie continuă pe un interval [ a,b] şi dacă are valori de semne contrare la extremităţile intervalului $(f(a) \cdot f(b) < 0)$ atunci există cel puţin un punct $c \in (a,b)$ astfel încât $f(c) = 0$.

Dacă $f$ este strict monotonă pe [ a,b] $\Rightarrow$ ecuaţia f(x) = 0 are cel mult o rădăcină în intervalul ( a, b).

$f$ este strict monotonă $\Leftrightarrow$ $f: I \to J$ - continuă
$f(I) = J$ - surjectivă
$f$ - injectivă

**TEOREMĂ**. Orice funcţie continuă pe un interval compact este mărginită şi îşi atinge marginile.

**CONTINUITATEA FUNCŢIILOR INVERSE**

**TEOREMĂ**. Fie $f : I \subset R \to R$ o funcţie monotonă astfel încât $f(I)$ e interval. Atunci f este continuă.

**TEOREMĂ**. Orice funcţie continuă şi injectivă pe un interval este strict monotonă pe acest interval.

**TEOREMĂ**. Fie $f : I \to R$, $I, J \subset R$ intervale. Dacă $f$ e bijectivă şi continuă pe **I** atunci inversa sa $f^{-1}$ e continuă şi strict monotonă pe **I.**

### Exercitii rezolvate

**1. Să se arate că următoarele funcții au proprietatea lui Darboux pe intervalul dat.**

**a)** $f(x)=\begin{cases}3x-2, & x\le 0\\ (x-2)(x+1), & x\rangle 0\end{cases}$, $I=\mathbb{R}$**;** **b)** $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 4x-\sin 3x}{x}, & x\langle 0\\ \sqrt{2x+1}, & x\ge 0\end{cases}$, $I=[-2;2]$**;**

Rezolvare:

Deaorece f este continuă în 0 rezultă că este continuă și pe $\mathbb{R}$ deci f are P. Darboux pe $\mathbb{R}$;

**2. Să se arate că următoarele ecuaţii au cel puţin o soluţie în intervalul indicat:**

**a)** $x^3-2x^2+5x-3=0,\ I=[0;1]$**;** **b)** $tgx+x-1=0,\ I=[0;\dfrac{\pi}{4}]$

Rezolvare:

**a**) Fie $f:(0;1)\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3-2x^2+5x-3$. F este o funcţie continuă pe intervalul dat.

Cum $f(0)=-3\langle 0$ şi $f(1)=1\rangle 0\Leftrightarrow f(0)\cdot f(1)\langle 0\Rightarrow$ conform proprietăţii lui Darboux că f are cel puţin o soluţie în intervalul [0;1].

**b**) Fie $f:\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)\to\mathbb{R},\ f(x)=tgx+x-1$ . f este o funcţie continuă pe intervalul dat. Cum

$f(0)\cdot f(\dfrac{\pi}{4})=-1\cdot\dfrac{\pi}{4}\langle 0\Rightarrow$ ecuaţia f(x)=0 are cel puţin o soluţie în intervalul dat.

**3. Să se stabilească semnul funcțiilor:**

**a**) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-4x+3$**;** **b)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3-9x$**;**

**c)** $f:(3;\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\log_2(x-3)$**;** **d)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=(3^x-1)(x-2)$**;**

Rezolvare:

a) Pentru început se rezolvă ecuația f(x)=0 de unde se obțin soluțiile $x_1=1$ și $x_2=3$ numere care se pun în ordine crescătoare în tabelul de valori . Pentru fiecare interval $(-\infty;1),\ (1;3),\ (3,\infty)$ se ia câte o valoare accesibilă și se calculează valoarea funcției:

$f(0)=3\rangle 0,\ f(2)=-1\langle 0,\ f(4)=3\rangle 0$. Semnul valorii funcției devine semnul funcției pe acel interval, deoarece pe intervalele p ecare funcția nu se anulează ea păstrează semn constant.

| **x** | $-\infty$ | | | | **1** | | | | | **3** | | | | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **f(x)** | + | + | + | + | 0 | - | - | - | - | 0 | + | + | + | + |

Așadar, $f(x)\rangle 0,\forall x\in(-\infty;1)\cup(1;\infty)$ și $f(x)\le 0,\forall x\in[1;3]$

b) $f(x)=0\Rightarrow x^3-9x=0\Rightarrow x(x^2-9)=0$ cu soluțiile $x\in\{-3;0;3\}$ care se pun în tabelul de valori:

| **x** | $-\infty$ | | | | **-3** | | **0** | | **3** | | | | | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **f(x)** | - | - | - | - | 0 | + | + | 0 | - | - | 0 | + | + | + | + |

Pe fiecare interval se ia o valoare și se calculează semnul funcției: $f(-4)=-28\langle 0$, $f(-1)=8\rangle 0$, $f(1)=-8\langle 0$, $f(4)=28\rangle 0$. Așadar, $f(x)\rangle 0,\forall x\in(-3;0)\cup(3;\infty)$ **și** $f(x)\le 0,\forall x\in(-\infty;-3]\cup[0;3]$**.**

c) $f(x)=0\Rightarrow\log_2(x-3)=0\Rightarrow x-3=1\Rightarrow x=4$**.**

| **x** | **3** | | | | | | | **4** | | | | | | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **f(x)** | - | - | - | - | - | - | - | 0 | + | + | + | + | + | + |

$f(5)=\log_2(5-3)=\log_2 2=1\rangle 0$ rezultă că $f(x)=0\Rightarrow\log_2(x-3)=0\Rightarrow x-3=1\Rightarrow x=4$.
Așadar, $f(x)\ \geq\ 0,\forall x\in[4;\infty)$ și $f(x)\ \langle\ 0,\forall x\in(3;4)$.

d) $f(x)=0\Rightarrow(3^x-1)(x-2)=0\Rightarrow x\in\{0;2\}$.

| **x** | $-\infty$ | | | | **0** | | | | **2** | | | | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **f(x)** | + | + | + | + | 0 | - | - | - | 0 | + | + | + | + |

$f(-1)=2\rangle 0$, $f(1)=-2\langle 0$, $f(3)=26\rangle 0$, deci $f(x)\ \geq\ 0,\forall x\in(-\infty;0]\cup[2;\infty)$ și $f(x)\ \langle\ 0,\forall x\in(0;2)$.

**4. Să se rezolve inecuațiile:**

**a)** $(x-3)\left(\sqrt{x-2}-1\right)\geq 0$**;** **b)** $2-\ln x\geq 0$**;**

**c)** $\dfrac{x^2-4}{3^x-1}\ \langle\ 0$; **d)** $(1+\log_3 x)(3-3^x)\geq 0$.

Rezolvare:

a) Se consideră funcția $f(x):(2;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-3)\left(\sqrt{x-2}-1\right)$ căreia îi studiem semnul.

Din $f(x)=0\Rightarrow(x-3)\left(\sqrt{x-2}-1\right)=0\Rightarrow x-3=0\Rightarrow x_1=3$ **și** $\sqrt{x-2}-1=0\Rightarrow\sqrt{x-2}=1\Rightarrow x=3$.

| **x** | 2 | | | | **3** | | | | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **f(x)** | + | + | + | + | 0 | + | + | + | + |

Cum $f(2)=1\rangle 0$, $f(4)=\sqrt{2}-1\rangle 0$ deci soluția inecuației date este $x\in[2;\infty)$.

b) Fie $f:(0;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2-\ln x$ căreia îi studiem semnul.

Din $f(x)=0\Rightarrow 2-\ln x=0\Rightarrow\ln x=2\Rightarrow x=e^2$.

| **x** | **0** | | | | **$e^2$** | | | | | | | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **f(x)** | + | + | + | + | 0 | - | - | - | - | - | -- | -- |

$f(e)=2-\ln e\ =2-1=1\rangle 0$ și $f(e^3)=2-\ln e^3=2-3=-1\langle 0$. Atunci soluția ecuației este $x\in(0;e^2)$.

c) Fie $f:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2-4}{3^x-1}$. Studiem semnul lui f(x).

$f(x)=0\Rightarrow\dfrac{x^2-4}{3^x-1}=0\Rightarrow x^2-4=0\Rightarrow x_{1,2}=\pm 2$.

| **x** | $-\infty$ | | | **-2** | | | **0** | | | **2** | | | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **f(x)** | - | - | - | - | - | - | 0 | + | + | + | I | - | - | - | - | - | 0 | + | + | + | + |

$f(-3)=\dfrac{5}{\frac{-26}{27}}\langle 0$, $f(-1)=\dfrac{-3}{\frac{-2}{3}}\rangle 0$ $f(1)=\dfrac{-3}{2}\langle 0$, $f(3)=\dfrac{5}{26}\rangle 0$. Soluția inecuației este $x\in(-\infty;-2)\cup(0;2)$.

d) Fie $f:(0;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=(1+\log_3 x)(3-3^x)$. Studiem semnul lui f(x).

Din $f(x)=0\Rightarrow(1+\log_3 x)(3-3^x)=0\Rightarrow 1+\log_3 x=0\Rightarrow x=3^{-1}$ sau

$3-3^x=0\Rightarrow 3^x=3\Rightarrow x=1$,

| x | 0 | 1/3 | 1 | ∞ |
|---|---|---|---|---|
| f(x) | - - - - - - | 0 + + + | 0 - - - -- -- -- -- | |

$f(\frac{1}{9})=\left(1+\log_3\frac{1}{9}\right)\left(3-3^{\frac{1}{9}}\right)=(1-2)\cdot(3-3^{\frac{1}{9}})\langle 0$,

$f(\frac{1}{2})=\left(1+\log_3\frac{1}{2}\right)\left(3-3^{\frac{1}{2}}\right)=(1-\log_3 2)\cdot(3-\sqrt{3})\rangle 0$,

$f(3)=\left(1+\log_3 3\right)\left(3-3^3\right)=(1+1)\cdot(3-27)\langle 0$. Atunci, soluția inecuației este $x\in\left[\frac{1}{3};1\right]$.

## Exercitii propuse

**1. Să se arate că următoarele ecuaţii au cel puţin o soluţie în intervalul indicat:**

**a)** $x^4-3x^2+7x-1=0,\ I=[0;1]$;

**b)** $e^x+x-2=0,\ I=[0;1]$;

**c)** $\ln(x+1)+x^2-1=0,\ I=[0;1]$

**d)** $\sin x+\cos x-1=0,\ I=[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}]$;

**e)** $(x-1)\cdot 3^x=1,\ I=[0;2]$;

**f)** $\ln(x^2+1)+x^2-4=0,\ I=[0;2]$.

**2. Să se rezolve inecuaţiile:**

**a)** $x^2-5x-6\geq 0$;

**b)** $x^3+x^2-6x\leq 0$;

**c)** $2x^3+3x^2-3x-2\geq 0$;

**d)** $x^4-5x^2+4\rangle 0$;

**e)** $\frac{x^2-6x+8}{x-1}\geq 0$;

**f)** $\frac{x^3+x^2-10x+8}{x+2}\langle 0$ ;

**g)** $(x-1)\ln x\rangle 0$;

**h)** $\ln^2 x-3\ln x\rangle 0$;

**i)** $(x^2-7x+6)(\ln x-1)\geq 0$;

**j)** $(x^2-3x+2)(3^x-9)\rangle 0$;

**k)** $e^{2x}-5\cdot e^x+4\geq 0$;

**l)** $\frac{\lg^2 x-2\lg x+3}{\lg x-1}\rangle 0$;

**m)** $\frac{3^{x+1}-27}{x^2-3x-4}\rangle 0$;

**n)** $\frac{4^x-5\cdot 2^x}{4^x-9\cdot 2^x+8}\geq 1$ ;

**3. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=\begin{cases}\sqrt{x+1}+m, x\geq 3\\ x^2+mx+2, x\langle 3\end{cases}$ să admită proprietatea lui Darboux pe $\mathbb{R}$.**

**4. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,**

$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2-2mx+m^2}+m, x\geq 3\\ mx+3, x\langle 3\end{cases}$ **să admită proprietatea lui Darboux pe $\mathbb{R}$.**

**5. Să se rezolve inecuațiile:**

**a)** $\frac{1-\sqrt{x}}{2-\sqrt{x+1}}\geq 0$ ; **b)** $\frac{1-\log_2 x}{1-\log_4 x}\leq 0$; **c)** $\frac{x\cdot\ln x}{x^2-1}\geq 0$; **d)** $\frac{(e^x-1)(x-3)}{x^3}\geq 0$.

# Cap. 7. FUNCȚII DERIVABILE

## 7.1 Derivata unei funcții într-un punct

**Definiţie**: O funcţie $f:D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ se numeşte **derivabilă în** $x_0\in D$ dacă şi numai dacă există $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\in\mathbb{R}$ pe care o notăm cu $f'(x_0)$ ( citim f derivat în $x_0$)

Dacă $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\in\overline{\mathbb{R}}$ spunem că **f are derivată în punctul $x_0$.**

**Teoremă**. Dacă o funcţie $f:D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este derivabilă într-un punct $x_0\in D$ atunci f este continuă în acel punct.

**Definiţie**: O funcţie $f:D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ şi $A\subset D$ se numeşte **derivabilă pe mulţimea A** dacă şi numai dacă este derivabilă în orice punct din A.

**Derivate laterale**

**Definiţie**: O funcţie $f:D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ se numeşte **derivabilă la stânga în** $x_0\in D$ **(**respectiv la dreapta) dacă şi numai dacă există $f_s'(x_0)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\in\mathbb{R}$ (respectiv $f_d'(x_0)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\in\mathbb{R}$)

**Teoremă**. $f:D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este **derivabilă într-un punct** $x_0\in D$ dacă şi numai dacă derivatele laterale există, sunt finite şi egale între ele. Atunci, $f'(x_0)=f_s'(x_0)=f'_d(x_0)\in\mathbb{R}$.

**Exemplu**: **Să se determine** $a,b\in\mathbb{R}$ **astfel încât funcţia** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f=\begin{cases}x^3+ax+4, & x<0\\ \ln(1+x^2)+b, & x\geq 0\end{cases}$ **să fie derivabilă în 0;**

Rezolvare: dacă f este derivabilă în 0 rezultă că f este şi continuă în 0.
Se impun condiţiile de continuitate şi derivabilitate ale lui f în punctul 0.

**f continuă în 0**

$\Rightarrow l_s(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}(x^3+ax+4)=4$,

$l_d(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(\ln(1+x^2)+b)=\ln 1+b=b=f(0).$ Din $l_s(0)=l_d(0)=f(0)\Rightarrow$ b = 4

**f derivabilă în 0,**

Pentru derivabilitate, se derivează funcțiile componente ale lui f:

**Reguli de derivare**

**1.** $(af)^I = a \cdot f^I = af'$ Exemplu : $\left(4 \cdot x^2\right)' = 4 \cdot (x^2)' = 4 \cdot 2x = 8x$

**2.** $\left(f+g\right)^I = f^I + g^I$ Exemplu: $(4x^2+5x)' = (4x^2)' + (5x)' = 8x+5$

**3.** $\left(f \cdot g\right)^I = f^I \cdot g + f \cdot g^I$

Exemplu: $(5x^2 \cdot \ln x)' = (5x^2)' \cdot \ln x + (5x^2) \cdot \left(\ln x\right)' = 10x \ln x + 5x^2 \cdot \frac{1}{x} = 5x(2\ln x + 1)$

**3.** $\left(\frac{f}{g}\right)^I = = \frac{f^I \cdot g - f \cdot g^I}{g^2}$

Exemple: $\left(\frac{4x+2}{x^2}\right)^I = \frac{4 \cdot x^2 - (4x+2) \cdot 2x}{x^4} = \frac{-4x^2 - 4x}{x^4}$;

$\left(\frac{2x+4}{3x}\right)' = \frac{(2x+4)' \cdot 3x - (2x+4) \cdot (3x)'}{(3x)^2} = \frac{2 \cdot 3x - (2x+4) \cdot 3}{(3x)^2} = \frac{-12}{(3x)^2}$

**4.** $\left(f^{-1}\right)^I \left(f(x_0)\right) = \frac{1}{f^I(x_0)}$.

## Derivatele funcţiilor continue elementare şi a celor compuse

**1**. $\boxed{c' = 0}$, c – constantă;

Exemple: $5' = 0$; $\sqrt{7}' = 0$; $\left(\frac{1}{3}\right)^I = 0$; $\left(-4\sqrt{2}\right)^I =$

**2.** $\boxed{x' = 1}$, $x \in \mathbb{R}$;

**3**. $\boxed{\left(x^n\right)' = nx^{n-1}}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$; $\boxed{\left(u^n\right)' = n \cdot u^{n-1}}$

Exemple: $(x^3)' = 3x^2$; $\left(x^2\right)^I = 2x$ ; $(2x^5)' = 10x^4$; $\left(6x^2+3x+2\right)^I = 12x+3$

$\left[(3x+4)^6\right]' = 6(3x+4)^5 \cdot (3x+4)' = 18(3x+4)^5$;

$\left(x^8\right)^I =$ $\left(5x^6\right)^I =$ $\left(3x^4 - 2x^2 + 7x - 8\right)^I =$

$\left((2x-5)^2\right)^I =$ $\left((4x-3)^4\right)^I =$

**4**. $\boxed{\left(x^a\right)' = ax^{a-1}}$, $x \in [0;\infty)$, $a \in \mathbb{Q}$; $\boxed{\left(u^a\right)' = au^{a-1}}$

Exemple: $(x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$;

$\left[(2x^3)^{\frac{1}{3}}\right]' = \frac{1}{3}(2x^3)^{\frac{1}{3}-1} \cdot (2x^3)' = \frac{1}{3}(2x^3)^{-\frac{2}{3}} \cdot 6x^2 = 2x^2 \cdot 2^{-\frac{2}{3}} \cdot x^{-2} = 2^{\frac{1}{3}}$;

$\left((x)^{-3}\right)^I = -3 \cdot x^{-4}$; $\left(\frac{1}{x^5}\right)^I = \left(x^{-5}\right)^I = -5 \cdot x^{-6} = \frac{-5}{x^6}$;

$\left(x^{-6}\right)^I =$ $\left(2x^{-7}\right)^I =$

$\left(\sqrt{x^5}\right)^I =$ $\left(\sqrt[3]{x^4}\right)^I =$

$\left(\frac{1}{x^9}\right)^I =$ $\left(x^{-\frac{1}{3}}\right)^I =$

**5.** $\boxed{\sqrt{x}' = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$, $x \in \mathbb{R}_+^*$; $\boxed{\sqrt{u}' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}}$

Exemple: $\left(\sqrt{5x+2}\right)' = \frac{(5x+2)'}{2\sqrt{5x+2}} = \frac{5}{2\sqrt{5x+2}}$; $(\sqrt{2x^3})' = \frac{6x^2}{2\sqrt{2x^3}}$;

$\left(\sqrt{6x-8}\right)^I =$ $\left(\sqrt{4x^3-2x+7}\right)^I =$

**6.** $\boxed{\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a}$, $x \in \mathbb{R}$; $\boxed{\left(a^u\right)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'}$

Exemple: $3^x = 3^x \ln 3$; $\left(3^{4x-5}\right)' = 3^{4x-5} \ln 3 \cdot (4x-5)' = 4 \cdot 3^{4x-5} \ln 3$;

$\left(8^x\right)^I =$ $\left(3 \cdot 8^x\right)^I =$

$\left(5^{4x-2}\right)^I =$ $\left(3^{4x^2-8x+6}\right)^I =$

**7.** $\boxed{\left(e^x\right)' = e^x}$, $x \in \mathbb{R}$; $\boxed{\left(e^u\right)' = e^u \cdot u'}$

Exemple: $\left(e^{2x+7}\right)' = e^{2x+7} \cdot (2x+7)' = 2e^{2x+7}$;

$\left(e^{3x^2+2x+4}\right)' = e^{3x^2+2x+4} \cdot (3x^2+2x+4)' = (6x+2)e^{3x^2+2x+4}$;

$\left(e^{7x-3}\right)^I =$ $\left(e^{3x^2+4x-5}\right)^I =$

**8.** $\boxed{\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x \ln a}}$, $x \in \mathbb{R}_+^*$; $\boxed{(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}}$

Exemple: $\left(\log_5 x\right)^I = \frac{1}{x \ln 5}$; $\left(\log_5 (4x^2-2x+5)\right)^I = \frac{(4x^2-2x+5)^I}{(4x^2-2x)\ln 5} = \frac{8x-2}{(4x^2-2x)\ln 5}$ ;

$\left(\log_4 x\right)^I =$ $\left(\log_3 (6x-2)\right)^I =$

**9.** $\boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x}}$, $x \in \mathbb{R}_+^*$; $\boxed{(\ln u)' = \frac{u'}{u}}$

Exemple: $[\ln(x+4)]' = \frac{1}{x+4}$; $\left[\ln(x^3+x^2+x+1)\right]' = \frac{3x^2+2x+1}{x^3+x^2+x+1}$;

$\left(\ln(5x-2)\right)^I =$ $\left(\ln(3x^2+5x-4)\right)^I =$

**10.** $\boxed{\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}}$, $x \in \mathbb{R}^*$; $\boxed{\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}}$

Exemple: $\left(\frac{1}{x+4}\right)' = -\frac{1}{(x+4)^2}$; $\left(\frac{1}{2x^3+3x}\right)' = -\frac{(2x^3+3x)'}{(2x^3+3x)^2} = -\frac{6x^2+3}{(2x^3+3x)^2}$;

$\left(\frac{1}{6x-5}\right)^I =$ $\left(\frac{1}{5x^2+7x-4}\right)^I =$

**11.** $\boxed{\left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n}{x^{n+1}}}$, $x \in \mathbb{R}^*$ ; $\boxed{\left(\frac{1}{u^n}\right)' = -\frac{n \cdot u'}{u^{n+1}}}$

Exemple: $\left(\frac{1}{x^5}\right)' = -\frac{5}{x^6}$; $\left(\frac{1}{(2x^2+3)^4}\right)' = -\frac{4}{(2x^2+3)^5} \cdot 4x$

**12.** $\boxed{(\sin x)' = \cos x}$, $x \in \mathbb{R}$ ; $\boxed{(\sin u)' = \cos u \cdot u'}$

Exemple: $[\sin(5x-2)]' = 5 \cdot \cos(5x-2)$; $\left(\sin 4x^3\right)' = 12x^2 \cdot \cos(4x^3)$;

$\left(\sin 8x\right)^I =$ $\left(\sin(2x^2-8x+4)\right)^I =$

**13.** $\boxed{(\cos x)' = -\sin x}$, $x \in \mathbb{R}$ ; $\boxed{(\cos u)' = -\sin u \cdot u'}$

Exemple: $[\cos(2x+4)]' = -2 \cdot \sin(2x+4)$; $\left(\cos 3x^3\right)' = -9x^2 \cdot \sin(3x^3)$;

$\left(\cos(6x)\right)^I =$ $\left(\cos(6x-9)\right)^I =$

**14.** $\boxed{(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{(2k+1)\pi}{2} \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}$; $\boxed{(tgu)' = \frac{u'}{\cos^2 u}}$

Exemple: $tg(3x+1)' = \frac{3}{\cos^2(3x+1)}$; $(tg5x^2)' = \frac{(5x^2)'}{\cos^2(5x^2)} = \frac{10x}{\cos^2(5x^2)}$ ;

$\left(tg(10x)\right)^I =$ $\left(tg(5x^3-2)\right)^I =$

**15.** $\boxed{(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$; $\boxed{(ctgu)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}}$

Exemple: $ctg(2x-5)' = -\frac{(2x-5)'}{\sin^2(2x-5)} = -\frac{2}{\sin^2(2x-5)}$; $\left(ctgx^7\right)' = -\frac{\left(x^7\right)'}{\sin^2(x^7)} = -\frac{7x^6}{\sin^2(x^7)}$

$\left(ctg(4x)\right)^I =$ $\left(ctg(8x+7)\right)^I =$

**16.** $\boxed{(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$, $x \in (-1;1)$; $\boxed{(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}}$

Exemple: $[\arcsin(2x+1)]' = \frac{(2x+1)'}{\sqrt{1-(2x+1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{-4x^2-4x}}$;

$\left(\arcsin(8x-3)\right)^I =$

**17.** $\boxed{(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$, $x \in (-1;1)$; $\boxed{(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}}$

Exemple: $\left[\arccos(2x^2)\right]' = -\frac{(2x^2)'}{\sqrt{1-(2x^2)^2}} = -\frac{4x}{\sqrt{1-4x^4}}$;

$\left(\arccos(8x)\right)^I =$

**18.** $\boxed{(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}}$, $x \in \mathbb{R}$ ; $\boxed{(arctgu)' = \frac{u'}{1+u^2}}$

Exemple: $[\text{arc}\,tg(3x+2)]' = \frac{(3x+2)'}{1+(3x+2)^2} = \frac{3}{1+(3x+2)^2}$;

$\left(arctg(6x-9)\right)^I =$ $\left(arctg(4x^2-3x)\right)^I =$

**19.** $\boxed{(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}}$, $x \in \mathbb{R}$; $\boxed{(arcctgu)' = -\frac{u'}{1+u^2}}$

Exemple: $\left[\text{arc}\,ctg(4x^2)\right]' = -\frac{(4x^2)'}{1+(4x^2)^2} = -\frac{8x}{1+16x^4}$;

$\left(arcctg(5x)\right)^I =$

## Derivata de ordinul doi

**Derivata de ordinul doi a unei funcții f(x) înseamnă să derivăm încă o dată prima derivată a funcției f(x) adică** $f^{II}(x) = \left(f^I\right)^I(x)$**.**

**Exemple: Să se deriveze de ordinul doi funcțiile:**

**1.** $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 2x + 6$**.** Atunci,

$f^I(x) = 3\cdot 4x^3 - 2\cdot 3x^2 + 5\cdot 2x - 2\cdot 1 = 12x^3 - 6x^2 + 5x - 2$**,**

$f^{II}(x) = \left(f^I(x)\right)^I = \left(12x^3 - 6x^2 + 5x - 2\right)^I = 12\cdot 3x^2 - 6\cdot 2x + 5 = 36x^2 - 12x + 5$

**2.** $f(x) = \ln(6x+2)$. Atunci, $f^I(x) = \frac{1}{6x+2}\cdot(6x+2)^I = \frac{6}{6x+2}$**;**

$f^{II}(x) = \left(\frac{6}{6x+2}\right)^I = 6\cdot\left(-\frac{1}{(6x+2)^2}\right)\cdot(6x+2)^I = -36\cdot\frac{1}{(6x+2)^2}$**;**

**3.** $f(x) = \sqrt{8x+4}$**.** Atunci, $f^I(x) = \frac{1}{2\sqrt{8x+4}}\cdot(8x+4)^I = \frac{8}{2\sqrt{8x+4}} = \frac{4}{\sqrt{8x+4}}$;

$f^{II}(x) = \left(\frac{4}{\sqrt{8x+4}}\right)^I = 4\cdot\left(-\frac{1}{8x+4}\right)\cdot(\sqrt{8x+4})^I = -4\cdot\frac{1}{8x+4}\cdot\frac{1}{2\sqrt{8x+4}}\cdot 8 = \frac{-16}{(8x+4)\cdot(\sqrt{8x+4}}$**.**




**1**. Să se calculeze **f '(x)** pentru funcţiile $f: D \to \mathbb{R}$ unde D este domeniul maxim de derivabilitate:

**a)** $f(x) = 3x^3 - 4x^2 + 5x - 4$;

**b)** $f(x) = x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{-1}{2}}$;

**c)** $f(x) = \frac{1}{6x-2}$;

**d)** $f(x) = \frac{3x^2-2}{x-3}$;

**e)** $f(x) = \sqrt{6x+2}$;

**f)** $f(x) = e^{2x+6}$;

**g)** $f(x) = \ln(4x+8)$;

**h)** $f(x) = \ln\sqrt{2x+1}$;

**i)** $f(x) = \log_2(3x^2+9)$;

**j)** $f(x) = \sin(6x-2)$;

**k)** $f(x) = \ln\frac{3x+2}{x+1}$;

**l)** $f(x) = \frac{x^2+2x}{x-1}$;

**m)** $f(x) = 3^{4x-1} + e^{3x+2}$;

**n)** $f(x) = (2x^3 - 4x + 1)e^x$;

**o)** $f(x) = \sqrt{4x^2+1}\cdot\ln x$;

Rezolvare:

**a)** $f'(x)=9x^2-8x+5$; **b)** $f'(x)=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$; **c)** $f'(x)=-\frac{6}{(6x-2)^2}$;

**d)** $f'(x)=\frac{6x(x-3)-(3x^2-2)}{(x-3)^2}=\frac{3x^2-18x+2}{(x-3)^2}$; **e)** $f'(x)=\frac{3}{\sqrt{6x+2}}$; **f)** $f'(x)=2\cdot e^{2x+6}$;

**g)** $f'(x)=\frac{4}{4x+8}=\frac{1}{x+2}$; **h)** $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}\cdot\left(\sqrt{2x+1}\right)'=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}\cdot\frac{2}{2\sqrt{2x+1}}=\frac{1}{2x+1}$;

**i)** $f'(x)=\frac{6x}{(3x^2+9)\ln 2}$; **j)** $f'(x)=6\cdot\cos(6x-2)$;

**k)** $f'(x)=\frac{x+1}{3x+2}\cdot\frac{3(x+1)-3x-2}{(x+1)^2}=\frac{1}{(3x+2)(x+1)}$;

**l)** $f'(x)=\frac{(2x+2)(x-1)-(x^2+2x)}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x-2}{(x-1)^2}$; **m)** $f'(x)=4\cdot 3^{4x-1}\ln 3+3\cdot e^{3x+2}$;

**n)** $f'(x)=(2x^3+6x^2-4x-3)\cdot e^x$; **o)** $f'(x)=\frac{8x}{2\sqrt{4x^2+1}}\ln x+\sqrt{4x^2+1}\cdot\frac{1}{x}$;

**2. Să se studieze dacă funcțiile următoare sunt derivabile în punctele specificate:**

a) $f(x)=\begin{cases}x^3\ ,\ x\le 0\\ 2x^2+4x, x\rangle 0\end{cases},\ x_0=0$;

b) $f(x)=\begin{cases}x^2+3x-1\ ,\ x\le 1\\ 5x-2,\quad x\rangle 1\end{cases},\ x_0=1$;

c) $f(x)=\begin{cases}e^{2x}-x+1\ ,\ x\le 0\\ 2+\ln(1+x),\ x\rangle 0\end{cases},\ x_0=0$

Rezolvare: Se verifică mai întâi că funcțiile sunt continue după care se calculează derivatele laterale:

a) Deoarece $f_s^I(0)=0$ și $f_d^I(0)=4$ rezultă că funcția nu este drivabilă în 0;

b) Deoarece $f_s^I(1)=f_d^I(1)=5$ rezultă că funcția este derivabilă în 1;

c) Deoarece $f_s^I(0)=f_d^I(0)=1$ rezultă că funcția este derivabilă în 0;

**3. Să se determine** $a,b\in\mathbb{R}$ **astfel încât funcţia** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}e^x+ax+b,\quad x\le 0\\ \ln(1+bx),\ x\rangle\ 0\end{cases}$

**să fie derivabilă în 0;**

**Rezolvare:**

f este derivabilă în 0 rezultă că **f este continuă în 0**:

$l_s(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\langle 0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\langle 0}}(e^x+ax+b)=e^0+b=1+b$,

$l_d(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\rangle 0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\rangle 0}}\ln(1+bx)=\ln 1=0$

$f(0)=1+b$, Din $l_s(0)=l_d(0)=f(0)\Rightarrow$ 1+b=0, rezultă **b= -1;**

**f derivabilă în 0:**

$$f^I(x)=\begin{cases} e^x+a, & x<0 \\ \dfrac{b}{1+bx}, & x>0 \end{cases}.$$

$f^I{}_s(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f^I(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}(e^x+a)=1+a,$ Se știe: $\boxed{e^0=1,\ \ln 1=0,\ \ln e=1.}$

$f^I{}_d(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f^I(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{b}{1+bx}=b=-1.$ Din $f'_s(0)=f'_d(0)\Rightarrow$ 1+a = -1 adică **a= - 2.**

**4. Să se determine** $a,b\in\mathbb{R}$ **astfel încât funcţia** $f:(0;\infty)\to\mathbb{R}$ $f(x)=\begin{cases}\ln^3 x, & x\in(0;e]\\ ax+b, & x\in(e;\infty)\end{cases}$

**să fie derivabilă pe** $\mathbb{R}$ **;**

**Rezolvare**: f este derivabilă pe $(0;e]\cup(e;\infty)$ deoarece restricțiile funcției sunt continue pe domeniile de definiție. Rămâne să punem condiția de derivabilitate doar în punctul e. f este derivabilă în e rezultă că **f este continuă în e**:

$l_s(e)=\lim\limits_{\substack{x\to e\\ x<e}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to e\\ x<e}}\ln^3 x=\ln^3 e=1,$

$l_d(e)=\lim\limits_{\substack{x\to e\\ x>e}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to e\\ x>e}}(ax+b)=a\cdot e+b$

$f(e)=1,$ Din $l_s(e)=l_d(e)=f(e)\Rightarrow a\cdot e+b=1.$

**f derivabilă în e:**

$$f^I(x)=\begin{cases}3\ln^2 x\cdot\dfrac{1}{x}, & x\in(0;e)\\ a, & x\in(e;\infty)\end{cases}$$

$f^I{}_s(e)=\lim\limits_{\substack{x\to e\\ x<e}} f^I(x)=\lim\limits_{\substack{x\to e\\ x<e}}(3\ln^2 x\cdot\dfrac{1}{x})=3\cdot\dfrac{1}{e},$

$f^I{}_d(e)=\lim\limits_{\substack{x\to e\\ x>e}} f^I(x)=\lim\limits_{\substack{x\to e\\ x>e}} a=a$ Se știe: $\boxed{e^0=1,\ \ln 1=0,\ \ln e=1.}$

Din $f^I{}_s(e)=f^I{}_d(e)\Rightarrow\dfrac{3}{e}=a.$ Din $a\cdot e+b=1\Rightarrow\dfrac{3}{e}\cdot e+b=1\Rightarrow b=1-3=-2.$

Așadar, f este derivabilă în e dacă $a=\dfrac{3}{e}$ și $b=-2.$

## Exercitii propuse

**1. Să se calculeze f ' (x) şi f ' ($x_0$ ) pentru următoarele funcţii:**

**a)** $f(x)=5x^2-3x+4,\ x_0=0;$ **b)** $f(x)=(3x-2)(x+1),\ x_0=1;$

**c)** $f(x)=(2x+5)^5,\ x_0=-2;$ **d)** $f(x)=\sqrt{4x-3},\ x_0=1;$

**e)** $f(x)=\sqrt{x^2+2x+6},\ x_0=1;$ **f)** $f(x)=2^{x+3},\ x_0=-3;$

**g)** $f(x)=5^{4x+1},\ x_0=0;$ **h)** $f(x)=e^{2x+1},\ x_0=0;$

**i)** $f(x)=e^{4x},\ x_0=0;$ **j)** $f(x)=\ln(x+5),\ x_0=-4;$

**k)** $f(x)=\ln(3x+6),\ x_0=-1;$ **l)** $f(x)=\ln(x^2-9),\ x_0=4;$

**m)** $f(x)=\ln(2x^2+8),\ x_0=1;$ **n)** $f(x)=\dfrac{1}{x+4},\ x_0=1;$

**o)** $f(x)=\dfrac{1}{3x+2},\ x_0=-1;$ **p)** $f(x)=\sin(x-3),\ x_0=3;$

**q)** $f(x)=\sin 5x^2,\ x_0=0;$ **r)** $f(x)=\cos(4x-8),\ x_0=2;$

**s)** $f(x)=tg6x,\ x_0=0;$ **t)** $f(x)=tg3x^2,\ x_0=0;$

**2. Să se calculeze f ' (x) şi f ' ($x_0$ ) pentru următoarele funcţii:**

**a)** $f(x)=\dfrac{x+2}{x-3},\ x_0=2;$ **b)** $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-2},\ x_0=1;$

**c)** $f(x)=\dfrac{2x-4}{x^2+3},\ x_0=0;$ **d)** $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{e^x},\ x_0=1;$

**e)** $f(x)=\dfrac{\ln x}{x+5},\ x_0=1;$ **f)** $f(x)=\dfrac{\ln(2x+5)}{4x},\ x_0=-2;$

**g)** $f(x)=\dfrac{1}{2x+1},\ x_0=-1;$ **h)** $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}}{x^2},\ x_0=-1;$

**i)** $f(x)=\dfrac{e^{3x+2}}{2x+1},\ x_0=-1;$ **j)** $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2+2x},\ x_0=1;$

**3**. Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}x^2+x+a, & x\le 0\\ b\cdot e^x+1, & x\rangle\ 0\end{cases}$ să fie derivabilă în 0.

**4**. Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\ln(x+1+a^2), & x\ge 0\\ a^2\cdot e^x+bx, & x\langle\ 0\end{cases}$ să fie derivabilă în 0.

**5**. Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f=\begin{cases}x^2-x+1, & x\le 0\\ a\sin x+b\cos x, & x\rangle 0\end{cases}$ să fie derivabilă în 0;

**6**. Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f=\begin{cases}\sqrt{ax+4}, & x\le 0\\ e^x+b, & x\rangle 0\end{cases}$ să fie derivabilă în 0;

**7**. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=e^x\cdot\sin x.$ Să se arate că $f^{II}(x)-2f^{I}(x)+2f(x)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}.$

**8**. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2\ln x.$ Să se arate că $x\cdot f^{II}(x)-f^{I}(x)=2x,\ \forall x\in(0;\infty).$

**9**. Se consideră funcția $f:(-\infty;-2]\cup[2;\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{x^2-4}$ . Să se rezolve ecuația: $x\cdot f^{II}(x)-f^{I}(x)+f(x)=1.$

**10**. Fie $f:(-1;\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln\dfrac{x+2}{x+1}.$ Să se arate că

$f^{II}(0)+f^{II}(1)+f^{II}(2)+.....+f^{II}(2020)=1-\dfrac{1}{2022^2};$

**11**. Fie $f(x)=(x^2-4x+2)\cdot e^x$ . Să se calculeze $f^{II}(x).$

## 7.2 Aplicații ale derivatelor

### 1. Ecuația tangentei la graficul funcției f(x) într-un punct $x_0$

**Definiție: Ecuaţia tangentei la graficul unei funcţii în punctul de abcisă $x_0$ are forma**

$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ unde $y_0 = f(x_0)$;

**Exemplu** : Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 2$ în punctul de abcisă $x_0 = 1$.

Rezolvare: Cum $f'(x) = 3(x^2 - 6x + 5) \Rightarrow f'(1) = 0$, iar $f(1) = 9$ rezultă că ecuaţia tangentei are forma

y- 9 = 0 adică y = 9. Tangenta este o paralelă la axa OX.

- **Interpretarea geometrică a derivatelor laterale**

Fie $f:I\to\mathbb{R}$, $D\subset\mathbb{R}$ interval şi $x_0\in D$ punct de acumulare.

Dacă f este derivabilă în $x_0$ atunci graficul funcţiei admite tangentă în $x_0$.

Dacă f este derivabilă doar la stânga sau la dreapta în $x_0$, atunci graficul funcţiei admite semitangente la stânga sau la dreapta.

Dacă derivatele laterale sunt infinite în $x_0$, atunci semitangentele sunt paralele cu axa OY.

### 2. Regula lui L'Hôspital.

**Teoremă Teorema lui L'Hôspital**

**Cazul** $\frac{0}{0}$, (respectiv $\frac{\infty}{\infty}$);

**Fie I un interval,** $x_0\in I$ **un punct de acumulare pentru I şi** $f,g:I\setminus\{x_0\}\to\mathbb{R}$ **cu proprietăţile:**

**a)** $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, **(respectiv** $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)| = \lim\limits_{x\to x_0}|g(x)| = \infty$**);**

**b) f şi g sunt derivabile pe** $I\setminus\{x_0\}$**;**

**c)** $g'(x)\neq 0,\ \forall x\in I\setminus\{x_0\}$**;**

**d) există** $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ **finită sau infinită.**

**Atunci,** $g(x)\neq 0, \forall x\in I\setminus\{x_0\}$ **( respectiv** $g(x)\neq 0, \forall x\in (V\cap I)\setminus\{x_0\}$ **) şi**

$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$**;**

**Exemplu 1:** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^{2020}-1}{x^{2019}-1} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 1}\frac{(x^{2020}-1)^I}{(x^{2019}-1)^I} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{2020x^{2019}}{2019x^{2018}} = \frac{2020}{2019}$;

**Exemplu 2:** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-9x^2+15x+2}{2x^3-4x+5}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-18x+15}{6x^2-4}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x-18}{12x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6}{12}=\dfrac{1}{2}$;

## Exercitii rezolvate

**1. Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x^2-3x+1$ în punctul de abcisă $x_0=2$.**

Rezolvare: Ecuaţia tangentei este de forma $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$ unde $y_0=f(x_0)$.

În cazul nostru, f(2)= 3, şi din $f'(x)=4x-3$ rezultă $f'(2)=5$.

Ecuaţia tangentei este y- 3 = 5 (x-2)

**2. Fie $f:[2;+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\sqrt{x-2}$.**

**Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul M(3 ;3) ;**

Rezolvare :

Ecuaţia tangentei la grafic, într-un punct M($x_0$, f($x_0$)) este $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$.

Cum $x_0$=3, f($x_0$)=3 şi $f'(3)=\dfrac{5}{2}$, rezultă ecuaţia $y-3=\dfrac{5}{2}(x-3)\Rightarrow\ y=\dfrac{5}{2}x-\dfrac{9}{2}$;

**3.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=5^x\cdot x$.**

**Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul O(0;0);**

Rezolvare:

$f'(x)=(5^x\cdot x)'=5^x\ln 5\cdot x+5^x=5^x(x\ln 5+1)$;

Ecuaţia tangentei la graficul lui f are forma $y-0=f'(0)(x-0)\Leftrightarrow y=x,$ adică tocmai ecuaţia primei bisectoare.

**4. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(-x^2+4x-2)\cdot\sin x.$**

**Să se determine ecuaţia tangentei la graficul funcţie f în punctul de abcisă $x_0$ = 0.**

Rezolvare:

$f'(x)=(-2x+4)\sin x+(-x^2+4x-2)\cos x$. Atunci, f '(0) =- 2;

Se calculează f(0)=0 şi din ecuaţia tangentei $y-0=f'(0)(x-0)\Rightarrow y=-2x.$

**5. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R},\ f(x)=x^5+\dfrac{5}{x}.$**

**Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul funcţiei în punctul de abcisă $x_0$ = -1.**

Rezolvare:

$f'(x)=5x^4-\dfrac{5}{x^2}\Rightarrow f'(1)=0;$

$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow y-f(-1)=f'(0)(x+1)\Rightarrow$ y= -6 este ecuaţia tangentei la graficul lui f în punctul de abcisă $x_0$ = -1.

**6. Se consideră funcţiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sin x,\ g(x)=\cos x$.**

**Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul $A\left(\dfrac{\pi}{6};f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right)$;**

Rezolvare:

Ecuaţia tangentei are forma $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$ de unde rezultă $y-f(\frac{\pi}{6})=f'(\frac{\pi}{6})(x-\frac{\lambda}{6})\Rightarrow y-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}(x-\frac{\pi}{6})$.

**7. Se consideră funcţia** $f:(-7;\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\sqrt{x+7}, x\le 2\\ \dfrac{x+a}{2x+1}, x\rangle 2\end{cases}\quad a\in\mathbb{R}$**.**

**Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul funcţiei în punctul** $A(2;3)$**.**

Rezolvare:

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow y-f(2)=f'(2)(x-2)\Rightarrow y-3=\frac{1}{6}(x-2)\Rightarrow x-6y+16=0.$$

**8. Fie** $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{ax^2+bx-6}{x-1}, a,b\in\mathbb{R}.$

**Pentru a =2 şi b=1 să se scrie ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul M(2 ;4) .**

Rezolvare :

$$\text{Cum } f'(x)=\frac{(4x+1)(x-1)-2x^2-x+6}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-4x+5}{(x-1)^2}\Rightarrow f'(2)=\frac{8-8+5}{(2-1)^2}=5.$$

Ecuaţia tangentei la graficul funcţie f în punctul $M(x_0;f(x_0))$ este dată de formula, $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$. În cazul nostru, ecuaţia tangentei este : $y-4=f'(2)(x-2)\Rightarrow y=5(x-2)+4,\ y=5x-6.$

**9. Să se calculeze limitele:**

**a)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{\sin 2x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sin 6x)^I}{(\sin 2x)^I}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6\cdot\cos 6x}{2\cdot\cos 2x}=\dfrac{6}{2}=3.$

**b)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-1}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^2-4x+3)^I}{(x^2-1)^I}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-4}{2x}=\dfrac{-2}{2}=-1$**;**

**c)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-2^x}{4^x-3^x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(3^x-2^x)^I}{(4^x-3^x)^I}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x\cdot\ln 3-2^x\cdot\ln 2}{4^x\cdot\ln 4-3^x\cdot\ln 3}=\dfrac{\ln 3-\ln 2}{\ln 4-\ln 3}=\dfrac{\ln\frac{3}{2}}{\ln\frac{4}{3}};$

**d)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{4\sin x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{x^2+4}-2)^I}{(4\sin x)^I}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}}}{4\cos x}=0;$

**e)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-6x+2}{x^2+4x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(3x^2-6x+2)^I}{(2x^2+4x)^I}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x-6}{4x+4}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(6x-6)^I}{(4x+4)^I}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6}{4}=\dfrac{6}{4}=\dfrac{3}{2};$

**f)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{e^x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x^2)^I}{(e^x)^I}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{e^x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{e^x}=0;$

**10. Să se calculeze limitele:**

**a)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^4-8x+6}{(x-1)^2};$ **b)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\ln(1+x)}$**;** **c)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2+4x}{e^{2x}-e^x};$

**d)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-1}{\sin^2 x};$ **e)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x+4)}{x+4};$ **g)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x+6}+x}{2x+\sqrt{x}};$

**h)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln^2 x}{x^2};$ **i)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln^2 x}{x^2};$

**Rezolvare: a)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^4-8x+6}{(x-1)^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(2x^4-8x+6)^I}{\left[(x-1)^2\right]^I}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{8x^3-8}{2(x-1)}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{24x^2}{2}=12;$

**b)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\ln(1+x)}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\ln(1+x^2))^I}{\left(\ln(1+x)\right)^I}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{2x}{1+x^2}}{\frac{1}{1+x}}=0;$

**c)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2+4x}{e^{2x}-e^x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x+4}{2e^{2x}-e^x}=\dfrac{4}{1}=4;$

**d)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-1}{\sin^2 x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{\cos x}}\cdot(-\cancel{\sin x})}{2\cancel{\sin x}\cdot\cos x}=-\dfrac{1}{4};$

**e)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x+4)}{x+4}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(\ln(x+4))^I}{(x+4)^I}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{x+4}}{1}\overset{\frac{1}{\infty}}{=}0;$

**f)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{e^x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x^2)^I}{(e^x)^I}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{e^x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{e^x}=0;$

**g)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x+6}+x}{2x+\sqrt{x}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(\sqrt{x+6}+x)^I}{(2x+\sqrt{x})^I}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x+6}}+1}{2+\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\dfrac{1}{2};$

**h)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln^2 x}{x^2}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(\ln^2 x)^I}{(x^2)^I}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2\ln x\cdot\frac{1}{x}}{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{2x^2}=0;$

**i)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln^2 x}{x^2}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(\ln^2 x)^I}{(x^2)^I}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x+3\ln x}{3x+4\ln x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4+\frac{3}{x}}{3+\frac{4}{x}}=\dfrac{4}{3};$

## Exercitii propuse

**1**. Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul funcţie f în punctul de abcisă $x_0$ în cazurile:

**a)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-4,\ x_0=1;$ **b)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=3x^2-8x+4,\ x_0=2;$

**c)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=e^{x+1},\ x_0=-1;$ **d)** $f:\mathbb{R}\setminus\{-2\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{3x+1}{x-2},\ x_0=1;$

**e)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln(x^2+1),\ x_0=1;$ **f)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sin^2 x,\ x_0=\dfrac{\pi}{3};$

**2**. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3-3x^2-24x+1;$

Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul lui f în punctul de abcisă $x_0=5$ ;

**3**. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\setminus\{-2;0\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1}{x^2+2x}$;

Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul lui f în punctul de abcisă $x_0=1$ ;

**4**. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x^2+1}{x-1}$;

Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul lui f în punctul de abcisă $x_0=2$ ;

**5**. Fie funcţia $f:(0;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x(1+\ln x)$;

Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul lui f în punctul de abcisă $x_0=1$ ;

**6**. Se consideră funcţia $f:(-1;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x}{x+1}-\ln(x+1)$;

Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul lui f în punctul de abcisă $x_0=1$ ;

**7**. Se consideră funcţia $f:[-1;1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\sqrt{1-x^2}$ ;

Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul lui f în punctul de abcisă $x_0=\dfrac{1}{2}$ ;

**8.** Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+(m+2)x^2+1$. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât tangenta la graficul funcției f(x) în punctul de abcisă $x_0=1$ să fie paralelă cu prima bisectoare.

**9**. Să se scrie ecuația tangentei comune a parabolelor $y=x^2+3x-6$ și $y=-x^2+11x$.

**10.** Să se calculeze limitele de funcții:

**a)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+4x-3}{x^2-3x+2}$; **b)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-3x+2}{x^2+5x}$; **c)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+x}{x^3-8}$; **d)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{e^x+2x+1}$;

**e)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x+2)}{x+2}$; **f)** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 6x}{2x}$; **g)** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 10x}{\sin 5x}$; **h)** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg3x}{\sin 4x}$;

**i)** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos 2x-\cos x}{\sin x}$; **j)** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x+3\sin 4x}{x}$; **k)** $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{4^x-4}{x-1}$; **l)** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{6^x-3^x}{4^x-2^x}$;

**11.** Să se calculeze limitele de funcţii:

**a)** $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^6-1}{x^9-1}$; **b)** $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^5-32}{x^4-16}$; **c)** $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-7x+6}$; **d)** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-1}{tg\,x}$;

**e)** $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{\ln x}$; **f)** $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x}{1-x^3}$; **g)** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-1-2x}{x^2}$; **h)** $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$;

**i)** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$; **j)** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 3x}{x^3-x^2}$; **k)** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-1}{\ln(1+2x)}$; **l)** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2sin\frac{x}{2}-1}{1-2cosx}$;

**m)** $\lim\limits_{x\to-7}\dfrac{\sqrt{4+4x+x^2}-5}{x^2-49}$; **n)** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3^{sinx}-e^x}{x^2+x}$;

**12.** Să se calculeze limitele de funcţii: a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}$; b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{2x}}{x^3}$; c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-x+\ln x}{5\ln x+x-4x^2}$;

d) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x\rangle0}}\dfrac{\ln(sin2x)}{\ln(sin4x)}$; e) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{2x^3}$; f) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x-\cos x}$; g) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ln^2x}{3x^2}$; h) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{e^{x^2}}$;

**13.** Să se calculeze limitele de funcții:

a) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-8}{x-2}$; b) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4}$; c) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^{2016}-2x+1}{x^{2015}-1}$; d) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\ln(x-1)-x+2}{2^x-4}$;

e) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x+5}+2x+1}{2+\sqrt{x}}$; f) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln^2 x}{x^2}$; g) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln 8x}{\ln 4x}$; h) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(1+2^x)}{\ln(1+3^x)}$;

i) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(\ln(4x+2))}{\ln(\ln(2x+3))}$; j) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1-5^x)}{\ln(1-3^x)}$;

## 7.3 Aplicaţii practice ale derivatelor.

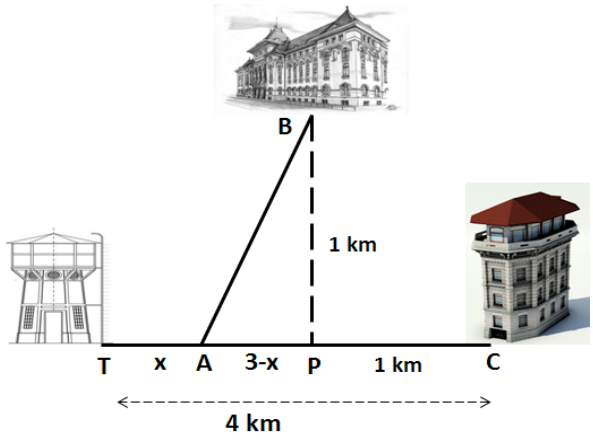
Prezentarea unor aplicații practice ale conceptului de derivată presupune rezolvarea unor probleme de maxim sau de minim pe care le întâlnim în multe situaţii din fizică, mecanică, astronomie, etc. și care implică studiul monotoniei și a punctelor de extrem al unor funcții.

Punerea în evidenţă a rolului pe care îl are studiul derivatelor în rezolvarea unor probleme practice, ajută la o înţelegere mai bună a acestor concepte, stimulând atenţia şi creativitatea elevilor.

**1. De la un turn de apă T se doreşte construirea unei conducte de apă în linie dreaptă, către o clădire C situată la 4 km de turn. O altă clădire B , aflată la un kilometru distanţă de conducta principală se doreşte a fi alimentată din aceasta printr-o conductă secundară, AB. Se mai ştie că distanţa PC = 1 km, unde P este piciorul perpendicularei din B pe TC. Ştiind că costurile pentru un metru de conductă sunt următoarele, 4 milioane pentru conducta TA, 3 milioane pentru conducta AC şi 2 milioane pentru conducta AB să se determine la ce distanţă de turn, TA, trebuie să se construiască conducta secundară AB, astfel încât costurile de producţie să fie minime.**

Rezolvare:

Notăm distanţa minimă care se caută de la turnul T la ramificaţia A, cu x. Atunci, lungimea conductei secundare este $AB=\sqrt{1+(3-x)^2}$.




Costul total C este format din costul pe distanţele TA + AB + AC şi anume $C=4x+3(4-x)+2\cdot\sqrt{1+(3-x)^2}$. Aşadar, pentru a determina costul minim, asociem costului funcţia derivabilă în x,

$C=f(x)=4x+12-3x+2\sqrt{1+9-6x+x^2}$.

Rezultă, $f(x)=x+12+2\sqrt{x^2-6x+10}$. Acestei funcţii trebuie să-i determinăm valoarea lui x pentru care f este minimă.

Din $f'(x)=0\Rightarrow 1+2\cdot\dfrac{2x-6}{2\sqrt{x^2-6x+10}}=0\Rightarrow \sqrt{x^2-6x+10}=6-2x\,|()^2\Rightarrow$

$3x^2-18x+26=0$. Soluţia care convine este $x\approx 2,42km$ reprezentând distanţa minimă de la turn până în punctul A de unde se va construi conducta secundară pentru care costurile vor fi minime.

**2. Funcţia $f:(0;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2}{2}-10x+50$ reprezintă costul (în mii de euro) pentru producerea unui număr x (exprimat în sute) de televizoare. Care este numărul minim de produse pentru a minimaliza costurile de producţie ?**

Rezolvare:

A determina costul minim de producţie înseamnă a determina minimul funcţiei f(x).

| x | | 10 | |
|---|---|---|---|
| f '(x) | – – – – – – | 0 | + + + + + + |
| f (x) | ↘ | f(10) | ↗ |

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x-10=0 \Rightarrow x=10$ este un punct de minim conform tabelului de valori.

$f(10)=500-100+50=450$.

Altfel, x= 10 este un punct de minim deoarece

$f''(10)\rangle 0$. Aşadar, pentru 1000 de televizoare se obţine costul minim de 450 000 de euro.

**3. O particulă materială aflată în mișcare la un moment de timp t ( exprimat în secunde) parcurge un spațiu dat de legea** $s(t)=\ln(t+2)-\dfrac{t}{t+2}$ **.**

**a) Să se determine formula vitezei și să se arate că** $s(t)\rangle 0,\ \forall t\rangle 0$.

**b) Să se determine maximul vitezei și la ce moment de timp se obține acesta.**

Rezolvare:

a) Viteza se definește ca raportul dintre spațiul parcurs pe unitatea de timp,

$v(t)=\dfrac{ds(t)}{dt}=\left[\ln(t+2)-\dfrac{t}{t+2}\right]^I=\dfrac{1}{t+2}-\dfrac{-2}{(t+2)^2}=\dfrac{t}{(t+2)^2}$. Aşadar, se observă că pentru orice $t\rangle 0\Rightarrow s^I(t)\rangle 0$. Rezultă conform tabelului de valori, că $s(t)\langle 0,\ \forall t\in(-2;0)$ și $s(t)\rangle 0,\ \forall t\in(0;\infty)$. Aşadar, s(t) este crescătoare pe $(0;\infty)$, rezultând că $s(t)\rangle s(0)=\ln 2\rangle 0,\ \forall t\in(0;\infty)$.

| t | -2 0 ∞ |
|---|---|
| $s^I(t)$ | - - - - - - 0 + + + ∞ |
| s(t) | ↘ S(0) ↗ |

b) Maximul vitezei se poate găsi studiind monotonia derivatei vitezei:

$v^I(t)=\left[\dfrac{t}{(t+2)^2}\right]^I=\left[\dfrac{t}{t^2+4t+4}\right]^I=\dfrac{t^2+4t+4-2t^2-4t}{(t+2)^4}=\dfrac{-(t^2-4)}{(t+2)^4}$

| t | -2 0 2 ∞ |
|---|---|
| $v^I(t)$ | - - - 0 + + + + + + + + 0 - - - - - - |
| v(t) | v(-2) ↗ v(2) ↘ |

Aşadar, funcția $v(t)=\dfrac{t}{(t+2)^2}$ ca și funcție continuă în t are un maxim în punctul 2 egal cu $v(2)=\dfrac{2}{4^2}=\dfrac{1}{8}m/s$.

**4. Un satelit lansat în jurul Pământului parcurge o traiectorie dată de legea** $D(t):(0;\infty)\to(0;\infty),\ D(t)=k\cdot t^3\cdot e^{-mt+1}$**, unde k și m sunt constante strict pozitive,** $m\approx 0,03$**. Să se determine după cât timp satelitul ajunge la o distanță maximă de Pământ . Timpul este exprimat în minute.**

Rezolvare: Cum $D(t)=k\cdot t^3\cdot e^{-mt+1}$ este o funcție derivabilă în t pe $(0;\infty)$, rezultă

$D^I(t)=k\cdot 3t^2\cdot e^{-mt+1}+k\cdot t^3\cdot e^{-mt+1}\cdot(-m)=k\cdot t^2\cdot e^{-mt+1}(3-mt)$ .

Din $D^I(t)=0\Rightarrow 3-mt=0\Rightarrow t=\dfrac{3}{m}=\dfrac{3}{0,03}=100$ minute.

# Cap. 8 STUDIUL FUNCŢIILOR CU AJUTORUL DERIVATELOR

## 8.1 Proprietăţi generale ale funcţiilor derivabile

**1.Punctele de extrem ale unei funcţii.**

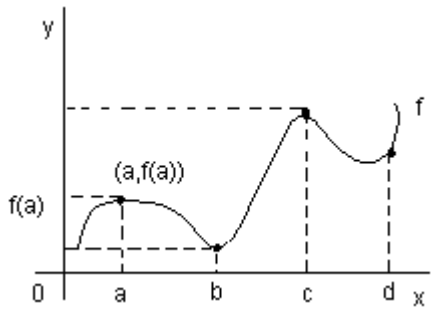
Fie I un interval şi f:I$\to$R.

**Definiţie**: Se numeşte **punct de maxim** (respectiv de minim)(local) al funcţiei $f$, un punct $a \in$I pentru care există o vecinătate V a lui $a$ astfel încât $f(x) \le f(a) (respectiv. f(x)) \ge f(a) \forall\ x \in$V.

- Un punct de maxim sau de minim se numeşte **punct de extrem**.
- $a$ se numeşte punct de maxim(respectiv de minim) global dacă $f(x) \le f(a) (resp. f(x) \ge f(a)).\ \forall\ x \in$I.

Observaţia 1.O funcţie poate avea într-un interval mai multe puncte de extrem.(vezi desenul).

Observaţia 2.O funcţie poate avea într-un punct $a$ un maxim (local), fără a avea în $a$ cea mai mare valoare din interval.(vezi desenul $f(a) < f(c)$).




$(a, f(a)), (c, f(c))$

-puncte de maxim

$(b, f(b)), (d, f(d))$

-puncte de minim

**TEOREMA LUI FERMAT**

**Dacă $f$ este o funcţie derivabilă pe un interval I si $x_0 \in \overset{0}{I}$ un punct de extrem,atunci $f^I(x_0) = 0$.**

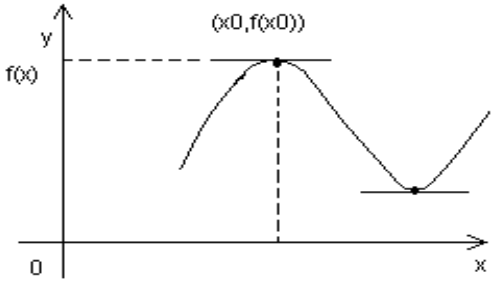
Interpretare geometrică:

- Deoarece $f'(x_0) = 0 \Rightarrow$ tangenta la grafic în punctul $(x_0, f(x_0))$ este paralelă cu OX.

Obs.1. Teorema este adevărată şi dacă funcţia este derivabilă numai în punctele de extrem.

Obs.2. Condiţia ca punctul de extrem $x_0$ să fie interior intervalului este esenţială. (dacă ar fi o extremitate a intervalului I atunci s-ar putea ca $f'(x_0) \ne 0$). Ex. $f(x) = x$.

Obs.3. Reciproca T. lui FERMAT nu este adevărată.(se pot găsi funcţii astfel încât $f'(x_0) = 0$ dar $x_0$ să nu fie punct de extrem).



• Soluţiile ecuaţiei $f'(x)=0$ se numesc puncte critice . Punctele de extrem se găsesc printre acestea.
• Teorema lui Fermat dă condiţii suficiente (dar nu si necesare) pentru ca derivata într-un punct să fie nulă.

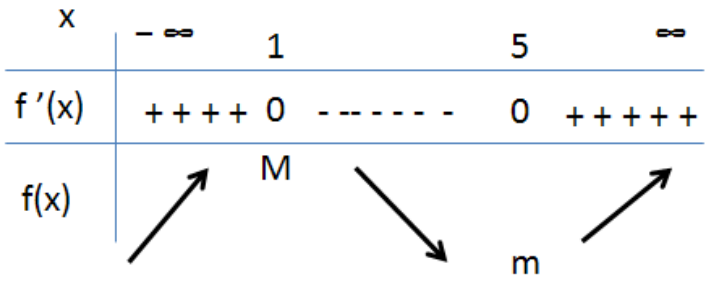
**Exemple:**

**1.** Să se determine punctele de extrem ale funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-9x^2+15x+2$.

Rezolvare: Se determină mai întâi punctele critice ale funcţiei şi anume soluţiile ecuaţiei $f'(x)=0$:

$f'(x)=0\Leftrightarrow 3x^3-18x+15=0\Leftrightarrow 3(x^2-6x+5)=0\Rightarrow x_1=1$şi $x_2=5$.

Se stabileşte semnul funcţiei $f'(x)$ fie cu ajutorul semnului funcţiei de gradul al doilea, fie cu ajutorul consecinţei proprietăţii lui Darboux: pe intervalele pe care funcţia nu se anulează , păstrează semn constant.




Din tabelul semnelor se poate observa că există o variaţie de semn în jurul celor două puncte 1 şi 5 prin urmare acestea sunt puncte de extrem local. 1 este punct de maxim iar 5 este punct de minim;

**2. Fie** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x+3)e^{-3x}$.

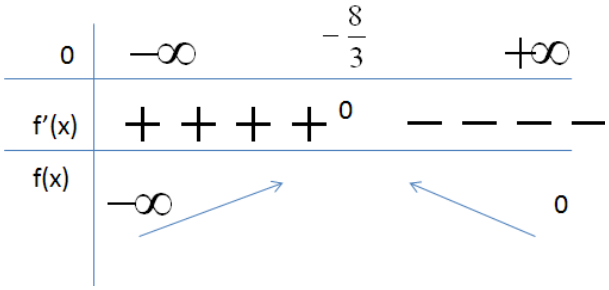
**a) Să se determine** $f'(0)$**;**

**b) Să se determine punctele de extrem ale funcţiei f.**

Rezolvare:

a) $f'(x)=e^{-3x}+(x+3)e^{-3x}.(-3)\Rightarrow f'(0)=-8$.

b) Din f ’(x) = 0 rezultă că $x=-\frac{8}{3}$ este punct de maxim.



## 8.2 Rolul derivatelor de ordinul întâi şi doi în studiul funcţiilor

### Interpretarea geometrică a derivatelor laterale

Fie $f: I \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ interval şi $x_0 \in D$ punct de acumulare.

Dacă f este derivabilă în $x_0$ atunci graficul funcţiei admite tangentă în $x_0$.

Dacă f este derivabilă doar la stânga sau la dreapta în $x_0$, atunci graficul funcţiei admite semitangente la stânga sau la dreapta.

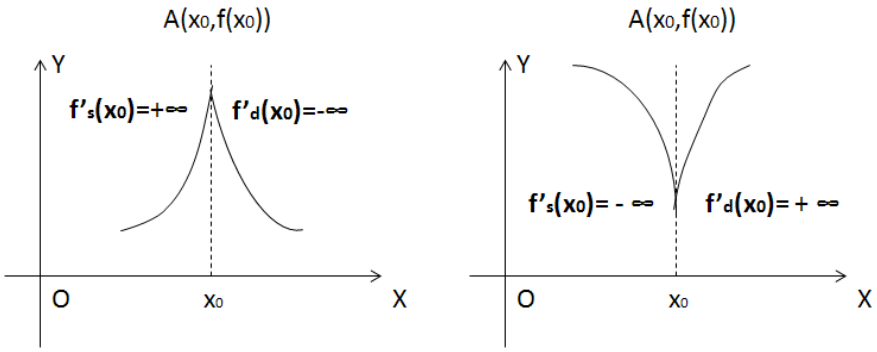
Dacă derivatele laterale sunt infinite în $x_0$, atunci semitangentele sunt paralele cu axa OY.

### Puncte unghiulare

**Definiţie**: Un punct $A(x_0, f(x_0))$ se numeşte **punct unghiular** al graficului lui f dacă funcţia este continuă în $x_0$, are derivatele laterale diferite şi cel puţin una finită.

### Puncte de întoarcere

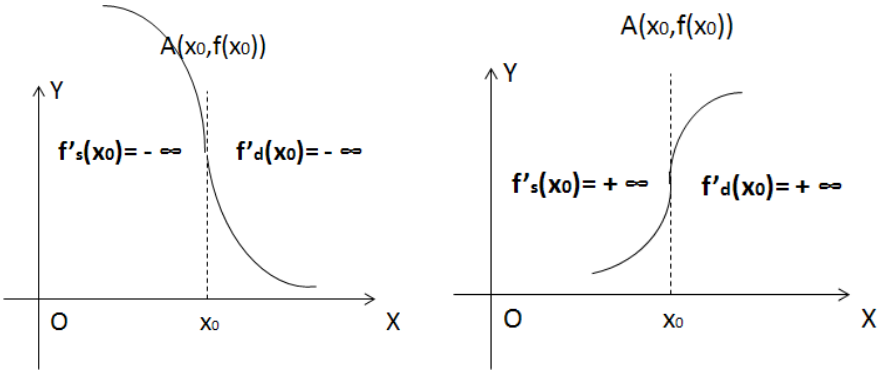
**Definiţie**: Un punct $A(x_0, f(x_0))$ se numeşte **punct de întoarcere** al graficului lui f dacă funcţia este continuă în $x_0$, are derivatele laterale diferite şi infinite.




Puncte de întoarcere

### Puncte de inflexiune

**Definiţie**: Un punct $A(x_0, f(x_0))$ se numeşte **punct de inflexiune** al graficului lui f dacă funcţia este continuă în $x_0$, are derivatele laterale finite sau infinite şi egale.




Puncte de inflexiune

**Exemple: Se consideră funcţia** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{2x+8}$. **Să se arate că** $x_0=-4$ **este punct de inflexiune al funcţiei f.**

Rezolvare:

$f''(x)=-\dfrac{4}{3\sqrt[3]{(2x+8)^5}}$. Din 2x+8 = 0, rezultă x = - 4. Aşadar, $f''(x)\langle 0,\forall x\rangle -4$ şi $f''(x)\rangle 0,\forall x\langle -4$. Prin urmare, $x_0$ = - 4 este punct de inflexiune.

Se putea arăta uşor şi din faptul că $f_s'(-4)=f_d'(-4)=+\infty$.

**2. Se consideră funcţia** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=5^x\cdot x$. **Să se determine punctele de inflexiune ale funcţiei f.**

Rezolvare:

$f'(x)=(5^x\cdot x)'=5^x\ln 5\cdot x+5^x=5^x(x\ln 5+1);$

$f''(x)=[f'(x)]'=[5^x(x\ln 5+1)]'=5^x\ln 5(x\ln 5+1)+5^x\ln 5=5^x\ln 5(x\ln 5+2).$

## Monotonia funcţiilor

**Definiţie**: Fie I un interval şi $f:I\to\mathbb{R}$ o funcţie derivabilă pe I.

Dacă $f'(x)\rangle 0,\ \forall x\in I$, atunci f este **strict crescătoare** pe I;

Dacă $f'(x)\langle 0,\ \forall x\in I$, atunci f este **strict descrescătoare** pe I;

**Exemplu:** Să se determine intervalele de monotonie ale funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-9x^2+15x+2$.

Rezolvare: Conform tabelului de mai sus se observă că $f'(x)\rangle 0,\ \forall x\in(-\infty;1)\cup(5;\infty)\Rightarrow$ f este strict crescătoare pe $(-\infty;1)\cup(5;\infty)$.

$f'(x)\langle 0,\ \forall x\in(1;5)\Rightarrow$ f este strict descrescătoare pe (1;5).

## Convexitatea funcţiilor

**Definiţie**: Fie I un interval şi $f:I\to\mathbb{R}$ o funcţie derivabilă pe I pentru care există $f''(x)$.

Dacă $f''(x)\geq 0,\ \forall x\in I$, atunci f este **convexă** pe I;

Dacă $f''(x)\leq 0,\ \forall x\in I$, atunci f este **concavă** pe I;

**Exemplu**: Să se determine intervalele de convexitate şi concavitate ale funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3-9x^2+15x+2$.
Rezolvare: Conform calculelor de mai sus se observă că
$f''(x)=3(2x-6)\Rightarrow f''(x)=0\Leftrightarrow x=3$
Cum derivata a doua este funcţie de gradul întâi atunci $f''(x)\geq 0,\forall x\in[3;\infty)\Rightarrow$ f este convexă pe $[3;\infty)$ şi concavă în rest;

## Exercitii rezolvate

**1. Să se determine intervalele de monotonie şi eventualele puncte de extrem ale următoarelor funcţii:**

**a)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3-6x^2+9x$;

**b)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x^2+2x+3}{x^2+x+1}$;

**c)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{x^2+9}$;

**d)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=(x^2+4x)\cdot e^x$;

**e)** $f:(0;\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=(x^2-2x)\cdot\ln x+1$;

**f)** $f:(0;\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=2\ln x-4arctgx$;

Rezolvare:
**a**) Funcţia este evident derivabilă şi $f'(x)=3x^2-12x+9$.
Din $f'(x)=0\Leftrightarrow 3(x^2-4x+3)=0\Rightarrow x_1=1,\ x_2=3$;
$f'(x)\rangle 0,\ \forall x\in(-\infty;1]\cup[3;\infty)$ şi $f'(x)\langle 0,\ \forall x\in(1;3)$. Rezultă că
f este strict crescătoare pe $(-\infty;1]\cup[3;\infty)$ şi strict descrescătoare $(1;3)$;
1 este punct de maxim iar 3 este punct de minim;

**b)** Funcţia este evident derivabilă ca funcţie raţională şi $f'(x)=\dfrac{-(x^2+4x+1)}{(x^2+x+1)^2}$; Semnul funcţiei f ‘(x) este dat de semnul numărătorului care este o funcţie de gradul al doilea.
Rezultă $f'(x)\rangle 0,\ \forall x\in[-2-\sqrt{3};-2+\sqrt{3}]$ şi $f'(x)\langle 0,\ \forall x\in(-\infty;-2-\sqrt{3})\cup(-2+\sqrt{3};+\infty)$.
Rezultă că f este strict crescătoare pe $[-2-\sqrt{3};-2+\sqrt{3}]$ şi strict descrescătoare pe $(-\infty;-2-\sqrt{3})\cup(-2+\sqrt{3};+\infty)$; $-2-\sqrt{3}$ este punct de minim iar $-2+\sqrt{3}$ este punct de maxim.

**c)** Funcţia este derivabilă şi $f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}$;
Rezultă $f'(x)\rangle 0,\ \forall x\in[0;\infty)$ şi $f'(x)\langle 0,\ \forall x\in(-\infty;0)$. Rezultă că f este strict crescătoare pe $[0;\infty)$ şi strict descrescătoare pe $(-\infty;0)$; 0 este punct de minim;
**d**) Funcţia este derivabilă şi $f'(x)=(x^2+6x+4)\cdot e^x$. Din
$f'(x)=0\Leftrightarrow(x^2+6x+4)=0\Rightarrow x_1=-3-\sqrt{2},\ x_2=-3+\sqrt{2}$;
$f'(x)\rangle 0,\ \forall x\in(-\infty;-3-\sqrt{2}]\cup[-3+\sqrt{2};\infty)$ şi $f'(x)\langle 0,\ \forall x\in(-3-\sqrt{2};-3+\sqrt{2})$. Rezultă că f este strict crescătoare pe $(-\infty;-3-\sqrt{2}]\cup[-3+\sqrt{2};\infty)$ şi strict descrescătoare pe $(-3-\sqrt{2};-3+\sqrt{2})$.
$-3-\sqrt{2}$ este punct de maxim iar $-3+\sqrt{2}$ este punct de minim;
**e**) Funcţia este derivabilă şi $f'(x)=(x-1)\cdot(2\ln x+1)$. Din $f'(x)=0\Rightarrow\ x-1=0$ sau $2\ln x+1=0\Rightarrow x=1$ sau $x=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$. Cu ajutorul tabelului de variaţie , studiind semnul

funcţiei $f'(x)$ rezultă $f'(x)\rangle 0,\ \forall x\in(0;\frac{1}{\sqrt{e}}]\cup[1;\infty)$ şi $f'(x)\langle 0,\ \forall x\in(\frac{1}{\sqrt{e}};1)$. Aşadar, f este strict crescătoare pe $(0;\frac{1}{\sqrt{e}}]\cup[1;\infty)$ şi strict descrescătoare pe $(\frac{1}{\sqrt{e}};1)$.

$\frac{1}{\sqrt{e}}$ este punct de maxim iar 1 este punct de minim;

**f**) Funcţia este derivabilă şi $f'(x)=\frac{2(x-1)^2}{x(x^2+1)}$; Pentru $x\in(0;\infty)\Rightarrow$ f este strict crescătoare ;

**2. Să se determine intervalele de monotonie, punctele de extrem, intervalele de convexitate şi concavitate şi eventualele puncte de inflexiune ale funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$.**

**Rezolvare:**

Evident f este derivabilă şi $f'(x)=\frac{-x^2+1}{\left(x^2+1\right)^2}$. Rezultă $f'(x)=0\Rightarrow x_1=-1,\ x_2=1$ şi $f'(x)\geq 0\ \forall x\in[-1;1]\Rightarrow$f este strict crescătoare pe $[-1;1]$**şi strict descrescătoare pe** $(-\infty;-1)\cup(1;\infty)$. Din tabelul de semne se poate vedea că $-1$ este punct de minim iar 1 este punct de maxim.

Din $f''(x)=\frac{2x^3-6x}{\left(x^2+1\right)^3}$ cu ajutorul tabelului de semne se obţine că f este convexă pe $(-\sqrt{3};0)\cup(\sqrt{3};\infty)$ deoarece aici $f''(x)\rangle 0$ şi f este concavă pe $(-\infty;-\sqrt{3}]\cup[0;\sqrt{3}]$ deoarece aici $f''(x)\leq 0$. Punctele $-\sqrt{3},0\sqrt{3}$ sunt puncte de inflexiune.

**3. Să se demonstreze inegalităţile:**

**a)** $x^3-3x^2-24x-28\leq 0,\ \forall x\in[-2;4]$**;** **b)** $\ln(x+1)\geq\frac{2x}{x+2},\ \forall x\geq 0;$

**c)** $1+x\langle e^x\langle 1+2x,\ \forall x\in(0;\frac{1}{2});$ **d)** $x-\frac{x^3}{6}\langle\sin x,\ \forall x\geq 0$;

Rezolvare:

**a**) Fie $f:[-2;4]\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3-3x^2-24x-28$ funcţie derivabilă cu $f'(x)=3(x^2-2x-8)$; $f'(x)=0\Leftrightarrow x_1=-2,\ x_2=4$. Din tabelul semnelor se obţine că f(x) este descrescătoare pe [-2;4] iar maximul lui f pe acest interval este 0. Rezultă $f(x)\leq f(-2)=0,\forall x\in[-2;4]$.

**b**) Fie $f:(-1;\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln(x+1)-\frac{2x}{x+2}$ derivabilă. Trebuie să arătăm că $f(x)\geq 0,\forall x\geq 0$

$f'(x)=\frac{x^2}{(x+1)(x+2)^2}\geq 0\Rightarrow$ f este crescătoare, rezultă $f(x)\geq f(0)=0\Rightarrow f(x)\geq 0$;

**c**) Fie $f,g:\left[0;\frac{1}{2}\right]\to\mathbb{R},\ f(x)=e^x-x-1,\ g(x)=2x+1-e^x$ derivabile. Trebuie să arătăm că

$f(x)\rangle 0, g(x)\rangle 0,\ \forall x\rangle 0$. Cum $f'(x)=e^x-1\geq 0,\ g'(x)=2-e^x\rangle 0$ rezultă că f şi g sunt crescătoare. Atunci, $\forall x\in(0;\frac{1}{2}) \Rightarrow f(x)\rangle f(0)=0$ şi $g(x)\rangle g(0)=0$;

**d)** Fie $f:(0;\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=x-\frac{x^3}{6}-\sin x$ derivabilă. Trebuie să arătăm că $f(x)\leq 0$.

Cum $f''(x)\leq 0\Rightarrow f'(x)\leq f'(0)=0\Rightarrow$ f ‘ este descrescătoare. Rezultă

$\forall x\geq 0\Rightarrow f'(x)\leq f'(0)=0\Rightarrow$ f este descrescătoare, prin urmare, $\forall x\geq 0\Rightarrow f(x)\leq f(0)=0$.

**4. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x^3-2x^2-5x+6$. Să se studieze monotonia lui f.**

Rezolvare:

$f'(x)=0\Leftrightarrow 12x^2-4x-5=0\Rightarrow x_1=-\frac{1}{2}, x_2=\frac{5}{6}.$

$f'(x)\rangle 0,\ \forall x\in(-\infty;-\frac{1}{2})\cup(\frac{5}{6};+\infty)$ şi $f'(x)\leq 0,\ \forall x\in\left[-\frac{1}{2};\frac{5}{6}\right]$. Rezultă că f este strict crescătoare pe $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{5}{6};+\infty\right)$ şi strict descrescătoare pe $\left[-\frac{1}{2};\frac{5}{6}\right]$.

**5. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=4^x+5^x$. Să se studieze monotonia lui f;**

Rezolvare:

$f'(x)=4^x\ln 4+5^x\ln 5\Rightarrow f'(0)=\ln 4+\ln 5=\ln 20$;

$f'(x)=4^x\ln 4+5^x\ln 5\rangle 0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow$f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$;

**6. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{2x+6}{x^2+4}$.**

**Să se arate că funcţia f este strict descrescătoare pe** $[1;\infty)$.

Rezolvare:

$f'(x)=\frac{-2x^2-12x+8}{(x^2+4)^2}\Rightarrow f'(0)=\frac{1}{2}$;

Deoarece $-2x^2-12x+8\langle 0,\forall x\geq 1\Rightarrow f'(x)\langle 0,\forall x\geq 1\Rightarrow$f este strict descrescătoare pe $[1;\infty)$.

**7. Se consideră funcţia $f:(0;\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{\ln x}{x}$. Să se studieze monotonia lui f;**

Rezolvare:

$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}\Rightarrow f'(1)=1;$

Observăm că $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}\Rightarrow 1-\ln x\rangle 0\Leftrightarrow x\langle e\Rightarrow$

Pentru $x\langle e$, f este strict crescătoare, şi pentru $x\rangle e$ f este strict descrescătoare.

**8. Fie $f:\mathbb{R}\setminus\{1;5\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{x-3}{x^2-6x+5}$. Să se arate că f este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}\setminus\{1;5\}$;**

Rezolvare :

a) $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-5}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{x-5+x-1}{(x-1)(x-5)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2(x-3)}{x^2-6x+5}=\frac{x-3}{x^2-6x+5}=f(x);$

b) Cum $f'(x)=-\frac{1}{2(x-1)^2}-\frac{1}{2(x-5)^2}\langle 0$ pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{1;5\}$, rezultă că f este strict descrescătoare pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{1;5\}$.

**9. Fie $f:[2;+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\sqrt{x-2}$. Să se arate că f este strict crescătoare pe $[2;+\infty)$;**

Rezolvare :

$f'(x)=\sqrt{x-2}+\frac{x}{2\sqrt{x-2}}=\frac{3x-4}{2\sqrt{x-2}}\rangle 0$, pentru orice $x\in[2;+\infty)$. Rezultă că f este strict crescătoare pe $[2;+\infty)$;

**10. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^{2011}-2010(x+1)+2012.$ Să se studieze convexitatea funcţiei.**

Rezolvare:

$f'(x)=2011x^{2010}-2010\Rightarrow;$

$f''(x)=2011\cdot 2010x^{2009}\rangle 0,\ \forall x\rangle 0\Rightarrow$ f este convexă pe $(0;+\infty)$ şi concavă pe $(-\infty;0)$.

**11. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}-\{-4\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{x^2+3x}{x+4}$. Să se demonstreze că f este convexă pe $(-4;+\infty)$.**

Rezolvare:

$$f'(x)=\frac{(2x+3)(x+4)-(x^2+3x)\cdot 1}{(x+4)^2}=\frac{x^2+8x+12}{(x+4)^2}\Rightarrow$$

$$f''(x)=\frac{(2x+4)(x+4)^2-(x^2+8x+12)\cdot(2x+8)}{(x+4)^4}=\frac{8x+32}{(x+4)^4}=\frac{8}{(x+4)^3}.$$

Rezultă că $f''(x)\rangle 0,\ \forall x\rangle -4\Rightarrow$ f este convexă pe $(-4;+\infty)$.

**12. Fie $f:(-\infty,-3)\cup(1;+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln(x^2+2x-3)$. Să se arate că f este o funcţie concavă pentru orice $x\in(-\infty,-3)\cup(1;+\infty)$;**

Rezolvare :

Cum $f'(x)=\frac{2x+2}{x^2+2x-3}\Rightarrow f'(2)=\frac{6}{5};$

f(x) se mai poate scrie de forma $f(x)=\ln(x^2+2x-3)=\ln(x+3)(x-1)=\ln(x+3)+\ln(x-1)$, atunci $f'(x)=\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x-1}$ iar $f''(x)=-\frac{1}{(x+3)^2}-\frac{1}{(x-1)^2}\langle 0$ pentru orice $x\in(-\infty,-3)\cup(1;+\infty)$.

Aşadar, f este concavă.

## Exercitii propuse

**1.** Să se determine intervalele de monotonie şi eventualele puncte de extrem ale următoarelor funcţii:

**a)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3-3x^2-9x-5;$ **b)** $f:\mathbb{R}\setminus\{-2;2\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{x^2-4};$

**c)** $f:\mathbb{R}\setminus\{-2\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{x-3}{x+2};$ **d)** $f:\mathbb{R}\setminus\{3\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{x^2-5}{x-3};$

**e)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{x^2+3x}{x^2+x+2};$ **f)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln(x^2-4x+5);$

**g)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln(1+x^2);$ **h)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2^x+2^{-x};$

**i)** $f:(0;1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{e^x-1}{x};$

**2.** Fie $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{x^2-m}{x}$. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât x = 2 să fie punct de extrem local al funcţiei f.

**3.** Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{ax+a-2}{x^2+1}$. Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât x = 1 să fie punct de extrem local al funcţiei f.

**4**. Să se determine intervalele de convexitate şi concavitate şi eventualele puncte de inflexiune ale următoarelor funcţii:

**a)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3-3x^2-9x+4;$ **b)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln(x^2+x+1);$

**c)** $f:(-3;\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln(x+3);$ **d)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{x^2+x+2};$

**e)** $f:(-\infty;-2)\cup(0;\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln\frac{x+2}{x};$ **f)** $f:(0;\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=(x+2)\cdot\ln x;$

**g)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x\cdot e^x;$ **h)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=e^{-x^2};$

**5**. Fie funcţia $f:(-\infty;-2)\cup(1;\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln(x^2+x-2);$

**a**) Să se calculeze $f'(2);$

**b)** Să se studieze monotonia lui f;

**c**) Să se arate că f este concavă pentru orice $x\in(-\infty;-2)\cup(1;2);$

**6**. Se consideră funcţia $f:[-1;1]\to\mathbb{R},\ f(x)=x\sqrt{1-x^2};$

**a**) Să se calculeze $f'(x);$

**b)** Să se studieze monotonia lui f;

**c**) Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul lui f în punctul de abcisă $x_0=\frac{1}{2}$;

**7**. Se consideră funcţia $f:[1;\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=x\sqrt{x-1};$

**a**) Să se calculeze $f'(x);$

**b)** Să se studieze monotonia lui f;

**c**) Să se determine intervalele de convexitate şi concavitate ale funcţiei f;

**8**.Să se demonstreze inegalităţile:

**a)** $x^3-3x^2-9x-5\le 0,\ \forall x\in[-1;3];$ **b)** $arctgx\langle x,\ \forall x\rangle 0;$

**c)** $e^x\rangle 1+x+\frac{x^2}{2},\ \forall x\rangle 0;$ **d)** $x-\frac{x^2}{2}\langle\ln(1+x),\ \forall x\rangle 0;$

**e)** $e^{x+1} \geq ex,\ \forall x \in \mathbb{R}$; **f)** $x^2 - 2\ln x \geq 1,\ \forall x \rangle 0$;

**9**. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x^2+8x-5}{x^2+1}$;

**a**) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$;

**b)** Să se studieze monotonia lui f;

**c**) Să se arate că $-7 \leq f(x) \leq 3,\ \forall x \in \left[-\dfrac{1}{2};2\right]$;

**10**.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{2x-2}{x^2-x+1}$;

**a**) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$;

**b)** Să se studieze monotonia lui f;

**c**) Să se arate că $-2 \leq f(x) \leq \dfrac{2}{3},\ \forall x \in [0;2]$;

**11**.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x+3}{x^2-1}$;

**a**) Să se calculeze $f'(x),\ f'(0)$

**b)** Să se studieze monotonia lui f;

**c**) Să se arate că $0 \leq f(x) \leq \dfrac{1}{3},\ \forall x \in [-3;-2]$;

**12**.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\setminus\{3\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-3}$;

**a**) Să se calculeze $f'(x),\ f'(1)$

**b)** Să se studieze monotonia lui f;

**c**) Să se arate că $-5 \leq f(x) \leq -1,\ \forall x \in [1;2]$;

**13**.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x^2+1}{x+1}$;

**a**) Să se calculeze $f'(x),\ f'(2)$

**b)** Să se determine punctul de maxim al graficului lui f;

**c**) Dacă y = ax + b este asimptota oblică la graficul lui f să se determine a + b;

**14**. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3-3x^2-24x+1$;

**a**) Să se calculeze $f'(x),\ f'(5)$

**b)** Să se studieze monotonia lui f;

**c**) Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul lui f în punctul de abcisă $x_0=5$ ;

**15**. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\setminus\{-2;0\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1}{x^2+2x}$;

**a**) Să se calculeze $f'(x),\ f'(1)$

**b)** Să se studieze monotonia lui f;

**c**) Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul lui f în punctul de abcisă $x_0=1$ ;

**16**. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\right\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x^2}{2x-1}$;

**a**) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$;

**b)** Să se studieze monotonia lui f;
**c**) Să se determine asimptotele graficului funcţiei f;

**17**. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\setminus\{1;2\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)(x-2)}$;

**a**) Să se calculeze $f'(x)$, $f'(0)$
**b)** Să se studieze monotonia lui f;
**c**) Să se determine asimptotele graficului funcţiei f;

**18**. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$;

**a**) Să se calculeze $f'(x)$, $f'(2)$
**b**) Să se determine asimptotele graficului funcţiei f;
**c**) Să se studieze convexitatea funcţiei f;

**19**. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x^2+1}{x-1}$;

**a**) Să se calculeze $f'(x)$, $f'(2)$**;**
**b)** Să se studieze monotonia lui f;
**c**) Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul lui f în punctul de abcisă $x_0=2$ ;

**21**. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\setminus\{1;3\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-4x+3}$;

**a**) Să se calculeze $f'(x)$, $f'(2)$**;**
**b)** Să se studieze monotonia lui f;
**c**) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)\cdot(2x-3)$ ;

**22**. Se consideră funcţia $f:(0;1)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(1-x)-\ln x$;
**a)** Să se studieze monotonia lui f pe (0;1);
**b**) Să se determine intervalele de convexitate ale funcţiei f;
**c**) Să se calculeze $f(\frac{1}{10})+f(\frac{1}{9})+f(\frac{1}{8})+....+f(\frac{1}{3})+f(\frac{1}{2})+f(\frac{2}{3})+f(\frac{3}{4})+....+f(\frac{9}{10})$;

**23**. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{2x}+e^{-2x}$;

**a**) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$;**;**
**b)** Să se studieze monotonia lui f;
**c**) Să se determine punctele de inflexiune ale funcţiei f;

**24**. Fie funcţia $f:D\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(x^2-2x-8)$;
**a**) Să se determine domeniul maxim de definiţie D al funcţie f;
**b)** Să se studieze monotonia lui f;
**c**) Să se determine intervalele de convexitate ale funcţiei f;

**25**. Fie funcţia $f:(0;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x(1+\ln x)$;

**a**) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$;
**b)** Să se determine intervalele de convexitate şi concavitate ale funcţiei f;
**c**) Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul lui f în punctul de abcisă $x_0=1$ ;

**26**. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x^2+3x+3)\cdot e^x$;

**a**) Să se calculeze $f'(x)$, $f'(0)$**;**
**b)** Să se studieze monotonia lui f şi să se determine punctele de extrem local ale lui f;
**c**) Să se determine intervalele de convexitate şi concavitate ale funcţiei f;

**27**. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+arctgx$;

**a**) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$;**;**

**b)** Să se arate că f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$;

**c**) Să se arate că f este concavă pe $(0;\infty)$**;**

**28.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{x^2-4x+2}$;

**a**) Să se calculeze $f'(x)$, $f'(0)$**;**

**b)** Să se studieze monotonia lui f şi să se determine punctele de extrem local ale lui f;

**c**) Să se arate că $\dfrac{1}{e}\le f(x)\le e^2$, $\forall x\in[0;1]$;

**29**. Se consideră funcţia $f:(-1;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x}{x+1}-\ln(x+1)$;

**a**) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$**;**

**b)** Să se determine valoarea maximă a funcţiei f;

**c**) Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul lui f în punctul de abcisă $x_0=1$;

**30**. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^{2011}+x^{2010}+.....+x^2+x+1$;

**a**) Să se calculeze $f(2)$**;**

**b)** Să se calculeze $f'(1)$;

**c**) Să se arate că $f(x)\rangle 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$;

## 8.3 Etapele reprezentării graficului unei funcţii

**1. Domeniul de definiţie:**

Mai întâi se determină mulţimea tuturor valorilor pe care este definită funcţia(domeniul de definiţie, $D_f$);

Se determină dacă funcţia este pară(**f(-x)=f(x),** $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{D_f}$) sau impară (**f(-x)=-f(x),** $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{D_f}$); Dacă funcţia este pară atunci graficul ei se face prin simetrie faţă de axa OY iar dacă este impară, graficul se face prin simetrie faţă de originea sistemului .

Se determină dacă funcţia este periodică.

**2. Intersecţia graficului cu axele de coordonate :**

Intersectia cu axa Ox conţine puncte de forma A(x,0),unde x este o rădăcină a ecuaţiei f(x)=0 (daca există).

Intersecţia cu axa Oy este un punct de forma B(0,f(0)) (dacă punctul 0 aparţine domeniului de definitie)

**3. Studiul continuităţii funcţiei pe domeniul de definiţie :**

Dacă funcţia este definită pe $\mathbb{R}$ se studiază limita funcţiei la $\pm\infty$, iar dacă este definită pe un interval se studiază limita la capetele intervalului.

Tot aici se determină asimptotele funcţiei:

a. Asimptotele orizontale sunt drepte de forma **y=a**, unde

a= $\underbrace{\lim}_{x\to\pm\infty} f(x)$ dacă cel puţin una din aceste limite are sens şi există în $\mathbb{R}$ .

b) Asimptotele verticale sunt drepte de forma $\mathbf{x=x_0}$, dacă există cel puţin o limită laterală a funcţiei în $x_0$, infinită.

c) Asimptotele oblice sunt drepte de forma y=mx+n, unde $m = \underbrace{\lim}_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \in R \; si \;\; n = \underbrace{\lim}_{x\to\infty} (f(x) - mx) \in R$, analog şi pentru -∞.

**4.Studiul primei derivate :**

**a) Determinarea punctelor critice şia punctelor de extrem ale funcţiei**

Se rezolvă ecuaţia f ’(x)=0, iar soluţiile ecuaţiei se numesc puncte critice. Acestea vor fi puncte de extrem ale graficului dacă pe rândul cu f ’(x) există variaţie de semn în jurul lui 0.

b) Determinarea intervalelor de monotonie

Se stabilesc mai întâi intervalele pe care f ’ este constantă şi dacă **f ’** >0 atunci funcţia este crescătoare, iar dacă **f ’** <0, atunci funcţia este descrescătoare pe respectivele intervale).

**5.Studiul derivatei a doua :**

**a) Determinarea punctelor de inflexiune :**

Se rezolvă ecuaţia f ''(x)=0, iar soluţiile ecuaţiei vor fi puncte de inflexiune ale graficului dacă pe rândul cu **f ''(x)** există variaţie de semn în jurul lui 0.

**b) Stabilirea convexităţii şi concavităţii funcţiei :**

Dacă **f ''(x)** > 0 pe un interval, atunci f este convexă pe acel interval ;

Dacă **f ''(x)** < 0 pe un interval, atunci f este concavă pe acel interval ;

**6. Tabelul de variaţie;**

| **x** | $-\infty$ | $x_1$ | $x_1'$ | $x_3$ | $x_1'$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **f '(x)** | | **0** | | **0** | **0** | |
| **f(x)** | | | | | | |
| **f ''(x)** | | | **0** | | **0** | |

**7. Trasarea graficului.**

## Exercitii rezolvate

**Să se reprezinte grafic funcțiile:**

**a)** $f(x)=e^{2x-4}$**;** **b)** $f(x)=\sqrt{x^2-4}$**;** **c)** $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x-1}$**;** **d)** $f(x)=2x^3-x^2-1$**;**

**e)** $f(x)=\sqrt[3]{x^2-8}$

Rezolvare:

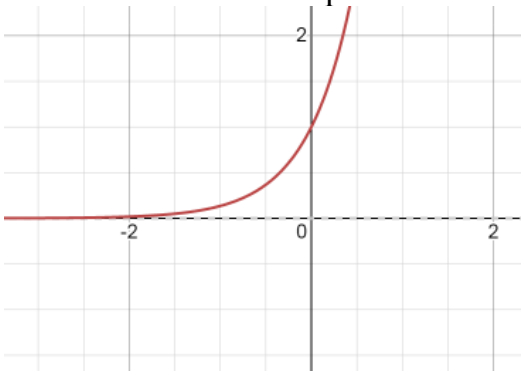
a) Domeniul de definiție al funcției $f(x)=e^{2x-4}$ conform definiției funcției exponențiale este $\mathbb{R}$.

Intersecția graficului funcției se face doar cu axa Oy: x=0 rezultă $f(0)=e^{-4}=\dfrac{1}{e^4}$.

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty} e^{2x-4}=\infty$ iar $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x-4}=0$ deci dreapta de ecuație y = 0 este asimptota orizontală la graficul funcției spre $-\infty$.

$f^I(x)=2e^{2x-4}\rangle 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Rezultă că f(x) este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$ iar din $f^{II}(x)=4e^{2x-4}\rangle 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ rezultă că f este convexă pe $\mathbb{R}$.

Cum f este continuă pe $\mathbb{R}$ rezultă că f nu are asimptote vericale.




b) Domeniul de definiție al funcției $f(x)=\sqrt{x^2-4}$ este $(-\infty;-2]\cup[2;\infty)$.

Intersecția graficului funcției se face doar cu axa OX: $x=\pm 2\Rightarrow f(2)=f(-2)=0$.

Avem punctele de intersecție $A(-2;0), B(2;0)$ cu axa OX.

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$, deci nu există asimptote orizontale.

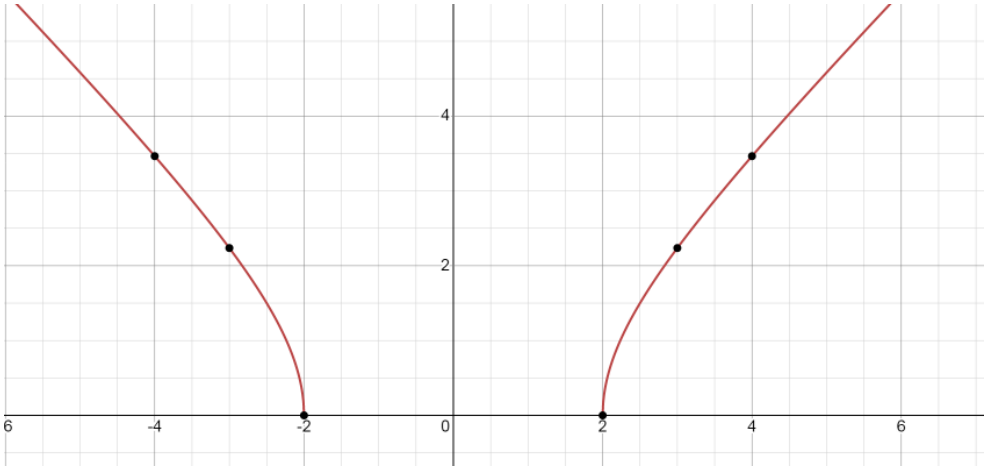
Căutăm asimptotele oblice, y = mx+n.

$m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$ iar $n = \lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x) - mx\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-4} - x) = 0$. Analog la $-\infty$. Așadar, ecuația asimptotei la $\infty$ ( respectiv $-\infty$) este y = x ( respectiv y= - x).

$f^I(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-4}} \rangle\ 0,\ \forall x \rangle 0$ și $f^I(x) = \langle\ 0,\ \forall x \langle 0$.

f(x) este strict crescătoare pe $[2;\infty)$ și strict descrescătoare pe $(-\infty;2]$.

$f^{II}(x) = \dfrac{-8}{2\sqrt{x^2-4}(x^2-4)} \rangle\ 0,\ \forall x \in (-2;2)$, $f^{II}(x) \langle\ 0,\ \forall x \in (-\infty;-2]\cup[2;\infty)$.




c) Domeniul de definiție al funcției $f(x) = \dfrac{x^2-9}{x-1}$ este $\mathbb{R} - \{1\}$.

Intersecția cu axele:

$\cap OX:\ f(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 3;$

$\cap OY:\ x = 0 \Rightarrow y = 9.$

Asimptote:

Dreapta de ecuație x=1 este asimptotă verticală deoarece $\lim\limits_{\substack{x\to1\\ x\langle 1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to1\\ x\langle 1}} \dfrac{x^2-9}{x-1} = +\infty$ și

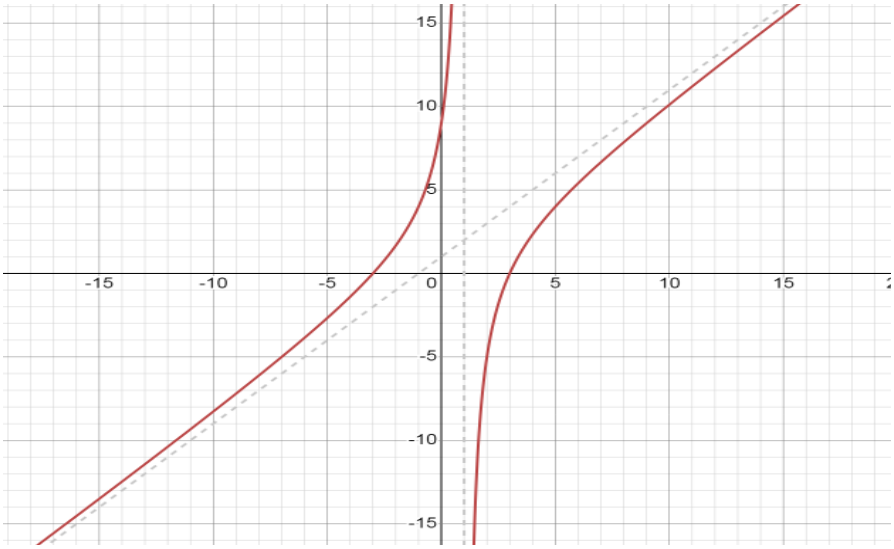
$\lim\limits_{\substack{x\to1\\ x\rangle 1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to1\\ x\rangle 1}} \dfrac{x^2-9}{x-1} = -\infty$.

Cum $m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-9}{x^2-x} = 1$ și $n = \lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x) - mx\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2-9}{x-1} - x\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x-9}{x-1} = 1$

rezultă că dreapta de ecuație y = x+1 este asimptotă oblică la $\infty$. De asemenea, ea este și la $-\infty$.

$f^I(x) = \dfrac{x^2-2x+9}{(x-1)^2} \rangle\ 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$, $f^{II}(x) = \dfrac{-16x+16}{(x-1)^4} \rangle\ 0,\ \forall x \in (-\infty;1)$ și

$f^{II}(x) \langle\ 0,\ \forall x \in (1;\infty)$




d) Domeniul de definiție al funcției $f(x)=2x^3-x^2-1$ este $\mathbb{R}$ ca funcție polinomială.

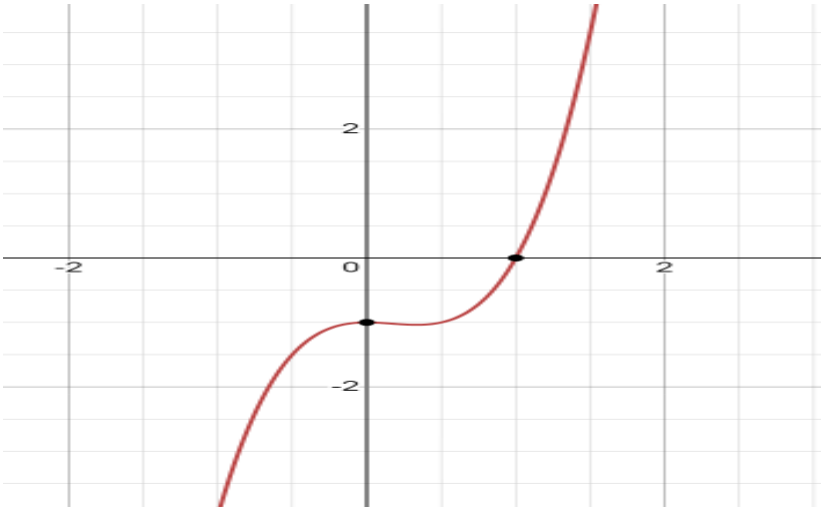
$\cap OX:\ f(x)=0\Rightarrow x=1;$

$\cap OY:\ x=0\Rightarrow y=-1;$

Funcția este continuă pe R deci nu are asimptote vericale. De asemenea nu are nici asimptote orizontale sau oblice.

$f^{I}(x)=6x^2-2x=2x(3x-1),\quad f^{I}(x)\geq 0,\forall x\in(-\infty;0]\cup\left[\frac{1}{3};\infty\right).$

$f^{II}(x)=12x-2=2(6x-1),\ f^{II}(x)\rangle 0,\forall x\in\left(-\infty;\frac{1}{6}\right)$ și $f^{II}(x)\langle 0,\forall x\in\left(\frac{1}{6};\infty\right).$




e) Domeniul de definiție pentru funcția $f(x)=\sqrt[3]{x^2-8}$ este $\mathbb{R}$ fiind funcție irațională de ordinul 3. Intersecția cu axele:

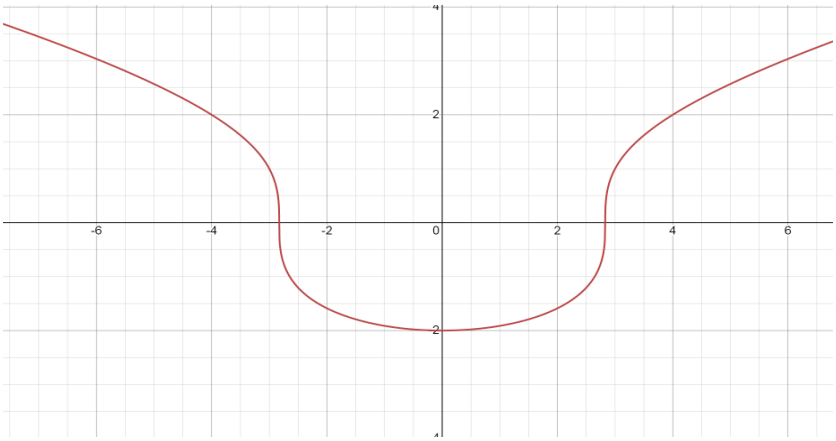
Din f(x)=0 rezultă $x^2-8=0\Rightarrow x=\pm 2\sqrt{2}.$ $\cap OX:\ A(-2\sqrt{2};0),\ B(2\sqrt{2};0).$

$\cap OY:\ x=0\Rightarrow y=f(0)=-2\Rightarrow C(0;-2).$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[3]{x^2-8}=\infty.$ Analog la $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\infty.$

Se observă că f nu are niciun fel de asimptote orizontale sau oblice . Fiind definită pe R și continuă rezultă că nu are nici asimptote verticale.

$f^I(x)=\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-8)^2}} \rangle\ 0,\ \forall x\rangle 0$ și $f^I(x)\ \langle 0,\ \forall x\langle 0$.



## 8.4 Exercitii recapitulative

**1. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, f(x)= $x^{2012}$ -1.**

**a) Să se arate că 1+2+$2^2$+$2^3$+….+$2^{2011}$ = f(2) ;**

**b) Să se calculeze limita $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}$;**

**c) Să se arate că f este convexă, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.**

Rezolvare :

**a)** Suma termenilor aflaţi în progresie geometrică ne dă $1\cdot\dfrac{2^{2012}-1}{2-1}=2^{2012}-1$ adică tocmai f(2).

**b)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{2012}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x^{2011}+x^{2010}+....+x+1)=2012;$

**c)** $f'(x)=2012\cdot x^{2011}$ şi din $f''(x)=2012\cdot 2011\cdot x^{2010}\rangle 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, rezultă f convexă pe $\mathbb{R}$.

**2. Fie $f:[2;+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\sqrt{x-2}$.**

**a) Să se arate că f este strict crescătoare pe $[2;+\infty)$;**

**b) Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul M(3 ;3) ;**

**c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-x\sqrt{x+2})$.**

Rezolvare :

**a)** $f'(x)=\sqrt{x-2}+\dfrac{x}{2\sqrt{x-2}}=\dfrac{3x-4}{2\sqrt{x-2}}\rangle 0$, pentru orice $x\in[2;+\infty)$. Rezultă că f este strict crescătoare pe $[2;+\infty)$;

**b)** Ecuaţia tangentei la grafic, într-un punct M($x_0$, f($x_0$)) este $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$.

Cum $x_0$=3, f($x_0$)=3 şi $f'(3)=\dfrac{5}{2}$, rezultă ecuaţia $y-3=\dfrac{5}{2}(x-3)\Rightarrow\ y=\dfrac{5}{2}x-\dfrac{9}{2};$

**c)** $\lim\limits_{x\to\infty}(x\sqrt{x-2}-x\sqrt{x+2})=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x(x-2-x-2)}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x+2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-4x}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1-\frac{2}{x}}+\sqrt{1+\frac{2}{x}}\right)}=-\infty$.

**3. Fie $f:\mathbb{R}\setminus\{1;5\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x-3}{x^2-6x+5}$.**

**a) Să se arate că $f(x)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-5}\right)$;**

**b) Să se arate că f este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}\setminus\{1;5\}$;**

**c) Să se determine $x\in\mathbb{R}\setminus\{1;5\}$ astfel încât graficul lui f să se afle deasupra dreptei y=0;**

Rezolvare :

**a)** $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-5}\right)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{x-5+x-1}{(x-1)(x-5)}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2(x-3)}{x^2-6x+5}=\dfrac{x-3}{x^2-6x+5}=f(x);$

**b)** Cum $f'(x)=-\dfrac{1}{2(x-1)^2}-\dfrac{1}{2(x-5)^2}\langle 0$ pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{1;5\}$, rezultă că f este strict descrescătoare pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{1;5\}$.

**c)** Din condiţia $f(x)\rangle 0 \Rightarrow \frac{x-3}{(x-1)(x-5)}\rangle 0$ ceea ce implică $x \in (1;3)\cup(5;+\infty)$.

**4. Fie** $f:(-\infty,-3)\cup(1;+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln(x^2+2x-3)$**.**

**a) Să se calculeze f '(2) ;**

**b) Să se arate că f este o funcţie concavă pentru orice** $x\in(-\infty,-3)\cup(1;+\infty)$**;**

**c) Să se calculeze limita** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$**.**

Rezolvare :

**a)** Cum $f'(x)=\frac{2x+2}{x^2+2x-3}\Rightarrow f'(2)=\frac{6}{5}$;

**b)** f(x) se mai poate scrie de forma

$f(x)=\ln(x^2+2x-3)=\ln(x+3)(x-1)=\ln(x+3)+\ln(x-1)$, atunci $f'(x)=\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x-1}$ iar

$f''(x)=-\frac{1}{(x+3)^2}-\frac{1}{(x-1)^2}\langle 0$ pentru orice $x\in(-\infty,-3)\cup(1;+\infty)$.

Aşadar, f este concavă.

**c)** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(x^2+2x-3)}{x}\overset{\infty}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+2}{x^2+2x-3}=0$, după ce, în prealabil s-a aplicat regula lui l'Hospital.

**5. Fie** $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{ax^2+bx-6}{x-1}, a,b\in R.$

**a) Pentru a = 2 şi b = 1 să se calculeze f '(2) ;**

**b) Să se determine a şi b astfel încât graficul funcţiei f să admită asimptota oblică, dreapta de ecuaţie y=2x+3 ;**

**c) Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul M(2 ;4) .**

Rezolvare :

**a)** Cum $f'(x)=\frac{(4x+1)(x-1)-2x^2-x+6}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-4x+5}{(x-1)^2}\Rightarrow f'(2)=\frac{8-8+5}{(2-1)^2}=5.$

**b)** Cum ecuaţia asimptotei oblice este y=mx+n unde $m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ şi $n=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-mx]$, rezultă

$2=m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{ax^2+bx-6}{x^2-x}=a\Rightarrow a=2;$

$3=n=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-mx]=\lim\limits_{x\to\infty}[\frac{2x^2+bx-6}{x-1}-2x]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+bx-6}{x-1}=b+2$; Din b+2=3 rezultă b=1.

Aşadar, a = 2 şi b = 1.

**c)** Ecuaţia tangentei la graficul funcţie f în punctul $M(x_0;f(x_0))$ este dată de formula, $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$. În cazul nostru, ecuaţia tangentei este :

$y-4=f'(2)(x-2)\Rightarrow y=5(x-2)+4,\ y=5x-6.$

**6. Se consideră funcţia** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$**,** $f(x)=5^x\cdot x$**.**

**a) Să se calculeze f '(x) ,** $x\in\mathbb{R}$.

**b) Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul O(0;0);**

**c) Să se determine punctele de inflexiune ale funcţiei f.**

Rezolvare: a) $f'(x)=(5^x\cdot x)'=5^x\ln 5\cdot x+5^x=5^x(x\ln 5+1);$

b) Ecuaţia tangentei la graficul lui f are forma $y-0=f'(0)(x-0)\Leftrightarrow y=x,$ adică tocmai ecuaţia primei bisectoare.

c) $f''(x)=[f'(x)]'=[5^x(x\ln 5+1)]'=5^x\ln 5(x\ln 5+1)+5^x\ln 5=5^x\ln 5(x\ln 5+2).$

**7. Fie** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=4x^3-2x^2-5x+6.$

**a) Să se calculeze** $f(1)-f'(0)+f''(1);$

**b) Să se calculeze** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{2x-1};$

**c) Să se studieze monotonia lui f.**

Rezolvare: a) $f(1)=4-2-5+6=3;$

$f'(x)=12x^2-4x-5,\ f'(0)=-5;$

$f''(x)=24x-4;\ f''(1)=24-4=20;$

$f(1)-f'(0)+f''(1)=3+5+20=28.$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x^3-2x^2-5x+6}{2x-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3(4-\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}+\frac{6}{x^3})}{x(2-\frac{1}{x})}=\infty;$

c) $f'(x)=0\Leftrightarrow 12x^2-4x-5=0\Rightarrow x_1=-\dfrac{1}{2},x_2=\dfrac{5}{6}.$

$f'(x)\rangle 0,\ \forall x\in(-\infty;-\dfrac{1}{2})\cup(\dfrac{5}{6};+\infty)$ şi $f'(x)\le 0,\ \forall x\in\left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{5}{6}\right].$ Rezultă că f este strict crescătoare pe $\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(\dfrac{5}{6};+\infty\right)$ şi strict descrescătoare pe $\left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{5}{6}\right].$

**8. Se consideră funcţia** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt[3]{2x+8}.$

**a) Să se calculeze** $\left(x\cdot f(x)\right)';$

**b) Să se calculeze** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{2x+8}}{x};$

**c) Să se arate că** $x_0=-4$ **este punct de inflexiune al funcţiei f.**

Rezolvare:

a) $\left(x\cdot f(x)\right)'=x'\cdot f(x)+x\cdot f'(x)=\sqrt[3]{2x+8}+x\cdot\dfrac{2}{3\sqrt[3]{(2x+8)^2}}=\dfrac{8(x+3)}{3\sqrt[3]{(2x+8)^2}};$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{2x+8}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[3]{\dfrac{2x+8}{x^3}}=0;$

c) $f''(x)=-\dfrac{4}{3\sqrt[3]{(2x+8)^5}}.$ Din 2x+8 = 0, rezultă x = - 4. Aşadar, $f''(x)\langle 0,\forall x\rangle -4$ şi $f''(x)\rangle 0,\forall x\langle -4.$ Prin urmare, $x_0$ = - 4 este punct de inflexiune.

Se putea arăta uşor şi din faptul că $f_s'(-4)=f_d'(-4)=+\infty.$

**9. Se consideră funcţia** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x^2-1}, & x\le 1\\ \ln x, & x\rangle 1.\end{cases}$

**a) Să se studieze continuitatea funcţiei f în $x_0$ =1;**

**b) Să se calculeze** $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\langle 1}}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$;

**c) Să se determine** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(e^x)+f(e^{x^2})+f(e^{x^3})+...+f(e^{x^{2011}})}{x^{2011}}$;

Rezolvare:

a) $l_s(1)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\langle 1}}\sqrt[3]{x^2-1}=0, l_d(1)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\rangle 1}}\ln x=0$. Rezultă că f este continuă în 1.

b) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\langle 1}}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\langle 1}}\dfrac{\sqrt[3]{x^2-1}}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\langle 1}}\sqrt[3]{\dfrac{x^2-1}{(x-1)^3}}=\infty.$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(e^x)+f(e^{x^2})+f(e^{x^3})+...+f(e^{x^{2011}})}{x^{2011}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln e^x+\ln e^{x^2}+\ln e^{x^3}+...+\ln e^{x^{2011}}}{x^{2011}}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+x^2+x^3+...+x^{2011}}{x^{2011}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^{2012}-x}{(x-1)x^{2011}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^{2011}-1}{(x-1)x^{2010}}=1.$

**10. Fie** $f:D\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{x^2-4}$**.**

**a) Determinaţi domeniul maxim de definiţie D al funcţiei f;**

**b) Să se studieze monotonia funcţiei** $g(x)=x\cdot f^2(x)$;

**c) Determinaţi asimptota oblică spre** $+\infty$ **a funcţiei f.**

Rezolvare: a) Din $x^2-4\geq 0\Rightarrow x\in(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$. Aşadar, $D=(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$;

b) $g(x)=x(x^2-4)\Rightarrow g'(x)=x^2-4+x\cdot 2x;\quad g'(x)=3x^2-4.$ Din

$g'(x)=0\Rightarrow 3x^2-4=0\Rightarrow x_{1,2}=\pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3}.$

Cum $g'(x)\rangle 0,\ \forall x\in(-\infty;-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}]\cup[\dfrac{2\sqrt{3}}{3};+\infty)$ şi $g'(x)\langle 0,\ \forall x\in\left(-\dfrac{2\sqrt{3}}{3};\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$

c) Asimptota oblică are forma $y=mx+n$ unde

$m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\sqrt{1-\dfrac{4}{x}}}{x}=1;$

$n=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-mx)=\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-4}-x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-4-x^2}{\sqrt{x^2-4}+x}=0.$ Rezultă, y= x este asimptota oblică spre $+\infty$ pentru funcţia f.

**11. Se consideră funcţia** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$**,** $f(x)=(-x^2+4x-2)\cdot\sin x.$

**a) Să se calculeze** $f'(0)$;

**b) Să se arate că** $|f(x)|\leq 2,\forall x\in\mathbb{R}$;

**c) Să se determine ecuaţia tangentei la graficul funcţie f în punctul de abcisă $x_0$ = 0.**

Rezolvare: a) $f'(x)=(-2x+4)\sin x+(-x^2+4x-2)\cos x$. Atunci, f '(0) =- 2;

b) $-x^2+4x-2=0\Rightarrow -\dfrac{\Delta}{4a}=2\Rightarrow|f(x)|=|-x^2+4x-2|\cdot|\sin x|\leq 2$;

c) Se calculează f(0)=0 şi din ecuaţia tangentei $y-0=f'(0)(x-0)\Rightarrow y=-2x.$

**12. Se consideră funcţiile** $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x^4+16x,\ g(x)=x^2-x-6$**.**

**a) Să se calculeze** $f'(x)\cdot g'(x)$;

**b) Să se calculeze** $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{f(x)}{g(x)}$;

**c) Să se demonstreze că f este funcţie convexă.**

Rezolvare: a) $f'(x)=8x^3+16,\ g'(x)=2x-1\Rightarrow f'(x)\cdot g'(x)=16x^4-8x^3+32x-16;$

b) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^4+16x}{x^2-x-6}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x(x^3+8)}{(x+2)(x-3)}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x(x^2-2x+4)}{x-3}=\dfrac{48}{5}.$

c) $f''(x)=(f')'(x)=24x^2\rangle 0,\ \forall x\in\mathbb{R}.$ Rezultă că f este convexă.

**13. Se consideră funcţiile** $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sin x,\ g(x)=\cos x$**.**

**a) Să se calculeze** $f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)-g'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$;

**b) Să se calculeze** $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x\langle\frac{\pi}{2}}}\dfrac{f(x)}{g(x)}$;

**c) Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul** $A\left(\dfrac{\pi}{6};f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right)$;

Rezolvare:

a) $f'(x)=\cos x,\ g'(x)=-\sin x\Rightarrow f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)-g'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{1+\sqrt{2}}{2};$

b) $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x\langle\frac{\pi}{2}}}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x\langle\frac{\pi}{2}}}\dfrac{\sin x}{\cos x}=\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x\langle\frac{\pi}{2}}}tgx=+\infty;$

c) Ecuaţia tangentei are forma $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$ de unde rezultă

$y-f(\frac{\pi}{6})=f'(\frac{\pi}{6})(x-\frac{\lambda}{6})\Rightarrow y-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}(x-\frac{\pi}{6}).$

**14. Se consideră funcţia** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}4x^3+6, & x\langle 1\\ 2x^2+8x, & x\geq 1\end{cases}$**.**

**a) Să se studieze continuitatea lui f în $x_0$ =1;**

**b) Să se calculeze** $f'(-2)+f'(x)$;

**c) Să se studieze derivabilitatea funcţiei în punctul $x_0$ =1;**

Rezolvare:

a) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\langle 1}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\langle 1}}(4x^3+6)=10;\quad \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\rangle 1}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\rangle 1}}(2x^2+8x)=10.$ Rezultă că f este continuă în punctul $x_0$ =1;

b) $f'(-2)+f'(x)=48+16=64;$

c) Cum f este continuă în 1 şi $f_s'(1)=\lim\limits_{x\nearrow 1}12x=12$ şi $f_d'(1)=\lim\limits_{x\searrow 1}(4x+8)=12$, rezultă că f este derivabilă în 1.

**15. Se consideră funcţia** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=4^x+5^x.$

**a) Să se calculeze** $f'(0)$;

**b) Să se studieze monotonia lui f;**

**c) Să se calculeze** $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

Rezolvare: a) $f'(x)=4^x\ln 4+5^x\ln 5\Rightarrow f'(0)=\ln 4+\ln 5=\ln 20$;

b) $f'(x)=4^x\ln 4+5^x\ln 5\rangle 0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow$ f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$;

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0.$

**16. Se consideră funcţia** $f:\mathbb{R}-\{-4\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x^2+3x}{x+4}.$

**a) Să se calculeze** $f'(0)$;

**b) Să se scrie ecuaţia asimptotei verticale a graficului lui f;**

**c) Să se demonstreze că f este convexă pe** $(-4;+\infty)$**.**

Rezolvare:

a) $f'(x)=\dfrac{(2x+3)(x+4)-(x^2+3x)\cdot 1}{(x+4)^2}=\dfrac{x^2+8x+12}{(x+4)^2}\Rightarrow f'(0)=\dfrac{12}{16}=\dfrac{3}{4}$;

b) $\lim\limits_{\substack{x\to-4\\ x\langle -4}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to-4\\ x\langle -4}}\dfrac{x^2+3x}{x+4}=-\infty$ şi $\lim\limits_{\substack{x\to-4\\ x\rangle -4}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to-4\\ x\rangle -4}}\dfrac{x^2+3x}{x+4}=+\infty$. Rezultă că x = - 4 este asimptotă verticală la stânga către $-\infty$ şi la dreapta către $+\infty$.

c) $f''(x)=\dfrac{(2x+4)(x+4)^2-(x^2+8x+12)\cdot(2x+8)}{(x+4)^4}=\dfrac{8x+32}{(x+4)^4}=\dfrac{8}{(x+4)^3}$.

Rezultă că $f''(x)\rangle 0,\ \forall x\rangle -4\Rightarrow$ f este convexă pe $(-4;+\infty)$.

**17. Se consideră funcţia** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^{2011}-2010(x+1)+2012.$

**a) Să se calculeze** $f'(0)-f(0)$;

**b) Să se calculeze** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$**;**

**c) Să se studieze convexitatea funcţiei.**

Rezolvare:

a) $f'(x)=2011x^{2010}-2010\Rightarrow f'(0)+f(0)=-2010+2010-2012=-2012$;

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=2011-2010=1;$

c) $f''(x)=2011\cdot 2010x^{2009}\rangle 0,\ \forall x\rangle 0\Rightarrow$ f este convexă pe $(0;+\infty)$ şi concavă pe $(-\infty;0)$.

**18. Se consideră funcţia** $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R},\ f(x)=x^5+\dfrac{5}{x}.$

**a) Să se calculeze** $f'(1)$;

**b) Să se determine asimptota verticală la graficul funcţiei f.**

**c) Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul funcţiei în punctul de abcisă $x_0$ = -1.**

Rezolvare:

a) $f'(x)=5x^4-\dfrac{5}{x^2}\Rightarrow f'(1)=0;$

b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\langle 0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\langle 0}}(x^5+\dfrac{5}{x})=-\infty$ şi $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\rangle 0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\rangle 0}}(x^5+\dfrac{5}{x})=+\infty$. Rezultă că x=0 este asimptotă vericală la stânga către $-\infty$ şi la dreapta către $+\infty$.

c) $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow y-f(-1)=f'(0)(x+1)\Rightarrow$ y= -6 este ecuaţia tangentei la graficul lui f în punctul de abcisă $x_0$ = -1.

**19. Se consideră funcţia** $f:(0;\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{\ln x}{x}.$

**a) Să se calculeze** $f'(1)$;

**b) Să se studieze monotonia lui f;**
**c) Să se calculeze** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\rangle 0}} f(x)$.

Rezolvare:

a) $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}\Rightarrow f'(1)=1;$

b) Observăm din punctual a) că $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}\Rightarrow 1-\ln x\rangle 0\Leftrightarrow x\langle e\Rightarrow$

Pentru $x\langle e$, f este strict crescătoare, şi pentru $x\rangle e$ f este strict descrescătoare.

c) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\rangle 0}}\dfrac{\ln x}{x}=-\infty.$

**20. Se consideră funcţia** $f:(-7;\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\sqrt{x+7}, x\le 2\\ \dfrac{x+a}{2x+1}, x\rangle 2\end{cases}$ $a\in\mathbb{R}$**.**

**a) Să se determine** $a\in\mathbb{R}$ **astfel încât f să fie continuă în 2;**
**b) Să se calculeze** $f'(-3)-f'(3)$ **pentru a=13;**
**c) Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul funcţiei în punctul** $A(2;3)$**.**

Rezolvare: a) f este continuă în 2 $\Leftrightarrow l_s(2)=l_d(2)=f(2)$.

$l_s(2)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x\langle 2}}\sqrt{x+7}=3,\ l_d(2)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x\rangle 2}}\dfrac{x+a}{2x+1}=\dfrac{a+2}{5}$. Atunci, din $\dfrac{a+2}{5}=3\Rightarrow a=13;$

Aşadar, f este continuă în 2 dacă şi numai dacă a=13.

b) $f'(-3)-f'(3)=\dfrac{1}{4}+\dfrac{25}{49}=\dfrac{149}{196};$

c) $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow y-f(2)=f'(2)(x-2)\Rightarrow y-3=\dfrac{1}{6}(x-2)\Rightarrow x-6y+16=0$.

**21. Se consideră funcţia** $f:[0;\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+5x+a}, x\in[0;2]\\ \dfrac{9x+14}{8}, x\in(2;\infty)\end{cases}$ $a\in\mathbb{R}$**.**

**a) Să se determine** $a\in\mathbb{R}$ **astfel încât f să fie continuă în 2;**
**b) Să se calculeze** $f'(1)+f'(3)$ **pentru a = 2;**
**c) Să se scrie ecuaţia asimptotei oblice către** $+\infty$**.**

Rezolvare:

a) f este continua în 2 $\Leftrightarrow l_s(2)=l_d(2)=f(2)$.

$\Leftrightarrow\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x\langle 2}}\sqrt{x^2+5x+a}=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x\rangle 2}}\dfrac{9x+14}{8}\Leftrightarrow\sqrt{14+a}=4\Leftrightarrow 14+a=16\Rightarrow a=2;,$. Atunci, din

b) $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{2x+5}{2\sqrt{x^2+5x+a}}, x\in(0;2)\\ \dfrac{9}{8}, x\in(2;\infty)\end{cases}$. Rezultă, $f'(1)+f'(3)=\dfrac{7}{2\cdot 2\sqrt{2}}+\dfrac{9}{8}=\dfrac{14+9\sqrt{2}}{8\sqrt{2}}$.

c) Ecuaţia asimptotei oblice: $y=mx+n$;

$m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x+14}{8x}=\dfrac{9}{8},\ n=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-mx)=\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{9x+14}{8}-\dfrac{9x}{8})=\dfrac{14}{8}.$

Rezultă, $y=\frac{9}{8}x-\frac{14}{8}$.

**22. Se consideră funcţia** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=e^{x+1}-e(x+1)$.

**a) Să se calculeze** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$**;**

**b) Să se arate că** $f(x)\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$;

**c) Să se calculeze** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2-1}$;

Rezolvare: a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=0$;

b) $f'(x)=e^{x+1}-e\geq 0,\forall x\geq 0\Rightarrow$f este crescătoare pe $[0;\infty)\Leftrightarrow\forall x\geq 0\Leftrightarrow f(x)\geq f(0)$ . Cum f(0)=0 rezultă că $f(x)\geq 0,\forall x\geq 0$.

$f'(x)=e^{x+1}-e\leq 0,\forall x\leq 0\Rightarrow$f este descrescătoare pe $(-\infty;0]\Leftrightarrow\forall x\leq 0\Leftrightarrow f(x)\geq f(0)$ .
Cum f(0)=0 rezultă că $f(x)\geq 0,\forall x\geq 0$.
Aşadar, $f(x)\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$.

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{x+1}-e(x+1)}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{x+1}-e}{2x}=\infty$.

**23. Fie** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=(x+3)e^{-3x}$.

**a) Să se determine** $f'(0)$**;**

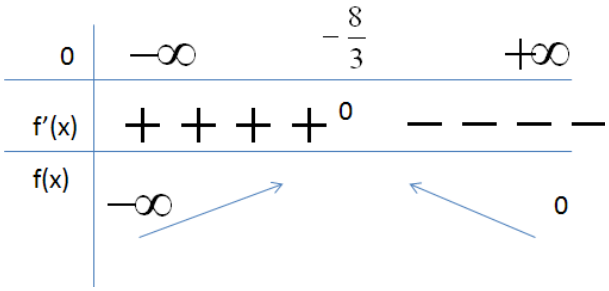
**b) Să se calculeze** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{f(x)}$.

**c)Să se determine punctele de extrem ale funcţiei f.**

Rezolvare: a) $f'(x)=e^{-3x}+(x+3)e^{-3x}.(-3)\Rightarrow f'(0)=-8$.

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{-3x}(-3x-8)}{e^{-3x}(x+3)}=-3$.

c) Din f ’(x) = 0 rezultă că $x=-\frac{8}{3}$este punct de maxim.




**24. Se consideră funcţia** $f:\mathbb{R}-\{4\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{x^2-7x+10}{4-x}$.

**a) Să se arate că** $f(x)=3-x-\frac{2}{4-x}$;

**b) Să se calculeze** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x-5}$;

**c) Aflaţi** $x\in\mathbb{R}$ **astfel încât** $f(x)\cdot(x-4)\leq 0$;

Rezolvare: a) $3-x-\frac{2}{4-x}=\frac{(4-x)(3-x)-2}{4-x}=\frac{x^2-7x+10}{4-x}=f(x)$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-7x+10}{(4-x)(x-5)}=-1;$

c) $f(x)\cdot(x-4)\le 0\Leftrightarrow x^2-7x+10\ge 0\Rightarrow x\in[-\infty;2]\cup[5;+\infty)$.

**25. Se consideră funcţia** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{2x+6}{x^2+4}.$

**a) Să se calculeze** $f'(0)$**;**

**b) Să se calculeze** $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot f(x);$

**c) Să se arate că funcţia f este strict descrescătoare pe** $[1;\infty)$.

Rezolvare: a) $f'(x)=\dfrac{-2x^2-12x+8}{(x^2+4)^2}\Rightarrow f'(0)=\dfrac{1}{2};$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x(2x+6)}{x^2+4}=2;$

c) Deoarece $-2x^2-12x+8<0,\forall x\ge 1\Rightarrow f'(x)<0,\forall x\ge 1\Rightarrow$ f este strict descrescătoare pe $[1;\infty)$.

**26. Se consideră funcţia** $f:(0;\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}4+\ln x, & 0<x\le 1\\ a\sqrt{x^2+8x}, & x>1\end{cases},a\in\mathbb{R}$**.**

**a) Să se determine** $a\in\mathbb{R}$ **astfel încât f să fie continuă pe** $(0;\infty)$**;**

**b) Să se calculeze** $f'\left(\dfrac{1}{\sqrt{2011}}\right)$**;**

**c) Pentru a=1 să se calculeze** $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot[f(x)-(x+4)];$

Rezolvare: a) f este continua pe $(0;\infty)\Leftrightarrow$ f este continuă în 1 echivalent cu

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}(4+\ln x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}a\sqrt{x^2+8x}\Leftrightarrow 4=3a\Rightarrow a=\dfrac{4}{3};$

b) $f'(x)=\dfrac{1}{x}\forall x\in(0;1)\Rightarrow f'\left(\dfrac{1}{\sqrt{2011}}\right)=\sqrt{2011}$.

c) $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot[\sqrt{x^2+8x}-(x+4)]=\lim\limits_{x\to\infty}x\dfrac{x^2+8x-(x+4)^2}{\sqrt{x^2+8x}+x+4}=-8.$

# 9. RECAPITULARE FINALĂ

## ALGEBRA

**1.** În $M_2(\mathbb{R})$ se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1+2x & x\\ -2x & 1-x\end{pmatrix}$, $x\in\mathbb{R}$.

a) Să se calculeze $A(2)\cdot A(-2)$;

b) Să se verifice că $(A(x))^2 = A\left((x+1)^2-1\right)$;

c) Să se determine inversa matricei $A(2)$.

**2.** Fie $A=\begin{pmatrix}5 & 2\\ -10 & -4\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $M=\{X(a)\mid a\in\mathbb{R}, X(a)=I_2-a\cdot A\}$.

a) Să se arate că $A^2=A$;

b) Să se arate că $X(a)\cdot X(b)=X(a+b-ab)$;

c) Să se calculeze $X(0)\cdot X(1)\cdot X(2)\cdot....\cdot X(2020)$

**3.** Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze $\det(A\cdot B)$;

b) Să se calculeze $\det(A^2+B^2)$;

c) Să se arate că $\det(X\cdot Y)=\det(X)\cdot\det(Y),\ \forall X,Y\in M_2(\mathbb{R})$.

**4.** Fie matricea $A(x)=\begin{pmatrix}x+1 & x^2-1\\ 1 & x-1\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$.

a) Să se calculeze $A(2)\cdot A(-2)$;

b) Să se calculeze determinantul matricei A(x);

c) Să se verifice că $(A(x))^2=2x\cdot A(x)$;

**5.** Fie $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $X(a)\ \underline{\underline{def}}\ I_2+aA$.

a) Să se calculeze $\det[X(a)]$;

a) Să se arate că $X(a)\cdot X(b)=X(a+b)$;

b) Să se rezolve în $\mathbb{N}$ ecuaţia: $X(1)\cdot X(2)\cdot....\cdot X(n)=X(2020)$.

**6**. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}x-4 & 1\\ 1 & x-4\end{pmatrix}$, $x\in\mathbb{R}$.

Se notează $A^n=\underbrace{A\cdot A\cdot.....\cdot A}_{n\ termeni}$, $n\in\mathbb{N}^*$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

a) Să se determine x ştiind că det(A)=0.

b) Să se verifice egalitatea $A^2=(2x-8)A-(x^2-8x+15)I_2$.

c) Să se determine $x\in R$ astfel încât $A^2 = 3A+I_2$.

**7**. În mulţimea $M_2(\mathbb{R})$ se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ şi $X(a)= I_2 +aA$,

unde $a\in\mathbb{R}$.

a) Să se calculeze $A^3$ unde $A^3=A\cdot A\cdot A$.

b) Să se verifice dacă $X(a)X(b)=X(a+b+ab),\ \forall a,b\in\mathbb{R}$.

c) Să se calculeze X(1)+X(2)+……+X(2020).

**8**. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ din $M_2(\mathbb{R})$.

a) Să se verifice că $A^3 = 4A$;

b) Să se determine $x\in\mathbb{R}$ astfel încât $\det(A-xI_2)=0$;

c) Să se rezolve ecuaţia AX=XA unde $X\in M_2(\mathbb{R})$.

**9**. În mulţimea $M_2(\mathbb{R})$ se consideră matricele $A(x)=\begin{pmatrix}x+5 & 3x\\ 2x & 6x-4\end{pmatrix}, x\in\mathbb{R}$.

a) Să se calculeze $A(-1)\cdot A(1)$;

b) Să se rezolve ecuaţia $\det(A(x))=6$;

c) Să se determine inversa matricei A(-1).

**10.** Se consideră matricele de forma $M_a=\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$.

a) Să se arate că $M_a\cdot M_b=M_{a+b}, \forall a,b\in\mathbb{R}$.

b) Să se calculeze produsul $M_1\cdot M_2\cdot M_3\cdot .....\cdot M_{100}$;

c) Să se determine matricele $X\in M_2(R)$ pentru care $M_a\cdot X=X\cdot M_a,\ \forall a\in\mathbb{R}\,.\,a\neq 0$.

**11.** Fie $A=\begin{pmatrix}2 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 1\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{R})$, $I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

a) Arătați că determinantul matricei A este diferit de zero.

b) Calculați $E(A)$, unde $E(X)=X^2-X+I_3$;

c) Calculați inversa matricei A.

**12.** Pentru fiecare număr real m se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ m & 0 & 0\\ m & 2 & m\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{R})$.

a) Calculați determinantul $\det(A(1))$;

b) Determinați numărul real m știind că $A(m)\cdot A(-m)=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ -2 & 3 & 0\end{pmatrix}$;

c) Calculați suma $A(1)+A(2)+A(3)+...+A(10)$.

**13.** Se consideră în plan punctele $A(m;m),\ B(2;m-3),\ C(-3;3m-1)$ și matricea

$M=\begin{pmatrix}m & 2 & -3\\ m & m-3 & 3m-1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{R}),\ m\in\mathbb{R}$.

a) Calculați determinantul matricei M;

b) Verificați că pentru orice număr real m, ABC este triunghi;

c) Pentru m = 4, să se calculeze aria triunghiului ABC;

**14.** Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}2 & 1 & -2\\ x^2-1 & 3 & 1\\ x-1 & 0 & 1\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$;

a) Să se calculeze $A(1)\cdot A(-1)$;

b) Să se calculeze detA(1);

c) Să se rezolve ecuația $\det A(x)=0$;

**15.** Fie sistemul $\begin{cases} x-2y-z=-1 \\ 2x-y+3z=-6 \\ 3x-3y+mz=-7 \end{cases}, m\in\mathbb{R}$.

a) Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât tripletul $(1;2;-2)$ să fie soluție a sistemului;

b) Să se rezolve ecuația $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -3 & m \end{vmatrix} = m^2-4$;

c) Pentru m = -2, să se rezolve sistemul;

**16.** Fie matricea $A_n=\begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{N})$ .

a) Să se calculeze $A_1+A_2$;

b) Să se afle $n\in\mathbb{N}^*$, astfel încât $\det(A_n)\cdot\det(A_{n+1})=512$.

c) Să se calculeze $A_1+A_2+A_3+...+A_{2020}$;

**17.** Se consideră sistemul $\begin{cases} 3x-my=5 \\ -3x+y+z=-1, m\in\mathbb{R}, \text{și } A=\begin{pmatrix} 3 & -m & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}. \\ x+2y-3z=1 \end{cases}$

a) Să se determine $m\in\mathbb{R}$, astfel încât A să fie inversabilă;

b) Să se calculeze $A^2$;

c) Să se rezolve sistemul pentru m = 2;

**18.** Se consideră sistemul $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-ay+z=0 \\ x+ay+4z=0 \end{cases}, a\in\mathbb{R}, \text{și matricea } A(a)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -a & 1 \\ 1 & a & 4 \end{pmatrix}.$

a) Calculați $A(2)\cdot A(-2)$;

b) Determinați $a\in\mathbb{R}$, astfel încât sistemul să aibă soluție unică, diferită de soluția banală;

c) Pentru a=1, să se calculeze inversa matricei A;

**19.** Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} 1+x & 2 & 3 \\ 4 & 5+x & 6 \\ 7 & 8 & 9+x \end{pmatrix}, x\in\mathbb{R}.$

a) Să se calculeze determinantul matricei A(0);

b) Să se arate că $\det\left[A(x)+A(-x)\right]=0$;

c) Să se rezolve ecuația $\det\left[A(x)\right]=0$.

**20.** Se consideră sistemul $\begin{cases} x+y+az=3 \\ x+ay+z=4, a\in\mathbb{R}, \text{și matricea } A(a)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}. \\ ax+y+z=5 \end{cases}$

a) Să se calculeze determinantul matricei $A(2)$;

b) Să se determine a astfel încât matricea A(a) să fie inversabilă;

c) Pentru a=2 să se rezolve sistemul;

**21.** Fie determinantul $D(a;x)=\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ a^2 & a & x \end{vmatrix}$;

a) Să se calculeze valoarea determinantului pentru a= -1, x=2;

b) Să se verifice că $D(a;a)=0;$;

c) Să se rezolve ecuația $D(2;x)=0;$

**22.** Se consideră sistemul $\begin{cases} x+y+mz=-1 \\ 2x-y+m^2z=-4 \\ 4x+y+m^2z=-2 \end{cases}$, și matricea $A(m)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 2 & -1 & m^2 \\ 4 & 1 & m^2 \end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze determinantul matricei $A(-1)$;

b) Să se determine $m\in\mathbb{R}$, astfel încât matricea A(m) să fie inversabilă;

c) Pentru m = 2 să se rezolve sistemul;

**23.** Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}$ și mulțimea $G=\left\{X(a)\middle|X(a)=I_2+aA,\ a\in\mathbb{R}\right\}$.

a) Să se calculeze $\det(I_2+2A)$ și să se arate că $A^2=-10A$;

b) Să se arate că $X(a)\cdot X(b)=X\left(a+b-10ab\right), a,b\in\mathbb{R}.$

c) Să se determine produsul $X\left(\frac{1}{100}\right)\cdot X\left(\frac{2}{100}\right)\cdot....\cdot X\left(\frac{100}{100}\right)$.

**24.** Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & a-1 \end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R}),\ X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\in M_{2,1}(\mathbb{R}),\ B=\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$.

a) Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât matricea A să fie inversabilă;

b) Pentru a = 5, să se determine inversa matricei A;

c) Pentru a = 5, să se rezolve ecuația $A\cdot X=B.$

**25.** Se consideră matricele $A_p=\begin{pmatrix} 1 & p+1 & p-2 \\ 3p & p+1 & -2 \\ 2p+3 & 1 & -3 \end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{R}).$

a) Să se verifice dacă matricea $A_0$ este inversabilă;

b) Determinați inversa matricei A pentru p=0;

c) Calculați suma de matrice $A_1+A_2+A_3+...+A_n,\ n\in\mathbb{N}.$

**26.** Se consideră punctele $A(m+1;2),\ B(m;m),\ C(2m+1;5)$ și matricea

$M=\begin{pmatrix} m+1 & 2 & 1 \\ m & m & 1 \\ 2m+1 & 5 & 1 \end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{R}).$

a) Determinați rangul matricei M;

b) Demonstrați că există triunghiul ABC, pentru orice m număr real;

c) Calculați valoarea minimă a ariei triunghiului ABC;

**27.** Fie matricea $A(m)=\begin{pmatrix} m-1 & -1 & 0 \\ 0 & m+1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{R}).$

a) Să se determine $m\in\mathbb{R}$, știind că rangul matricei A(m) este 3;

b) Să se determine inversa matricei A(2);

c) Să se rezolve ecuația în $\mathbb{R}$: $\det\left[A(m)\cdot A(-m)\right]=9$.

**28.** Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{R})$. Pentru $a\in\mathbb{R}$ fixat, se definește matricea $B=a\cdot A+I_3$.

a) Să se calculeze $A^2$, unde $A^2=A\cdot A$.

b) Să se demonstreze că $2B-B^2=I_3$;

c) Să se determine inversa matricei B, pentru a = 1;

**29.** Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases}2x-(a+3)y+z=1\\ x+2y+(a+2)z=0\\ 3x-2y+(a+3)z=2\end{cases}$, $a\in\mathbb{R}$ și matricea sistemului

$A(a)=\begin{pmatrix}2 & -(a+3) & 1\\ 1 & 2 & a+2\\ 3 & -2 & a+3\end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze matricea $A(1)\cdot A(-1)$;

b) Să se rezolve ecuația $\det(A(a))=0$;

c) Pentru a = 0, să se rezolve sistemul.

**30.** Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases}3x-2y+z=-4\\ ax+y-z=-2\\ (a+1)x+3y-az=1\end{cases}$, $a\in\mathbb{R}$ și matricea sistemului

$A(a)=\begin{pmatrix}3 & -2 & 1\\ a & 1 & -1\\ a+1 & 3 & -a\end{pmatrix}$.

a) Să se determine $a\in\mathbb{R}$, astfel încât matricea A să fie inversabilă;

b) Pentru a = 0, să se calculeze $A^2$, unde $A^2=A\cdot A$;

c) Să se rezolve sistemul pentru a = 2.

**31.** Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases}x+2y+2z=0\\ 2x+3y+z=-4\\ mx-2y+3z=10\end{cases}$, $m\in\mathbb{R}$ și $A(m)=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 3 & 1\\ m & -2 & 3\end{pmatrix}$ este matricea sistemului;

a) Să se arate că pentru orice m, număr real, tripletul (0;-2;2) este soluție a sistemului;

b) Să se determine $m\in\mathbb{R}$, pentru care sistemul admite soluție unică;

c) Să se calculeze $A(-2)\cdot A(2)$.

**32.** Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases}-x+2y+z=b\\ x+2y+az=3\\ x+y+3z=4\end{cases}$, $a,b\in\mathbb{R}$.

a) Să se calculeze determinantul matricei asociate sistemului;

b) Pentru a =2 și b = 8, să se rezolve sistemul;

c) Să se determine $b\in\mathbb{R}$, știind că tripletul $(x_0,y_0,z_0)$ este soluție a sistemului și că $x_0+y_0+z_0=4$.

**33.** Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases} -x+2my+z=1 \\ mx+y-2z=3 \\ x+2y+z=1 \end{cases}, m\in\mathbb{R}$ și $A(m)=\begin{pmatrix} -1 & 2m & 1 \\ m & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ este matricea sistemului.

a) Să se calculeze $A(1)\cdot A(-1)$;

b) Să se arate că pentru orice număr real m, determinantul matricei sistemului este negativ;

c) Pentru m=3 să se rezolve sistemul.

**34.** Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases} x+y+2z=8 \\ 2x-my+4z=3 \\ (m+1)x+y+(m-1)z=-3 \end{cases}$ și

$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -m & 4 \\ m+1 & 1 & m-1 \end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{R})$, matricea sistemului;

a) Să se calculeze $A(1)\cdot A(-1)$;

b) Pentru m = -1 să se rezolve sistemul;

c) Să se arate că matricea A este inversabilă pentru orice m număr real.

**35.** Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases} 2x+(m-1)y+(m-2)z=-8 \\ -2x+3y+z=2 \\ mx+2y+mz=-5 \end{cases}$ și

$A=\begin{pmatrix} 2 & m-1 & m-2 \\ -2 & 3 & 1 \\ m & 2 & m \end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{R})$, matricea sistemului;

a) Să se calculeze $A(1)\cdot A(-1)$;

b) Pentru m = 1 să se rezolve sistemul;

c) Să se determine numărul real m astfel încât matricea A să fie inversabilă.

**36.** Se consideră sistemul $\begin{cases} 2x+y+(m+1)z=-1 \\ x+y-3z=2 \\ mx-2y+4z=4 \end{cases}$ și $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & m+1 \\ 1 & 1 & -3 \\ m & -2 & 4 \end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{R})$, matricea sistemului; Se cere:

a) Să se arate că matricea A este inversabilă pentru orice număr real m;

b) Pentru m = 1 să se rezolve sistemul;

c) Pentru m = 0 să se determine inversa matricei A;

**37.** Se consideră sistemul $\begin{cases} x+y+z=0 \\ mx-y+z=-5 \\ x+(m+1)y+2z=4 \end{cases}$ și $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & -1 & 1 \\ 1 & m+1 & 2 \end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{R})$, matricea sistemului; Se cere:

a) Să se determine $m\in\mathbb{R}$, astfel încât rangul matricei A să fie egal cu 2;

b) Pentru m = 2 să se rezolve sistemul;

c) Pentru m = 0 să se determine inversa matricei A;

**38.** Se consideră matricele $A(x)=\begin{pmatrix} x-1 & x+2 & 1 \\ -2 & -1 & x \\ 3 & 2 & x+1 \end{pmatrix}$, $x\in\mathbb{R}$. Se cere:

a) Să se calculeze $A(0)\bullet A(1)$;

b) Să se calculeze determinantul matricei $A(1)$;

c) Să se rezolve ecuația $\det\left[A(x)\right]=20$;

**39.** Se consideră matricele $A(x)=\begin{pmatrix} x & x-2 & 3 \\ 2 & -x & 1 \\ x+1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $x\in\mathbb{R}$. Se cere:

a) Să se calculeze $A(0)\bullet A(1)$;

b) Să se calculeze determinantul matricei $A(1)$;

c) Să se rezolve ecuația $\det\left[A(x)\right]=21$;

**40.** Fie $A=\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $M=\left\{X(a)\,\middle|\; a\in\mathbb{R}, X(a)=I_2+a\cdot A\right\}$.

a) Să se arate că $A^2=A$;

b) Să se arate că $X(a)\cdot X(b)=X(a+b+ab)$;

c) Să se calculeze $X(-2011)\cdot X(-2010)\cdot\ldots\cdot X(2010)\cdot X(2011)$;

**41.** Se consideră determinantul $\Delta(a)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 25 \\ 1 & a & a^2 \end{vmatrix}$, unde a este un număr real.

a) Să se calculeze valoarea determinantului D(3):

b) Să se rezolve ecuaţia D(a)=0;

c) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $D(5^x)=0$.

**42.** Se consideră sistemul de ecuaţii $\begin{cases} x+my+z=m-3 \\ 2x-3y+z=-1 \\ (m+1)x+y-2z=4 \end{cases}$, unde $m\in\mathbb{R}$.

a) Să se determine $m\in R$, ştiind că $\begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ m+1 & 1 & -2 \end{vmatrix}=-6$.

b) Pentru m= 2, să se rezolve sistemul de ecuaţii.

c) Pentru m= 0, să se calculeze $A^2$ unde A este matricea asociată sistemului de ecuaţii.

## ANALIZĂ

**1**. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3x^2-24x+1$;

a) Să se calculeze $f'(x)$, $f'(5)$

b) Să se studieze monotonia lui f;

c) Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul lui f în punctul de abcisă $x_0=-2$ ;

**2**. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x^3-2x^2-5x+6$.

a) Să se calculeze $f(1)-f'(0)+f''(1)$;

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{2x-1}$;

c) Să se studieze monotonia lui f.

**3.** Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, f(x)= $x^{2014}$ -1.

a) Să se arate că 1+2+$2^2$+$2^3$+….+$2^{2013}$ = f(2) ;

b) Să se calculeze limita $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}$;

c) Să se arate că f este convexă, pentru orice $x\in\mathbb{R}$

**4.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^{2016}+x^{2015}+...+x^2+x+1$;

a) Să se calculeze $f(2)$;

b) Să se calculeze $f'(1)$;

c) Să se arate că $f(x)\rangle 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ ;

**5.** Fie $f:D\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{x^2-4}$.

a) Determinaţi domeniul maxim de definiţie D al funcţiei f;

b) Să se studieze monotonia funcţiei $g(x)=x\cdot f^2(x)$;

c) Determinaţi asimptota oblică spre $+\infty$ a funcţiei f.

**6**. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}4x^3+6, & x\langle 1\\ 2x^2+8x, & x\geq 1\end{cases}$.

a) Să se studieze continuitatea lui f în $x_0$ =1;

b) Să se calculeze $f'(-2)+f'(x)$;

c) Să se studieze derivabilitatea funcţiei în punctul $x_0$ =1;

**7.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4^x+5^x$.

a) Să se calculeze $f'(0)$;

b) Să se studieze monotonia lui f;

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

**8.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{2x}+e^{-2x}$;

a) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$;

b) Să se studieze monotonia lui f;

c) Să se arate că $f(x)\geq 2,\ \forall x\in\mathbb{R}.$;

**9.** Fie funcţia $f:(0;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x(1+\ln x)$;

a) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$;

b) Să se determine intervalele de convexitate şi concavitate ale funcţiei f;

c) Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul lui f în punctul de abcisă $x_0=1$ ;

**10.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x^2+3x+3)\cdot e^x$;

a) Să se calculeze $f'(x)$, $f'(0)$;

b) Să se studieze monotonia lui f şi să se determine punctele de extrem local ale lui f;

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^2\cdot e^x}$;

**11.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{x+1}-e(x+1)$.

a) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$;

b) Să se arate că $f(x)\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$;

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^2-1}$;

**12.** Se consideră funcţia $f:(0;1)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(1-x)-\ln x$;

a) Să se studieze monotonia lui f pe (0;1);
b) Să se determine intervalele de convexitate ale funcţiei f;
c) Să se calculeze $f(\frac{1}{10})+f(\frac{1}{9})+f(\frac{1}{8})+....+f(\frac{1}{3})+f(\frac{1}{2})+f(\frac{2}{3})+f(\frac{3}{4})+....+f(\frac{9}{10})$;

**13**. Fie funcţia $f:D\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(x^2-2x-8)$;
a) Să se determine domeniul maxim de definiţie D al funcţie f;
b) Să se studieze monotonia lui f;
c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$;

**14.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+arctgx$;
a) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$;
b) Să se arate că f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$;
c) Să se arate că f este concavă pe $(0;\infty)$;

**15.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^{2011}-2010(x+1)+2012$.
a) Să se calculeze $f'(0)-f(0)$;
b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$;
c) Să se studieze convexitatea funcţiei.

**16.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^5+\frac{5}{x}$.
a) Să se calculeze $f'(1)$;
b) Să se determine asimptota verticală la graficul funcţiei f.
c) Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul funcţiei în punctul de abcisă $x_0 = -1$.

**17.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=5^x\cdot x$.
a) Să se calculeze f '(x), $x\in\mathbb{R}$.
b) Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul O(0;0);
c) Să se determine punctele de inflexiune ale funcţiei f.

**19.** Se consideră funcţiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^4+16x$, $g(x)=x^2-x-6$.
a) Să se calculeze $f'(x)\cdot g'(x)$;
b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to -2}\frac{f(x)}{g(x)}$;
c) Să se demonstreze că f este funcţie convexă.

**20.** Se consideră funcţiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin x$, $g(x)=\cos x$.
a) Să se calculeze $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)-g'\left(\frac{\pi}{4}\right)$;
b) Să se calculeze $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}}\frac{f(x)}{g(x)}$;
c) Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul $A\left(\frac{\pi}{6};f\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$;

**21**. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{x^2-4x+2}$;
a) Să se calculeze $f'(x)$, $f'(0)$;
b) Să se studieze monotonia lui f şi să se determine punctele de extrem local ale lui f;

c) Să se arate că $\frac{1}{e} \le f(x) \le e^2,\ \forall x \in [0;1]$;

**22.** Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=(x+3)e^{-3x}$.

a) Să se determine $f'(0)$;

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{f(x)}$.

c)Să se determine punctele de extrem ale funcţiei f.

**23.** Fie funcţia $f:(-\infty;-2)\cup(1;\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln(x^2+x-2)$;

a) Să se calculeze $f'(2)$;

b) Să se studieze monotonia lui f;

c) Să se arate că f este concavă pentru orice $x\in(-\infty;-2)\cup(1;2)$;

**24.** Fie $f:(-\infty,-3)\cup(1;+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln(x^2+2x-3)$.

a) Să se calculeze f ’(2) ;

b) Să se arate că f este o funcţie concavă pentru orice $x\in(-\infty,-3)\cup(1;+\infty)$;

c) Să se calculeze limita $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$.

**25.** Se consideră funcţia $f:[-1;1]\to\mathbb{R},\ f(x)=x\sqrt{1-x^2}$;

a) Să se calculeze $f'(x)$;

b) Să se studieze monotonia lui f;

c) Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul lui f în punctul de abcisă $x_0=\frac{1}{2}$ ;

**26.** Se consideră funcţia $f:[1;\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=x\sqrt{x-1}$;

a) Să se calculeze $f'(x)$;

b) Să se studieze monotonia lui f;

c) Să se determine intervalele de convexitate şi concavitate ale funcţiei f;

**27.** Fie $f:[2;+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=x\sqrt{x-2}$.

a) Să se arate că f este strict crescătoare pe $[2;+\infty)$;

b) Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul M(3 ;3) ;

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-x\sqrt{x+2})$.

**29.** Se consideră funcţia $f:(0;\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{\ln x}{x}$.

a) Să se calculeze $f'(1)$;

b) Să se studieze monotonia lui f;

c) Să se calculeze $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\rangle 0}} f(x)$.

**30.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{x+1}{x-1}$;

a) Să se calculeze $f'(x),\ f'(2)$

b) Să se determine asimptotele graficului funcţiei f;

c) Să se studieze convexitatea funcţiei f;

**31.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{x^2+8x-5}{x^2+1}$;

a) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$;

b) Să se studieze monotonia lui f;

c) Să se arate că $-7 \le f(x) \le 3,\ \forall x \in \left[-\frac{1}{2}; 2\right]$;

**32.**Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{2x-2}{x^2-x+1}$;

a) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$;

b) Să se studieze monotonia lui f;

c) Să se arate că $-2 \le f(x) \le \frac{2}{3},\ \forall x \in [0;2]$;

**33**.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{x+3}{x^2-1}$;

a) Să se calculeze $f'(x),\ f'(0)$

b) Să se studieze monotonia lui f;

c) Să se arate că $0 \le f(x) \le \frac{1}{3},\ \forall x \in [-3;-2]$;

**34.**Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\setminus\{3\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{x^2+1}{x-3}$;

a) Să se calculeze $f'(x),\ f'(1)$

b) Să se studieze monotonia lui f;

c) Să se arate că $-5 \le f(x) \le -1,\ \forall x \in [1;2]$;

**35**.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{x^2+1}{x+1}$;

a) Să se calculeze $f'(x),\ f'(2)$

b) Să se determine punctul de maxim al graficului lui f;

c) Dacă y = ax + b este asimptota oblică la graficul lui f să se determine a + b;

**36.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\setminus\{-2;0\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{x^2+2x}$;

a) Să se calculeze $f'(x),\ f'(1)$

b) Să se studieze monotonia lui f;

c) Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul lui f în punctul de abcisă $x_0=1$ ;

**37.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{x^2}{2x-1}$;

a) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$;

b) Să se studieze monotonia lui f;

c) Să se determine asimptotele graficului funcţiei f;

**39.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{2x^2+1}{x-1}$;

a) Să se calculeze $f'(x),\ f'(2)$ ;

b) Să se studieze monotonia lui f;

c) Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul lui f în punctul de abcisă $x_0=2$ ;

**40**. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\setminus\{1;3\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{x-2}{x^2-4x+3}$;

a) Să se calculeze $f'(x),\ f'(2)$;
b) Să se studieze monotonia lui f;
c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)\cdot(2x-3)$ ;

**41.** Se consideră funcţia $f:(-1;\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{2x}{x+1}-\ln(x+1)$;

a) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$;
b) Să se determine valoarea maximă a funcţiei f;
c) Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul lui f în punctul de abcisă $x_0=1$ ;

**42.** Fie $f:\mathbb{R}\setminus\{1;5\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x-3}{x^2-6x+5}$.

a) Să se arate că $f(x)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-5}\right)$;
b) Să se arate că f este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}\setminus\{1;5\}$;
c) Să se determine $x\in\mathbb{R}\setminus\{1;5\}$ astfel încât graficul lui f să se afle deasupra dreptei y=0;

**43.** Fie $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{ax^2+bx-6}{x-1}, a,b\in R.$

a) Pentru a = 2 şi b = 1 să se calculeze f ’(2) ;
b) Să se determine a şi b astfel încât graficul funcţiei f să admită asimptota oblică, dreapta de ecuaţie y=2x+3 ;
c) Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul M(2 ;4) .

**44.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}-\{-4\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x^2+3x}{x+4}$.

a) Să se calculeze $f'(0)$;
b) Să se scrie ecuaţia asimptotei verticale a graficului lui f;
c) Să se demonstreze că f este convexă pe $(-4;+\infty)$.

**45.** Se consideră funcţia $f:(-7;\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\sqrt{x+7}, x\le 2\\ \dfrac{x+a}{2x+1}, x\rangle 2\end{cases}$ $a\in\mathbb{R}$.

a) Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât f să fie continuă în $2$;
b) Să se calculeze $f'(-3)-f'(3)$ pentru a=13;
c) Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul funcţiei în punctul $A(2;3)$.

**46.** Se consideră funcţia $f:[0;\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+5x+a}, x\in[0;2]\\ \dfrac{9x+14}{8}, x\in(2;\infty)\end{cases}$ $a\in\mathbb{R}$.

a) Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât f să fie continuă în $2$;
b) Să se calculeze $f'(1)+f'(3)$ pentru a = 2;
c) Să se scrie ecuaţia asimptotei oblice către $+\infty$.

**47.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}-\{4\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x^2-7x+10}{4-x}$.

a) Să se arate că $f(x)=3-x-\dfrac{2}{4-x}$;
b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x-5}$;

c) Aflaţi $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) \cdot (x-4) \leq 0$;

**48.** Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{2x+6}{x^2+4}$.

a) Să se calculeze $f'(0)$;

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x \to \infty} x \cdot f(x)$;

c) Să se arate că funcţia f este strict descrescătoare pe $[1; \infty)$.

## FORMULE –VERIFICARE

1. $a^0 =$ 2. $a^m \cdot a^n =$ 3. $a^m : a^n =$

4. $(a^m)^n =$ 5. $(a \cdot b)^n =$ 6. $\left(\frac{a}{b}\right)^n =$

7. $a^{-n} =$ 8. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} =$ 9. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} =$

10. $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} =$ 11. $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} =$ 12. $k \cdot \frac{a}{b} =$

13. $\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} =$ 14. $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} =$ 15. $\sqrt{x^2} =$

16. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow$ 17. $(a+b)^2 =$

18. $(a+b+c)^2 =$ 19. $(a-b)^2 =$

20. $(a-b)(a+b) =$ 21. $(a-b)^3 =$

22. $(a+b)^3 =$ 23. $a^3 - b^3 = .....$

24. $a^3 + b^3 = .....$

25. $a \cdot x = b,\ a \neq 0 \Rightarrow x =$

26. $x^2 = a,\ a \geq 0 \Rightarrow x =$

27. $|x| = a,\ a \geq 0 \Rightarrow x =$

28. $x^2 \leq a,\ a \geq 0 \Rightarrow x \in$

29. $x^2 \geq a,\ a \geq 0 \Rightarrow x \in$

30. Raționalizarea fracției $\frac{1}{a\sqrt{b}} =$

31. Raționalizarea fracției $\frac{1}{a\sqrt{b} - c\sqrt{d}} =$

32. $a_{n-1}, a_n, a_{n+1}$ sunt termenii unei progresii aritmetice dacă ….

33. Rația unei progresii aritmetice este egală cu $r = .....$

34. Expresia termenului general a unei progresii aritmetice este $a_n =$

35. Suma primilor n termeni ai unei progresii aritmetice este egală cu

36. Expresia termenului general a unei progresii geometrice este $b_n =$

37. Rația unei progresii geometrice este egală cu $q = .....$

38. $b_{n-1}, b_n, b_{n+1}$ sunt termenii unei progresii geometrice dacă

39. Suma primilor n termeni ai unei progresii geometrice este egală cu

40. Dacă $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ atunci componentele vectorului $\overrightarrow{AB}$ sunt $\overrightarrow{AB}(.....;.....)$

41. Lungimea vectorului $\overrightarrow{AB}$ unde A şi B sunt cele de mai sus, este $|\overrightarrow{AB}| =$

42. Vectorii $\vec{v}_1(x_1, y_1)$ şi $\vec{v}_2(x_2, y_2)$ sunt egali dacă si numai dacă …

43. Vectorii $\vec{v}_1(x_1, y_1)$ şi $\vec{v}_2(x_2, y_2)$ sunt coliniari dacă si numai dacă ..

44.Vectorii $\vec{v}_1(x_1, y_1)$ și $\vec{v}_2(x_2, y_2)$ sunt ortogonali dacă si numai dacă45.Ecuația dreptei care trece prin două puncte $A(x_1, y_1),\ B(x_2, y_2)$ ;

46.Ecuația dreptei care trece printr-un punct $A(x_0, y_0)$ și are panta m;

47. $f(x) = ax + b$ este crescătoare $\Leftrightarrow$ ....

48. $f(x) = ax + b$ este descrescătoare $\Leftrightarrow$ ....

49. $f(x) = ax + b$ este constantă $\Leftrightarrow$ ....

50. Punctul de intersecție al funcției cu axa OX este ..... A(.....,.....)

51. Punctul de intersecție al funcției cu axa Oy este ..... B( ....., .....)

52.. Minimul funcției de gradul al doilea este …

53. Maximul funcției de gradul doi este ….

54. $f(x) = ax^2 + bx + c \geq 0 \Leftrightarrow$ ....

55. $f(x) = ax^2 + bx + c \leq 0 \Leftrightarrow$ ....

56. Dacă $z_1 = a + ib,\ z_2 = c + id \Rightarrow\ z_1 = z_2 \Leftrightarrow$ ....

57. Dacă $z_1 = a + ib,\ z_2 = c + id \Rightarrow\ z_1 \cdot z_2 =$ ....

58. Dacă $z_1 = a + ib,\ z_2 = c + id \Rightarrow\ z_1 : z_2 =$ ....

59. Modulul numărului complex $z_1 = a + ib,$ este …

60. $C_n^k =$ ....

61. $A_n^k =$ ....

62. permutări de n elemente , $P_n = n! =$ .....

63. $\log_a 1 =$ ...

64. $\log_a a =$ ...

65. $\log_a x + \log_a y =$ ...

66. $\log_a x - \log_a y =$ ...

67. $\lg 1 =$ ...

68. $\ln e =$ ...

69. $\sin 30^0 =$ ....., $\sin 45^0 =$ ....., $\sin 60^0 =$ .....

70. $\cos 30^0 =$ ....., $\cos 45^0 =$ ....., $\cos 60^0 =$ .....

71. $tg30^0 =$ ....., $tg45^0 =$ ....., $tg60^0 =$ .....

72. $\sin 2a =$ ...

73. $\sin 0^0 =$ ....., $\cos 0^0 =$ ....., $\sin 90^0 =$ .....$\cos 90^0 =$ .....

74. $\sin(a + b) =$ ...

75. $\cos(a - b) =$ ....

76 $\cos(\pi - a) =$ ....

77. $\sin(\frac{\pi}{2} - a) =$ ....

78. $\cos 2a =$ ...

79. $\sin(a - b) =$ ...

80. $\cos(a + b) =$ ....

81. formula fundamentală a trigonometriei

82. Teorema sinusurilor

83. Teorema cosinusului

84. $\sin(\pi - a) =$ ....

85. $\cos(\frac{\pi}{2}-a)=....$
86. Aria unui triunghi oarecare
87. Aria unui triunghi echilateral de latura a este ..
88. $\sqrt[n]{x^m}=.....$
89. $x^{\frac{m}{n}}=.....$
90. $a^x=N\Rightarrow x=...$
91. $\log_a x=b\Rightarrow x=....$
92. $\log_a x=\log_a y\Rightarrow....$
93. $a^x=a^y\Rightarrow....$
94. Derivate: $(x^{\,a})'=...$
95. $(\sin x)'=...$
96. $(\frac{1}{x})'=...$
97. $(\sqrt{u})'=...$
47. $(\ln u)'=...$
98. $(\frac{f}{g})'=...$
99. $(a^x)'=...$
100. $(\ln x)'=...$
101. $(\cos u)'=...$
102. $(\frac{1}{u})'=...$
103. $(f\cdot g)'=...$
104.Condiția ca o funcție f să fie crescătoare este ….
105. Condiția ca o funcție f să fie descrescătoare este ….
106. Funcția f este concavă dacă și numai dacă ….
107. Funcția f este convexă dacă și numai dacă ….
108. Ecuația tangentei la graficul unei funcției: ..
109. $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=....$
110. f este derivabilă în punctul $x_0\Leftrightarrow...$
110. f este continuă în punctul de acumulare $x_0\Leftrightarrow...$
112. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=....$
113. . $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=....$
114. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=....$
115. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=....$
116. . Ecuația asimptotei orizontale la graficul unei funcții f;
117. . Ecuația asimptotei oblice la graficul unei funcții f;
118. . Ecuația asimptotei verticale la graficul unei funcții f;

119. $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ....$

120. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = .....$

121. O matrice este inversabilă $\Leftrightarrow$

122. Ecuația unei drepte care trece prin două puncte $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ cu ajutorul determinanților:

123. Condiția ca trei puncte să fie coliniare: $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$.

124. Aria unui triunghi în funcție de determinanți este ...

125. Un sistem are soluție unică $\Leftrightarrow$

126. $\det(A \cdot B) = ...$

127. Dacă $A = k \cdot B$, A, B matrice, atunci $\det(A^n) =$

# INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI

## Probleme recapitulative Clasa a X-a

1). $8\cdot\frac{1}{2^4}-125\cdot\frac{1}{2\cdot 5^3}=8\cdot\frac{1}{16}-125\cdot\frac{1}{250}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0.$

2). $2^{100}:(2^{55}\cdot 2^{44})+2^{-2}=2^{100}:2^{99}+\frac{1}{4}=2^1+\frac{1}{4}=\frac{9}{4};$

3). $\sqrt[3]{27}-\sqrt{12}+2\sqrt{3}=\sqrt[3]{3^3}-\sqrt{2^2\cdot 3}+2\sqrt{3}=3-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}=3.$

4). $(1+\sqrt{3})^2=1+2\sqrt{3}+\sqrt{3}^2=4+2\sqrt{3},$ $\sqrt{(2\sqrt{3}-3)^2}=\left|2\sqrt{3}-3\right|=2\sqrt{3}-3,$

$(\sqrt{3}-2)^{-1}=\frac{1}{\sqrt{3}-2}=\frac{\sqrt{3}+1}{3-4}=-\sqrt{3}-2;$ Atunci,

$(1+\sqrt{3})^2-\sqrt{(2\sqrt{3}-3)^2}+(\sqrt{3}-2)^{-1}=4+2\sqrt{3}-2\sqrt{3}+3-\sqrt{3}-2=5-\sqrt{3}$ .

5). $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^{n}\Rightarrow\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{-3}=\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right)^{3}=3\sqrt{3}$ ; $\frac{1}{\sqrt{3}-2}=\frac{\sqrt{3}+2}{3-4}=-\sqrt{3}-2;$

$\left|\sqrt{12}-4\right|=-\left(\sqrt{12}-4\right)=-2\sqrt{3}+4$. Rezultatul final este egal cu $3\sqrt{3}-\sqrt{3}-2-2\sqrt{3}+4=2.$

6). $\frac{1}{2}-3=\frac{1-6}{2}=\frac{-5}{2}$, $0,5+\sqrt[3]{2^3}=0,5+2=\frac{5}{10}+2=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$, atunci $\frac{\frac{1}{2}-3}{0,5+\sqrt[3]{8}}-\frac{5}{2}:\frac{5}{2}=-1.$

7. $\log_2\frac{1}{2}=\log_2 2^{-1}=-1$; $\sqrt[3]{-64}=\sqrt[3]{-4^3}=-4$; $-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-2}=-\left(\frac{\sqrt{2}}{1}\right)^{2}=-2$, atunci cel mai mare număr este $\log_2\frac{1}{2}$.

8). $A=\sqrt{(\sqrt{5}-3)^2}+\sqrt{(2-\sqrt{5})^2}=\left|\sqrt{5}-3\right|+\left|2-\sqrt{5}\right|=-(\sqrt{5}-3)-(2-\sqrt{5})=-\sqrt{5}+3-2+\sqrt{5}=1.$

9. $\sqrt[3]{5^3}+\frac{1}{2}-\log_2 2^5-0,5=5+0,5-5-0,5=0;$

10. $\sqrt[3]{2^3\cdot 3}-3\cdot\sqrt[3]{4^3\cdot 3}+\sqrt[3]{-3^3\cdot 3}=2\cdot\sqrt[3]{3}-3\cdot 4\cdot\sqrt[3]{3}-3\cdot\sqrt[3]{3}=(2-12-3)\cdot\sqrt[3]{3}=-13\sqrt[3]{3};$

11. $\sqrt[3]{2^3\cdot 5}-\sqrt[3]{5^3\cdot 5}+2\cdot\sqrt[3]{-3^3\cdot 5}=2\sqrt[3]{5}-5\sqrt[3]{5}-6\sqrt[5]{5}=-9\sqrt[3]{5}.$

12. $\sqrt[3]{81}+\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{375}=\sqrt[3]{3^3\cdot 3}+\sqrt[3]{2^3\cdot 3}+\sqrt[3]{5^3\cdot 3}=(3+2+5)\cdot\sqrt[3]{3}=10\sqrt[3]{3}.$

13. $\sqrt[3]{9^{\log_3 1}}+\sqrt[3]{-27}=\sqrt[3]{9^0}-3=1-3=-2;$

14. Deoarece $\log_3 1=0\Rightarrow\log_3 81\cdot\log_3 27\cdot\log_3 9\cdot\log_3 3\cdot\log_3 1=0.$

15. $\log_6 2+\log_6 18=\log_6 2\cdot 18=\log_6 6^2=2\in\mathbb{N};$

16. $\log_a x+\log_a y=\log_a x\cdot y$, $\log_a x-\log_a y=\log_a\frac{x}{y}.$

$\log_5 100+\log_5 3^2-\log_5 36=\log_5\frac{100\cdot 9}{36}=\log_5\frac{100}{4}=\log_5 25=\log_5 5^2=2.$

17). $\frac{\log_4 18\cdot 12-\log_4 27}{\log_4 2}=\frac{\log_4\frac{18\cdot 12}{27}}{\log_4 2}=\frac{\log_4 8}{\log_4 2}=\log_2 8=3;$

18. $\log_3 27+\log_4 16-\sqrt[3]{125}=\log_3 3^3+\log_4 4^2-\sqrt[3]{5^3}=3+2-5=0;$

19. $\log_6 24-\log_6 4=\log_6\frac{24}{6}=\log_6 6=1$ conform formulelor $\log_a x-\log_a y=\log_a\frac{x}{y}$ și $\log_a a=1$.

20. $a,b,c$ sunt în progresie aritmetică , atunci $b=\frac{a+c}{2}$. În cazul nostru, $\frac{7}{3}=\frac{\lg\sqrt[3]{x}+2\lg x}{2}\Rightarrow 14=3\cdot\left(\frac{1}{3}\lg x+2\lg x\right)\Rightarrow 14=7\lg x\Rightarrow\lg x=2\Rightarrow x=10^2=100$;

21. $tg45^0=1\Rightarrow\lg 1=0\Rightarrow\lg\left(tg1^0\right)\cdot\lg\left(tg2^0\right)\cdot\lg\left(tg3^0\right)\cdot.....\cdot\lg\left(tg45^0\right).=0$;

22. $\lg(tg40^0)\cdot\lg(tg41^0)\cdot.....\cdot\lg(tg45^0)=0$.

23. Funcția $f(x)=\log_{4x-1}8x^2$ este corect definită $\Leftrightarrow\begin{cases}8x^2\rangle 0,\ \forall x\in\mathbb{R}\\ 4x-1\rangle 0\Rightarrow x\rangle\frac{1}{4}\end{cases}\Rightarrow x\in\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2};\infty\right)$.
$4x-1\neq 1\Rightarrow x\neq\frac{1}{2}$

24. $\frac{1}{3}\cdot\log_2 125-3\cdot\log_2 x-4\cdot\log_2 y=\log_2\left(5^3\right)^{\frac{1}{3}}-\log_2 x^3-\log_2 y^4=\log_2\frac{5}{x^3\cdot y^4}$

25. $\log_2 288=\log_2 2^5\cdot 3^2=\log_2 2^5+\log_2 3^2=5\log_2 2+2\log_2 3=5+2a$.

26. $\log_3 24=\log_3 2^3\cdot 3=\log_3 2^3+\log_3 3=3\log_3 2+1=1+3a$.

27. $(4-6i)\cdot a+(8+2i)\cdot b=4+2i\Rightarrow 4a+8b+(-6a+2b)\cdot i=4+2i\Rightarrow\Rightarrow\begin{cases}4a+8b=4\\ -6a+2b=2\end{cases}\Big|\cdot(-4)\Rightarrow$
$a=-\frac{1}{7},\ b=\frac{24}{56}$.

28. $(3-2i\sqrt{2})^2=a+ib\Leftrightarrow 9-12i\sqrt{2}-8=a+ib\Rightarrow\ 1-12i\sqrt{2}=a+ib\Rightarrow a=1,\ b=-12\sqrt{2}$.

29. $i^{33}+i^{55}+i^{77}=i^{4\cdot 8+1}+i^{4\cdot 13+3}+i^{4\cdot 19+1}=i-i+i=i$;

30. $(2+i\sqrt{3})^2+(2-i\sqrt{3})^2=4+4i\sqrt{3}-3+4-4i\sqrt{3}-3=2\in\mathbb{Z}$;

31. $z_1\cdot z_2=26+7i\Rightarrow|z_1\cdot z_2|=|26+7i|=\sqrt{26^2+7^2}=\sqrt{725}$.

32. $\sqrt[3]{x^2+5x+5}=-1\big|()^3\Rightarrow x^2+5x+5=-1\Rightarrow x^2+5x+6=0\Rightarrow x\in\{-3;-2\}$.

33. $\sqrt{x-3}=5\big|()^2\Rightarrow x-3=25\Rightarrow x=28$ care respectă condiția de existență $x-3\geq 0$.

34. $\sqrt[3]{2-x}=x\big|()^3\Rightarrow 2-x=x^3\Rightarrow x^3+x-2=0\Rightarrow$ soluțiile întregi se găsesc printre divizorii termenului liber, 2 cu schema lui Horner sau cu ajutorul descompunerii: $x^3-x+2x-2=0\Rightarrow x(x^2-1)+2(x-1)=0\Rightarrow\ (x-1)(x^2+x+2)=0\Rightarrow x_1=1,\ x_{2,3}\notin\mathbb{R}$. $S=\{1\}$

35. $\sqrt{x^2-4x+4}=3\big|()^2\Rightarrow x^2-4x+4=9\Rightarrow x^2-4x-5=0\Rightarrow\ \ x\in\{-1;5\}$. Din condiția de existență
$x^2-4x+4\rangle 0$ care are loc pentru orice x real și pozitiv, întrucât discriminantul ecuației de gradul doi $x^2-4x+4=0$ este negativ, rezultă $S=\{-1;5\}$.

36. $\sqrt{x^2-x-2}=2\big|()^2\Rightarrow x^2-x-2=4\Rightarrow x^2-x-6=0\Rightarrow x\in\{-2;3\}$. Din condiția de existență a ecuației, $x^2-x-2\rangle 0$ rezultă $S=\{-2;3\}$.

37. $\sqrt{3x+4}=2\sqrt{x}\,|()^2 \Rightarrow 3x+4=4x \Rightarrow 3x-4x=-4 \Rightarrow x=4$. Condiții de existență a ecuației: $\begin{cases}3x+4\rangle 0\\ x\rangle 0\end{cases}$.

38. $\sqrt{x+5}=x-1\,|()^2 \Rightarrow x+5=(x-1)^2 \Rightarrow x+5=x^2-2x+1 \Rightarrow \quad x^2-3x-4=0 \Rightarrow \quad x\in\{-1;4\}$.

Din condițiile de existență a ecuației $\begin{cases}x+5\geq 0\\ x-1\geq 0\end{cases}\Rightarrow x\geq 1$, se obține $S=\{4\}$.

39. $\sqrt{-x^2+5x+3}=x\,|()^2 \Rightarrow -x^2+5x+3=x^2 \Rightarrow 2x^2-5x-3=0 \Rightarrow x\in\left\{-\frac{1}{4},3\right\}$.

Din condițiile de existență ale ecuației obținem: $\begin{cases}-x^2+5x+3\rangle 0\\ x\geq 0\end{cases}$. Atunci, $S=\{3\}$.

40. $\sqrt{5-x}=x+1\,|()^2 \Rightarrow 5-x=(x+1)^2 \Rightarrow 5-x=x^2+2x+1 \Rightarrow x^2+3x-4=0 \Rightarrow x\in\{-4;1\}$.

Din condițiile de existență a ecuației $\begin{cases}5-x\geq 0\\ x+1\geq 0\end{cases}\Rightarrow x\in[-1;5]$, se obține $S=\{1\}$.

41. $\sqrt[3]{x^3+x^2-x-2}=x\,|()^3 \Rightarrow x^3+x^2-x-2=x^3 \Rightarrow x^2-x-2=0 \Rightarrow x\in\{-1;2\}$.

42. $\sqrt{4x-3}=2x-3\,|()^2 \Rightarrow 4x-3=(2x-3)^2 \Rightarrow 4x-3=4x^2-12x+9 \Rightarrow x^2-4x+3=0 \Rightarrow$

$x\in\{1;3\}$. Din condițiile de existență a ecuației $\begin{cases}4x-3\geq 0\\ 2x-3\geq 0\end{cases}\Rightarrow x\geq\frac{3}{2}$, atunci $S=\{3\}$.

43. $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}=2 \Rightarrow \sqrt{1+x}=2-\sqrt{1-x}\,|()^2 \Rightarrow \quad 1+x=4-2\sqrt{1-x}+1-x \Rightarrow$

$2\sqrt{1-x}=4-2x\,|:2 \Rightarrow \sqrt{1-x}=2-x\,|\ ()^2 \Rightarrow 1-x=4-4x+x^2 \Rightarrow \quad x^2-3x+3=0 \Rightarrow x\notin\mathbb{R}$.

44. $f(-2)+f(-1)+f(1)+f(2)=\frac{1}{2^2}-2^2+\frac{1}{2}-2+2-\frac{1}{2}+2^2-\frac{1}{2^2}=0$.

45. $2^x+2^{x+2}=10 \Rightarrow 2^x\left(1+2^2\right)=10 \Rightarrow 2^x=\frac{10}{5}=2 \Rightarrow x=1;$

46. $\left(\frac{1}{2}\right)^x=2^{x-2} \Rightarrow 2^{-x}=2^{x-2} \Rightarrow -x=x-2 \Rightarrow -2x=-2 \Rightarrow x=1$.

47. $3^x+2\cdot 3^{x+1}=7 \Leftrightarrow 3^x\cdot(1+2\cdot 3)=7\,|:7 \Rightarrow 3^x=1 \Rightarrow x=0.$

48. $(a^{f(x)}=a^{g(x)} \Rightarrow f(x)=g(x))$,

$3^{2x^2-5x}=3^{-3} \Rightarrow 2x^2-5x=-3 \Rightarrow 2x^2-5x+3=0 \Rightarrow x\in\left\{1;\frac{3}{2}\right\}$.

49. $5^{1-x}=25^x \Rightarrow 5^{1-x}=5^{2x} \Rightarrow 1-x=2x \Rightarrow 3x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{3}.$

50. $2^{x^2-4x}=\frac{1}{8} \Rightarrow 2^{x^2-4x}=2^{-3} \Rightarrow x^2-4x=-3 \Rightarrow x^2-4x+3=0 \Rightarrow x\in\{1;3\}$.

51. $3^x+9^x+27^x=39 \Rightarrow 3^x+3^{2x}+3^{3x}=39 \Rightarrow 3^x+\left(3^x\right)^2+\left(3^x\right)^3=39 \Rightarrow$ se face notația $3^x=t\rangle 0$. Atunci, ecuația dată devine $t+t^2+t^3=39 \Rightarrow t(1+t+t^2)=39=3\cdot 13 \Rightarrow$ $t=3 \Rightarrow 3^x=3 \Rightarrow x=1.$

$S=\{1\}$.

52. $5^{1+x^2+6x}=5^{-7} \Rightarrow 1+x^2+6x=-7 \Rightarrow x^2+6x+8=0 \Rightarrow x\in\{-4;-2\}$

53. $3^{x-2}+3^{x+2}=\frac{82}{81}\Rightarrow\frac{3^x}{3^2}+3^x\cdot 3^2=\frac{82}{81}\Rightarrow\ 3^x\left(\frac{1}{9}+9\right)=\frac{82}{81}\Rightarrow 3^x\cdot\frac{82}{9}=\frac{82}{81}\Big|\cdot\frac{9}{82}\Rightarrow\ 3^x=\frac{82}{81}\cdot\frac{9}{82}\Rightarrow$

$3^x=\frac{1}{9}=3^{-2}\Rightarrow x=-2$.

54. $2^{x+2}+2^x-10=0\Rightarrow 2^x\cdot 2^2+2^x-10=0\Rightarrow 2^x(4+1)=10\Rightarrow 2^x=\frac{10}{5}\Rightarrow 2^x=2\Rightarrow x=1.$

55. $2^{\sqrt{x-1}}=4\Rightarrow 2^{\sqrt{x-1}}=2^2\Rightarrow\sqrt{x-1}=2\big|()^2\Rightarrow x-1=4\Rightarrow x=5$. Condiții de existență a radicalului: $x-1\geq 0\Rightarrow x\geq 1.$

56. $\log_2(x+5)=3\Rightarrow x+5=2^3\Rightarrow x=8-5\Rightarrow x=3$, care verifică condiția de existență a logaritmului $x+5\rangle 0\Rightarrow x\rangle -5.$

57. $\lg(x^2-3x)=1\Rightarrow x^2-3x=10\Rightarrow x^2-3x-10=0\Rightarrow x\in\{-2;5\}$. Din condițiile de existență a ecuației rezultă $x^2-3x\rangle 0\Rightarrow x\in(-\infty,0)\cup(3;\infty)$, atunci $S=\{-2;5\}$.

58. $\log_3\left(x^2-7x+8\right)=\log_3(x-7)\Rightarrow\ x^2-7x+8=x-7\Rightarrow x^2-8x+15=0\ \ x\in\{3;5\}$.

Din condițiile de existență obținem $\begin{cases}x^2-7x+8\rangle 0\\ x-7\rangle 0\end{cases}\Rightarrow x\rangle 7$, așadar, $S=\{\varnothing\}$.

59. $\log_2(x+2)+\log_2 x=3\Rightarrow\log_2(x+2)\cdot x=3\Rightarrow x^2+2x=2^3\Rightarrow x^2+2x-8=0\Rightarrow x\in\{-4;2\}$.

Din condițiile de existență a ecuației $\begin{cases}x+2\rangle 0\\ x\rangle 0\end{cases}\Rightarrow x\rangle 0$ obținem $S=\{2\}$. S-au folosit formulele

$\log_a x+\log_a y=\log_a x\cdot y$ și $\log_a x=N\Rightarrow x=a^N$.

60. $\log_2(2x+4)=\log_2(3x+1)\Rightarrow 2x+4=3x+1\Rightarrow 2x-3x=1-4\Rightarrow x=3$.

Din condițiile de existență a ecuației $\begin{cases}2x+4\rangle 0\\ 3x+1\rangle 0\end{cases}\Rightarrow x\rangle -\frac{1}{3}$, atunci $S=\{3\}$.

61. $\log_2(x^2-2x+1)=\log_2(x-1)\Rightarrow\quad x^2-2x+1=x-1\Rightarrow\quad x^2-3x+2=0\Rightarrow x\in\{1;2\}$. Din condițiile de existență a logaritmilor $\begin{cases}x^2-2x+1\rangle 0\\ x-1\rangle 0\end{cases}\Rightarrow x\rangle 1$, se obține $S=\{2\}$.

62. $\lg^2 x-4\lg x+3=0$. Se notează $\lg x=t\Rightarrow t^2-4t+3=0\Rightarrow t\in\{1;3\}\Rightarrow\ \lg x=1\Rightarrow x=10$ și $\lg x=3\Rightarrow x=1000$.

63. $|A\cup B|=2500$, $|A|=|B|=2015\Rightarrow\ |A\cap B|=|A|+|B|-|A\cup B|=2015+2015-2500=1530$.

64. 6!=720;

65. În fiecare din cele cinci poziții ale cifrelor telefonului pot fi oricare din cele 9 elemente ale mulțimii, adică $9\cdot 9\cdot 9\cdot 9\cdot 9=9^5$;

66. Numărul submulțimilor unei mulțimi cu n elemente este egal cu $2^n$ iar pentru submulțimi nevide $2^n$-1;

În cazul nostru, N= $2^4$-1=15;

67. $10!=1\cdot 2\cdot 3\cdot.....\cdot 10$;

68. $A_9^5=\frac{9!}{(9-5)!}=\frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4!}{4!}=15120$;

69. $A_8^6=\frac{8!}{(8-6)!}=\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot \cancel{2!}}{\cancel{2!}}=20160$.

70. $A_8^4 = \frac{8!}{(8-4)!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!}} = 1680$;

71. Cei 8opt alergători pot ocupa oricare unul din cele 3 locuri, I, II, III adică $8\cdot 7\cdot 6 = 336$ sau $A_8^3 = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5!}{5!} = 336$ situații;

72. $P_4 = 4! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 24$.

73. $C_{10}^9 - C_9^8 = \frac{10!}{(10-9)!\cdot 9!} - \frac{9!}{(9-8)!\cdot 8!} = 10-9 = 1$.

74. $A_5^4 = \frac{5!}{(5-4)!} = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 120$, $C_7^3 = \frac{7!}{(5-3)!\cdot 3!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot \cancel{3!}}{2!\cdot \cancel{3!}} = 35$; $P_3 = 3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6$

$\Rightarrow \frac{2C_7^3 - A_5^4}{P_3} = \frac{2\cdot 35 - 120}{6} = \frac{-50}{6} = -\frac{25}{3}$;

75. $\frac{(n+1)!+n!}{n!} = 2020 \Rightarrow \frac{(n+1)\cdot n!+n!}{n!} = 2020 \Rightarrow \frac{n!(n+2)}{n!} = 2020 \Rightarrow n+2 = 2020 \Rightarrow n = 2018$.

76. $C_8^3 - C_8^5 = \frac{8!}{(8-3)!\,3!} - \frac{8!}{(8-5)!\,5!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6}{6} - \frac{8\cdot 7\cdot 6}{6} = 0$. Se putea folosi si formula $C_n^k = C_n^{n-k}$.

77. $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$, $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$.

$C_9^6 = \frac{9!}{(9-6)!\,6!} = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot \cancel{6!}}{3!\cdot \cancel{6!}} = 94$; $C_9^5 = \frac{9!}{(9-5)!\,5!} = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot \cancel{5!}}{4!\cdot \cancel{\infty}} = 126$;

$A_9^5 = \frac{9!}{(9-5)!} = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!}} = 15120$. Atunci, $\frac{C_9^6 - C_9^5}{A_9^5} = \frac{-32}{15120}$.

78. $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$, $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$. $A_7^5 = \frac{7}{(\ -\ 7} = \frac{!\cdot\ \ \cdot \cancel{7}}{\cancel{2}5\ \ )} = 2520$,

$A_7^4 = \frac{7!}{(7-4)!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 840$, $C_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!\,3!} = \frac{5\cdot 4\cdot \cancel{3!}}{2!\cdot \cancel{3!}} = 10$;

$\frac{A_7^4 - A_7^4}{C_5^3} = \frac{2520-840}{10} = 178$

79. $A_{2014}^1 = \frac{2014!}{(2014-1)!} = \frac{2014\cdot 2013!}{2013!} = 2014$, $C_{2014}^1 = \frac{2014!}{(2014-1)!\cdot 1!} = \frac{2014\cdot \cancel{2013!}}{\cancel{2013!}} = 2014$;

Se pot folosi si formulele $A_n^1 = n$, $C_n^1 = n$. $\frac{A_{2014}^1 + C_{2014}^1}{2014} = \frac{A_{2014}^1 + C_{2014}^1}{2014} = \frac{2\cdot 2014}{2014} = 2$.

80. $P_n = n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot ....\cdot n$ $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$, $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$.

$P_6 = 6! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6 = 720$, $A_6^3 = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 120$

$C_7^3 = \frac{7!}{(5-3)!\,3!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot \cancel{3!}}{2!\cdot \cancel{3!}} = 35;$, $\frac{P_6 + A_6^3}{C_7^3} = \frac{120+720}{35} = \frac{168}{7}$.

81. $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}=-4n+6\Rightarrow\frac{(n+1)\cdot n\cdot\cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}}=-4n+6\Rightarrow \quad n^2+n=-4n+6\Rightarrow n^2+5n-6=0$ de unde se obține $n\in\{-6;1\}$. Din condiția de existență a factorialelor rezultă că $n-1\geq 0\Rightarrow n\geq 1$, așadar $S=\{1\}$.

82. $A_5^2=\frac{5!}{(5-2)!}=\frac{5\cdot 4\cdot 3!}{3!}=20$, $C_5^2=\frac{5!}{(5-2)!\cdot 2!}=\frac{5\cdot 4\cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}\cdot 2}=10;$

$P_4=4!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4=24\Rightarrow A_5^2+C_5^2-P_4=20+10-24=6.$

83. $C_n^k=\frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}\Rightarrow C_7^5=\frac{7!}{(7-5)!\cdot 5!}=\frac{7\cdot 6\cdot 5!}{2!\cdot 5!}=\frac{42}{2}=21;$ $C_7^6=\frac{7!}{(7-6)!\cdot 6!}=\frac{7\cdot 6!}{1!\cdot 6!}=7,$

$C_6^4=\frac{6!}{(6-4)!\cdot 4!}=\frac{6\cdot 5\cdot 4!}{2!\cdot 4!}=\frac{30}{2}=15.$ $C_7^5-C_7^6-C_6^4$= 21-7-15=-1;

84. Se utilizează formula $C_n^k=C_n^{n-k}$ sau se calculează efectiv combinările:

$C_{18}^2=C_{18}^{18-2}=C_{18}^{16}$, $C_{18}^3=C_{18}^{18-3}=C_{18}^{15}$. Atunci, $C_{18}^2-C_{18}^{16}+C_{18}^3-C_{18}^{15}=0$.

85. $C_n^0+C_n^1=8\Rightarrow 1+n=8\Rightarrow n=7$.

86. $C_n^3-2n=0\Rightarrow\frac{n!}{(n-3)!\cdot 3!}-2n=0\Rightarrow n(n-1)(n-2)=12n$. Cum n este natural și $n\neq 0\Rightarrow$prin împărțirea ecuației cu n că $n^2-3n-10=0$ cu soluția n=5.

87. Conform formulei se obține $C_n^2=28\Leftrightarrow\frac{n!}{(n-2)!\cdot 2!}=28\Rightarrow n(n-1)=2\cdot 28\Rightarrow n=8.$ este singura care verifică condițiile de existență: $n\in\mathbb{N}, n\geq 2.$

88. $2C_n{}^2-6C_{n+1}{}^3=6n\Rightarrow$ $2\cdot\frac{n!}{(n-2)!\cdot 2!}-6\cdot\frac{(n+1)!}{(n-2)!\cdot 3!}=6n\Rightarrow$

$2\cdot\frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!\cdot 2}-6\cdot\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!\cdot 6}=6n\Rightarrow$

$n(n-1)-(n+1)n(n-1)-6n=0\Rightarrow n(n-1-n^2+1-6)=0\Rightarrow\ n(-n^2+n-6)=0\Rightarrow n\in\varnothing.$

Condiții de existență a combinărilor: $n\geq 2,\ n\in\mathbb{N}$.

89. Se aplică binomul lui Newton: $C_n^0+C_n^1+C_n^2+.....+C_n^n=2^n$; În cazul nostru $\left(C_n^n+C_n^{n-1}+C_n^{n-2}+.....+C_n^2+C_n^1\right)+C_n^0=1023+C_n^0\Rightarrow$

$2^n=1023+C_n^0\Rightarrow 2^n=1023+1\Rightarrow 2^n=1024\Rightarrow n=10.$

90. $C_{2020}^1+C_{2020}^2+C_{2020}^3+.....+C_{2020}^{2020}=2^{2020}-1$ din formula $2^n=(1+1)^n=C_n^0+C_n^1+C_n^2+C_n^3+.....+C_n^n$

91.

$\log_2 128=\log_2 2^7=7\log_2 2=7\cdot 1=7;\ \log_2\frac{1}{64}=\log_2\frac{1}{2^6}=\log_2 2^{-6}=-6\cdot 1=-6;$

$\log_5 125=\log_5 5^3=3\cdot\log_5 5=3;\ P=\frac{numar_cazuri_favorabile}{numar_cazuri_egal_posibile}=\frac{2}{3}.$

92. Se verifică pentru fiecare element al mulțimii $\{1,2,3,4,5\}$ inegalitatea $n!\rangle 20.$

$1!=1, 2!=2,\ 3!=6,\ 4!=24\rangle 20,\ 5!=120\rangle 20.$ Așadar, sunt două cazuri fabvorabile . $P=\frac{2}{5}$.

93. Numere prime: 2; 3; 5; 7; 11; 13 Numărul cazurilor favorabile: 6;

Numărul cazurilor egal posibile 13; atunci, $P=\frac{6}{13}$.

94. $P=\frac{C_8^2}{C_{12}^2}=\frac{\frac{8!}{6!\cdot 2!}}{\frac{12!}{10!\cdot 2!}}=\frac{14}{33}$; 95. Numărul de cazuri favorabile, 2: $27=3^3$, $64=4^3$.

Numărul de cazuri egal posibile, 90: 10, 11, 12, 13, …., 99. $P=\frac{2}{90}=\frac{1}{45}$.

96. Număr cazuri favorabile, 3: 115, 151, 511; Număr cazuri posibile, 900. $P=\frac{3}{900}=\frac{1}{300}$.

97. $P=\frac{C_6^4}{C_{14}^4}=\frac{15}{7\cdot 13\cdot 11}$; 98. TVA = $\frac{18}{100}\cdot 250=\frac{4500}{100}=45$.

99. La clasa a X-a B sunt promovați 23 din 30 adică $\frac{23\cdot 100}{30}=76$ adică 76% procentul de promovabilitate.

100. $TVA=\frac{19}{100}\cdot 238=\frac{4522}{100}=45,22$

101. $884-850=34\Rightarrow$ $p\%$ $din$ $850=34\Rightarrow\frac{p}{100}\cdot 850=34\Rightarrow p=\frac{340}{85}=4$.

102. Fie x prețul inițial. Atunci, după prima ieftinire se obține prețul $x-\frac{10}{100}x=\frac{90x}{100}=\frac{9}{10}x$.

După a doua ieftinire se obține prețul de 567 lei adică $\frac{9}{10}x-\frac{10}{100}\cdot\frac{9}{10}x=567\Rightarrow\frac{90x-9x}{100}=567\Rightarrow 81x=567\cdot 100\Rightarrow x=700$.

103. $x+\frac{15}{100}x=51\Rightarrow\frac{115}{100}x=51\Rightarrow x=\frac{51\cdot 100}{115}=44,34$.

104. $D=p\%$ $din$ $N\Rightarrow$ $D/_{1an}=6\%$ $din$ $1800=\frac{6}{100}\cdot 1800=108$ euro.

105. $S_{fin}=S_{in}+D=1000+\frac{5}{100}\cdot 1000\cdot 2=1000+100=1100$ euro.

106. $D=8\%$ $din$ $1500=\frac{8}{100}\cdot 1500=120$. Suma finală este 1500+120=1620.

107. $a=\frac{25}{200}\cdot b\Rightarrow a=\frac{1}{4}\cdot b\Rightarrow a+b=\frac{5}{4}b$ sau $b=4a\Rightarrow a+b=a+4a=5a$.

$\frac{x\cdot 5a}{100}=a\Rightarrow x=\frac{100a}{5a}=20$. Răspuns, 20%.

108. $x-\frac{15}{100}\cdot x=680\Rightarrow 85x=68000\Rightarrow x=800$ lei.

## 1.1 Matrice

**1**. a) (2;3); b) (3;3); c) (3;2) ; **2.** x=5; y=10; **3**. $S=\{(2;-1;3)\}$; **4**. $S=\{(5;6;-4)\}$;

**5.** a=8, b=3 sau -3, c=5; **6.** a=1, b=2, c=3; **7**. x = -2; y = 2, z = 0; **8**. X=2, y=1, z=1;
**9.** x=4, y=3, z=4, t=3; **10**. x=2; y= 4 sau -4, z = 3 sau -5;

**11.** $n\cdot\begin{pmatrix} 1 & \frac{n+1}{2} \\ n+1 & \frac{(n+1)(2n+1)}{6} \end{pmatrix}$;

**12.** Se ştie că $1+2+2^2+2^3+...+2^n=\frac{2^{n+1}-1}{2-1}$ ca suma unei progresii geometrice, de unde rezultă că $2+2^2+2^3+...+2^n=2^{n+1}-2$;

**13.** $\sum_{k=1}^{n}k\cdot k!=\sum_{k=1}^{n}[(k+1)!-k!]=....=(n+1)!-1;$ $\sum_{k=1}^{n}C_n^k=C_n^1+C_n^2+...+C_n^n=2^n-1;$

$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...+\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}{\frac{1}{2}-1}=\frac{2^n-1}{2^n}$ ca suma unei progresii geometrice.

## 1.2 Operații cu matrice

**5**. a) $A+B=\begin{pmatrix}-2 & 5\\ 1 & 0\end{pmatrix}$; b) $A-B=\begin{pmatrix}-4 & -1\\ -3 & 2\end{pmatrix}$; c) $A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & -11\\ 1 & -4\end{pmatrix}$; d) $B\cdot A=\begin{pmatrix}-6 & 8\\ -5 & 3\end{pmatrix}$;

e) $A^2=\begin{pmatrix}7 & -4\\ 2 & -1\end{pmatrix}$; f) $B^2=\begin{pmatrix}7 & 0\\ 0 & 7\end{pmatrix}$; g) $f(A)=\begin{pmatrix}13 & -9\\ 4 & -4\end{pmatrix}$; h) $f(B)=\begin{pmatrix}4 & -6\\ -4 & 8\end{pmatrix}$;

**6.** a) $3A+2B=\begin{pmatrix}-10 & 5 & -5\\ 0 & 5 & 10\\ -5 & 5 & 0\end{pmatrix}$; b) $A-2B=\begin{pmatrix}0 & -5 & -5\\ -2 & -3 & 6\\ -1 & -3 & 2\end{pmatrix}$; c) $A\cdot B=\begin{pmatrix}3 & -6 & -5\\ 1 & 6 & -4\\ 2 & -1 & -4\end{pmatrix}$;

d) $A^2=\begin{pmatrix}5 & -2 & 4\\ -2 & 3 & 2\\ 2 & 0 & 3\end{pmatrix}$; **7.** $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -4 & 2\end{pmatrix}$; **8.** Se ştie că ln a +ln b= ln ab;

**9.** $H(a)\cdot H(b)=\begin{pmatrix}1 & 0 & a+b\\ -(a+b) & 1 & -\frac{1}{2}(a+b)^2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=H(a+b),\forall a,b\in\mathbb{R}$

**12. a=2, b=-12, c=10, d=1; 13. x=3, y=1; 14. x=2; 15. A) În M pentru x=0 se obține matricea unitate; b) x=0; c)** $x_{1,2}=-1\pm\sqrt{5}$ .

**16 .** $\begin{pmatrix}7 & -4\\ 8 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3a+b & -a\\ 2a & a+b\end{pmatrix}\Rightarrow a=4;\ b=-5.$**; 17. x = 5; y = 2;** **18.** a) Se arată prin calcul direct; b) $A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{-1}{4}\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$; **19.** Se verifică prin calcul direct; **20. x = 5; y = 10;**

**21.** Relaţia $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ este echivalentă cu AB=BA adică $\begin{pmatrix}1 & z+x\\ y & yz+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+zy & x+z\\ y & 1\end{pmatrix}$. Din relaţia de egalitate a matricelor se obţin soluţiile (x;0;y) sau (x;y;0).

**22.b)** $X(a)X(b)=X(a+b+ab)=X[(a+1)(b+1)-1]=$
$X[(1+1)(2+1))(3+1)...(2011+1)-1]=X(t-1)\Rightarrow t=2\cdot3\cdot4\cdot...\cdot2012=2012!$

**23.** Se verifică prin calcul direct;

**24.** a) $X(a)\cdot X(b)=(I_2+aA)(I_2+bA)=...$

b) $X(1)\cdot X(2)\cdot....\cdot X(n)=X(2011)\Leftrightarrow X(1+2+3+...+n)=X(2011)\Rightarrow$

1+2+3+....+ n = 2011 $\Leftrightarrow \frac{n(n+1)}{2}=2011\Rightarrow n\notin\mathbb{N}$

Prin urmare, $S=\{\varnothing\}$; **27.** $A^2+A+2I_2=O_2\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x^2+x-y & xy+y\\ -x-1 & -y\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$. Se obţine x = -1, y = 2. **28.** Dacă $X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ din relaţia de egalitate dată se obţine $X=\begin{pmatrix}a & b\\ \frac{b}{2} & a+b\end{pmatrix}$; **29.** Din relaţia de egalitate se obţine sistemul cu ecuaţiile 2x+y = 4 şi x+y = 1 de unde rezultă x=3, şi y = -2; **30**. Se ia $X=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}$ şi din A·X=X·A rezultă ax+bz = ax+by, ay+bt = bx+ay, bx+az = az+bt, by+at = bz+at, de unde se obţine că z = y şi t = x; **31**. Rădăcinile $x_1,x_2\in\mathbb{C}$ satisfac ecuaţia (x-1)($x^2$ + x+1)=0 adică $x^3$ -1=0, prin urmare $x_1^3$ =1, $x_2^3$ =1. Cum f(1)= a+b+c se efectuează înmulţirea matricelor şi se obţine relaţia cerută.

**32.** $e^{\ln x}=x\Rightarrow 1+2+2^2+....+2^{10}=\frac{2^{11}-1}{2-1}=2^{11}-1=2047$;

$\ln 1+\ln 2+\ln 2^2+\ln 2^3+....+\ln 2^{10}=0+\ln 2+2\ln 2+3\ln 2+....+10\ln 2=(1+2+3+...+10)\cdot\ln 2=55\cdot\ln 2.$

$\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{2^2}+.....+\sqrt{2^{10}}=1+\sqrt{2}+2+2\sqrt{2}+2^2+4\sqrt{2}+2^3+8\sqrt{2}+2^4+16\sqrt{2}+2^5=$

$31\sqrt{2}+(1+2+2^2+2^3+2^4+2^5)=31\sqrt{2}+63.$

sau ca sumă a unei progresii geometrice:

$\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{2^2}+.....+\sqrt{2^{10}}=\sqrt{1}\cdot\frac{\sqrt{2}^{11}-1}{\sqrt{2}-1}=(32\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)=31\sqrt{2}+63$

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+.....+\frac{1}{2^{10}}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{11}-1}{\frac{1}{2}-1}=\frac{-2(1-2^{11})}{2^{11}}=\frac{2^{11}-1}{2^{10}}.$

**33.** $A(1)+A(2)+A(3)+....+A(100)=\begin{pmatrix}2\sum\limits_{k=1}^{100}k & \sum\limits_{k=1}^{100}2^k\\ \sum\limits_{k=1}^{100}k\cdot k! & \sum\limits_{k=1}^{100}C_n^k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10100 & 2^{102}-2\\ 101!-1 & 2^{100}-1\end{pmatrix}.$

$2\sum\limits_{k=1}^{100}k=2\cdot(1+2+3+...+100)=2\cdot\frac{100(100+1)}{2}=100\cdot 101;$

$\sum\limits_{k=1}^{100}2^k=2+2^2+2^3+....+2^{100}=2\cdot\frac{2^{102}-1}{2-1}=2^{101}-2;$

$\sum\limits_{k=1}^{100}k\cdot k!=\sum\limits_{k=1}^{100}[(k+1)!-k!]=101!-1;$ $\qquad\qquad$ $\sum\limits_{k=1}^{100}C_{100}^k=C_{100}^1+C_{100}^2+C_{100}^3+....+C_{100}^{100}=2^{100}-1.$

34. a)

$M_n(x)\cdot M_n(y)=\begin{pmatrix}1+nx & nx\\ -nx & 1-nx\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1+ny & ny\\ -ny & 1-ny\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+n(x+y) & n(x+y)\\ -n(x+y) & 1-n(x+y)\end{pmatrix}=M_n(x+y)$,

unde $x,y\in\mathbb{R};n\in\mathbb{N}^*$

$M_n\left(\sqrt{x}\right)\cdot M_n\left(\sqrt{x+3}\right)=M_n\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+3}\right)=M_n(3)\Rightarrow$

$\Rightarrow\sqrt{x}+\sqrt{x+3}=3$, unde $x\in[0,\infty)$.

$\Rightarrow \cancel{x}+3=9-6\sqrt{x}+\cancel{x}\Rightarrow 6\sqrt{x}=6\Rightarrow x=1.$

b) $M_n(x)\cdot M_m(x)=\begin{pmatrix}1+nx & nx\\ -nx & 1-nx\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1+mx & mx\\ -mx & 1-mx\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+(n+m)x & (n+m)x\\ -(n+m)x & 1-(n+m)x\end{pmatrix}=M_{n+m}(x)$

.

Altfel, $M_n(x)\cdot M_m(x)=(I_2+nA)\cdot(I_2+mA)=I_2+(m+n)A=M_{m+n}(x)$, unde $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$ și $A^2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$. Atunci, $M_1(1)\cdot M_2(2)\cdot\ldots\cdot M_{2019}(1)=M_{\frac{2019\cdot2020}{2}}(1)=I_2+2019\cdot1010\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$.

**35.** a) Fie $X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$. Din $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & -3\\ 3 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -3\\ 3 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ rezultă $c=-b,d=a+b$. Aşadar, forma matricelor X este $X=\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a+b\end{pmatrix}$.

b) Din $X^2=A\big|\cdot X\Rightarrow X^3=A\cdot X$ şi din $X\cdot\big|X^2=A\Rightarrow X^3=X\cdot A$ rezultă $A\cdot X=X\cdot A$, aşadar, X este de forma $X=\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a+b\end{pmatrix}$. Din $\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a+b\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}3 & -3\\ 3 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow$ b=1 şi a = -2 sau b= - 1 şi a = 2. Aşadar, $X=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$ *sau* $X=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

**36**. a) Evident, $X(a)=\begin{pmatrix}3a+1 & 6a\\ -a & 1-2a\end{pmatrix}=I_2+a\cdot\begin{pmatrix}3 & 6\\ -1 & -2\end{pmatrix}=I_2+a\cdot A$; Atunci,

$X(a)\cdot X(b)=\begin{pmatrix}3a+1 & 6a\\ -a & 1-2a\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3b+1 & 6b\\ -b & 1-2b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3(a+b+ab)+1 & 6(a+b+ab)\\ -(a+b+ab) & 1-2(a+b+ab)\end{pmatrix}=X(a+b+ab)$

Altfel, $X(a)\cdot X(b)=(I_2+aA)(I_2+bA)=I_2+(a+b+ab)A$, deoarece $A^2=A$.

b) Deoarece, $X(a)\cdot X(b)=X(a+b+ab)=X\left[(a+1)(b+1)-1\right]$, rezultă

$X(1)\cdot X(2)=X(2\cdot3-1)$, $X(1)\cdot X(2)\cdot X(3)=X(2\cdot3-1)\cdot X(3)=X(2\cdot3\cdot4-1)$,

$X(1)\cdot X(2)\cdot X(3)\cdot X(4)=X(2\cdot3\cdot4-1)\cdot X(4)=X(2\cdot3\cdot4\cdot5-1)$, etc.

Aşadar, $X(1)\bullet X(2)\bullet X(3)\bullet\ldots\ldots\bullet X(2013)\bullet X(2014)=X(t-1)\Rightarrow X(2015!)=X(t-1)\Rightarrow$

$t=2015!$

**37.** a) $M(-1)=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=2M(0)$;

b) $M(x)\cdot M(y)=\begin{pmatrix}1-x & x\\ -x & 1+x\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1-y & y\\ -y & 1+y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-(x+y) & x+y\\ -(x+y) & 1+x+y\end{pmatrix}=M(x+y)$.

c) $M(x)\cdot M(x)=M(x+x)=M(2x)=M(a)\Rightarrow 2x=a\Rightarrow x=\frac{a}{2}\in\mathbb{R}$.

**38. a)** $X(a)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+a\cdot\begin{pmatrix}-1&0&2\\0&0&0\\-1&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-1&0&2a\\0&1&0\\-a&0&1+2a\end{pmatrix}$**;**

**b)** $X(a)\cdot X(b)=(I_3+a\cdot A)\cdot(I_3+b\cdot A)=I_3+(a+b+ab)A=X(a+b+a\cdot b),\ \forall a,b\in\mathbb{R}$;

c) Observăm că $X(a)\cdot X(-1)=X(a-1-a)=X(-1),\ \forall a\in\mathbb{R}\Rightarrow$ P=X(-1);

**39.** a) $f(A)=A^2-A+I_3=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}^2-\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&2\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}+I_3=B+I_3$**.**

b) Cum f(A)=$I_3$+B, rezultă $(f(A))^3=(I_3+B)^3=I_3+3B+3B^2$.

## 1.3 Puterile unei matrice

**1.** S = A; **2.** $X=\begin{pmatrix}a&\frac{3c}{2}\\c&a+c\end{pmatrix},\ a,c\in\mathbb{R}.$**;** **3.** $X=\begin{pmatrix}2&3\\-1&2\end{pmatrix}$ sau $X=\begin{pmatrix}-2&-3\\1&-2\end{pmatrix}$;

**4).** b) suma este egală cu $A-2A+3A-4A+....+9A-10A=-5A$;

**10.** Dacă $X=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$, rezultă $X=\begin{pmatrix}a&0\\\frac{d-a}{2}&d\end{pmatrix}$şi prin înlocuirea acesteia în relaţia dată se obţin matricele corespunzătoare valorilor pentru a= i sau a= - i şi d=1 sau d= -1;

**11.** $X=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$.**;** **12.** a) Se ia $X=\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}$şi din $A\cdot X=X\cdot A$, rezultă

$X=\begin{pmatrix}x&0&0\\0&y&0\\0&0&z\end{pmatrix},\ x,y,z\in\mathbb{C}.$

b) Din $X\cdot\left|\ X^5=A\right|\cdot X\Rightarrow XA=AX\Rightarrow\ X=\begin{pmatrix}x&0&0\\0&y&0\\0&0&z\end{pmatrix},\ x,y,z\in\mathbb{C}.\Rightarrow X^5=\begin{pmatrix}x^5&0&0\\0&y^5&0\\0&0&z^5\end{pmatrix}$.

Din $X^5=A\Rightarrow x^5=1;\ y^5=2;\ z^5=3.$Cum fiecare are căte cinci soluţii în $\mathbb{C}$ rezultă că ecuaţia

$X^5$ = A are în total un număr de $5^3$ = 125 soluţii în $\mathbb{C}$.

**13.** Se observă că det ($A^4$) = (det A)$^4$ = $\begin{vmatrix}4&-2\\6&-3\end{vmatrix}=0\Rightarrow\det A=0.$

Dacă $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})\Rightarrow ad-bc=0$ şi din relaţia lui Cayley ,

$A^2-(a+d)A+(ad-bc)\cdot I_2=O_2\Rightarrow$ $A^2$ = (a+d)A şi atunci rezultă că $A^4$ = $(a+d)^3$A adică

$A^4=\begin{pmatrix}(a+d)^3a&(a+d)^3b\\(a+d)^3c&(a+d)^3d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-2\\6&-3\end{pmatrix}$. Din egalitatea de matrice rezultă a+ d= 1 sau a+d = -1. În primul caz rezultă a=4; b=-2; c=6; d= -3, iar în cel de-al doilea caz rezultă a= -3; b= 2; c= -6; d= 3. Se obţin matricele $A=\begin{pmatrix}4&-2\\6&-3\end{pmatrix}$ sau $A=\begin{pmatrix}-3&2\\-6&4\end{pmatrix}$.

**14**. a) Calcul direct;

b) Din a) rezultă $A(1)\cdot A(2)\cdot A(3)\cdot .....\cdot A(x)=A(1+2+3+...+x)=A(\frac{x(x+1)}{2})=A(2016)$; De aici se obține $x(x+1)=2\cdot 2016\Rightarrow x(x+1)=63\cdot 64\Rightarrow x=63.$

c) Din a) și prin inducție se arată că $A^n(x)=A(nx).$

**15.** a) Prin inducţie se arată că $A^n=\begin{pmatrix}1 & n\sqrt{2} & n^2\\ 0 & 1 & n\sqrt{2}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$; b) Deoarece $A=B+\sqrt{3}I_3$ unde

$B=\begin{pmatrix}0 & \sqrt{2} & 1\\ 0 & 0 & \sqrt{2}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ şi $I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ atunci $A^n=(B+\sqrt{3}I_3)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^{\,k}B^k\cdot(\sqrt{3}I_3)^{n-k}=$

$=\sqrt{3}^n I_3+n\sqrt{3}^{n-1}B+\frac{n(n-1)}{2}\sqrt{3}^{n-2}B^2$ deoarece $B^3=O_3$, $B^4=O_3$, ….

**16. a)**

$A(x)\cdot A(y)=\begin{pmatrix}1-2x & x\\ -6x & 1+3x\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1-2y & y\\ -6y & 1+3y\end{pmatrix}=$

$\begin{pmatrix}1-2(x+y+xy) & x+y+xy\\ -6(x+y+xy) & 1+3(x+y+xy)\end{pmatrix}=A(x+y+xy)$

**b)** $A^2(x)=\begin{pmatrix}1-2(2x+x^2) & 2x+x^2\\ -6(2x+x^2) & 1+3(2x+x^2)\end{pmatrix}=A(2x+x^2)=A\left((x+1)^2-1\right).$

Sau

Din a) pentru y=x, obținem $A^2(x)=A(x)\cdot A(x)=A\left(x+x+x\cdot x\right)=A(x^2+2x)$

c) Din $A(x)\cdot A(y)=A((x+1)(y+1)-1),\ \forall x,y\in\mathbb{R}$, obținem,

$A^2(1)=A(1)\cdot A(1)=A\left(2^2-1\right),$

$A^3(1)=A^2(1)\cdot A(1)=A\left(2^3-1\right),$

.....,

$A^{2016}(1)=A^{2015}(1)\cdot A(1)=A\left(2^{2016}-1\right).$

**17**. a) $A^2(x)=\begin{pmatrix}2x^2+2x & 2x^3-2x\\ 2x & 2x^2-2x\end{pmatrix}=2x\cdot A(x)\Rightarrow\ A^4(x)=8x^3\cdot A(x)\Rightarrow$

$(8x^3+2x)\cdot A(x)=O_2\Rightarrow 2x(1+4x^2)=0\Rightarrow x\in\left\{0;\frac{\pm i}{2}\right\}.$

b) $X^n=A(0)\Leftrightarrow X^n=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}.$ (*).

Ridicăm la puterea a doua: $X^{2n}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow$

$X^2=O_2\Rightarrow X^n=O_2$, contradicție cu (*).

**18**. Evident, $A^2=3A,\ A^3=3^2A,$ prin inducție se obține $A^n=3^{n-1}\cdot A$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, iar $A^{n+2}=3^{n+1}\cdot A$. Atunci, $A^n+A^{n+2}=810A\Leftrightarrow 10\cdot 3^{n-1}\cdot A=810A\Rightarrow 3^{n-1}=81\Rightarrow n=5.$

**19.** a) $A^2=\begin{pmatrix}-5 & 0\\ 0 & -5\end{pmatrix}\Rightarrow A^2=-5I_2\big|\cdot A\Rightarrow A^3=-5A\Rightarrow A^3+5A=O_2.$

b) $A^3= -5A$, $A^4= -5A^2=5^2I_2$.
Presupunem că $A^{4k}=5^{2k}I_2$ şi să arătăm că $A^{4(k+1)}=5^{2(k+1)}I_2$.
Rezultă, $A^{100}=5^{50}I_2$.
$A^{4(k+1)} = A^{4k} \cdot A^4 = 5^{2k} \cdot I_2 \cdot 5^2 \cdot I_2 = 5^{2(k+1)} \cdot I_2$.

**20. a**) $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} = -A \Rightarrow A^3 = -A^2 = A \Rightarrow A^2 + A^3 = -A + A = O_2$.

b) $A+2A^2 +3A^3+….+100A^{100}= A+2(-A)+3A+4(-A)+5A+…..+99A+100(-A)=$
$= A(1-2+3-4+5-6+……+99-100)= A(-1)50= - 50A.$

**21.** a) $C=A+BI_2= \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) $C=A+BI_2= \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. $C^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Presupunem că $C^n = \begin{pmatrix} 4^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi să arătăm că $C^{n+1} = \begin{pmatrix} 4^{n+1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$C^{n+1} = C^n \cdot C = \begin{pmatrix} 4^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4^{n+1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Atunci suma $C+C^2 +C^3 +….+C^{2010}$ este egală cu

$$\begin{pmatrix} 4+4^2+4^3+...4^{2010} & 0 \\ 0 & 1+1+1+..+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3}(4^{2010}-1) & 0 \\ 0 & 2010 \end{pmatrix}.$$

## 2.1 Determinanții de ordinul doi și trei

**1.** a) -11; b) 5; c) 1; d) 7; e) -14; f) 6; g) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$; h) 1; i) 0; j) 4; k) i – 4; l) -8; m) 2i; n) 36; o) Se aplică formula pentru combinări, $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$. Raspunsul final este 1.

**2.** a) 6; b) -3; **3).** $S = \{-5;5\}$ **4).** a) $\det A(2) = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 3 & -2 & 6 \end{vmatrix} = -8$; b) $S = \left\{\frac{6}{7};3\right\}$;

**5**. a) $D(0) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 6$;

b) $D(m) = = m(m+2)+3(m+2) = (m+2)(m+3)$;

c) Din b) rezultă că $D(n^2-3n) = (n^2-3n+2)(n^2-3n+3) = 0 \Rightarrow n_1 = 1,\ n_2 = 2.$

**6**. b) $D(a) = a^2 \Rightarrow 8a-12 = a^2 \Rightarrow a \in \{2;6\}$

**7**. a) $D(0) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -5$; b) $D(a) = a^2 - 4a - 5 = (a-5)(a+1),\ \forall a \in \mathbb{R}$;

c) $(a-5)(a+1)\langle -3(a+1) \Leftrightarrow (a+1)(a-2)\langle 0$. Cum a este întreg rezultă a= 0 sau a= 1.

**8**. a) d(0)=2; b) $d(x)=-2(x^2-1)= - 2(x-1)(x+1)$; c) Din $- 2(x-1)(x+1)= - 2(y-1)(y+1)$ rezultă că
$x^2 –y^2=0$ adică (x-y)(x+y)=0 de unde rezultă x+y=0 deoarece x și y sunt diferite.

**9**. b) $D(x) = -x^3 + 5x^2 + 6x = x(-x^2 + 5x + 6) = x(x+1)(6-x),\ \forall x \in \mathbb{R}$;

c) $\sqrt{a}\left(\sqrt{a}+1\right)\left(\sqrt{6}-a\right)=0\Rightarrow a=0$ *sau* $a=36$.

**10.** a) $A^2=A\cdot A=-A$, adică tocmai ceea ce trebuia demonstrat;

b) $\begin{pmatrix}x & 1\\ 1 & x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & -2\\ 3 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+2 & -1\\ 4 & x-3\end{pmatrix}$, $\det(X+A)=4\Leftrightarrow\begin{vmatrix}x+2 & -1\\ 4 & x-3\end{vmatrix}=4\Rightarrow$

$(x-3)(x+2)+4=4\Rightarrow(x-3)(x+2)=0\Rightarrow x=3$ sau x= -2.

Atunci, $X=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}$ sau $X=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$;

c) Cum $A^2$= -A, $A^3$=A, $A^4$= -A, se arată că $A^{100}$=-A, atunci suma $A+2A^2+3A^3+\ldots+100A^{100}$ este egală cu (1-2+3-4+….+99-100)A= -50A.

**11.** a) 0; b) 4a;

**12.** a) $S=\{7\}$ ; b) $S=\{-8;8\}$ ; c) $S=\{1;2\}$; d) $S=\left\{-2;-1;-\frac{1}{2}\right\}$ ; e) $S=\left\{0;\frac{1}{8}\right\}$; f) $S=\{6\}$; **13.** D(a)= -a(a-1); x=0; **14. a)** x = -1; **b)** x = 0; **c) x = 0; 15.** $x\in(-\infty;-5]$; **16.** $x\in(-6;-4)$; **17.** $\frac{2011^3\cdot 2012}{2}$; **18.** Se folosesc sumele $1+2+3+\ldots+2011=\frac{2011\cdot 2012}{2}$, $2+2^2+2^3+\ldots+2^{2011}=2\frac{2^{2011}-1}{2-1}=2^{2012}-2$; Determinantul matricei devine $2011^3\cdot 1007-2011^2\cdot 2$; **19.** Se observă că $A^2=I_2$ şi $A^3=A$. Suma dată se va studia după paritatea lui n. Dacă n este par adică n=2k atunci $A+A^2+A^3+\ldots+A^{2k}=\begin{pmatrix}2k & 3k\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ iar determinantul sumei este egal cu zero.

Dacă n este impar adică n=2k+1 atunci $A+A^2+A^3+\ldots+A^{2k+1}=\begin{pmatrix}2k+1 & 3k+3\\ 0 & -1\end{pmatrix}$iar determinantul sumei este egal cu -2k-1 care este nenul, prin urmare, $\det(A+A^2+A^3+\ldots+A^n)=0\Leftrightarrow n$este par. **20.** n=1; **21.** a) Se verifică prin calcul; b) $x_1$= -3; $x_2$ = -2; $x_3$ = 0;

**22.** $\det(A)=\begin{vmatrix}a & 1 & a\\ a+1 & a & a-1\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}=-(a^2+a+3)\langle 0,\forall a\in\mathbb{R}$. întrucât discriminantul ecuaţiei de gradul doi, $a^2+a+3=0$ este negativ $\det(A^{2011})=(\det A)^{2011}\langle 0$.

Pe de altă parte, $\det X^{2010}(X^2+I_2)\rangle 0$. Aşadar, ecuaţia nu are soluţii în $M_3(\mathbb{R})$.

**23**. a) $A^2=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$. det(A)= 0.

b) $X=\begin{pmatrix}a & b & c\\ 0 & a & b\\ 0 & 0 & a\end{pmatrix}$, $a,b,c\in\mathbb{C}$.

c) Din $X\cdot\left|\ X^2=A\right|\cdot X\Rightarrow XA=AX\Rightarrow\ X=\begin{pmatrix}a & b & c\\ 0 & a & b\\ 0 & 0 & a\end{pmatrix}$ conform lui a). Cum $X^2 = A$, rezultă $\det X^2 = \det A = 0$, atunci şi $\det X=0$ adică $a^3 = 0$ ceea ce înseamnă că $a = 0$. Însă pentru $X=\begin{pmatrix}0 & b & c\\ 0 & 0 & b\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow X^2\neq A.$. Aşadar, ecuaţia nu are soluţii.

**24**. a) $\Delta=a^3+b^3+c^3-3abc$;

b)

$$\frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]=\frac{1}{2}(a+b+c)(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ac)=$$

$$=(a+b+c)[a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc]=a^3+b^3+c^3-3abc=\Delta.$$

c) Conform cu b) ecuaţia dată se scrie echivalent de forma:

$$(2^x)^3+(3^x)^3+(5^x)^3-3\cdot(2\cdot3\cdot5)^x=0\Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}(2^x+3^x+5^x)[(2^x-3^x)^2+(2^x-5^x)^2+(3^x-5^x)^2]=0\Rightarrow$$

$$2^x-3^x=0,\ 2^x-5^x=0,\ 3^x-5^x=0\Rightarrow x=0;$$

**25.** a) Conform relaţiilor lui Viete, rezultă $x_1+x_2+x_3=0$;

b) Cum $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}$ sunt soluţiile ecuaţiei $x^3-4x+3=0$ atunci verifică această ecuaţie:

$$x_1^3=4x_1-3$$
$$x_2^3=4x_2-3$$
$$x_3^3=4x_3-3$$

$x_1^3+x_2^3+x_3^3=4(x_1+x_2+x_3)-9$ sau $S_3=4S_1-9$. Rezultă $S_3=-9$, unde $S_3=x_1^3+x_2^3+x_3^3$.

c) Cum $\Delta=\begin{vmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ x_2 & x_3 & x_1\\ x_3 & x_1 & x_2\end{vmatrix}=3x_1x_2x_3-(x_1^3+x_2^3+x_3^3)$, rezultă $\Delta=-9-(-9)=0$.

**26.** a) Conform relaţiilor lui Viete, rezultă $x_1+x_2+x_3=5$;

b) Se cunoaşte formula $x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)$ s

de unde rezultă că $x_1^2+x_2^2+x_3^2=5^2-2\cdot2=25-4=21.$

c) Cum $\Delta=\begin{vmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ x_2 & x_3 & x_1\\ x_3 & x_1 & x_2\end{vmatrix}=3x_1x_2x_3-(x_1^3+x_2^3+x_3^3)$, rezultă

$$\Delta=3\cdot(-1)-(5S_2-2S_1-3)=3\cdot(-1)-(5\cdot21)-2\cdot5-3=-3-92=-95.$$

**27**. a) $M_a\cdot M_b=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ \ln a & 1 & 0\\ 0 & 0 & a\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ \ln b & 1 & 0\\ 0 & 0 & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ \ln a+\ln b & 1 & 0\\ 0 & 0 & ab\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ \ln ab & 1 & 0\\ 0 & 0 & ab\end{pmatrix}=M_{a\cdot b}$.

b) $M_1+M_2+M_3+.....+M_{2010}=\begin{pmatrix}2010 & 0 & 0\\ S_1 & 2010 & 0\\ 0 & 0 & S_2\end{pmatrix}$ unde

$S_1=\ln 1+\ln 2+\ldots+\ln 2010=\ln 1\cdot 2\cdot 3\cdot....\cdot 2010=\ln 2010!$ şi

$S_2=1+2+3+\ldots+2010=\frac{2010\cdot 2011}{2}=1005\cdot 2011.$

Aşadar, $M_1+M_2+M_3+.....+M_{2010}=\begin{pmatrix}2010 & 0 & 0\\ \ln 2010! & 2010 & 0\\ 0 & 0 & 1005\cdot 2011\end{pmatrix}\Rightarrow$

$\det(M_1+M_2+M_3+.....+M_{2010})=2010^2\cdot 1005\cdot 2011$

c) Conform punctului a) rezultă $M(a)^{100}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 100\ln a & 1 & 0\\ 0 & 0 & a^{100}\end{pmatrix}$, $a\rangle 0$.

## 2.2 Proprietățile determinanților

**1.** a) Se scade prima linie din celelalte şi se obţine că determinantul este zero; b) Se adună liniile a doua şi a treia la prima linie şi apoi coloana întâi se scade din coloanele a doua şi a treia, obţinându-se $-2(x^3+y^3)$; c) Se adună linia a doua la prima linie şi se obţine determinantul egal cu zero.

**2.** $A=(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$ ;

**5.** -8; **6. a) -10; b) 4; c) 0;**

**7.** Cum z este soluţie a ecuaţiei $z^3-1=0$ rezultă $z^3=1$ şi $z^2+z+1=0$, prin urmare $\Delta=z^4+z^3+z^2+z=z^2(z^2+z+1)+z=z.$

**8.** Deoarece matricea $\begin{pmatrix}\overline{abc} & \overline{bca} & \overline{cab}\\ \overline{ab} & \overline{bc} & \overline{ca}\\ a & b & c\end{pmatrix}$ este egală cu $\begin{pmatrix}100 & 10 & 1\\ 10 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b & c\\ b & c & a\\ c & a & b\end{pmatrix}$ rezultă că determinantul este egal cu $a^3+b^3+c^3-3abc$.

## 2.3 Aplicații ale determinanților în geometrie

**1.** a) $x+7y-26=0$; b) $2x-3y+16=0$; c) $x+7y-3=0$; d) $13x-y-16=0$; **2.** $a=-\frac{7}{3}$;

**3.** $A=\frac{1}{2}\cdot|\Delta|=1$. **4.** Se verifică într-adevăr faptul că $A_n$ aparţine dreptei determinate de punctele $A_0$ şi $A_1$ , adică punctele $A_0$ , $A_1$ , $A_n$ sunt coliniare pentru orice n natural; **5.** a) $m\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$; b) $A_{ABCD}=A_{ACD}+A_{ABD}=1$; c) (AB): $x+y-1=0$.

**6**. m= -1; **7.** a) $3x+y-10=0$; b) m= -8; c) m=32 sau m=12.

**8.** a) $M_{AB}=\left(\frac{-3+3}{2},\frac{4+2}{2}\right)=M(0;3)$ ;

b) Ecuația dreptei AB este $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -3 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x+3y-6=0$. Observăm că dreptele AB și (d) sunt paralele, prin urmare fie un punct C ales pe dreapta d. 2x+ 6y+2=0. Pentru x=2 rezultă y=-1 deci punctul C este C(3;-1).

Atunci distanța de la C la dreapta AB este $D = \frac{|1\cdot 3+3\cdot(-1)-6|}{\sqrt{1^2+3^2}} = \frac{6}{\sqrt{10}}$.

**9**. Fie C(m;n) un punct în plan. Dacă ABC este echilateral atunci AC=BC adică $AC = AB \Rightarrow \sqrt{(m+1)^2+(m-4)^2} = \sqrt{40}$ *si* $BC = AB \Rightarrow \sqrt{(m+3)^2+(m+2)^2} = \sqrt{40}$.

Rezultă $n = 1+\sqrt{3} \Rightarrow m = -2-3\sqrt{3}$ și $n = 1-\sqrt{3} \Rightarrow m = -2+3\sqrt{3}$.

**10.** a) Ecuația dreptei $A_1A_2$ este $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x+y=0;$

b) $A = \frac{1}{2}\cdot|\Delta| = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x & y & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}\cdot|-3| = \frac{3}{2};$

c) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -n & n & 1 \\ -n-1 & -n & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -n & n \\ -n-1 & -n \end{vmatrix} = n\cdot\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -n-1 & -n \end{vmatrix} = n(2n+1) \neq 0;$

**11.** a) $B_1(3;0),\ B_2(6;-1) \Rightarrow$ ecuația dreptei $B_1B_2$ este $x+3y-3=0;$

b) $A_n(\log_2 8^n; \log_5\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}) = A(n\cdot\log_2 2^3; \log_5 5^{1-n}) = A(3n;1-n) = B_n(3n;1-n).$

c) $A_n \in A_1A_2 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & 1 \\ 3n & 1-n & 1 \end{vmatrix} = 0$ ceea ce este adevărat;

**12.** $A_{ABC} = 1 \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot|\Delta| = 1,$ *unde* $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ n+1 & n & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow$ 2n-3=1 de unde rezultă n=2.

**13).** $A_{ABCD} = A_{ABC} + A_{ADC} = \frac{31}{2} + \frac{26}{2} = \frac{57}{2}.$

$A_{ABC} = \frac{1}{2}|\Delta_1|$, unde $\Delta_1 = \begin{vmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 6 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -31,$ $A_{ADC} = \frac{1}{2}|\Delta_2|$, unde $\Delta_2 = \begin{vmatrix} -4 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \\ 6 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 26,$

**14**).Cum dreapta (d) este de ecuație $x-y-2=0$ și

$M(x;y) \in d \Rightarrow x = m, y = 2-m \Rightarrow M(m;2-m).$

Din $A_{AMO} = A_{BMO} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ m & 2-m & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ m & 2-m & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow 2-m-5m = 6-3m-4m \Rightarrow m = 4.$

**15**). a) $\begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ A, B, C sunt coliniare; b) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ A, B, C sunt coliniare;

c) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 9 \neq 0 \Rightarrow$ A, B, C nu sunt coliniare; d) $\begin{vmatrix} 1+2m & 1-m & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1-2m & 1+m & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ A, B, C sunt coliniare;

**16**. a) $A = \frac{1}{2}|\Delta|$, unde $\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -6-9+4-12-6-3 = -32$. Atunci, $A = \frac{1}{2} \cdot 32 = 16$

.

b) Ecuaţia dreptei (BC) este: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2x-6+4y-8+3x-2y = 0 \Rightarrow$

$5x+2y-14=0$ (ecuaţia generală) sau $y = \frac{-5x+14}{2}$ (ecuaţia normală).

c) B, C şi P sunt coliniare dacă şi numai dacă B se află pe dreapta CP, de aici rezultă că a=-3.

**17**. a) Ecuaţia dreptei $A_1A_2$ este dată de ecuaţia: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, de unde rezultă - 2x+y+3=0.

b) $A_{OA_1A_2} = \frac{1}{2}|\Delta|$ unde $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \Rightarrow A = \frac{3}{2}$.

c) $A_1(1,-1)$ , $A_2(2,1)$ determină dreapta y=2x-3. Atunci, pentru orice punct de forma $A_n(n,2n-3)$ rezultă că pentru x=n se obţine y=2n-3, aşadar toate punctele $A_n$ se află pe dreapta de ecuaţie, y=2x-3.

**18.** a) Ecuaţia dreptei $A_1A_2$ este dată de ecuaţia: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -x+4y+4-2y = 0$.

Aşadar ecuaţia dreptei $A_1A_2$ este –x+2y+4=0.

b) $A = \frac{1}{2}|\Delta|$, unde $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 \Rightarrow A = 2.$

c) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2n & n-2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ că punctele sunt coliniare.

## 3.1 Calculul inversei unei matrice

**1.** a) Da; b) Nu; c) Da; d) Da; e) Nu; **2. a)** $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}$**; b)** $\begin{pmatrix}-\frac{7}{2} & -8\\ 2 & \\ 1 & -1\end{pmatrix}$**; c)** $\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$**; d)** $\begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\ -1 & 4 & 2\\ 1 & -3 & -1\end{pmatrix}$**; 3. a**) A este inversabilă $\Leftrightarrow \det(A)\neq 0$. $m\in\mathbb{R}\setminus$ **{ - 1 };**

**b)** $m\in\mathbb{R}\setminus$ **{ - 6; 6 }; c)** $m\in\mathbb{R}\setminus$ **{ - 2;1}; d)** $m\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$**. 4.**

$A\cdot B=\begin{pmatrix}13 & 8\\ 21 & 13\end{pmatrix}\Rightarrow (AB)^{-1}=\begin{pmatrix}13 & -8\\ -21 & 13\end{pmatrix}=B^{-1}A^{-1}$;

**5.** $A\cdot B=\begin{pmatrix}5 & 9\\ 11 & 20\end{pmatrix}\Rightarrow (AB)^{-1}=\begin{pmatrix}20 & -9\\ -11 & 5\end{pmatrix}=B^{-1}A^{-1}$; **6. a)** $\det(A)\neq 0\Leftrightarrow a\in\varnothing$**; b)** $\det(B)\neq 0\Leftrightarrow a\in\mathbb{R}\setminus\{5\}$**;** **7.** A este inversabilă $\Leftrightarrow a\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$; dacă a =2 atunci $A^{-1}=-\frac{1}{8}\begin{pmatrix}-4 & -5 & 2\\ -4 & -1 & 2\\ 0 & 2 & -4\end{pmatrix}$. **8.** $\det(A)=(2-a)x^2-4x+3a+1\neq 0$ dacă şi numai dacă determinantul trinomului de gradul doi în x trebuie să fie mai mic ca zero adică $3a^2-5a+2\langle 0\Rightarrow\ \ a\in(\frac{2}{3};1)$; 9. a) Se verifică prin calcul că $A^2 = A$;

b) $X(a)\cdot X(b)=(I_2+aA)(I_2+bA)=X(a+b+ab)$;

c) Cum $X(a)\cdot X(-1)=X(a-1-a\cdot 1)=X(-1),\forall a\in\mathbb{R}$ şi $1\in\{-2011;...,2011\}\Rightarrow$

$X(-2011)\cdot X(-2010)\cdot....\cdot X(2010)\cdot X(2011);=X(-1)=I_2-A=\begin{pmatrix}-4 & 2\\ -6 & 4\end{pmatrix}$;

d) $X(a)=I_2+a\cdot A=\begin{pmatrix}1+4a & -2a\\ 6a & 1-3a\end{pmatrix}$. $\det(X(a))=1+a$;

e) $\det(X(a))=0\Leftrightarrow 1+a=0\Rightarrow a=-1$. Pentru a = - 1 rezultă că există o singură matrice neinversabilă; f) $(X(a))^{-1}\underline{\underline{not}}X(b)\Rightarrow\ \ X(a)\cdot X(b)=I_2\Leftrightarrow X(a+b+ab)=I_2\Rightarrow$

$b=\frac{-a}{a+1}\Rightarrow$ $(X\ \ (a^{-1})=)\ \ X=b\left(\frac{-a}{a+1}X\right)$ **10. a)** $M(1,1)^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & -3\\ 3 & 4\end{pmatrix}$**; b)** $\det M(x,y)=x^2\neq 0\Rightarrow x\neq 0.$ $M(x,y)=\begin{pmatrix}x+3y & 3y\\ -3y & x-3y\end{pmatrix}$ cu $x\neq 0$**.**

**11.** $A(A+mA^{-1})=A^2+mI_3=(A+i\sqrt{m}I_3)(A-i\sqrt{m}I_3)\Rightarrow \det(A+mA^{-1})=\det A\cdot\det(A+mA^{-1})=$

$=\det A(A+mA^{-1})=\det(A+i\sqrt{m}I_3)\det(A-i\sqrt{m}I_3)=(\alpha+i\beta)(a-i\beta)=\alpha^2+\beta^2\geq 0$.

S-a folosit faptul că $\det A\cdot B=\det A\cdot\det B$ şi $\det(A+i\sqrt{m}I_3)=\alpha+i\beta\Rightarrow\det(A-i\sqrt{m}I_3)=\alpha-i\beta$

**12.** a) Din $(A+I_2)(I_2-A+A^2) = I_2$ , rezultă $(A+ I_2)^{-1} = I_2 -A+ A^2$;

b) Din $A^3 =0_2$ rezultă det (A) = 0 . Dacă $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A)=ad-bc=0$ şi ecuaţia

$A^2-(a+d)A+(ad-bc)I_2=0_2 \Rightarrow A^2=(a+d)A\big|\cdot A \Rightarrow A^3=(a+d)A^2$. Cum $A^3 = 0_2$ rezultă că $A^2 = 0_2$. **13. a)** $\mathbf{A^{-1}=A}$**;** **b)** $U,V\in C(A)\Rightarrow AU=UA\big|\cdot A^{-1},\ AV=VA\big|\cdot A^{-1}\Rightarrow U=AUA^{-1},\ V=AVA^{-1}$. Înmulţind la dreapta cu A relaţia $UV=AUA^{-1}AVA^{-1}$ rezultă

b) $X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in C(A)\Rightarrow\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$.

Rezultă: $\begin{pmatrix}b & a\\ d & c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c & d\\ a & b\end{pmatrix}\Rightarrow X=\begin{pmatrix}a & b\\ b & a\end{pmatrix}$; **14.** A e inversabilă deoarece det (A) este nenul întrucât ultima cifră a numărului ad-bc este 9 .

**15.** $\det(B)\neq 0\Rightarrow a\in\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{3}\right\}$.

**16.** a) $A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}5 & 2\\ -10 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5 & 2\\ -10 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 2\\ -10 & -4\end{pmatrix}=A$; Atunci , $A^2-A=O_2$

b) Cum $X(a)=I_2-a\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5a & 2a\\ -10a & -4a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-5a & -2a\\ 10a & 1+4a\end{pmatrix}$. Atunci,

$\det(X(a))=\begin{vmatrix}1-5a & -2a\\ 10a & 1+4a\end{vmatrix}=(1-5a)(1+4a)+2a\cdot 10a=1-a$;

c) Dacă X(a) este inversabilă, rezultă că există $(X(a))^{-1}$ astfel încât $X(a)\cdot(X(a))^{-1}=I_2$. Vom nota cu X(b) pe $(X(a))^{-1}$ rezultând $X(a)\cdot X(b)=I_2\Leftrightarrow X(a+b-ab)=I_2\Leftrightarrow$

$\begin{pmatrix}1-5(a+b-ab) & -2(a+b-ab)\\ 10(a+b-ab) & 1+4(a+b-ab)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Leftrightarrow$ a+b-ab=0 de unde rezultă că $b=\frac{a}{a-1}$;

Aşadar, pentru $b=\frac{a}{a-1}$ se obţine inversa matricei X(a) şi anume

$(X(a))^{-1}=X(b)=X\left(\frac{a}{a-1}\right)$.

**17.** a) $A=\begin{pmatrix}-1\\ 3\\ 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 1 & -1\\ 6 & -3 & 3\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$**.**

b) $\det(A)=\begin{vmatrix}-2 & 1 & -1\\ 6 & -3 & 3\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}=0$**;**

c) B(a) este inversabilă dacă şi numai dacă det(B(a)) este nenul.

$\det(aA+I_3)=\begin{vmatrix}-2a+1 & a & -a\\ 6a & -3a+1 & 3a\\ 2a & -a & a+1\end{vmatrix}\overset{\substack{l_1+l_3\\ -3l_3+l_2}}{=\!=}\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 2a & -a & a+1\end{vmatrix}=1\neq 0$ . Rezultă că

$\det(B(a))\neq 0,\forall a\in R.$

**18.** a) $A^2=\begin{pmatrix}a & b\\ 5b & a\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ 5b & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2+5b^2 & 2ab\\ 10ab & a^2+5b^2\end{pmatrix}$;

b) Fie $a,b,m,n\in\mathbb{Z}$ astfel încât $a^2-5b^2=1$ , $m^2-5n^2=1$ şi $A=\begin{pmatrix}a & b\\ 5b & a\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}m & n\\ 5n & m\end{pmatrix}$.

Atunci, $A\cdot B=\begin{pmatrix} am+5bn & an+bm \\ 5bm+3an & 5bn+am \end{pmatrix}=BA$;

c) $A\in G\Rightarrow \det(A)=1\neq 0\Rightarrow$ A este matrice inversabilă. Cum $A^{-1}=\frac{1}{\det A}A^{*}$, rezultă $A^{-1}=\frac{1}{a^2-3b^2}\begin{pmatrix} a & -b \\ -5b & a \end{pmatrix}\in G$ deoarece $a^2-5(-b)^2=1$.

**19**. a) Pentru a=1 şi b=0, rezultă că $I_2\in G$, iar pentru a=-99 şi b= 100, rezultă că $B\in G$.

b) Fie $X=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, atunci $\begin{pmatrix} a+b & -b \\ 0 & a+b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\Rightarrow X=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) $X^{100}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{100}=\begin{pmatrix} 1 & -100 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**20.** a) $A+I_3=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\Rightarrow (A+I_3)^2=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 5 & -4 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}=B$**;**

b) $\det(B)=\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 5 & -4 \\ 2 & -3 & 5 \end{vmatrix}=-3-16+10+10=1$;

c) det(B)=1, $B^T=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & -3 \\ -1 & -4 & 5 \end{pmatrix}$, $B^{*}=\begin{pmatrix} 13 & -7 & -3 \\ -3 & 2 & 1 \\ -7 & 4 & -2 \end{pmatrix}\Rightarrow B^{-1}=\begin{pmatrix} 13 & -7 & -3 \\ -3 & 2 & 1 \\ -7 & 4 & 2 \end{pmatrix}$**.**

**21.** a) $A(-1)\cdot A(1)=\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & -10 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 18 & 6 \\ -32 & -26 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{vmatrix} x+5 & 3x \\ 2x & 6x-4 \end{vmatrix}=6\Rightarrow (x+5)(6x-4)-6x^2=6\Rightarrow x=1.$

c) $A(-1)=\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & -10 \end{pmatrix}\Rightarrow$ det(A(-1))= - 46. Atunci, $A(-1)^{-1}=\frac{1}{-46}\begin{pmatrix} -10 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

**22**. a) $A^2=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\Rightarrow \det(A^2)=1$**;**

b) $A^3=A^2\cdot A=-I_2$

$A^4=-A$

Atunci $A^{100}=(A^4)^{25}=(-A)^{25}=-A^{25}=-A$;

c) $A^2=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\Rightarrow (A^2)^{-1}=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

## 3.2 Ecuații matriceale

**1.** $X=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-10 & 2\\ 15 & -1\end{pmatrix}$; **2.** $X=\begin{pmatrix}\frac{5}{2}\\ 2\\ \frac{-3}{2}\end{pmatrix}$; **3.** $X=\begin{pmatrix}\frac{7}{2} & -10\\ \frac{3}{2} & -4\end{pmatrix}$; **4.** $X=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ \frac{9}{4} & -4 & \frac{1}{4}\\ 1 & -6 & 4\end{pmatrix}$.

**5**. a) det A=1; b) $A-I_3=\begin{pmatrix}0 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$. Înmulțind de două ori cu această matrice se obține matricea nulă.

**6**. a) $A(-1)+A(1)=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 0 & 6\end{pmatrix}=2A(0)$.

b) $A(a)\cdot\begin{pmatrix}3 & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix}=5I_2\Leftrightarrow\begin{pmatrix}5 & 0\\ 3a-6 & a+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}\Rightarrow a=2$;

c) $A(1)\cdot X=4A(2)\left|\cdot A(1)^{-1}\right.\Rightarrow X=4\cdot\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix}3 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 1 & 4\end{pmatrix}$ deoarece $\det A(1)=4\neq 0$

iar

$A(1)^{-1}=\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix}3 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$.

**7**. a) $(x,y)\cdot\begin{pmatrix}a & 4\\ 1 & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}ax+y & 4x+ay\end{pmatrix}=(0,0)\Rightarrow$

$\begin{cases}ax+y=0\\ 4x+ay=0\end{cases}\Rightarrow y=-ax\Rightarrow x(4-a^2)=0.$

b) $A^2=\begin{pmatrix}a & 4\\ 1 & a\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & 4\\ 1 & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2+4 & 8a\\ 2a & a^2+4\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A^2)=(a^2+4)^2-16a^2=$

$=a^4+8a^2+16-16a^2=a^4-8a^2+16=(a^2-4)^2$.

c) $(x\quad y)\cdot A=\begin{pmatrix}2 & 1\end{pmatrix}\Leftrightarrow(x\quad y)\cdot\begin{pmatrix}-1 & 4\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}-x+y=2\\ 4x-y=1\end{cases}\Rightarrow\begin{matrix}x=1\\ y=3\end{matrix}$.

**8**. a) $B=A-3I_2=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}$;

b) Din relaţia B= A – 3 $I_2$ pe care o înmulţim la stânga respectiv la dreapta obţinem:

$A\cdot\left|B=A-3I_2\right|\cdot A\Rightarrow AB=A^2-3A=BA\Rightarrow AB=BA$;

$AB=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=O_3$; Analog, pentru BA.

c) $\det(C)=[\det(A+b)]^3=\begin{vmatrix}-1 & 2 & 2\\ 2 & -1 & 2\\ 2 & 2 & -1\end{vmatrix}=3^9.$

## 4.1 Rangul unei matrice

**1. a)** 2**; b)** 1**; c)** 3**; d)** 3**; e)** 1**; f)** 1**; g)** 2**;**

**2. a)** $\begin{vmatrix} 2 & x \\ y & 3 \end{vmatrix} = 6 - xy;\ \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ y & -1 \end{vmatrix} = -2 + 5y$ **;** $\begin{vmatrix} x & -5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -x + 15$ **.**

Dacă $x \neq 15, y \neq \frac{2}{5} \Rightarrow rang(A) = 2$ deoarece ultima linie a matricei A este nulă.

Dacă $x \neq 15, y = \frac{2}{5}$ *sau* $x = 15, y \neq \frac{2}{5} \Rightarrow rang(A) = 2$;

Dacă $x = 15, y = \frac{2}{5} \Rightarrow rang(A) = 1$;

**b)** $\begin{vmatrix} -2 & 6 \\ -3 & x \end{vmatrix} = -2x + 18$ **;** $\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -3 & y \end{vmatrix} = -2y + 12$ **;** $\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ x & y \end{vmatrix} = 6y - 4x$ **;**

Dacă $x \neq 9, y \neq 6 \Rightarrow rang(B) = 2$;

Dacă $x \neq 9, y = 6$ *sau* $x = 9, y \neq 6 \Rightarrow rang(B) = 2$;

Dacă $x = 9, y = 6 \Rightarrow rang(B) = 1$.

**3.** rang(A)=3, det(B) = **-a**$^2$ . Rezultă că rang(B) =3 dacă şi numai dacă **a** este nenul.

**4.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ rang(A) este cel puţin doi. Ca rangul matricei să fie exact doi trebuie ca

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ a & b & a \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ a & b & b \end{vmatrix} = 0$ de unde se obţine un sistem omogen având ecuaţiile 5a-7b-c=0; -6a+9b=0; -a+2b=0 cu soluţia a=0, b=0; c=0 adică matricea A are rangul doi în această situaţie.În celelalte cazuri matricea are rangul trei.

**5.** $A + aI_2 = \begin{pmatrix} a-1 & 1 \\ 2 & a \end{pmatrix} \Rightarrow$ rang (A)= 2 $\Leftrightarrow a \neq -1$şi $a \neq 2$ în caz contrar, rang (A)=1.

**6.** Întrucât det(A) = 0 şi $A^2 = 3A$ prin inducţie se arată că $A^{2010} = 3^{2009}A$ iar rangul matricei $A^{2010}$ este egal cu rangul matricei A adică 1.

## 4.2 Metode de rezolvare a sistemelor de ecuații

**1.** m=3; **2.** m= 2; **3. a**) $S = \{(2;-3)\}$; **b**) $S = \{(-1;3)\}$; **c**) $S = \{(-1;2;3)\}$; **d**) sistem incompatibil; **e**) $S = \{(-3;1;-2)\}$; **f**) $S = \{(-2;-1;1)\}$; **g**) $S = \{(-1;1;2)\}$; **h**) $S = \{(-3;1;-1)\}$;

**4. a**) $S = \{(0;0)\}$; **b**) $S = \left\{(\alpha; \frac{2}{3}\alpha) \middle| \alpha \in \mathbb{R}\right\}$; **c**) $\Delta_s = 0$, sistemul este compatibil simplu nedeterminat. Se notează $z = \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow S = \left\{(-\frac{1}{2}\alpha; \frac{\alpha}{2}; \alpha) \middle| \alpha \in \mathbb{R}\right\}$; **5. a)** Sistem compatibil simplu nedeterminat, $S = \{(-1+\alpha; 1-2\alpha; \alpha) | \alpha \in \mathbb{R}\}$**;** **b)** Sistem compatibil simplu nedeterminat, $S = \{(2-\alpha; 2-\alpha; \alpha) | \alpha \in \mathbb{R}\}$**;** **c)** Sistem compatibil simplu nedeterminat, $S = \{(-\alpha; 2\alpha; \alpha) | \alpha \in \mathbb{R}\}$; **d**) Sistem compatibil simplu nedeterminat, $S = \{(1-2\alpha; 1; \alpha) | \alpha \in \mathbb{R}\}$;

**6. a**) Sistemul are soluţie unică dacă şi numai dacă determinantul sistemului este nenul. $a \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}; 1\right\}$**; b)** $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$**; 7.** $m \in \{-2; 1; 2\}$**;** **8.** Se pune condiţia ca determinatul sistemului să fie nul şi se verifică dacă pentru valoarea lui m găsită în acest fel există un minor caracteristic nenul. Pentru m = -5, sistemul este incompatibil.

**9.** $m=\frac{2}{7}$**;** **10.** Din condiţia ca determinantul caracteristic să fie nul se obţine m = 23. $S=\{(3;2)\}$**.**

**11.** Determinantul sistemului este nul şi cum determinanrul caracteristic este egal cu zero rezultă că sistemul este compatibil simplu nedeterminat. Se obţine $S=\left\{\left(\frac{6-4\alpha}{5};\frac{\alpha+1}{5};\alpha\right)\right\}$iar din condiţia dată în problemă se obţine $\alpha=-1$prin urmare x = 0, y = 2; z = -1 este soluţia particulară;

**12.** Determinantul sistemului este egal cu $2m^2$ -3m-9 = 0 de unde rezultă $m_1$ = 3 şi $m=-\frac{3}{2}$. Pentru $m\neq 3$ *si* $m\neq -\frac{3}{2}$sistemul este compatibil determinat şi admite o soluţie unică dată de formulele lui Cramer. Pentru m=3 sau $m=-\frac{3}{2}$ se observă că determinartul caracteristic este zero prin urmare în aceste situaţii sistemul este incompatibil conform Teoremei lui Rouche.

**13.** $\Delta_s=2(1-m)$, $\Delta_x=6(1-m)$, $\Delta_y=2(1-m)$, $\Delta_z=-2(1-m)$.

Dacă $m\neq 1\Rightarrow$sistemul are soluţie unică dată de formulele lui Cramer: $x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=3$, $y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=1$, $z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=-1$, Dacă m=1 se obţine un sistem compatibil simplu nedeterminat cu soluţiile $S=\{(2-\alpha,1,\alpha)|a\in\mathbb{R}\}$; **14.** $S=\{(a;a+1;a+2)\}$;

**15.**Determinantul sistemului este zero prin urmare este compatibil simplu nedeterminat. $S=\{(\alpha;2\alpha;\alpha)|\alpha\in\mathbb{R}\}$. Din $\mathbf{x_0}$ **+**$\mathbf{y_0}$ **+**$\mathbf{z_0}$ **=** 8 rezultă $\alpha+2\alpha+\alpha=8\Rightarrow\alpha=2$ $\Rightarrow x_0=2;y_0=4;z_0=2$. 16. $\Delta=-(m-1)^2(m+2)$. Dacă $m\neq 1$şi $m\neq -2$sistemul este compatibil determinat soluţiile se obţin cu regula lui Cramer.

Dacă m=1 şi $n\neq 1$ sau m= -2 şi $n\neq -2$sistemul este incompatibil.

Dacă m=1 şi n= 1 sistemul este compatibil dublu determinat cu soluţia $S=\{(\alpha;\beta;1-\alpha-\beta)\},\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Dacă m= -2 şi n= -2 sistemul este compatibil simplu nedeterminat cu soluţia $S=\{(\alpha;1+\alpha;\alpha)\},\alpha\in\mathbb{R}$.

**17**. a) $(0;-2;2)$ verifică toate ecuațiile sistemului; b) Sistemul admite soluție unică $\Leftrightarrow \det A\neq 0$;

**18**. a) $\begin{vmatrix}-1 & 2 & 1\\ 1 & 2 & a\\ 1 & 1 & 3\end{vmatrix}=3a-13$; b) $S=\left\{\left(\frac{25}{-7};\frac{8}{7};\frac{15}{7}\right)\right\}$; c) Din $x_0+y_0+z_0=4$ și ecuația a treia a sistemului rezultă $z_0=0$. Înlocuind în sistem rezultă $y_0=-1;x_0=5$apoi $b=-7$;

**19**. a) $\det[A(m)]=-m^2-6m-10\neq 0$ deorece discriminantul ecuației este negativ;

b) $S=\{(2;-3;-1)\}$;

**20.** $\Delta_s=6+2+6+9-1+8=30$. $\Delta_x=-6-1+8+12+1-4=10$,

$\Delta_y=2+8-3+3-4-4=2$, $\Delta_z=-12-2+6-9+1-16=-32$.

$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{10}{30}=\frac{1}{2}$, $y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{2}{30}=\frac{1}{15}$, $z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=\frac{-32}{30}=\frac{-16}{15}$.

21. a) Dacă soluţia sistemului este tripletul (-2,1,2) atunci acestea se înlocuiesc în ultima ecuaţie şi rezultă: $m(-2)-3\cdot 1+6\cdot 2=1\Rightarrow m=4$.

b) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ m & -3 & 6 \end{vmatrix} = m^2 - 7m - 15 \Leftrightarrow (m-6)^2 = 0 \Rightarrow m = 6$.

c) Pentru m=0 se obţine sistemul: $\begin{cases} x + 3y + z = 3 \\ 3x + y + 2z = 2 \\ -3y + 6z = 1 \end{cases}$.

Cum determinantul matricei asociate sistemului este $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 6 \end{vmatrix} = -51 \neq 0 \Rightarrow$ sistem compatibil determinat, soluţia sa se găseşte cu ajutorul formulelor lui Cramer.

$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$, $y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$, $z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$.

$\Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 6 \end{vmatrix} = -1$, $\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 6 \end{vmatrix} = -41$, $\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -29$.

Soluţia sistemului este $\left(\frac{1}{51}, \frac{41}{51}, \frac{29}{51}\right)$.

### 4.3 Metoda lui Gauss

**Indicaţii şi răspunsuri:**

1. a) $S = \{(-3;1;-2)\}$; b) $S = \{(-2;-1;1)\}$; c) $S = \{(-1;1;2)\}$; d) $S = \{(-3;1;-1)\}$;

### 5.2 Calculul limitelor de funcţii

**2**. **a**) $\infty$; **b**) $-\infty$; **c**) $-\infty$; **d**) $-\infty$; **e**) $\infty$; **f**) $\infty$; **g**) $\infty$; **h**) 2; **i**) 0; **j**) 0; **k**) $\infty$; **l**) $-\infty$; **m**) $-\infty$; **n**) $\infty$; **o**) $-\frac{7}{4}$; **p**) -3; **q**) 0; **r**) 1; **s**) $\frac{2}{3}$; **t**) $\infty$; **u**) $-\infty$; **v**) 0;

**3**. **a**) -1; **b**) 1; **c**) 1; **d**) -2; **e**) $\frac{-3}{2}$; **f**) – 2; **g**) – 4; **h**) $\infty$; **i**) $\infty$; **j**) 2; **k**) $-\frac{2}{3}$;

**4**. a) m=6; b) m= -2; c) m=3; d) m = 3, e) m=3; f) m = -3; g) m= 4; h) m = -2; i) m=1.

**5**. a) $l_s(0) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} (-3x + 2) = 2$, $l_d(0) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (8x + 6) = 6$. Deci f(x) nu are limită în 0;

b) $l_s(1) = 6$, $l_d(1) = 6$. f(x) are limită în 1;

c) $l_s(1) = 2$, $l_d(1) = 2$. f(x) are limită în 1;

d) $l_s(4) = 8$, $l_d(4) = 8$. f(x) are limită în 4;

e) $l_s(2) = 2$, $l_d(2) = 2$. f(x) are limită în 4;

**6**. a) Din $l_s(1) = l_d(1) \Rightarrow 3 - 2m = 1 + 4 + 2 \Rightarrow m = -2$;

b) Din $l_s(2) = l_d(2) \Rightarrow \sqrt{m-1} = m - 3 \Rightarrow m^2 - 7m + 10 = 0 \Rightarrow m = 5$.

c) Din $l_s(1) = l_d(1) \Rightarrow 3 = m^2 + m + 1 \Rightarrow m^2 + m - 2 = 0 \Rightarrow m \in \{-2;1\}$;

d) Din $l_s(64) = l_d(64) \Rightarrow m \cdot 8 + 4 = 6 + 6m \Rightarrow m = 1$.

### 5.3 Limite fundamentale. Cazuri de nedeterminare

**1**. **a**) 2; **b**) $\frac{8}{3}$; **c**) $\frac{7}{2}$; **d**) 2; **e**) $\frac{4}{5}$; **f**) $\frac{1}{2}$; **g**) $\frac{1}{2}$; **h**) 4; **i**) 2; **j**) $\frac{7}{11}$ ; **k**) 10; **l**) $\frac{1}{2}$; **m**) $\frac{1}{2}$; **n**) $\frac{1}{3}$; **o**) $\frac{4}{3}$; **p**) $\frac{4}{5}$; **q**) $\frac{1}{2}$; **2. a)** $\ln 2$**; b)** $\frac{3}{5}$; **i**) $\frac{1}{5}$; **3. m)** $\frac{1}{3}$; **4**. **a**) -2; **j**) -12; **k**) $\frac{1}{27}$; **m**) $-\frac{1}{4}$; **n**) $\frac{1}{48}$; **o**) 21; **5**. **a**) 0; **b**) 2; **c**) – 1; **d**) $-\infty$; **e**) 6; **f**) $\frac{-3}{2}$; **g**) $\frac{-5}{3}$; **h**) $\frac{3}{2}$; **i**) 0; **j**) $\frac{1}{2}$; **k**) $\frac{1}{2}$; **l**) $1-\sqrt{2}$; **m**) 0; **n**) 0; **o**) 0; **p**) 0; **q**) $\infty$; **r**) $-\infty$; **s**); **t**) $\ln\frac{3}{2}$ ; **u**) 0; **v**) $\infty$; **x**) $-\frac{3\sqrt{2}}{2}$; **y**) $\infty$; **z**) 0; **w**) $\frac{2}{3}$;

## 5.4 Asimptotele funcțiilor

**1**. a) x=4 e asimptotă verticală la stânga spre minus infinit iar la dreapta spre plus infinit;
b) x = -3 e asimptotă verticală la stânga spre $-\infty$ iar la dreapăta spre $+\infty$;
c) x = -2 e asimptotă verticală la stânga spre $+\infty$ iar la dreapăta spre $-\infty$;
d) x = 1 e asimptotă verticală la stânga spre $-\infty$ iar la dreapăta spre $+\infty$;
e) x = 0 e asimptotă verticală la stânga spre $-\infty$ iar la dreapăta spre $+\infty$;
f) x = 2 e asimptotă verticală la stânga spre $-\infty$ iar la dreapăta spre $+\infty$;
g) x = 1 e asimptotă verticală la stânga spre $+\infty$ iar la dreapăta spre $-\infty$;
si x = 3 e asimptotă verticală la stânga spre $-\infty$ iar la dreapăta spre $+\infty$;
h) x = 3 e asimptotă verticală la stânga spre $-\infty$ iar la dreapăta spre $+\infty$;
i) x = - 1 e asimptotă verticală la stânga spre $+\infty$ iar la dreapăta spre $-\infty$;
si x = 1 e asimptotă verticală la stânga spre $-\infty$ iar la dreapăta spre $+\infty$;
j) x= 4 e asimptotă verticală la dreapta spre $+\infty$.

**2. a)** y= 0 este asimptotă orizontală la $\pm\infty$**;** **b)** y= 0 este asimptotă orizontală la $\pm\infty$**;**
**c) y**= 0 este asimptotă orizontală la $\pm\infty$**;** **d) y**= 0 este asimptotă orizontală la $\pm\infty$**;**
**e) y**= 1 este asimptotă orizontală la $\pm\infty$**;** **f) y**= 0 este asimptotă orizontală la $\pm\infty$**;**
**g) y**= 2 este asimptotă orizontală la $\pm\infty$**;** **h) y**= 1 este asimptotă orizontală la $+\infty$ **și y**= -1 este asimptotă orizontală la $-\infty$**;** **i) y**= 0 este asimptotă orizontală la $\pm\infty$**;**
**j) ) y**= 2 este asimptotă orizontală la $\pm\infty$**;** **k) ) y**= 1 este asimptotă orizontală la $\pm\infty$**;**
**l) ) y**= 1 este asimptotă orizontală la $\pm\infty$**;**

**3.** a) y = mx+n, m=1, n=4, deci y = x+4; b) m=1, n=-3, y = x-3; c) m=1 , n= -1 deci y=x-1;
d) m=2, n=-6 deci y= 2x-6;

**4**. **a**) x= 1 asimptotă verticală, y= 1 asimptotă orizontală la $\pm\infty$; **b**) x= 0 asimptotă verticală, y= x asimptotă oblică la $\pm\infty$; **c**) x= 1, x = -1 asimptote verticale, y= x asimptotă oblică la $\pm\infty$; **d**) x= -3 asimptotă verticală, y= x – 3 asimptotă oblică la $\pm\infty$; **e**) x= 2 asimptotă verticală, y= x + 2 asimptotă oblică la $\pm\infty$; **f**) x= - 1 asimptotă verticală, y= x - 1 asimptotă oblică la $\pm\infty$; **g**) x= - 3 asimptotă verticală, y= x - 3 asimptotă oblică la $\pm\infty$; **h**) y= x + 4 asimptotă oblică la $\pm\infty$; **i**) x= 0 asimptotă verticală la dreapta, y= 0 asimptotă orizontală la $+\infty$; **j**) x = 2 asimptotă verticală, y = x+1 asimptotă oblică la $\pm\infty$; **k**) y = x asimptotă oblică la $+\infty$, y = - x asimptotă oblică la $-\infty$; **l**) x= - 1 asimptotă verticală la stânga, x = 1 asimptotă verticală la dreapta; y= 0 asimptotă orizontală la $\pm\infty$; **m**) x= - 1 asimptotă verticală la dreapta, x = 1 asimptotă verticală la stânga; **n**) y = x +1 asimptotă oblică la $\pm\infty$;

**5. a)** $x=1$; **b)** $x=3$; **c)** $x=-3$; **d)** $x=0$; **e)** $x=\pm 3$; **f)** $x=\pm 1$; **g)** $x=1$; **h)** $x=\pm 3$; **i)** $x=8$; **j)** $x=\pm 2$; **6. j)** $y=\frac{1}{6}$**;** **8.** a= 2, b= - 1;

**10.** y =mx+n unde m= 1 iar n =2a; Cum $n=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-mx\right]=2a\Rightarrow 4+a=2a\Rightarrow a=4$.

**11**. y = mx+n unde m=1 iar n = m-2. Se obține m= 1;

**13.** $y=mx+n\Rightarrow m=1,\ n=2.\quad m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2(a+\frac{b}{x}+\frac{6}{x^2})}{x\cdot x\sqrt{4+\frac{8}{x^2}}}=\dfrac{a}{2}\Rightarrow a=2.$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+bx+6}{\sqrt{4x^2+8}}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+bx+6-x^2\sqrt{4+\frac{8}{x^2}}}{x\sqrt{4+\frac{8}{x^2}}}=\frac{b}{2}\Rightarrow b=4.$$

**14**. $y=mx+n\Rightarrow m=1,\ n=a^2-5.$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+ax+8}{x-1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{ax+8+x}{x-1}=a+1\Rightarrow\ \ y=mx+n\Rightarrow m=1,\ n=2.$$

$a^2-5=a+1\Rightarrow a^2-a-6=0\Rightarrow a\in\{-2;3\}$.

**15**. $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{mx+2-x-1}{\sqrt{mx+2}+\sqrt{x+1}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(m-1)x+1}{\sqrt{mx+2}+\sqrt{x+1}}$. Cum numitorul tinde către infinit, rezultă că această funcţie are limită finită dacă şi numai dacă m+1 = 0 adică m=1 iar asimptota orizontală este y=0.

## 6.1 Funcții continue

**4.** a) m=7; b) m=0; c) $m=\dfrac{1}{2}$; d) m=1; g) m=0; m=1; **5.** a=13; **6.** a= 2; **7.** $a=\dfrac{4}{3}$;

**14.** $m=-\dfrac{1}{4}$; **15.** m=0; **16**. a = 1; **17**. a = 0; **18**. a = 2; **19**. a = 1;

## 6.2 Proprietățile funcțiilor continue pe un interval

**1.** a) Se arată că $f(0)\cdot f(1)\langle 0$;

**2**. Se rezolvă ecuaţia f(x)=0 şi pe intervalele pe care funcţia nu se anulează, aceasta păstrează semn constant;

**3**. m = -9;

## 7.1 Funcţii derivabile

**1. a**) $f'(x)=10x-3,\ f'(0)=-3;$ **b**) $f'(x)=6x+1,\ f'(1)=2;$

**c**) $f'(x)=10(2x+5)^4,\ f'(-2)=10;$ **d**) $f'(x)=\dfrac{2}{\sqrt{4x-3}},\ f'(1)=2;$

**e**) $f'(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+6}},\ f'(1)=\dfrac{2}{3};$ **f**) $f'(x)=2^{x+3}\ln 2,\ f'(-3)=\ln 2;$

**g**) $f'(x)=5^{4x+1}\cdot 4\ln 5,\ f'(0)=20\ln 5;$ **h**) $f'(x)=2e^{2x+1},\ f'(0)=2e;$ **i**)

$f'(x)=4e^{4x},\ f'(0)=4e;$

**j**) $f'(x)=\dfrac{1}{x+5},\ f'(-4)=1;$ **k**) $f'(x)=\dfrac{3}{3x+6},\ f'(-1)=1;$ **l**) $f'(x)=\dfrac{2x}{x^2-9},\ f'(4)=\dfrac{8}{7};$

**m**) $f'(x)=\dfrac{4x}{2x^2+8},\ f'(1)=\dfrac{2}{5};$ **n**) $f'(x)=\dfrac{-1}{(x+4)^2},\ f'(1)=\dfrac{-1}{25};$ **o**)

$f'(x)=\dfrac{-3}{(3x+2)^2},\ f'(-1)=-3;$

**p**) $f'(x)=\cos(x-3),\ f'(3)=1;$ **q**) $f'(x)=10x\cdot\cos 5x^2,\ f'(0)=0;$

**r**) $f'(x)=-4\cdot\sin(4x-8),\ f'(2)=0;$ **s**) $f'(x)=\frac{6}{\cos^2 6x},\ f'(0)=6;$ **t**) $f'(x)=\frac{6x}{\cos^2 3x^2},\ f'(0)=0;$

**2. a**) $f'(x)=\frac{-5}{(x-3)^2},\ f'(2)=-5;$ **b**) $f'(x)=\frac{x^2-4x-1}{(x-2)^2},\ f'(1)=-4;$

**c**) $f'(x)=\frac{-2x^2+8x+6}{(x^2+3)^2},\ f'(0)=\frac{2}{3};$

**d**) $f'(x)=\frac{1-2x}{2\sqrt{x}e^x},\ f'(1)=-\frac{1}{2e};$ **e**) $f'(x)=\frac{1-x\ln x}{x(x+5)^2},\ f'(1)=\frac{1}{36};$ **f**) $f'(-2)=-\frac{1}{4};$

**g**) $f'(x)=\frac{-2}{(2x+1)^2},\ f'(-1)=-2;$ **h**) $f'(-1)=\frac{5}{2};$ **i**) $f'(-1)=-\frac{5}{e};$ **j**) $f'(1)=\frac{1}{3};$

3). **a=2, b=1**; 4). **m=0; n=1**; 5). **a = -1; b = 1**; 6). **a = 4, b = 1**;

**7)** Se calculează derivatele de ordinul 1 și doi și se înlocuiesc în relația dată:

$f^I(x)=e^x\cdot\sin x+e^x\cdot\cos x.$

$f^{II}(x)=e^x\cdot\sin x+e^x\cdot\cos x+e^x\cdot\cos x-e^x\cdot\sin x.$

8). $f^I(x)=2x\ln x+x^2\cdot\frac{1}{x}=2x\ln x+x,\ f^{II}(x)=2\ln x+2x\cdot\frac{1}{x}+1=2\ln x+3.$

**9).** $f^I(x)=\ln x+1-\frac{1}{x^2}$ , $f^{II}(x)=\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3}$; Rezultă $\frac{4}{x^2}=1\Rightarrow x^2=4\Rightarrow x=\pm 2.$

**10)** $f^I(x)=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+1},\ f^{II}(x)=-\frac{1}{(x+2)^2}+\frac{1}{(x+1)^2}.$

**11).** $f^{II}(x)=e^x\cdot\left(x^2-4\right).$

## 7.2 Aplicații ale derivatelor

**1**). **a**) y+3=2(x-1); 2x-y-5=0; **b**) y=4(x-2); 4x-y-8=0; **c**) y-1=x+1; x-y+2=0;
**d**) y+4= - 7(x-1); -7x-y+3=0; **e**) y – ln2 = x-1; x-y+ln2 - 1=0

**f**) $y-\frac{3}{4}=\frac{\sqrt{3}}{4}(x-\frac{\pi}{3}).$

**2**). $y-(-69)=21(x-5)$, 21x-y -174=0;

**3**). $y-\frac{1}{3}=-\frac{4}{9}(x-1)$; -4x-9y+7=0;

**4**). $y-9=-(x-2)\Rightarrow -x-y+11=0,$

**5**). $y-1=2(x-1)\Rightarrow 2x-y-1=0;$

**6**). $y-(1-\ln 2)=0(x-1)\Rightarrow y=1+\ln 2$;

**7**). $y-\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{6}(x-\frac{1}{2}).$

8. Ecuația primei bisectoare este $y=x$ și atunci, panta acestei drepte este m=1;

Din ecuația tangentei $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$ știm că panta acesteia este $f^I(x_0)$ și cum cele două drepte sunt paralele , aceasta înseamnă că dreptele au pantele egale, adică $m=f^I(x_0).$

Cum $x_0=1$ și $f^I(x_0)=3x_0^{\ 2}+2(m+2)x_0$ rezultă $1=3+2m+4\Rightarrow m=-3.$

9. $y=x^2+3x-6\Rightarrow f_1(x)=x^2+3x-6\Rightarrow f_1^{\ I}(x)=2x+3$

și $y=-x^2+11x\Rightarrow f_2(x)=-x^2+11\Rightarrow f_2^{\ I}(x)=-2x+11.$

Fie $x_0$ punctul de abcisă a punctului de tangență. Cum cele două parabole au aceeași tangentă comună înseamnă că pantele corespunzătoare tangentelor la graficul funcțiilor

respective în punctul $x_0$ sunt egale, adică $f_1^I(x_0) = f_2^I(x_0) \Rightarrow 2x_0 + 3 = -2x_0 + 11 \Rightarrow x_0 = 2.$ Atunci, $f(x_0) = f(2) = 4.$ De asemenea, $f_1^I(2) = 2 \cdot 2 + 3 = 7.$
Din ecuația tangentei în punctul $x_0 = 2$, $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ rezultă $y = 7x - 10$ este ecuația tangentei comune.

## 8.2 Proprietăţi generale ale funcţiilor derivabile .

**1**. **a**) f este strict crescătoare pe $(-\infty;-1) \cup (3;+\infty)$ şi strict descrescătoare pe $[-1;3]$.
-1 este punct de maxim şi 3 este punct de minim.
**b**) f este strict descrescătoare pe $[0;2) \cup (2;\infty)$ şi strict crescătoare pe $(-\infty;-2) \cup (-2;0)$; 0 este punct de maxim.
**c**) f este strict crescătoare pe $(-\infty;-2) \cup (-2;\infty)$;
**d**) f este strict crescătoare pe $(-\infty;1) \cup (5;+\infty)$ şi strict descrescătoare pe $[1;3) \cup (3;5]$.
1 este punct de maxim şi 5 este punct de minim.
**e**) f este strict crescătoare pe $[-1;3]$ şi strict descrescătoare pe $(-\infty;-1) \cup (3;\infty)$.
- 1 este punct de minim şi 3 este punct de maxim.
**f**) ) f este strict descrescătoare pe $(-\infty;2)$ şi strict crescătoare pe $[2;+\infty)$. 2 este punct de minim.
**g**) f este strict crescătoare pe $[0;\infty)$ şi strict descrescătoare pe $(-\infty;0)$. 0 punct de minim;
**h**) f este strict crescătoare pe $[0;\infty)$ şi strict descrescătoare pe $(-\infty;0)$. 0 punct de minim;
**2.** . $f'(2) = 0 \Rightarrow m = -4$; **3**. a= 2; **4**. **a**) $f''(x) \geq 0, \forall x \geq 1 \Rightarrow$ f este convexă pe $[1;\infty)$ şi concavă pe $(-\infty;1)$; 1 este punct de inflexiune;
**b**) $f''(x) \geq 0, \forall x \in \left[\frac{-1-\sqrt{3}}{2}; \frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right] \Rightarrow$ f este convexă pe acest interval şi concavă în rest;
**c**) f este concavă pe $(-3;\infty)$; **d**) f este convexă pe $\mathbb{R}$; **e**) f este convexă pe $(0;\infty)$ şi concavă pe $(-\infty;-2)$; **5**. a = -1; b = 1; **6**. a = 4, b = 1; **7**. **a**) y+3=2(x-1); **b**) y=4(x-2); **c**) y-1=x+1;
**d**) y+4= - 7(x-1); **e**) y – ln2 = x-1; f) $y - \frac{3}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}(x - \frac{\pi}{3})$;

# SOLUȚII RECAPITULARE FINALĂ
# ALGEBRĂ

**1.** a) $A(2)\cdot A(-2)=\begin{pmatrix}-7 & -4\\ 8 & 5\end{pmatrix}$;

b) $A(x)^2=\begin{pmatrix}1+2\left[(x+1)^2-1\right] & (x+1)^2-1\\ -2\left[(x+1)^2-1\right] & 1-\left[(x+1)^2-1\right]\end{pmatrix}$;

c) $A^{-1}(2)=\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 4 & 5\end{pmatrix}$;

**2.** a) $A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}5 & 2\\ -10 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5 & 2\\ -10 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 2\\ -10 & -4\end{pmatrix}=A$;

b) $X(a)\cdot X(b)=(I_2-aA)(I_2-bA)=I_2-bA-aA+abA^2=I_2-(a+b-ab)A=X(a+b-ab)$, deoarece $A^2=A$;

c) Cum $X(a)\cdot X(1)=X(a+1-a\cdot 1)=X(1),\forall a\in\mathbb{R}$ şi $1\in\{1;2;...;2020\}$

$X(0)\cdot X(1)\cdot X(2)\cdot....\cdot X(2020)=X(1)=I_2-A=\begin{pmatrix}-4 & -2\\ 10 & 5\end{pmatrix}$;

**3.** a) $\det(A\cdot B)=\det A\cdot\det B=7$; b) $\det(A^2+B^2)=\begin{vmatrix}1 & 4\\ 4 & 1\end{vmatrix}=-15$;

**4.** a) $A(2)\cdot A(-2)=\begin{pmatrix}-8 & -6\\ -2 & 0\end{pmatrix}$; b) $\begin{vmatrix}x+1 & x^2-1\\ 1 & x-1\end{vmatrix}=0$; c) $\left(A(x)\right)^2=2x\cdot A(x)$.

**5.** a) $X(a)=\begin{pmatrix}1+a & a\\ -a & 1+a\end{pmatrix}$, $\det\left[X(a)\right]=\begin{vmatrix}1+a & a\\ -a & 1+a\end{vmatrix}=(1+a)^2+a^2=2a^2+2a+1$;

a) $X(a)\cdot X(b)=(I_2+aA)(I_2+bA)=...\ I_2+(a+b)\cdot A+ab\cdot A^2=$
$I_2+(a+b)\cdot A=X(a+b)$ deoarece $A^2=O_2$.

b) Conform punctului b) rezultă $X(1+2+3+...+n)=X(2020)\Rightarrow 1+2+3+...+n=2020\Rightarrow$
$\frac{n(n+1)}{2}=2020\Rightarrow n\notin\mathbb{N}\Rightarrow$ Prin urmare, $S=\{\varnothing\}$;

**6.** a) $\det(A)=0\Rightarrow\begin{vmatrix}x-4 & 1\\ 1 & x-4\end{vmatrix}=0\Rightarrow(x-4)^2-1=0\Rightarrow x^2-8x+15=0\Rightarrow x\in\{3;5\}$;

b) Se utilizează relația Hamilton Cayley: $A^2-(a+d)\cdot A+(ad-bc)\cdot I_2=O_2$ unde
$a=x-4,\ b=1,\ c=1,\ d=x-4$, atunci $a+d=2x-8$ iar $ad-bc=(x-4)^2-1\cdot 1=x^2-8x+15$
ceea ce verifică relația cerută: $A^2-(2x-8)\cdot A+(x^2-8x+15)\cdot I_2=O_2$ adică
$A^2=(2x-8)A-(x^2-8x+15)I_2$.

c) $A^2=3A+I_2\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x-4 & 1\\ 1 & x-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x-4 & 1\\ 1 & x-4\end{pmatrix}=3\cdot\begin{pmatrix}x-4 & 1\\ 1 & x-4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix}x^2-8x+17 & 2x-8\\ 2x-8 & x^2-8x+17\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x-11 & 3\\ 3 & 3x-11\end{pmatrix}$, $x\in\{\varnothing\}$.

**7.** a) $A^3=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -1 & 2\end{pmatrix}^2\cdot\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -1 & 2\end{pmatrix}=A$;

b) $X(a)\cdot X(b)=\left(I_2+a\cdot A\right)\cdot\left(I_2+b\cdot A\right)=I_2+(a+b+ab)A=X(a+b+ab)$.

c) $X(1)+X(2)+...+X(2020)=(I_2+1\cdot A)+(I_2+2\cdot A)+....+(I_2+2020\cdot A)=$
$=2020I_2+(1+2+3+...+2020)A$

**8.** ) a) $A^2=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow A^3=\begin{pmatrix}-4 & 4\\ 4 & -4\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=4A;$

b) $\det(A-xI_2)=0\Rightarrow\begin{pmatrix}-1-x & 1\\ 1 & -1-x\end{pmatrix}=0\Rightarrow(-1-x)^2-1=0\Rightarrow\ x^2+x=0\Rightarrow x\in\{-1;0\}$.

c) $\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}-a+c=-a+b\\ -b+d=a-b\\ a-c=-c+d\\ b-d=c-d\end{cases}$. Rezultă, b=c, și a=d.

**9.** a) $A(-1)\cdot A(1)=\begin{pmatrix}4 & -3\\ -2 & -10\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6 & 3\\ 2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18 & 6\\ -32 & -26\end{pmatrix}$.

b) $\det A(x)=6\Leftrightarrow\begin{vmatrix}x+5 & 3x\\ 2x & 6x-4\end{vmatrix}=6\Rightarrow(x+5)(6x-4)-2x\cdot3x=6\Rightarrow\ 26x=26\Rightarrow x=1.$

c) $A(-1)=\begin{pmatrix}4 & -3\\ -2 & -10\end{pmatrix}\Rightarrow A^{-1}(-1)=\frac{1}{-46}\cdot\begin{pmatrix}-10 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}$. S-a folosit formula

$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$.

**10. a)** $M_a\cdot M_b=\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & a+b\\ 0 & 1\end{pmatrix}=M_{a+b}$;

b) Conform punctului a) rezultă

$M_1\cdot M_2\cdot.....\cdot M_{100}=M_{1+2+...+100}=\begin{pmatrix}1 & 1+2+...+100\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 5050\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

c) $M_a\cdot X=X\cdot M_a,\ \forall a\in\mathbb{R}\ \ M_a\cdot X=X\cdot M_a\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow$z=0,

t=x.

$X=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x & y\\ 0 & x\end{pmatrix}$.

**11.** . a) $\det(A)=-7\neq0;$ b) $E(A)=\begin{pmatrix}2 & 6 & 8\\ -1 & 7 & 2\\ 0 & -4 & 0\end{pmatrix}$; c) $A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\cdot A^*=\frac{1}{-7}\cdot\begin{pmatrix}-3 & 4 & 5\\ -2 & 5 & 1\\ 1 & -6 & -4\end{pmatrix}$;

**12.** a) $\det(A(1))=1;$ b) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ m & 0 & 0\\ m & 2 & m\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -m & 0 & 0\\ -m & 2 & -m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ -2 & 3 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow m=1;$

c) $A(1)+A(2)+...+A(10)=\begin{pmatrix}10 & 10 & 10\\ 55 & 0 & 0\\ 55 & 20 & 55\end{pmatrix}$;

**13.** a) $\det(M)=-2m^2+2m-11$; b) ABC este triunghi $\Leftrightarrow \det(M^T)=\begin{vmatrix} m & m & 1 \\ 2 & m-3 & 1 \\ -3 & 3m-1 & 1 \end{vmatrix}\neq 0,$

Cum $\det(M)=\det(M^T)\Rightarrow -2m^2+2m-11<0, \forall m\in\mathbb{R},$ deoarece $\Delta=-84<0;$

c) m=4, $A=\frac{1}{2}\cdot|-23|=\frac{23}{2};$

**14.** a) $A(1)\cdot A(-1)=\begin{pmatrix} 8 & 5 & -5 \\ -2 & 9 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; b) det A(1)=6; c) $\det A(x)=0\Rightarrow -x^2+7x=0\Rightarrow x\in\{0;7\}.$

**15.** a) $m=\frac{3}{2}$; b) $m_1=1;\ m_2=2;$ c) $S=\left\{\left(-\frac{11}{3},-\frac{4}{3},0\right)\right\}.$

**16.** a) $A_1+A_2=3\cdot I_2;$

b) $\det A_n\cdot\det A_{n+1}=512\Rightarrow\left(2^{n-1}\right)^3\cdot\left(2^n\right)^3=512\Rightarrow n=2;$

c) $A_1+A_2+A_3+...+A_{2020}=\left(2^{2020}-1\right)\cdot I_3$

**17.** a) A este inversabilă $\Leftrightarrow \det A\neq 0;$ Rezultă, $m\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{15}{8}\right\};$

b) $A^2=\begin{pmatrix} 9+3m & -4m & -m \\ -11 & 3m+3 & -2 \\ -6 & -m-4 & 11 \end{pmatrix};$ c) $S=\{(-21,-34,-30)\}.$

**18.** a) $A(2)\cdot A(-2)=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 0 & -5 & 3 \\ 7 & -3 & 19 \end{pmatrix};$ b) a= -1; c) $A^{-1}=\frac{1}{-6}\cdot\begin{pmatrix} -5 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix};$

**19.** a) $\det A(0)=0;$ b) $\det\left[A(x)+A(-x)\right]=0;$

c) $\det A(x)=0\Rightarrow x^3+15x^2-18x=0\Rightarrow x\in\left\{0;\frac{-15\pm\sqrt{297}}{2}\right\}.$

**20.** a) $\det(A(2))=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-4;$ b) $a\in\mathbb{R}\setminus\{-2;1\};$

**21.** a) 6; b) $D(a,a)=0;$ c) $D(2,x)=0\Rightarrow x^3-7x+6=0\Rightarrow\ S=\{(-3,1,2)\}.$

**22.** a) $\det(A(-1))=-6;$ b) $m\in\mathbb{R}\setminus\{0\};$ c) $S=\left\{\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},-1\right)\right\}.$

**23.** a) $\det(I_2+2A)=\begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 6 & -17 \end{vmatrix}=-19;\ A^2=\begin{pmatrix} 10 & -30 \\ -30 & 90 \end{pmatrix}=-10\cdot\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}=-10A;$

b) $X(a)\cdot X(b)=(I_2+aA)(I_2+bA)=I_2+(a+b-10ab)A=X(a+b-10ab);$

c) Cum $X(a)\cdot X(\frac{1}{10})=X(\frac{1}{10})\Rightarrow$ produsul este egal cu $X(\frac{1}{10}).$

**24.** a) $a \in \mathbb{R}-\{-1\}$; b) $A^{-1}=\frac{1}{-6}\cdot\begin{pmatrix}4 & -5\\ -2 & 1\end{pmatrix}$; c) $X=-\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-22\\ 2\end{pmatrix}$;

**25 .** a) $\det(A_0)\neq 0$; b) $A_0^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 6 & -3 & -2\\ 3 & -2 & -1\end{pmatrix}$;

c) $A_1+A_2+A_3+...+A_n=\begin{pmatrix} n & \frac{n(n+1)}{2}+n & \frac{n(n+1)}{2}-2n\\ 3\frac{n(n+1)}{2} & \frac{n(n+1)}{2}+n & -2n\\ \frac{2n(n+1)}{2}+3n & n & -3n\end{pmatrix}$;

**26.** a) rang(A)=3 deoarece determinantul matricei este $-m^2+2m-3\neq 0$ întrucât discriminantul ecuației este negativ.
b) Triunghiul ABC există deoarece $\det M\neq 0$ (din a), deci punctele A, B, C nu sunt coliniare;
c) $A=\frac{1}{2}|\Delta|=\frac{1}{2}|-m^2+2m-3|=\frac{1}{2}\cdot 2=1$, întrucât minimul ariei este identică cu valoarea maximă a funcției $f(m)=-m^2+2m-3$ și care este $\left|-\frac{\Delta}{4a}\right|=\left|-\frac{8}{4}\right|=2$.

**27.** a) $rang(A(n))=3\Rightarrow m\in\mathbb{R}-\{-1;1\}$; b) $A(2)^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$; c)

$\det[A(m)\cdot A(-m)]=9\Leftrightarrow \det[A(m)]\cdot\det[A(-m)]=9\Rightarrow (m^2-1)^2=9\Rightarrow m\in\{-2;2\}$;

**28.** a) $A^2=O_3$; b) $2B-B^2=2(aA+I_3)-(aA+I_3)^2=2I_3-I_3=I_3$; c) $\det(B)=1$;

**29.** a) $A(1)\cdot A(-1)=\begin{pmatrix}3 & -14 & 0\\ 13 & -4 & 9\\ 16 & -18 & 9\end{pmatrix}\cdot$; b) $\det(A(a))=0\Rightarrow a\in\left\{-\frac{3}{2},1\right\}$; c) $S=\{(-2;-1;2)\}$;

**30.** a) A e inversabilă $\Leftrightarrow a\in\mathbb{R}-\left\{-2;\frac{5}{2}\right\}$; b) $A^2=\begin{pmatrix}10 & -5 & 4\\ -1 & -2 & 0\\ 2 & -2 & -1\end{pmatrix}\cdot$ c) $S=\left\{(\frac{-1}{4};\frac{11}{2};\frac{25}{4})\right\}$.

**31.** a) $(0;-2;2)$ verifică toate ecuațiile sistemului; b) Sistemul admite soluție unică $\Leftrightarrow \det A\neq 0$; c) $A(-2)\cdot A(2)=\begin{pmatrix}9 & 4 & 10\\ 10 & 11 & 10\\ 0 & -16 & 3\end{pmatrix}$;

**32.** a) $\begin{vmatrix}-1 & 2 & 1\\ 1 & 2 & a\\ 1 & 1 & 3\end{vmatrix}=3a-13$; b) $S=\left\{(\frac{25}{-7};\frac{8}{7};\frac{15}{7})\right\}$; c) Din $x_0+y_0+z_0=4$ și ecuația a treia a sistemului rezultă $z_0=0$. Înlocuind în sistem rezultă $y_0=-1; x_0=5$ apoi $b=-7$;

**33.** a) $A(1)\cdot A(-1)=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & -2\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & -2 & 1\\ -1 & 1 & -2\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 6 & -4\\ -4 & -5 & -3\\ -2 & 2 & -2\end{pmatrix}\cdot$

b) $\det\left[A(m)\right]=\begin{vmatrix}-1 & 2m & 1\\ m & 1 & -2\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}=-2m^2-2m-6\langle 0$ deoarece discriminantul ecuației de gradul doi în m este $\Delta=b^2-4ac=4-48=-44\langle 0$ .

c) Pentru m = 3 rezultă determinantul matricei sistemului este $\Delta=-30$, iar $\Delta_x=-20$, $\Delta_y=-10$, $\Delta_z=10$.

**34.** a) $A(1)\cdot A(-1)=\begin{pmatrix}3 & 4 & 2\\ 0 & 5 & -8\\ 4 & 3 & 8\end{pmatrix}\cdot$ b) $S=\left\{(-21;13;8)\right\}$ ; c) A este inversabilă pentru orice m număr real întrucât discriminantul ecuației $m^2+3m+8=0$ este negativ, deci $m^2+3m+8\rangle 0,\ \forall m\in\mathbb{R}.$

**35.** a) $A(1)\cdot A(-1)=\begin{pmatrix}5 & -6 & -5\\ -11 & 15 & 8\\ -3 & 6 & -2\end{pmatrix}\cdot$ b) $S=\left\{(-3;-2;2)\right\}$; c) $m\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{5\pm\sqrt{57}}{2}\right\}$.

**36.** a) $\det\left[A(m)\right]=-m^2-6m-10\neq 0$ deorece discriminantul ecuației este negativ;

b) $S=\left\{(2;-3;-1)\right\}$ ; c) $A^{-1}=\frac{1}{-10}\cdot\begin{pmatrix}-2 & -6 & -4\\ -4 & 8 & 7\\ -2 & 4 & 1\end{pmatrix}$;

**37 .** a) $\det\left[A(m)\right]=m^2-2m-1=0\Leftrightarrow m\in\left\{1\pm\sqrt{2}\right\}$; b) $S=\left\{(-3;1;2)\right\}$;

c) $A^{-1}=\frac{1}{-1}\cdot\begin{pmatrix}-3 & -1 & -2\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ -1 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

**38.** a) $A(0)\bullet A(1)=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ -2 & -1 & 0\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 3 & 1\\ -2 & -1 & 1\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -3 & 3\\ 2 & -5 & -3\\ -1 & 9 & 7\end{pmatrix}\cdot$

b) $\det(A(1))=\begin{vmatrix}0 & 3 & 1\\ -2 & -1 & 1\\ 3 & 2 & 2\end{vmatrix}=0-4+9+3-0+12=20;$

c)

$\det(A(x))=\begin{vmatrix}x-1 & x+2 & 1\\ -2 & -1 & x\\ 3 & 2 & x+1\end{vmatrix}=20\Leftrightarrow$

$(x-1)(-1)(x+1)+(-2)\cdot 2\cdot 1+3(x+2)\cdot x-1(-1)\cdot 3-x\cdot 2\cdot(x-1)-(x+1)\cdot(x-2)\cdot(-2)=20\Rightarrow$

$x^2+7x-8=0\Rightarrow x\in\left\{-8;1\right\}$.

**39.** a) $A(0)\bullet A(1)=\begin{pmatrix}0 & -2 & 3\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & -1 & 1\\ 2 & 3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 11 & 4\\ 4 & 1 & 8\\ 11 & 2 & 10\end{pmatrix}\cdot$

b) $\det(A(1))=\begin{vmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & -1 & 1\\ 2 & 3 & 2\end{vmatrix}=-2+18-2+6-3+4=21;$

c) $\det(A(x))=\begin{vmatrix}x & x-2 & 3\\ 2 & -x & 1\\ x+1 & 3 & 2\end{vmatrix}=21\Leftrightarrow$

$-2x^2+18+(x+1)(x-2)-3(-x)(x+1)-1\cdot 3\cdot x-4(x-2)=21\Rightarrow \quad 2x^2-5x+3=0\Rightarrow x\in\left\{1;\frac{3}{2}\right\}.$

**40.** a) Se verifică prin calcul că $A^2 = A$;

b) $X(a)\cdot X(b)=(I_2+aA)(I_2+bA)=X(a+b+ab);$

c) Cum $X(a)\cdot X(-1)=X(a-1-a\cdot 1)=X(-1),\forall a\in\mathbb{R}$ şi $1\in\{-2011;...,2011\}\Rightarrow$

$X(-2011)\cdot X(-2010)\cdot ....\cdot X(2010)\cdot X(2011);=X(-1)=I_2-A=\begin{pmatrix}-4 & 2\\ -6 & 4\end{pmatrix};$

**41. a)** $D(3)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 5 & 25\\ 1 & 3 & 9\end{vmatrix}=45+3+25-5-75-9=73-89=-16.$

b) $D(a)=0\Rightarrow\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 5 & 25\\ 1 & a & a^2\end{vmatrix}=0\Rightarrow\ 5a^2+a+25-5-25a-a^2=0\Rightarrow$

$4a^2-24a+20=0\Rightarrow a^2-6a+5=0\Rightarrow a\in\{1;5\}.$

c) $D(5^x)=0\Rightarrow$din subpunctul b) că $5^x=1\Rightarrow x=0$ și $5^x=5\Rightarrow x=1.$

**42.** a) $6+2+m^2+m+3m+3-1+4m=-6\Rightarrow(m+4)^2=0\Rightarrow m=-4.$

b) $\Delta_s=6+2+6+9-1+8=30.\ \Delta_x=-6-1+8+12+1-4=10,\ \Delta_y=2+8-3+3-4-4=2,$

$\Delta_z=-12-2+6-9+1-16=-32.\quad x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{10}{30}=\frac{1}{2},\ y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{2}{30}=\frac{1}{15},\ z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=\frac{-32}{30}=\frac{-16}{15}.$

c) $A^2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & -3 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ -3 & 10 & -3\\ 1 & -5 & 6\end{pmatrix}.$

## Soluții ANALIZĂ

**1).** a) $f'(x)=3x^2-6x-24,\ f'(-2)=0;$ b) f este descrescătoare pe $(-2;4)$ și crescătoare pe $(-\infty;2)\cup(4;\infty)$; c) Ecuația tangentei la graficul funcției în punctul de abcisă $x_0$ este $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0),$ unde $y_0=f(-2)=29$ În cazul nostru, $y-29=0(x+2)$ , de unde rezultă ecuația $y=29.$ **2).** a) $f(1)=4-2-5+6=3;\quad f'(x)=12x^2-4x-5,\ f'(0)=-5;$ $f''(x)=24x-4;\ f''(1)=24-4=20;\quad f(1)-f'(0)+f''(1)=3+5+20=28.$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4x^3-2x^2-5x+6}{2x-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3(4-\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}+\frac{6}{x^3})}{x(2-\frac{1}{x})}=\infty;$

c) $f'(x)=0\Leftrightarrow 12x^2-4x-5=0\Rightarrow x_1=-\frac{1}{2},x_2=\frac{5}{6}.$

$f'(x)\rangle 0,\ \forall x\in(-\infty;-\frac{1}{2})\cup(\frac{5}{6};+\infty)$ şi $f'(x)\le 0,\ \forall x\in\left[-\frac{1}{2};\frac{5}{6}\right]$. Rezultă că f este strict crescătoare pe $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{5}{6};+\infty\right)$ şi strict descrescătoare pe $\left[-\frac{1}{2};\frac{5}{6}\right]$.

**3).** a) Suma termenilor aflaţi în progresie geometrică ne dă $1\cdot\frac{2^{2014}-1}{2-1}=2^{2014}-1$ adică tocmai f(2).

b) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^{2014}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x^{2013}+x^{2012}+...+x+1)=2014$

c) $f'(x)=2014\cdot x^{2013}$ şi din $f''(x)=2013\cdot 2014\cdot x^{2012}\rangle 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$, rezultă f convexă pe $\mathbb{R}$.

**4).** a) $f(x)=x^{2016}+x^{2015}+...+x^2+x+1=\frac{x^{2017}-1}{x-1}\Rightarrow\ f(2)=2^{2017}-1;$ b)

$f'(x)=2016x^{2015}+.....+2x+1\Rightarrow\ f'(1)=1+2+3+...+2016=\frac{2016\cdot 2017}{2}.$

c) $f(x)\rangle 0,\ \forall x\in(1;\infty),\ f(x)\rangle 0,\ \forall x\in(\infty;1),\ f(1)=2017,\ \Rightarrow f(x)\rangle 0,\forall x\in\mathbb{R}.$

**5).** a) Din $x^2-4\ge 0\Rightarrow x\in(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$. Aşadar, $D=(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$;

b) $g(x)=x(x^2-4)\Rightarrow g'(x)=x^2-4+x\cdot 2x;\quad g'(x)=3x^2-4.$ Din

$g'(x)=0\Rightarrow 3x^2-4=0\Rightarrow x_{1,2}=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}.$

Cum $g'(x)\rangle 0,\ \forall x\in(-\infty;-\frac{2\sqrt{3}}{3}]\cup[\frac{2\sqrt{3}}{3};+\infty)$ şi $g'(x)\langle 0,\ \forall x\in\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3};\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

c) Asimptota oblică are forma $y=mx+n$ unde

$m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-4}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x\sqrt{1-\frac{4}{x}}}{x}=1;$

$n=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-mx)=\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-4}-x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-4-x^2}{\sqrt{x^2-4}+x}=0.$ Rezultă, y= x este asimptota oblică spre $+\infty$ pentru funcţia f.

**6).** a) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\langle 1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\langle 1}}(4x^3+6)=10;\quad \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\rangle 1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\rangle 1}}(2x^2+8x)=10.$ Rezultă că f este continuă în punctul $x_0=1$;

b) $f'(-2)+f'(x)=48+16=64;$

c) Cum f este continuă în 1 şi $f_s'(1)=\lim\limits_{x\nearrow 1}12x=12$ şi $f_d'(1)=\lim\limits_{x\searrow 1}(4x+8)=12$, rezultă că f este derivabilă în 1.

**7).** a) $f'(x)=4^x\ln 4+5^x\ln 5\Rightarrow\ f'(0)=\ln 4+\ln 5=\ln 20;$

b) $f'(x)=4^x\ln 4+5^x\ln 5\rangle 0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow$f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$; c) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0.$

**8).** a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x};=f'(x)=2\cdot e^{2x}-2\cdot e^{-2x};\ \ f'(0)=0;$ b) f este crescătoare pe $(0;\infty)$ şi descrescătoare pe $(-\infty;0)$; c) 0 este punctul de minim al funcției. Rezultă,

$f(x)\ge f(0)\Rightarrow f(x)\ge 2,\ \forall x\in\mathbb{R}..$

**9).** a) $f'(x)=2+\ln x$ ; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$; $=f'(1)=2.$ b) f este convexă pe $(0;\infty)$ și concavă pe $(-\infty;0)$. c) $2x-y-1=0$;

**10).** a) $f'(x)=(x^2+5x+6)\cdot e^x$, $f'(0)=6;$ b) -3 și - 2 sunt puncte de extrem iar f este crescătoare pe $(-\infty;-3]\cup[-2;\infty)$ și descrescătoare pe $(-3;-2)$; c)

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^2\cdot e^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+5x+6}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+5}{2x}=1.$

**11).** a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=0;$

b) $f'(x)=e^{x+1}-e\geq 0,\forall x\geq 0\Rightarrow$f este crescătoare pe $[0;\infty)\Leftrightarrow\forall x\geq 0\Leftrightarrow f(x)\geq f(0)$ . Cum f(0)=0 rezultă că $f(x)\geq 0,\forall x\geq 0.$

$f'(x)=e^{x+1}-e\leq 0,\forall x\leq 0\Rightarrow$f este descrescătoare pe $(-\infty;0]\Leftrightarrow\forall x\leq 0\Leftrightarrow f(x)\geq f(0)$ . Cum f(0)=0 rezultă că $f(x)\geq 0,\forall x\geq 0.$ Aşadar, $f(x)\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}.$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{x+1}-e(x+1)}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{x+1}-e}{2x}=\infty.$

**12)** . a) $f'(x)=\dfrac{2x-1}{x-x^2}.$ f este crescătoare pe $\left[\dfrac{1}{2},1\right)$ și descrescătoare pe $\left(0;\dfrac{1}{2}\right].$

b) $f''(x)=\dfrac{2x^2-2x+1}{\left(x-x^2\right)^2}\rangle 0,\ \forall x\in(0;1).$ c) Observăm că

$f\left(\dfrac{a}{10}\right)+f\left(\dfrac{10-a}{10}\right)=0,\forall a\in\{1,2,...,9\}$ ,atunci, suma dată este egală cu 0.

**13**). a) $x\in(-\infty;-2)\cup(4;\infty)$; b) f este crescătoare pe $(-2;1]\cup(4;\infty)$ și descrescătoare pe $(-\infty;-2)\cup[1;4)$; c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-2}{x^2-2x-8}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{2x-4}=0;$

14). a) $f'(x)=\dfrac{x^2+2}{x^2+1}\Rightarrow f'(0)=2.$ b) $f'(x)\rangle 0,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow$f este crescătoare pe $\mathbb{R}$ .

c) $f''(x)=\dfrac{-2x}{\left(x^2+1\right)^2}\langle 0,\ \forall x\in(0;\infty)$, rezultă că f eset concavă pe $(0;\infty)$.

**15**). a) $f'(x)=2011x^{2010}-2010\Rightarrow f'(0)+f(0)=-2010+2010-2012=-2012;$

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=2011-2010=1;$

c) $f''(x)=2011\cdot 2010x^{2009}\rangle 0,\ \forall x\rangle 0\Rightarrow$f este convexă pe $(0;+\infty)$şi concavă pe $(-\infty;0)$.

**16).** a) $f'(x)=5x^4-\dfrac{5}{x^2}\Rightarrow f'(1)=0;$

b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\langle 0}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\langle 0}}(x^5+\dfrac{5}{x})=-\infty$ şi $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\rangle 0}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\rangle 0}}(x^5+\dfrac{5}{x})=+\infty$. Rezultă că x=0 este asimptotă vericală la stânga către $-\infty$ şi la dreapta către $+\infty$.

c) $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow y-f(-1)=f'(0)(x+1)\Rightarrow$ y= -6 este ecuaţia tangentei la graficul lui f în punctul de abcisă $x_0$ = -1.

**17**). a) $f'(x)=(5^x\cdot x)'=5^x\ln 5\cdot x+5^x=5^x(x\ln 5+1);$

b) Ecuaţia tangentei la graficul lui f are forma $y-0=f'(0)(x-0)\Leftrightarrow y=x,$ adică tocmai ecuaţia primei bisectoare.

c) $f''(x)=[f'(x)]'=[5^x(x\ln 5+1)]'=5^x\ln 5(x\ln 5+1)+5^x\ln 5=5^x\ln 5(x\ln 5+2)$.

**19).** a) $f'(x)=8x^3+16,\ g'(x)=2x-1\Rightarrow f'(x)\cdot g'(x)=16x^4-8x^3+32x-16;$

b) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^4+16x}{x^2-x-6}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x(x^3+8)}{(x+2)(x-3)}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x(x^2-2x+4)}{x-3}=\dfrac{48}{5}$.

c) $f''(x)=(f')'(x)=24x^2\rangle 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Rezultă că f este convexă.

**20).** a) $f'(x)=\cos x,\ g'(x)=-\sin x\Rightarrow f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)-g'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{1+\sqrt{2}}{2};$

b) $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x\langle\frac{\pi}{2}}}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x\langle\frac{\pi}{2}}}\dfrac{\sin x}{\cos x}=\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x\langle\frac{\pi}{2}}}tgx=+\infty;$ c) Ecuaţia tangentei are forma

$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$ de unde rezultă $y-f(\frac{\pi}{6})=f'(\frac{\pi}{6})(x-\frac{\lambda}{6})\Rightarrow y-\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}(x-\dfrac{\pi}{6})$.

**21**). a) $f'(x)=(2x-4)\cdot e^{x^2-4x+2},\ f'(0)=-4\cdot e^2;$ b) 2 este punct de extrem, de minim; c) $0\le x\le 1$, f este descrescătoare, rezultă $f(1)\le f(x)\le f(0)\Rightarrow \dfrac{1}{e}\le f(x)\le e^2,\ \forall x\in[0;1]$.

**22**). a) $f'(x)=e^{-3x}+(x+3)e^{-3x}.(-3)\Rightarrow f'(0)=-8$. b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{-3x}(-3x-8)}{e^{-3x}(x+3)}=-3.$

c) Din f ’(x) = 0 rezultă că $x=-\dfrac{8}{3}$ este punct de maxim.

| | | $-\frac{8}{3}$ | |
|---|---|---|---|
| 0 | $-\infty$ | | $+\infty$ |
| f’(x) | + + + + | 0 | − − − − |
| f(x) | $-\infty$ ↗ | | ↘ 0 |

**23).**a) $f'(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+x-2};\ f'(2)=\dfrac{5}{4}$. b) f este crescătoare pe $\left(-2;\dfrac{1}{2}\right)\cup[1;\infty)$; c)

$f''(x)=\dfrac{-(2x^2+2x+5)}{\left(x^2+x-2\right)^2}\langle 0,\ \forall x\in(-\infty;-2)\cup(1;\infty).$

**24**) a) Cum $f'(x)=\dfrac{2x+2}{x^2+2x-3}\Rightarrow f'(2)=\dfrac{6}{5};$

b) f(x) se mai poate scrie de forma

$f(x)=\ln(x^2+2x-3)=\ln(x+3)(x-1)=\ln(x+3)+\ln(x-1)$, atunci $f'(x)=\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{1}{x-1}$ iar

$f''(x)=-\dfrac{1}{(x+3)^2}-\dfrac{1}{(x-1)^2}\langle 0$ pentru orice $x\in(-\infty,-3)\cup(1;+\infty)$.

Aşadar, f este concavă.

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x^2+2x-3)}{x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+2}{x^2+2x-3}=0$, după ce, în prealabil s-a aplicat regula lui l’Hospital.

**25**). a) $f'(x)=\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$; b) $f'(x)\geq 0,\ \forall x\in\left[-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$; f crescătoare;

$f'(x)\leq 0,\ \forall x\in\left(-\infty;-\frac{\sqrt{2}}{2},\right)\cup\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\infty\right)$, f descrescătoare; c) $4x-4\sqrt{3}y-2\sqrt{3}+3=0$;

**26**). a) $f'(x)=\frac{3x-2}{2\sqrt{x-1}}$; b) f este descrescătoare pe $\left(-\infty,\frac{2}{3}\right)$ și crescătoare pe $\left(\frac{2}{3},\infty\right)$;

c) $f''(x)=\frac{21x-22}{16(x-1)\sqrt{x-1}}\ \langle\ 0,\ \forall x\in\left(1;\frac{22}{21}\right)$. Rezultă că f este convexă pe $\left(1;\frac{22}{21}\right)$.

**27**). a) $f'(x)=\sqrt{x-2}+\frac{x}{2\sqrt{x-2}}=\frac{3x-4}{2\sqrt{x-2}}\rangle 0$, pentru orice $x\in[2;+\infty)$. Rezultă că f este strict crescătoare pe $[2;+\infty)$;

b) Ecuaţia tangentei la grafic, într-un punct M($x_0$, f($x_0$)) este $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$.

Cum $x_0$=3, f($x_0$)=3 şi $f'(3)=\frac{5}{2}$, rezultă ecuaţia $y-3=\frac{5}{2}(x-3)\Rightarrow\ y=\frac{5}{2}x-\frac{9}{2}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}(x\sqrt{x-2}-x\sqrt{x+2})=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x(x-2-x-2)}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x+2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-4x}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1-\frac{2}{x}}+\sqrt{1+\frac{2}{x}}\right)}=-\infty$.

**29**). a) $f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}\Rightarrow f'(1)=1;$

b) Observăm din punctual a) că $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}\Rightarrow 1-\ln x\rangle 0\Leftrightarrow x\langle e\Rightarrow$

Pentru $x\langle e$, f este strict crescătoare, şi pentru $x\rangle e$ f este strict descrescătoare.

c) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\rangle 0}}\frac{\ln x}{x}=-\infty$. **30**). a) $f'(x)=-\frac{2}{(x-1)^2}$, $f'(2)=-2$; b) $y=1$este asimptotă orizontală

la $\pm\infty$; c) $f''(x)=\frac{2}{(x-1)^4}\cdot(2x-2)$. f este convexă pe $[1;\infty)$ și concavă pe $(-\infty;1]$.

**31**) a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=8$ deoarece $f'(x)=\frac{-4(2x^2-3x-2)}{(x^2+1)^2}$.

b) f este crescătoare pe $\left[-\frac{1}{2},2\right]$ și descrescătoare pe $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup(2,\infty)$; c) Fie

$x\in\left[-\frac{1}{2},2\right]$.

Cum f este crescătoare pe $\left[-\frac{1}{2},2\right]$ rezultă $f(-\frac{1}{2})\leq f(x)\leq f(2)\Leftrightarrow\ -7\leq f(x)\leq 3.$

**32**) a) $f'(x)=\frac{-2(x-2)}{(x^2-x+1)^2}$, $f'(1)=2$, $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=2.$

b) f este crescătoare pe $[0,2]$ și descrescătoare pe $(-\infty,0)\cup(2,\infty)$;

c) f este crescătoare pe $0\leq x\leq 2$. Atunci , $f(0)\leq f(x)\leq f(2)\Rightarrow -2\leq f(x)\leq\frac{2}{3}$.

**33)** . a) $f'(x)=\frac{-x^2-6x-1}{(x^2-1)^2}$, $f'(0)=-1$; b) $f'(x)=0\Rightarrow x_1\approx -5,9$ și $x_2\approx\sim -0,18$.
f este crescătoare pe $[x_1,x_2]$ și descrescătoare pe $(-\infty,x_1)\cup(x_2,\infty)$;

c) Cum f este crescătoare pe $[-3,-2]$ , atunci, din $-3\le x\le -2\Rightarrow\ f(-3)\le f(x)\le f(-2)\Rightarrow$
$0\le f(x)\le\frac{1}{3}$ . **34)** . a) $f'(x)=\frac{x^2-6x-1}{(x-3)^2}$, $f'(1)=-\frac{3}{2}$; b) $f'(x)=0\Rightarrow x_1\approx 0,1$ și $x_2\approx\sim 6,2$.
f este descrescătoare pe $[x_1,x_2]$ și crescătoare pe $(-\infty,x_1)\cup(x_2,\infty)$;
c) Cum f este descrescătoare pe $[1,2]$, atunci, din $1\le x\le 2\Rightarrow\ f(2)\le f(x)\le f(1)\Rightarrow$
$-5\le f(x)\le -1$;

**35**). a) $f'(x)=\frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}$, $f'(2)=\frac{5}{3}$; b) Punctul de maxim este $x=-1-\sqrt{2}$. c)
$y=ax+b, unde\ \ a=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2+x}=1,\ b=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x^2+1}{x^2+x}-x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-x}{x+1}=-1$. Atunci,
$a+b=0$.

**36)**. a) $f'(x)=-\frac{1}{(x^2+2x)^2}\cdot(2x+2)$, $f'(1)=\frac{-4}{9}$; b) f este crescătoare pe $(-\infty;-1)$ și
descrescătoare pe $(-1;\infty;)$ c) $y-\frac{1}{3}=f'(1)(x-1),\ 4x+9y-7=0.$

**37)**. a) $f'(x)=\frac{2x^2-2x}{(2x-1)^2}$, $f'(2)=\frac{4}{9}$; b) f este crescătoare pe $(-\infty;0]\cup[1;\infty)$;
c) $x=\frac{1}{2}$ este asimptotă verticală la stînga către $-\infty$ iar la dreapta către $\infty$.
$y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$ este asimptotă oblică la $\pm\infty$.

**39)**. a) $f'(x)=\frac{2x^2-4x-1}{(x-1)^2}$, $f'(2)=-1$; b) f este crescătoare pe $(-\infty;1-\frac{\sqrt{6}}{2})\cup\left(1+\frac{\sqrt{6}}{2};\infty\right)$
și descrescătoare pe $\left(1-\frac{\sqrt{6}}{2};1+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$; c) $x+y-11=0.$

**40**). a) $f'(x)=\frac{-x^2+4x-5}{(x^2-4x+3)^2}$, $f'(2)=1$; b) f este descrescătoare pe $\mathbb{R}$ . c)
$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)\cdot(2x-3)=$

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-2}{x^2-4x+3}\cdot(2x-3)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-7x+6}{x^2-4x+3}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x-7}{2x-4}=2.$ S-a aplicat regula lui l'Hospital.

**41)** a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x+1}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(1+x)}{x}=0;$ b) $f'(x)=\frac{1-x}{(x+1)^2}$; $f'(x)=0\Rightarrow$ 1 este punct de maxim iar
valoarea maximă este egală cu $f(1)=1-\ln 2$; c) $y=1-\ln 2$.

**42)**. a) $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-5}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{x-5+x-1}{(x-1)(x-5)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2(x-3)}{x^2-6x+5}=\frac{x-3}{x^2-6x+5}=f(x);$

b) Cum $f'(x)=-\frac{1}{2(x-1)^2}-\frac{1}{2(x-5)^2}\langle 0$ pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{1;5\}$, rezultă că f este strict descrescătoare pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{1;5\}$.

c) Din condiţia $f(x)\rangle 0\Rightarrow\frac{x-3}{(x-1)(x-5)}\rangle 0$ ceea ce implică $x\in(1;3)\cup(5;+\infty)$.

**43)**. a) Cum $f'(x)=\frac{(4x+1)(x-1)-2x^2-x+6}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-4x+5}{(x-1)^2}\Rightarrow f'(2)=\frac{8-8+5}{(2-1)^2}=5.$

b) Cum ecuaţia asimptotei oblice este y=mx+n unde $m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ şi $n=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-mx]$, rezultă

$2=m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{ax^2+bx-6}{x^2-x}=a\Rightarrow a=2;$

$3=n=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-mx]=\lim\limits_{x\to\infty}[\frac{2x^2+bx-6}{x-1}-2x]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+bx-6}{x-1}=b+2$; Din b+2=3 rezultă b=1.

Aşadar, a = 2 şi b = 1.

c) Ecuaţia tangentei la graficul funcţie f în punctul M($x_0$;f($x_0$)) este dată de formula, $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$. În cazul nostru, ecuaţia tangentei este :

$y-4=f'(2)(x-2)\Rightarrow y=5(x-2)+4,\ y=5x-6.$

**44)**. a) $f'(x)=\frac{(2x+3)(x+4)-(x^2+3x)\cdot 1}{(x+4)^2}=\frac{x^2+8x+12}{(x+4)^2}\Rightarrow f'(0)=\frac{12}{16}=\frac{3}{4};$

b) $\lim\limits_{\substack{x\to-4\\x\langle-4}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to-4\\x\langle-4}}\frac{x^2+3x}{x+4}=-\infty$ şi $\lim\limits_{\substack{x\to-4\\x\rangle-4}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to-4\\x\rangle-4}}\frac{x^2+3x}{x+4}=+\infty$. Rezultă că x = - 4 este asimptotă verticală la stânga către $-\infty$ şi la dreapta către $+\infty$.

c) $f''(x)=\frac{(2x+4)(x+4)^2-(x^2+8x+12)\cdot(2x+8)}{(x+4)^4}=\frac{8x+32}{(x+4)^4}=\frac{8}{(x+4)^3}.$

Rezultă că $f''(x)\rangle 0,\ \forall x\rangle -4\Rightarrow$ f este convexă pe $(-4;+\infty)$.

**45**. a) f este continuă în $2\Leftrightarrow l_s(2)=l_d(2)=f(2)$.

$l_s(2)=\lim\limits_{\substack{x\to2\\x\langle2}}\sqrt{x+7}=3,\ l_d(2)=\lim\limits_{\substack{x\to2\\x\rangle2}}\frac{x+a}{2x+1}=\frac{a+2}{5}$. Atunci, din $\frac{a+2}{5}=3\Rightarrow a=13;$

Aşadar, f este continuă în 2 dacă şi numai dacă a=13. b) $f'(-3)-f'(3)=\frac{1}{4}+\frac{25}{49}=\frac{149}{196};$

c) $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow y-f(2)=f'(2)(x-2)\Rightarrow y-3=\frac{1}{6}(x-2)\Rightarrow x-6y+16=0.$

**46**). a) f este continua în $2\Leftrightarrow l_s(2)=l_d(2)=f(2)$.

$\Leftrightarrow\lim\limits_{\substack{x\to2\\x\langle2}}\sqrt{x^2+5x+a}=\lim\limits_{\substack{x\to2\\x\rangle2}}\frac{9x+14}{8}\Leftrightarrow\sqrt{14+a}=4\Leftrightarrow 14+a=16\Rightarrow a=2;,$. Atunci, din

b) $f'(x)=\begin{cases}\frac{2x+5}{2\sqrt{x^2+5x+a}},x\in(0;2)\\ \frac{9}{8},x\in(2;\infty)\end{cases}$. Rezultă, $f'(1)+f'(3)=\frac{7}{2\cdot2\sqrt{2}}+\frac{9}{8}=\frac{14+9\sqrt{2}}{8\sqrt{2}}.$

c) Ecuaţia asimptotei oblice: $y=mx+n$;

$m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x+14}{8x}=\dfrac{9}{8}$, $n=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-mx)=\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{9x+14}{8}-\dfrac{9x}{8})=\dfrac{14}{8}$.

Rezultă, $y=\dfrac{9}{8}x-\dfrac{14}{8}$.

**47).** a) $3-x-\dfrac{2}{4-x}=\dfrac{(4-x)(3-x)-2}{4-x}=\dfrac{x^2-7x+10}{4-x}=f(x)$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-7x+10}{(4-x)(x-5)}=-1$; c) $f(x)\cdot(x-4)\le 0\Leftrightarrow x^2-7x+10\ge 0\Rightarrow x\in[-\infty;2]\cup[5;+\infty)$.

**48).** a) $f'(x)=\dfrac{-2x^2-12x+8}{(x^2+4)^2}\Rightarrow f'(0)=\dfrac{1}{2}$; b) $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x(2x+6)}{x^2+4}=2$;

c) Deoarece $-2x^2-12x+8\langle 0,\forall x\ge 1\Rightarrow f'(x)\langle 0,\forall x\ge 1\Rightarrow$ f este strict descrescătoare pe $[1;\infty)$.

**Bibliografie:**

1. Adrian Stan. Sinteze matematice. Editura Rafet. Rm. Sărat. 2007.
2. Adrian Stan, colab. Matematică. Ghid de pregătire M2. Bacalaureat 2010. Editura Campion. Bucureşti. 2010.
3. Adrian Stan. Algebra. Clasa a XI-a . Editura EditGraph. Buzău. 2010.
4. Adrian Stan. Memorator la matematică cu exemple. Editura Editgraph. Buzău. 2012.
5. Adrian Stan și colab.Matematică M2 clasa a XI-a. Editura Campion. București. 2014.
6. Adrian Stan și colab. Matematică. Bacalaureat 2015. Editura Campion. București. 2014.
7. Becheanu M., Grigore Gh.,Ianuş S.,Ichim I. Probleme de algebră, analiză matematică şi geometrie. Editura Cartea Românească. 1991.
8. Bordieanu Nicolae, Bordieanu Mona. Culegere de exerciţii şi probleme de algebră, clasele IX- XII. Editura Conexiuni. Bacău. 2001.
9. Burtea Marius, Burtea Georgeta, şi colaboratori, Matematică. Ghid pentru pregătire M2. Bacalaureat 2010. Editura Campion. Bucureşti. 2010.
10. Burtea Marius, Burtea Georgeta. Matematică , manual pentru clasa a XI-a. Editura Carminis. Piteşti. 2008.
11. Cohal Traian, Iurea Gheorghe. Probleme de matematică pentru clasa a XI-a. Editura Taida. Iaşi. 2006.
12. Coşniţă C., Turtoiu F. Probleme de algebră. Editura Tehnică . Bucureşti. 1989.
13. GangaM., Matematică, manual pentru clasa a XI-a. Editura Mathpress. Ploieşti. 2002.
14. Gomolea Aurelia şi colaboratori. Matematică, manual pentru clasa a XI-a. Editura Teora Educaţional. Bucureşti. 2003.
15. Lupaş Luciana, Lupaş Alexandru. Probleme de algebră. Editura Gil. Zalău. 2002.
16. Mirică Ştefan şi colaboratori, Matematică, manual pentru clasa a XI-a. Editura Aramis.
17. Năstăsescu C., Niţă. C, Brandiburu M., Joiţa D. Exerciţii şi probleme de algebră. Editura Didactică şi Pedagogică. Bucureşti. 1983.
18. Fără autor. Ghid metodic. Bacalaureat 2009. M2. Editura Gil . Zalău. 2009.