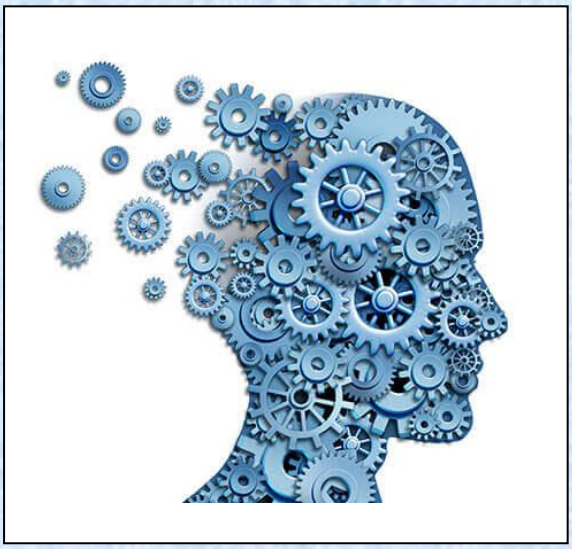
ADRIAN STAN

MATEMATICĂ
pentru clasa a X-a



Editura Editgraph, Buzău, 2020

ADRIAN STAN

MATEMATICĂ
pentru clasa a X-a

MATEMATICĂ M2 TEHNOLOGIC

Editura Editgraph, Buzău, 2020

Referenți ştiinţifici:
Prof. dr Dumitru Săvulescu, București
Prof. gr. 1 Lucian Tuțescu, Craiova
Prof. gr. 1 Neculai Stanciu, Buzău

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României

Stan Adrian
Matematică pentru clasa a X-a. / Editgraph 2020
ISBN :

ISBN:
Editor: Florin Comăniță
Corectură: Stanciu Neculai
Tehnoredactare: Adrian Stan
Coperta: Adrian Stan

Tipar: editgraph Buzău
www.editgraph.ro

ADRIAN STAN

MATEMATICĂ
pentru clasa a X-a

MATEMATCĂ M2 TEHNOLOGIC

Editura Editgraph, Buzău, 2020

CUPRINS

Introducere 7
1. Numere reale. Recapitulare și completări..... 11
1.1 Operații nu radicali de ordinul doi 11
1.2 Radicalii de ordinul trei 27
1.3. Raționalizarea numitorilor fracțiilor 31
1.4. Puteri cu exponent rațional, real 35
1.5. Logaritmi 38
1.6. Teste de autoevaluare 42

2. Numere complexe 48
2.1 Operații cu numere complexe 50
2.2 Ecuații în $\mathbb{C}$ 57
2.3 Teste de autoevaluare 63

3. Funcții. Proprietăți generale 64
3.1 Funcții. Definiție 65
3.2 Proprietăți generale ale funcțiilor 69
3.3 Funcții bijective. Funcții inversabile 76

4. Funcții și ecuații iraționale 84
4.1 Funcții iraționale 84
4.2 Ecuații iraționale 87
4.3 Teste de autoevaluare 93

5. Funcții și ecuații exponențiale 94
5.1 Funcții exponențiale 94
5.2 Ecuații exponențiale 97
5.3 Teste de autoevaluare 102

6. Funcții și ecuații logaritmice 104
6.1 Funcții logaritmice 104
6.2 Ecuații logaritmice 107
6.3 Teste de autoevaluare 112

7. Funcții și ecuații trigonometrice 114
7.1 Funcții trigonometrice directe și indirecte 114
7.2 Ecuații trigonometrice 118

8. Combinatorică 122
8.1 Probleme de numărare 122
8.2 Permutări 127
8.3 Aranjamente și combinări 129
8.4 Binomul lui Newton 136
8.5 Teste de autoevaluare 137

9. Matematici financiare 142
9.1 Procente 142
9.2 Dobânzi 146
9.3 Probabilități 151
9.4 Statistică matematică 160
9.5. Teste de autoevaluare 164

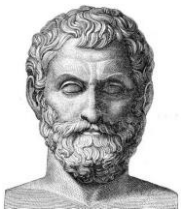
10. Ecuațiile dreptei în plan 165
10.1 Reper cartezian în plan. Distanța dintre două puncte 165
10.2 Ecuațiile dreptei în plan 168
10.3 Condiții de perpendicularitate și paralelism 171
10.4 Calcule de distanțe și arii 174
10.5 Teste de autoevaluare 179

11. Probleme recapitulative 180

12. Indicații și răspunsuri 203

13. Bibliografie 253

Introducere



Încă din sec. 6 î.e.n școala de matematică greacă al cărei precursor a fost **Thales din Milet** (c. 624 – 576 î.e.n) a dezvoltat un raționament deductiv în rezolvarea problemelor, pe baza logicii și a unui sistem de axiome riguroase în care conceptul de număr juca un rol fundamental, mai mult, ocupa primul loc, fiind baza tuturor lucrurilor existente, esența întregului univers așa cum era prezentat de discipolii școlii pitagoreice, **Pitagora din Samos** (c. 584, Samos, Grecia , - c. 497 î.e.n).

În fapt, multe din cunoștințele grecești au fost preluate sau dezvoltate din cultura egipteană și mesopotamiană mult mai avansate în secolele 25- 16 î.en, rămase astăzi pe o serie de plăcuțe de lut sau papirusuri în care cercetătorii au descoperit probleme ale căror rezolvări implicau ecuații de gradul 1 și 2, operații cu fracții, aproximări ale numerelor, medii aritmetice și geometrice, divizibilitate, calcule de arii, serii, etc.

Plimpton 332 (text babilonian din 1900 I.C.), **Rhind Mathematical Papyrus** sau papirusul scribului **Ahmes** (text egiptean 2000-1800 I.C.) si **Moscow Mathematical Papyrus** (text egiptean 1890 I.C).

Matematicienii greci **Euclid** (330-275 î.e.n, **Eratostene din Cyrene**(c 273 – 195, î.e.n.), **Arhimede din Siracuza** (c. 287 – 212, î.e.n) au pus bazele științelor pentru secolele următoare.

În sec. 1 e.n, matematicianul și inginerul grec **Heron din Alexandria,** fondator al Școlii Politehnice din Alexandria, unul din cei mai mari inventatori, cu aplicații în domeniul opticii, mecanicii, termodinamicii, a dat definiția lucrului mecanic, regula paralelogramului de adunare a forțelor, aria unui triunghi(formula lui Heron de calcul a ariei cu ajutorul laturilor triunghiului), precum și calculul volumelor unor corpuri de unde obține o aproximare a rădăcinii cubice. Inventează clepsidra şi fântâna arteziană.

Tot în această perioadă a trăit și matematicianul grec din Alexandria, **Diofant**. El a renunțat la reprezentarea geometrică intuitivă a mărimilor numerice prin segmente sau arii folosind notațiile literare. Prin opera sa „Arithmetika” este întemeietorul algebrei, relatând metode de rezolvare a ecuațiilor algebrice de ordinul 1 și 2, precum și folosirea simbolurilor pentru necunoscute, a folosit reguli de calcul algebric abstract precum și tipuri de ecuații care astăzi îi poartă numele, ecuații diofantice. Se pare că această operă a avut în original 13 cărți, din care au rămas doar 7.

În perioada evului mediu cultura și civilizația musulmană și cea hindusă au fost cu mult deasupra celei europene, dacă ne gândim la dezvoltarea matematicii și astronomiei adusă în prim-plan de către matematicienii musulmani, Aryabhata (476–550), Al Khwarizmi (780-850), Abu Kamil (850- 930), Abu al-wafa Buzjani (940- 998), Ghiyath al- Kashi(1380- 1429), Al Biruni (973-1048) sau de cei indieni, Brahmagupta (c. 598- c. 670), Omar Khayyan (1048-1131), Bhaskara II (1114-1185).

De la **Aryabhata** ne-au rămas valoarea exactă cu patru zecimale a lui pi, sistemul zecimal cu sistemul de numerație pozițional și o serie de reguli algebrice și trigonometrice.

Pe lângă faptul că a explicat eclipsele de lună și de soare, mișcarea de rotație a Pământului, a calculat circumferința Pământului cu o precizie de 99,8%. Tot el a dat și formulele pentru sumele $1^2+2^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $1^3+2^3+...+n^3=(1+2+3+...+n)^2$.

Brahmagupta cunoştea calculul cu fracţii , raționalizarea numitorilor fracțiilor şi știa și modul de rezolvare a unor ecuaţii, al calculului rădăcinii pătrate şi al unor probleme de astronomie. Pentru prima dată, cifra zero apare ca număr și sunt descrise operațiile de adunare și scădere cu numere negative. A dat și o regulă algebrică de determinare a ecuației de gradul doi.

Matematicianul persan **Al Khwarizmi** (780-850) prin cartea sa „Hisab al-jabr w'al-muqabala" (Calculul prin adăugare şi aproximare), cunoscută în vest și sub titlul «Algebra», a dat metode de rezolvare a tuturor ecuaţiilor de gradul întâi şi doi cu rădăcini pozitive, cu ajutorul sistemului zecimal dezvoltat de indieni. Astfel, în Europa, prin traducerea operelor lui este introdus sistemul de numerație indo-arabic, denumirea de algebră "al-jabr" provenind din lucrările lui și semnifica una din cele două operații de bază pe care le folosea la rezolvarea ecuațiilor și anume, separarea termenilor asemenea dintr-o ecuație.

De asemenea, cuvântul algoritm provine din forma latinească a numelui său și anume Algoritmi și se găsește în titlul unei cărți de a sa despre arta hindusă a calculului "Algoritmi de numero Indorum" ("al-Khwārizmī on the Hindu Art of Reckoning") intitulată astfel de matematicieni din sec. 19.



În Europa anului 1202 apărea lucrarea „ Liber Abaci", a lui **Leonardo Fibonacci**(1170 - 1250) care introduce astfel sistemul de calcul cu cifre indoarabe. A fost primul care a introdus în Europa numerele negative fiind interpretate ca datorii. A propus denumirea de 'zero" pentru numărul 0 și a folosirii liniei de fracții precum și a rezolvării de ecuații algebrice prin aproximarea soluțiilor acestora.

Tot el a perfecționat regula de adunare a fracțiilor, prin aducerea la același numitor comun după calcularea celui mai mic multiplu comun. De asemenea, a dat criteriile de divizibilitate cu 2, 3 5, 9.

În 1544, în "Arithmetica integra" matematicianul și călugărul german **Michael Stifel** (1487 – 19.04.1567), inovează simbolistica matematică prin utilizarea pentru prima dată a operațiilor cu numere negative, a înmulțirii dintre termeni fără să folosească vreun simbol între ei și denumirea de exponent, dând regulile de calcul cu puteri așa cum le cunoaștem și noi: $q^m q^n=q^{m+n}$, $\frac{q^m}{q^n}=q^{m-n}$. S-a preocupat și pentru rezolvarea tipurilor de ecuații pătratice și a studiat numerele iraționale.

Francezul **François Viète** (1540 – 23.02.1603) este considerat unul dintre cei mai mari matematicieni ai secolului al XVI-lea care a dus știința franceză la un nivel ridicat pentru contemporanii săi. Deși jurist, **Viete** a avut preocupări în astronomie și trigonometrie determinând prin calcule valoarea lui π cu nouă zecimale exacte, sau a

formulelor pentru $\sin a-\sin b, \sin a+\sin b$, $\cos a-\cos b, \cos a+\cos b$, $\sin na, \cos na$ în funcție de $\sin a, \cos a$.

Cel mai mult, este cunoscut pentru scrierea literală pentru prima dată, a formulei $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

În 1585, prin cartea " De Thiende " a matematicianului și inginerului olandez **Simon Stevin** (1548 - 1520) este introdusă pentru prima dată notația zecimală, destul de greoaie, care avea să ușureze ulterior calculul real matematic cât și cel economic.

De abia în 1612, germanul **Bartholomaeus Pitiscus** (24.08.1561 – 02.07.1613) separă întregii de zecimale prin punct.

Astronomul și matematicianul englez **Thomas Harriot** (c. 1560 – 02.07.1621) a introdus inegalitățile în algebră, lui fiindu-i atribuite inegalitățile : $a^3+b^3\rangle ab(a+b)$, $(a+b+c)^3\rangle 27abc$, $a,b,c\rangle 0.$, precum și folosirea simbolului „·" pentru înmulțire.

O revoluție în algebră a constituit-o inventarea logaritmilor o dată cu apariția în 1614 a cărții " Mirifici logarithmorum ……..", a matematicianului scoțian **John Napier** (sau Neper) (1550 – 04.04.1617). Acest fapt a făcut posibilă reducerea unor înmulțiri la adunări și a unor împărțiri la scăderi. Logaritmii reprezintă operația inversă de calcul cu puteri cu exponent care stă la baza funcționării calculatoarelor mecanice analogice ulterioare. De asemenea, el are meritul de a fi lucrat sistematic cu calculul cu fracții ordinare în detrimentul celui cu fracții zecimale și a propus despărțirea prin virgulă a părții întregi de partea zecimală în cadrul scrierii fracțiilor zecimale.

În 1572, Raffaele Bombelli (1526 - 1572) a publicat cartea " L'Algebra " în care aduce contribuții importante în înțelegerea numerelor complexe.

În 1634, matematicianul și astronomul francez Pierre Herigone (1580–1643) a dat formula combinărilor de n elemente luate câte p, $C_n^p=\frac{n!}{p!\cdot(n-p)!}$ și de asemenea, lui i se atribuie folosirea și introducerea sistematică a unui set larg de simboluri și notații geometrice.

Matematicianul şi filozoful francez **Rene Descartes** (31.03.1596 – 11.02.1650) considerat reformatorul algebre este primul matematician care introduce noțiunea de variabilă și folosește metoda coordonatelor prin care problemele de geometrie se reduc la probleme de algebră. A folosit literele alfabetului latin pentru notații , constantele cu primele litere iar variabilele cu ultimele litere. Astfel, geometria analitică pe care el a fondat-o este în strânsă legătură cu sistemul de coordonate carteziane - de la numele lui, pe care el l-a introdus și unde a notat axele cu Ox și Oy. Astfel, un punct din plan se reprezintă prin două coordonate, abcisa pe Ox și ordonata pe Oy. Luând un segment al dreptei ca fiind segment unitate, a descoperit că pentru orice punct de pe dreaptă se poate asocia un număr real, introducând astfel axa numerelor reale ceea ce era o noutate pentru acel timp.

Pasiunea pentru matematică a juristului francez **Pierre de Fermat** (17.08.1601 – 12.01.1665) și corespondența sa din 1654 cu **Blaise Pascal** (19.06.1623 – 19.08.1662) a

condus la apariția teoriei probabilităților cu ocazia problemei legate de împărțirea echitabilă a mizei unui joc de noroc încheiat înainte de termen.

Jacques Bernoulli (sau Jacob) (27.12.1654 – 16.08.1705) a dezvoltat teoria probabilităților unde a dat legea numerelor mari (1705), cunoscută și sub numele de legea lui Bernoulli. De asemenea, „inegalitatea lui Bernoulli ” este foarte cunoscută, $(1+x)^n \geq 1+nx$, pentru orice n număr natural. De numele său sunt legate și noțiunile de *variabilă aleatoare, evenimente independente și experiment bernoullian*.



Copilul minune al matematicii, Pascal prin cartea sa din 1654 „Combinatorică” a dezvoltat această teorie a combinatoricii la un nivel destul de ridicat. Pe lângă marile sale descoperiri din fizică se știe că în dorința de a-și ajuta tatăl care era colector de taxe, a inventat în 1642 primul calculator mecanic „ Pascaline” o mașină carte efectua adunări și scăderi. Lui i se atribuie și inventarea ruletei de azi.

Continuator al muncii sale a fost **Isaac Newton** (25.12.1642 – 20.03.1727) care a extins formula binomului la puteri cu exponenți raționali și reali, $(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}\cdot b + C_n^2 a^{n-2}\cdot b^2 + ... + C_n^{n-1} a\cdot b^{n-1} + b^n$.

În 1671, **Leibniz** inventează un calculator mecanic net superior celui inventat de Pascal. Era o mașină de calculat care efectua cele patru operații, de adunare, scădere, inmulțire și împărțire dar care putea să și extragă rădăcina pătrată. Tehnica fundamentată de el pentru funcționarea calculatorului avea ca principiu folosirea bazei 2 și nu a celei în baza 10. Această tehnică a stat la baza ideii construirii calculatoarelor electronice în sec. XIX.

Din 1711, **Moivre** a exprimat, independent de Bernoulii, probabilitatea ca un eveniment de probabilitate “ p” să se realizeze de „m” ori, din „n” probe de aceeași natură , și anume $C_m^n p^m q^{m-n},\ p+q=1$. De asemenea, el a generalizat problema distribuției binomiale a lui Bernoulli iar în 1718 dă formula probabilităților condiționate, $P_B(A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$.

Începând cu secolul 18 și continuând cu sec al 19-lea în matematică au loc mari descoperiri ale marilor matematicieni francezi, englezi, germani cum ar fi Newton, Leibniz, Euler, Clairaut, Laplace, Monge, Cramer, Gauss, Lagrange, Bezout, Legendre, Fourier, Dirichlet, Galois, Cauchy, etc., care au contribuit la punerea unor baze solide, științifice ale tuturor cunoștințelor matematice, la abstractizarea și organizarea axiomatică a cunoștințelor care au condus la dezvoltarea teoriilor matematice și diversificarea ramurilor matematice prin noi discipline și teorii dar și la găsirea a numeroase aplicații ale acestora în diverse domenii.

Cap. 1. NUMERE REALE

Recapitulare și completări

1.1 Operații cu radicali de ordinul doi

Pe parcursul lecțiilor se folosesc notațiile:

$\mathbb{R}=(-\infty;\infty)$, $\mathbb{R}^*=(-\infty;\infty)\setminus\{0\}$, $\mathbb{R}^*_+=(0;\infty)$, $\mathbb{R}_+=[0;\infty)$.

Definiție. Se numește radical de ordinul n din a, numărul $\sqrt[n]{a}$, unde $a\in\mathbb{R}, n\geq 2$, n se numește ordinul radicalului.

Acesta provine de la rezolvarea ecuației $x^n=a\Rightarrow x=\sqrt[n]{a}$.

Dacă n este par atunci $a\in\mathbb{R}_+$; Dacă n este impar, atunci $a\in\mathbb{R}$;

Definiţia radicalului de ordinul doi

Fie $a\in\mathbb{R}_+$. Atunci $\sqrt{a}\in\mathbb{R}_+$ se numește rădăcina pătrată a numărului real pozitiv a.

$\boxed{\sqrt{a}\geq 0,\ \forall a\geq 0}$ $\sqrt{a}$ nu există dacă $a\langle 0$;

Exemplu de extragere a rădăcinii pătrate

$$\begin{array}{r|l}\sqrt{5\,4\,7\,5\,6} & 234\\ \hline 4 & \\ \hline 1\,4\,7 & 43\cdot 3=129\\ 1\,2\,9 & 464\cdot 4=1856\\ \hline =\ 1\,8\,5\,6 & \\ =\ 1\,8\,5\,6 & \\ \hline ====\ \ \ & \end{array}$$

Extragerea rădăcinii pătrate dintr-un număr natural

Se grupează cifrele numărului câte două de la dreapat spre stânga: 5.47.56;

Se află cel mai mare număr (2) al cărui pătrat să fie mai mic sau egal cu 5 și îl scriem în dreapta sus, la răspuns iar pătratul său 2^2=4 se pune sub 5 și se face scăderea.

Se coboară grupa a doua (47) lângă primul rest (1);

Se dublează rădăcina (2·2=4) și se trece jos în dreapta lângă care se adaugă câtul dintre 14 și 4 adică 3, apoi se înmulțește numărul obținut (43) cu 3 și se adaugă sub 147, după care se scad;

Lângă noul rest se adaugă ultima grupă (56);

Se dublează rădăcina (23·3=46); Lângă 46 se adaugă câtul dintre 185 și 46 adică 4 și se înmulțește numărul 464 cu 4. Rezultatul produsului se adaugă sub 1856 și se scad. Se obține restul 0. Așadar, $\sqrt{54756}=234$.

Pătratele perfecte până la 20 şi extragerea rădăcinii din pătrate perfecte

$n^2=N$	$\sqrt{N}=n$	$n^2=N$	$\sqrt{N}=n$
$0^2=0$	$\sqrt{0}=0$	$10^2=100$	$\sqrt{100}=10$
$1^2=1$	$\sqrt{1}=1$	$11^2=121$	$\sqrt{121}=11$
$2^2=4$	$\sqrt{4}=2$	$12^2=144$	$\sqrt{144}=12$
$3^2=9$	$\sqrt{9}=3$	$13^2=169$	$\sqrt{169}=13$
$4^2=16$	$\sqrt{16}=4$	$14^2=196$	$\sqrt{196}=14$
$5^2=25$	$\sqrt{25}=5$	$15^2=225$	$\sqrt{225}=15$
$6^2=36$	$\sqrt{36}=6$	$16^2=256$	$\sqrt{256}=16$
$7^2=49$	$\sqrt{49}=7$	$17^2=289$	$\sqrt{289}=17$
$8^2=64$	$\sqrt{64}=8$	$18^2=324$	$\sqrt{324}=18$
$9^2=81$	$\sqrt{81}=9$	$19^2=361$	$\sqrt{361}=19$
$10^2=100$	$\sqrt{100}=10$	$20^2=400$	$\sqrt{400}=20$

Proprietăţile radicalilor

$Fie\ a,b\in\mathbb{R}_+$

1. $\boxed{\sqrt{a^2}=|a|\geq 0,}$ Exemplu: $\sqrt{(-5)^2}=|-5|=5$;
2. $\boxed{\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}}$ Exemplu: $\sqrt{72}=\sqrt{36}\cdot\sqrt{2}=6\sqrt{2}$;
3. $\boxed{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}},\ b\neq 0}$ Exemplu: $\sqrt{\frac{9}{16}}=\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}}=\frac{3}{4}$;
4. $\boxed{\sqrt{a^n}=(\sqrt{a})^n=a^{\frac{n}{2}}}$ Exemplu: $\sqrt{3^{2012}}=3^{\frac{2012}{2}}=3^{1006}$;
5. Dacă $\boxed{\sqrt{a}\in\mathbb{Q}\Rightarrow a=k^2}$ Exemplu: $\sqrt{3^{2n}+8\cdot 3^n+16}\in\mathbb{Q}\Rightarrow 3^{2n}+8\cdot 3^n+16=k^2;\ \ k=3^n+4$;
6. $\boxed{a\sqrt{b}=\sqrt{a^2b}}$ Exemplu: $2\sqrt{3}=\sqrt{2^2\cdot 3}=\sqrt{12}$;
7. $\boxed{\sqrt{a^2b}=|a|\sqrt{b}}$ Exemplu: $\sqrt{3^8\cdot 5}=3^4\cdot\sqrt{5}$;
8. $\boxed{x\sqrt{a}\cdot y\sqrt{b}=xy\sqrt{ab}}$ Exemplu: $3\sqrt{2}\cdot 5\sqrt{3}=3\cdot 5\cdot\sqrt{2\cdot 3}=15\sqrt{6}$;
9. $\boxed{x\sqrt{a}\pm y\sqrt{a}=(x\pm y)\sqrt{a}}$ Exemplu: $4\sqrt{5}+2\sqrt{5}=(4+2)\sqrt{5}=6\sqrt{5}$;
10. $\boxed{\frac{x\sqrt{a}}{y\sqrt{b}}=\frac{x}{y}\sqrt{\frac{a}{b}},\ \ y,b\neq 0}$ Exemplu: $\frac{8\sqrt{24}}{4\sqrt{6}}=\frac{8}{4}\cdot\sqrt{\frac{24}{6}}=2\sqrt{4}=2\cdot 2=4$;
11. $\boxed{\left(x\sqrt{a}\right)^n=x^n\sqrt{a^n}}$ Exemplu: $\left(2\sqrt{6}\right)^3=2^3\cdot\sqrt{6}^3=8\cdot 6\sqrt{6}=48\sqrt{6}$;

Calculul radicalilor dubli

$$\boxed{\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}}$$ unde $a^2-b=k^2$. (formula radicalilor dubli)

Exemplu: $\sqrt{7+4\sqrt{3}}=\sqrt{7+\sqrt{48}}=\sqrt{\frac{7+\sqrt{7^2-48}}{2}}+\sqrt{\frac{7-\sqrt{7^2-48}}{2}}=\sqrt{\frac{8}{2}}+\sqrt{\frac{6}{2}}=2+\sqrt{3}$;

$$\sqrt{3-\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{3+\sqrt{9-5}}{2}}-\sqrt{\frac{3-\sqrt{9-5}}{2}}=\sqrt{\frac{5}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}};$$

Altfel, aceste exerciţii se pot rezolva uşor utilizând formulele de calcul prescurtat, şi anume, să se formeze un pătrat perfect sub radical: $7+4\sqrt{3}=(a+b)^2\Rightarrow \underline{7}+\underline{\underline{4\sqrt{3}}}=\underline{a^2}+\underline{\underline{2ab}}+\underline{b^2}$. În cazul nostru se identifică termenii corespunzători începând întodeauna cu termenul care conţine radicalul $4\sqrt{3}=2ab\Big|:2\Rightarrow 2\sqrt{3}=ab$ şi $7=a^2+b^2$. Din cele două rezultă $a=2, b=\sqrt{3}$.

Aşadar, $\sqrt{7+4\sqrt{3}}=\sqrt{(2+\sqrt{3})^2}=\left|2+\sqrt{3}\right|=2+\sqrt{3}.$

Raționalizarea numitorului unei fracții:

$$\frac{x}{\sqrt{a}}=\frac{x\sqrt{a}}{a},\qquad \frac{x}{a\sqrt{b}}=\frac{x\sqrt{b}}{ab}$$
$$\frac{x}{a+\sqrt{b}}=\frac{x(a-\sqrt{b})}{a^2-b},\qquad \frac{x}{a-\sqrt{b}}=\frac{x(a+\sqrt{b})}{a^2-b}$$

Exemple: $\dfrac{3}{2\sqrt{6}}=\dfrac{3\sqrt{6}}{2\cdot 6_2}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$; $\dfrac{2}{\sqrt{3}-2}=\dfrac{2(\sqrt{3}+2)}{3-4}=-2(\sqrt{3}+2)$

Medii

Media aritmetică $m_a=\dfrac{x+y}{2}$ $\qquad m_a(4;6;11)=\dfrac{4+6+11}{3}=\dfrac{21}{3}=7;$

Media geometrică $m_g=\sqrt{x\cdot y}$, $\forall x,y\in R^*_+$ $\qquad m_g(2\sqrt{3};\sqrt{12})=\sqrt{3\sqrt{3}\cdot\sqrt{48}}=\sqrt{3^2\cdot 4}=6;$

Media ponderată $m_p=\dfrac{p\cdot x+q\cdot y}{p+q}; p,q\in N^*-ponderile$

Media armonică $m_h=\dfrac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=\dfrac{2xy}{x+y}$, $\forall x,y\in R^*$

Calcul algebric

Formule de calcul prescurtat în $\mathbb{R}$

1. $\boxed{(a+b)^2=a^2+2ab+b^2;}$ **Exemple:** $(3x+2)^2=(3x)^2+2\cdot 3x\cdot 2+2^2=9x^2+12x+4$;

$\left(2\sqrt{3}+4\right)^2=(2\sqrt{3})^2+2\cdot 2\sqrt{3}\cdot 4+4^2=12+16\sqrt{3}+16=28+16\sqrt{3}$;

2. $\boxed{(a-b)^2=a^2-2ab+b^2;}$ **Exemple:** $(2x-3)^2=(2x)^2-2\cdot 2x\cdot 3+3^2=4x^2-12x+9$;

$\left(2\sqrt{3}-4\right)^2=(2\sqrt{3})^2-2\cdot 2\sqrt{3}\cdot 4+4^2=12-16\sqrt{3}+16=28-16\sqrt{3}$;

3. $\boxed{(a+b)(a-b)=a^2-b^2}$; **Exemple:** $(3x-4)(3x+4)=(3x)^2-4^2=9x^2-16$;

$(\sqrt{5}-3)(\sqrt{5}+3)=\sqrt{5}^2-3^2=5-9=-4$;

4. $\boxed{(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca}$

Exemplu: $(x^2+x+3)^2=(x^2)^2+x^2+3^2+2x^2\cdot x+2x\cdot 3+2x^2\cdot 3=x^4+2x^3+7x^2+6x+9$

5. $\boxed{(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}$;

Exemplu: $(2x+3)^3 = (2x)^3+3(2x)^2\cdot 3+3(2x)\cdot 3^2+3^3 = 8x^3+36x^2+54x+27$

6. $\boxed{(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3}$;

Exemplu: $(5x-2)^3 = (5x)^3-3(5x)^2\cdot 2+3(5x)\cdot 2^2-2^3 = 125x^3-150x^2+60x-8$

7. $\boxed{a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)}$;

Exemplu: $(2x)^3-27 = (2x-3)(4x^2+6x+9)$;

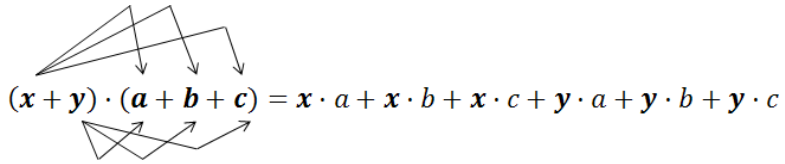
8. $\boxed{a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)}$.

Exemplu: $8x^3-1 = (2x-1)(4x^2+2x+1)$

Reguli de calcul cu numere reale reprezentate prin litere

Factor comun $\boxed{a\cdot x+a\cdot y+a\cdot z = a\cdot(x+y+z)}$ $\boxed{x\cdot(a+b+c) = x\cdot a+x\cdot b+x\cdot c}$

Desfacerea parantezelor: $\boxed{(x+y)\cdot(a+b+c) = x\cdot a+x\cdot b+x\cdot c+y\cdot a+y\cdot b+y\cdot c}$



Exemple: a) $-3\sqrt{2}x^2y(2+x-\sqrt{2}y^3) = -6\sqrt{2}x^2y-3\sqrt{2}x^3y+6x^2y^4$;

b) $(2x+4y)\cdot(x-3y) = 2x^2-6xy+4xy-12y^2$.

Descompuneri în factori

1. Metoda factorului comun

$\boxed{ab+ac-ad = a(b+c-d)}$ **Exemplu:** $25x^3-15x^2+20x = 5x(5x^2-3x+4)$;

$\boxed{ax+ay+bx+by = a(x+y)+b(x+y) = (x+y)(a+b)}$

Exemplu: $12x^2+6x+10x+5 = 6x(2x+1)+5(2x+1) = (2x+1)(6x+5)$;

2. Utilizarea formulelor de calcul prescurtat

$\boxed{a^2+2ab+b^2 = (a+b)^2}$ **Exemplu:** $4x^2+4x+1 = (2x+1)^2$;

$\boxed{a^2-2ab+b^2 = (a-b)^2}$ **Exemplu:** $x^6-6x^3+9 = (x^3-3)^2$;

$\boxed{a^2-b^2 = (a-b)(a+b)}$ **Exemplu:** $x^2-2 = (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$;

$\boxed{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac = (a+b+c)^2}$ **Exemplu:** $x^2+4x+2\sqrt{2}x+6+4\sqrt{2} = (x+2+\sqrt{2})^2$;

Modulul numerelor reale

Definiție: Modulul numerelor reale. Fie $a \in \mathbb{R}$ **. Atunci,** $|a| = \begin{cases} a, & a \rangle 0 \\ 0, & a = 0 \\ -a, & a \langle 0 \end{cases}$ **;**

Exemple:

1). $|-\sqrt{3}| = \sqrt{3};\ |-2\sqrt{5}| = 2\sqrt{5};\ |3\sqrt{6}| = 3\sqrt{6};$ **2).** $|3-\sqrt{3}|;\ |\sqrt{5}-3|;\ |4-3\sqrt{2}|;$

3). $\sqrt{(7-3\sqrt{5})^2}\ ;\ \sqrt{(3-2\sqrt{3})^2}\ ;$

Proprietăţile modulului

1. $|a| \geq 0, \quad \forall a \in \mathbb{R}$; **Exemplu:** $|-7| = |7| = 7 \rangle 0$

2. $|a| = 0, \quad \Leftrightarrow a = 0$; **Exemplu:** $|x-4| = 0 \Rightarrow x-4 = 0 \Rightarrow x = 4;$

3. $|a| = |-a|, \quad \forall a \in \mathbb{R}$; **Exemplu:** $|-5| = |5| = 5$ **;**

4. $|a| = |b|, \quad \Leftrightarrow a = \pm b$; **Exemplu:** $|x| = |-7| \Rightarrow x = \pm(-7) \Rightarrow x = \mp 7$ **;**

5. $|x| = a, \quad \Rightarrow x = \pm a, \quad a \rangle 0$; **Exemplu:** $|x| = 5 \Rightarrow x = \pm 5$ **;**

6. $|x| \leq a, \quad \Leftrightarrow x \in [-a, a], \quad a \rangle 0$; **Exemplu:** $|x| \leq 5 \Rightarrow x \in [-5;5]$ **;**

7. $|x| \geq a, \quad \Leftrightarrow x \in [-\infty, -a] \cup [a, +\infty], \quad a \rangle 0$; **Exemplu:** $|x| \geq 5 \Rightarrow x \in (-\infty;-5] \cup [5;+\infty)$

ECUAȚII ÎN $\mathbb{R}$

FORMULE	EXEMPLE:
1.	**1.**
$x + a = b \big\vert -a \Rightarrow x = b - a$	$x + 6 = 10 \big\vert -6 \Rightarrow x = 10 - 6 = 4.$
$x - a = b \big\vert +a \Rightarrow x = b + a$	$x - 8 = 14 \big\vert +8 \Rightarrow x = 14 + 8 = 22.$
$x \cdot a = b \big\vert : a \Rightarrow x = b : a$	$x \cdot 4 = 12 \big\vert : 4 \Rightarrow x = 12 : 4 = 3.$
$x : a = b \big\vert \cdot a \Rightarrow x = b \cdot a$	$x : 6 = 5 \big\vert \cdot 6 \Rightarrow x = 5 \cdot 6 = 30.$
2. $a \cdot x = b \Rightarrow x = \frac{b}{a}.$	**2.** $4 \cdot x = 20 \Rightarrow x = \frac{20}{4} = 5.$
3. $x^2 = a \Rightarrow x = \pm\sqrt{a}, a \rangle 0.$	**3.** $x^2 = 36 \Rightarrow x = \pm\sqrt{36} = \pm 6.$
4. $\lvert x \rvert = a, \ a \rangle 0 \Rightarrow x = \pm a.$	**4.** $\lvert x \rvert = 4, \ \Rightarrow x = \pm 4.$
5. $\frac{x}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow x \cdot d = b \cdot c \Rightarrow x = \frac{b \cdot c}{d}.$	**5.** $\frac{x}{4} = \frac{3}{5} \Rightarrow x = \frac{12}{5}.$
6. $\sqrt{x} = a \big\vert ()^2 \Rightarrow x = a^2.$	**6.** $\sqrt{x} = 5 \big\vert ()^2 \Rightarrow x = 5^2 = 25.$
7. $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$	**7.** $x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}.$
$a \neq 0. \ \Delta = b^2 - 4ac \rangle 0.$	$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1$
	$x_1 = 2, \ x_2 = 3.$

8. $a\cdot x^2+b\cdot x=0\Rightarrow x(ax+b)=0\Rightarrow x_1=0,\ x_2=-\dfrac{b}{a}$	**8.** $2\cdot x^2-8\cdot x=0\Rightarrow 2x(x-4)=0\Rightarrow$ $x_1=0,\ x_2=4$

INECUAȚII ÎN $\mathbb{R}$

FORMULE	EXEMPLE:
1. $ax+b\le 0(\ \langle,\ \ge,\ \rangle\ ),\ a\in\mathbb{R}^*, b\in\mathbb{R}.$ $\Rightarrow x\le -\dfrac{b}{a}$, dacă $a\rangle 0$.	**1.** $3x-6\langle 0\Rightarrow 3x\langle 6\big\vert:3\Rightarrow x\langle 2\Leftrightarrow x\in(-\infty;2).$
2. $\lvert x\rvert\le a\ \Rightarrow -a\le x\le a\Leftrightarrow x\in[-a;a].$	**2.** $\lvert x\rvert\le 10\ \Rightarrow -10\le x\le 10\Leftrightarrow x\in[-10;10].$
3. $\lvert x\rvert\ge a\ \Rightarrow x\le -a$ sau $x\ge a\ \Leftrightarrow\ x\in(-\infty;-a]\cup[a;\infty)$	**3.** $\lvert x\rvert\ge 5\ \Rightarrow x\in(-\infty;-5]\cup[5;\infty)$
4. $x^2\le a\ \Rightarrow x\in\left[-\sqrt{a};\sqrt{a}\right]$	**4.** $x^2\le 81\ \Rightarrow x\in[-9;9]$
5. $x^2\ge a\ \Rightarrow x\in\left(-\infty;-\sqrt{a}\right]\cup\left[\sqrt{a};\infty\right)$	**5.** $x^2\ge 25\ \Rightarrow x\in(-\infty;-5]\cup[5;\infty)$

Relațiile lui Viete

Definiție: Fie ecuația de gradul al doilea $ax^2+bx+c=0,\ a,b,c,\ a\neq 0,$ cu soluțiile x_1, x_2.
Relațiile lui Viete fac legătura dintre coeficienții ecuației de gradul doi și soluțiile acesteia:

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a} \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a} \end{cases};$$

Demonstrație: $ax^2+bx+c=0\Leftrightarrow a(x-x_1)(x-x_2)=0\Leftrightarrow a\left(x^2-(x_1+x_2)x+x_1\cdot x_2\right)=0\big\vert:a\Rightarrow$

$x^2-Sx+P=0$, unde $\begin{cases} S=x_1+x_2=-\dfrac{b}{a} \\ P=x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a} \end{cases}$.

Exemplu: Să se determine relațiile lui Viete pentru ecuația: $2x^2-6x+4=0$.

Rezolvare: $\begin{cases} S=x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}=-\dfrac{-6}{2}=3 \\ P=x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}=\dfrac{4}{2}=2 \end{cases}$;

Exemplu: Să se determine ecuația de gradul al doilea care are soluțiile $x_1=4,\ x_2=5$.

Rezolvare: Ecuația care are soluțiile x_1, x_2, se scrie sub forma $x^2-Sx+P=0$, unde

$S=x_1+x_2=4+5=9$ iar $P=x_1\cdot x_2=4\cdot 5=20\Rightarrow$ ecuația este $x^2-9x+20=0$.

Alte formule utile:

$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1\cdot x_2$;

$x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)$

$x_1^4+x_2^4=(x_1^2+x_2^2)^2-2x_1^2\cdot x_2^2$

Exercitii rezolvate

1. Să se extragă rădăcina pătrată din următoarele numere:
a) 385; **b)** $3^4\cdot 5^6$; **c)** 576; **d) 1,44; e) 0,0081;**
Rezolvare:

a) $\sqrt{385}\approx 19,62$; **b)** $\sqrt{3^4\cdot 5^6}=\sqrt{\left(3^2\cdot 5^3\right)^2}=3^2\cdot 5^3$; **c)** $\sqrt{576}=\sqrt{3^2\cdot 2^6}=3\cdot 2^3=24$;

d) $\sqrt{1,44}=\sqrt{(1,2)^2}=1,2$; **e)** $\sqrt{0,0081}=\sqrt{(0,3)^4}=0,3^2=0,09$.

$\sqrt{385}$ | $19,62$

1

285

261

2400

2316

8400

7844

556

$29\cdot 9=261$

$386\cdot 6=2316$

$3922\cdot 2=7844$

$1^2=1$

$2\cdot 1=2$

$2\cdot 19=38$

$2\cdot 196=392$

2. Să se calculeze:

a) $8\sqrt{3}-15\sqrt{3}+2\sqrt{3}$; **b)** $10\sqrt{2}-4\sqrt{3}+12\sqrt{2}-6\sqrt{3}$; **c)** $\sqrt{12}-\sqrt{27}-\sqrt{243}$;

d) $\sqrt{100}-\sqrt{144}-\sqrt{256}$; **e)** $3\cdot\sqrt{45}-2\cdot\sqrt{80}$; **f)** $2\sqrt{18}-4\sqrt{8}$;

g) $2\sqrt{3}\cdot(-4\sqrt{3})$; **h)** $\left(-5\sqrt{2}\right)\cdot(-2\sqrt{7})$; **i)** $\left(-81\sqrt{8}\right):(9\sqrt{2})$;

j) $\left(-24\sqrt{12}\right):(-3\sqrt{3})$; **k)** $\sqrt{2}^4\cdot\sqrt{2}^8\cdot\sqrt{2}^{10}$; **l)** $\sqrt{2}^4\cdot(-\sqrt{8})^4$;

m) $\left(-2\sqrt{2}\right)^3\cdot(2\sqrt{3})^2$; **n)** $\left(2\sqrt{2}\right)^{-2}$; **o)** $\left(\sqrt{243}-2\sqrt{48}\right):(-3\sqrt{3})$.

Rezolvare:

a) $8\sqrt{3}-15\sqrt{3}+2\sqrt{3}=(8-15+2)\sqrt{3}=-5\sqrt{3}$;

b) $10\sqrt{2}-4\sqrt{3}+12\sqrt{2}-6\sqrt{3}=(10+12)\sqrt{2}-(4+6)\sqrt{3}=22\sqrt{2}-10\sqrt{3}$;

c) $\sqrt{12}-\sqrt{27}-\sqrt{243}=\sqrt{2^2\cdot 3}-\sqrt{3^2\cdot 3}-\sqrt{9^2\cdot 3}=2\sqrt{3}-3\sqrt{3}-9\sqrt{3}=-10\sqrt{3}$;

d) $\sqrt{100}-\sqrt{144}-\sqrt{256}=\sqrt{10^2}-\sqrt{12^2}-\sqrt{16^2}=10-12-16=-18$;

e) $3\cdot\sqrt{45}-2\cdot\sqrt{80}=3\cdot\sqrt{9\cdot 5}-2\cdot\sqrt{16\cdot 5}=9\sqrt{5}-8\sqrt{5}=\sqrt{5}$;

f) $2\sqrt{18}-4\sqrt{8}=2\sqrt{9\cdot 2}-4\cdot\sqrt{4\cdot 2}=6\sqrt{2}-8\sqrt{2}=-2\sqrt{2}$;

g) $2\sqrt{3}\cdot(-4\sqrt{3})=-8\sqrt{9}=-8\cdot 3=-24$;

h) $\left(-5\sqrt{2}\right)\cdot(-2\sqrt{7})=10\sqrt{14}$;

i) $\left(-81\sqrt{8}\right):(9\sqrt{2})=-9\sqrt{4}=-9\cdot 2=-18$;

j) $\left(-24\sqrt{12}\right):(-3\sqrt{3})=8\sqrt{4}=16$;

k) $\sqrt{2}^4\cdot\sqrt{2}^8\cdot\sqrt{2}^{10}=\sqrt{2}^{4+8+10}=\sqrt{2}^{22}=2^{11}=2048$;

l) $\sqrt{2}^4\cdot(-\sqrt{8})^4=\left(-\sqrt{16}\right)^4=(-4)^4=256$;

m) $\left(-2\sqrt{2}\right)^3\cdot(2\sqrt{3})^2=(-8\cdot 2\sqrt{2})\cdot 4\cdot 3=-192\sqrt{2}$;

n) $\left(2\sqrt{2}\right)^{-2}=\dfrac{1}{(2\sqrt{2})^2}=\dfrac{1}{8}$;

o) $\left(4\cdot\sqrt{243}-2\sqrt{48}\right):(-\sqrt{3})=\left(36\sqrt{3}-8\sqrt{3}\right):(-\sqrt{3})=\left(28\sqrt{3}\right):(-\sqrt{3})=-28$;

3. Se consideră numărul $\sqrt{41}\approx 6,a_1a_2a_3.....$ **. Să se calculeze** $a_1\cdot a_2\cdot a_3$ **.**

Rezolvare: $\sqrt{41}\approx 6,403.....$ Rezultă $a_1\cdot a_2\cdot a_3=4\cdot 0\cdot 6=0$.

4. Să se raționalizeze numitorii fracțiilor:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$; **b)** $\dfrac{1}{4\sqrt{2}}$; **c)** $\dfrac{2}{3\sqrt{2}}$; **d)** $\dfrac{4}{4-\sqrt{2}}$; **e)** $\dfrac{2}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}$;

Rezolvare:

a) $\overset{\sqrt{3})}{\dfrac{1}{\sqrt{3}}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$; b) $\overset{\sqrt{2})}{\dfrac{1}{4\sqrt{2}}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4\cdot 2}=\dfrac{\sqrt{2}}{8}$; c) $\overset{\sqrt{2}}{\dfrac{2}{3\sqrt{2}}}=\dfrac{\cancel{2}\sqrt{2}}{3\cdot\cancel{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$;

d) Se amplifică cu conjugata de la numitor: $\overset{4+\sqrt{2})}{\dfrac{4}{4-\sqrt{2}}}=\dfrac{4(4+\sqrt{2})}{4^2-\sqrt{2}^2}=\dfrac{4(4+\sqrt{2})}{12}=\dfrac{4+\sqrt{2}}{3}$;

e) $\overset{3\sqrt{2}-2\sqrt{3})}{\dfrac{2}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}}=\dfrac{2(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})}{(3\sqrt{2})^2-(2\sqrt{3})^2}=\dfrac{2(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})}{18-12}=\dfrac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{3}$;

5. Să se calculeze $\sqrt{6+2\sqrt{5}}(\sqrt{3-\sqrt{5}}+\sqrt{12-4\sqrt{5}})$.

Rezolvare: Cum $(6+2\sqrt{5})(3-\sqrt{5})=18-10=8\Rightarrow\sqrt{6+2\sqrt{5}}\cdot\sqrt{3-\sqrt{5}}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ şi cum $\left(6+2\sqrt{5}\right)\cdot\left(12-4\sqrt{5}\right)=72-40=32\Rightarrow\sqrt{6+2\sqrt{5}}\cdot\sqrt{12-4\sqrt{5}}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$. Răspunsul este $6\sqrt{2}$;

6. Să se determine $n\in\mathbb{Z}$ **astfel încât** $\sqrt{\dfrac{3n+4}{n-1}}\in\mathbb{N}$ **.**

Rezolvare: Trebuie determinat $n\in\mathbb{Z}$ astfel încât $\dfrac{3n+4}{n-1}=k^2,\ k\in\mathbb{Q}$.

$\dfrac{3n+4}{n-1}=\dfrac{3(n-1)+7}{n-1}=3+\dfrac{7}{n-1}=k^2\Leftrightarrow n-1=7\Rightarrow n=8.$

7. Determinați $m,n\in\mathbb{Q}$ **astfel încât** $m+4\sqrt{3}=\sqrt{27}+n\cdot\left(3+2\sqrt{3}\right)$ **.**

Rezolvare: $m+4\sqrt{3}=3n+(3+2n)\sqrt{3}\Rightarrow m=3n,\ 3+2n=4\Rightarrow n=\dfrac{1}{2},\ m=\dfrac{3}{2}$.

8. Să se calculeze:

a) $7x+2x-12x-4x$**;** **b)** $5x^2-6x+3x-15x^2$**;** **c)** $-2x^3(3x^2-4x+2)$**;**

d) $(2x-3)(3x+2)$**;** **e)** $(x+5)^2$**;** **f)** $(3x-4)^2$**;**

g) $(4x-2)(4x+2)$; **h)** $(x+4)^3$; **i)** $(x-2)^3$;

Rezolvare:

a) $7x+2x-12x-4x=-7x$; b) $5x^2-6x+3x-15x^2=-10x^2-3x$;

c) $-2x^3(3x^2-4x+2)=-6x^5+8x^4-4x^3$; d) $(2x-3)(3x+2)=6x^2+4x-9x-6=6x^2-5x-6$;

e) $(x+5)^2=x^2+10x+25$; f) $(3x-4)^2=9x^2-24x+16$;

g) $(4x-2)(4x+2)=16x^2-4$; h) $(x+4)^3=x^3+3x^2\cdot 4+3x\cdot 4^2+4^3=x^3+12x^2+48x+64$;

i) $(x-2)^3=x^3-3x^2\cdot 2+3x\cdot 2^2-2^3=x^3-6x+12x-8$;

9. Utilizând metode combinate sau formula de descompunere a trinomului de gradul al doilea $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, unde x_1, x_2 sunt soluțiile ecuației de gradul doi, să se descompună:

a) x^2-7x+6; **b)** $x^2-7x+10$; **c)** x^2+5x+6;

Rezolvare: a) $x^2-7x+6=x^2-x-6x+6=x(x-1)-6(x-1)=(x-1)(x-6)$;

b) $x^2-7x+10=x^2-2x-5x+10=x(x-2)-5(x-2)=(x-2)(x-5)$;

c) $x^2+5x+6=x^2+2x+3x+6=x(x+2)+3(x+3)=(x+2)(x+3)$;

10. Utilizând metode combinate să se descompună:

a) x^3+x^2+x+1; **b)** x^3-2x^2+x-2; **c)** x^3-3x^2-x+3; **d)** x^4-1; **e)** x^5-1; **f)** x^6-1;

Rezolvare:

a) $x^3+x^2+x+1=x^2(x+1)+(x+1)=(x+1)(x^2+1)$;

b) $x^3-2x^2+x-2=x^2(x-2)+(x-2)=(x-2)(x^2+1)$;

c) $x^3-3x^2-x+3=x^2(x-3)-(x-3)=(x-3)(x^2-1)=(x-3)(x-1)(x+1)$;

d) $x^4-1=(x^2-1)(x^2+1)=(x-1)(x+1)(x^2+1)$;

e) $x^5-1=x^5-x^4+x^3-x^2+x^2-x+x-1=(x-1)(x^4+x^2+x+1)$;

f) $x^6-1=(x^3-1)(x^3+1)=(x-1)(x^2+x+1)(x+1)(x^2-x+1)$;

11. Să se calculeze :

a) $(2x+3)^2-(3x-1)^2+(x-4)(x+4)$; **b)** $\dfrac{(3x+1)^3-(3x-1)^3}{27x^2+1}$

Rezolvare: a) $(2x+3)^2-(3x-1)^2+(x-4)(x+4)=4x^2+12x+9-(9x^2-6x+1)$

$+x^2-16=4x^2+12x+9-9x^2+6x-1+x^2-16=$

$=-4x^2+18x-8$. S-au aplicat formulele $(a+b)^2, (a-b)^2$, $(a+b)(a-b)$.

b) $\dfrac{(3x+1)^3-(3x-1)^3}{27x^2+1}=\dfrac{27x^3+27x^2+9x+1-(27x^3-27x^2+9x-1)}{27x^2+1}=$ $=\dfrac{2(27x^2+1)}{27x^2+1}=2$.

12. Să se calculeze:

a) $|2-6-8|$; **b)** $|3-2\cdot(4-5)|$; **c)** $\left|2\sqrt{3}-6\sqrt{3}\right|$; **d)** $\left|3\sqrt{3}-4\sqrt{2}\right|$;

e) $\left|5\sqrt{2}-2\sqrt{5}\right|$; **f)** $\left|\dfrac{1}{5\sqrt{2}}-\dfrac{1}{3\sqrt{2}}\right|$; **g)** $\sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2}$; **h)** $\sqrt{4-2\sqrt{3}}$.

Rezolvare:

a) $|2-6-8|=|-12|=12$; **b)** $|3-2\cdot(4-5)|=|3+2|=5$; **c)** $\left|2\sqrt{3}-6\sqrt{3}\right|=\left|-4\sqrt{3}\right|=4\sqrt{3}$;

d) $\left|3\sqrt{3}-4\sqrt{2}\right|=-3\sqrt{3}+4\sqrt{2}$, deoarece $3\sqrt{3}\langle 4\sqrt{2}$;

e) $\left|5\sqrt{2}-2\sqrt{5}\right|=5\sqrt{2}-2\sqrt{5}$, deoarece $5\sqrt{2}\rangle 2\sqrt{5}$;

f) $\left|\frac{1}{5\sqrt{2}}-\frac{1}{3\sqrt{2}}\right|=\left|\frac{3-5}{15\sqrt{2}}\right|=\left|\frac{-2}{15\sqrt{2}}\right|=\frac{2}{15\sqrt{2}}$;

g) $\sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2}=\left|\sqrt{2}-\sqrt{3}\right|=-\sqrt{2}+\sqrt{3}$;

h) $\sqrt{4-2\sqrt{3}}=\sqrt{(1-\sqrt{3})^2}=\left|1-\sqrt{3}\right|=-1+\sqrt{3}$;

13. Să se calculeze, aducând la o formă mai simplă, fără radicali:

a) $\sqrt{(x-6)^2}$; **b)** $\sqrt{x^2-4x+4}$; **c)** $\sqrt{x^2-10x+25}$; **d)** $\sqrt{x^2+16x+64}$;

Rezolvare:

a) $\sqrt{(x-6)^2}=|x-6|$; **b)** $\sqrt{x^2-4x+4}=\sqrt{(x-2)^2}=|x-2|$;

c) $\sqrt{x^2-10x+25}=\sqrt{(x-5)^2}=|x-5|$; **d)** $\sqrt{x^2+16x+64}=\sqrt{(x+8)^2}=|x+8|$.

14. Să se expliciteze modulele:

a) $|x-5|$; **b)** $|2x+6|$;

Rezolvare:

a) $|x-5|=\begin{cases}x-5, & x-5\geq 0\Rightarrow x\geq 5\\ -x+5, & x-5\langle 0\Rightarrow x\langle 5\end{cases}$; **b)** $|2x+6|=\begin{cases}2x+6, & 2x+6\geq 0\Rightarrow x\geq -3\\ -2x-6, & 2x+6\langle 0\Rightarrow x\langle -3\end{cases}$.

15. Dacă $a=\sqrt{6-2\sqrt{5}}-\sqrt{6+2\sqrt{5}}$ **. Să se calculeze** $(a+2)^{2016}$**.**

Rezolvare: Cum $6-2\sqrt{5}=(\sqrt{5}-1)^2$ iar $6+2\sqrt{5}=(\sqrt{5}+1)^2$, atunci,

$a=\left|\sqrt{5}-1\right|-\left|\sqrt{5}+1\right|=\sqrt{5}-1-\sqrt{5}-1=-2$. Rezultă $(a+2)^{2016}=(-2+2)^{2016}=0$.

16. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ **ecuaţiile:**

a) $x+4=6$; **b)** $x-3=7$; **c)** $3x+6=x-10$; **d)** $4(x-2)=x+1$;

e) $\frac{x}{4}-\frac{x+2}{3}=2$; **f)** $\frac{x}{2}+\frac{x+1}{4}+\frac{x+2}{8}=\frac{3x-1}{4}$; **g)** $\frac{2x-4}{2}=\frac{x}{3}$; **h)** $\frac{x+4}{3}=\frac{2x+1}{2}$.

i) $\frac{x}{3\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$;

Rezolvare:

a) $x+4=6\Rightarrow x=6-4=2,\ S=\{2\}$;

b) $x-3=7\Rightarrow x=7+3=10,\ S=\{10\}$;

c) $3x+6=x-10\Rightarrow 3x-x=-10-6\Rightarrow 2x=-16\Rightarrow x=-8,\ S=\{-8\}$;

d) $4(x-2)=x+1\Rightarrow 4x-8=x+1\Rightarrow 4x-x=1+8\Rightarrow 3x=9\Rightarrow x=3,\ S=\{3\}$;

e) $\overset{3)}{\frac{x}{4}}-\overset{4)}{\frac{x+2}{3}}=\overset{12)}{2}\Rightarrow 3x-4x-8=24\Rightarrow -x=32\Rightarrow x=-32,\ S=\{-32\}$;

f) $\frac{x}{2}+\frac{x+1}{4}+\frac{x+2}{8}=\frac{3x-1}{4}\Rightarrow 4x+2x+2+x+2=6x-2\Rightarrow x=-6,\ S=\{-6\}$;

g) Conform proprietăţii fundamentale a proporţiilor rezultă
$(2x-4)\cdot 3=2\cdot x\Rightarrow 6x-12=2x\Rightarrow 6x-2x=12\Rightarrow 4x=12\Rightarrow x=3.\ \ S=\{3\}$

h) $\frac{x+4}{3}=\frac{2x+1}{2}\Rightarrow 2(x+4)=3(2x+1)\Rightarrow 2x+8=6x+3\Rightarrow -4x=-5\Rightarrow x=\frac{5}{4},\ S=\left\{\frac{5}{4}\right\}.$

i) Conform proprietăţii fundamentale a proporţiilor rezultă $x\cdot\sqrt{6}=6\cdot\sqrt{6}\Rightarrow x=6.\ \ S=\{6\}$

17. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţiile:

a) $x^2=16$; **b)** $x^2=7$; **c)** $(x+4)^2=100$; **d)** $(x-3)^2=12$;

e) $(x-5)^2=0$; **f)** $x^2+x=20$; **g)** $x^2+4x=5$; **h)** $x^2+9x=0$;

Rezolvare:

a) Se aplică formula $x^2=a\Rightarrow x=\pm\sqrt{a},\ a\geq 0,\qquad x^2=16\Rightarrow x=\pm\sqrt{16}=\pm 4,\ S=\{-4;4\}$;

b) $x^2=7\Rightarrow x=\pm\sqrt{7},\ S=\left\{-\sqrt{7},\sqrt{7}\right\}$;

c) Din formula $x^2=a\Rightarrow x=\pm\sqrt{a},\ a\geq 0,$ în cazul nostru avem:
$(x+4)^2=100\Rightarrow x+4=\pm\sqrt{100}\Rightarrow x=-4\pm 10\Rightarrow\ S=\{-14;6\}$

d) Din formula $x^2=a\Rightarrow x=\pm\sqrt{a},\ a\geq 0,$ în cazul nostru avem:
$(x-3)^2=12\Rightarrow x-3=\pm\sqrt{12}\Rightarrow x=3\pm 2\sqrt{3}\ \ S=\left\{3-2\sqrt{3};3+2\sqrt{3}\right\}$.

e) $(x-5)^2=0\Rightarrow x-5=0\Rightarrow x=5,\ S=\{5\}$;

f) $x^2+x=20\Rightarrow x(x+1)=4\cdot 5\Rightarrow x=4,$ *sau* $x(x+1)=(-5)\cdot(-4)\Rightarrow x=-5,\ S=\{-5;4\}$;

g) $x^2+4x=5\Rightarrow x(x+4)=5\Rightarrow x\in\{-5;1\}$;

h) $x^2+9x=0\Rightarrow x(x+9)=0\Rightarrow x\in\{-9;0\}$.

18. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţiile:

a) $|x|=7$; **b)** $|x|=-5$; **c)** $|x-4|=6$; **d)** $|3x-9|=12$;

e) $|2x+1|=3$; **f)** $|x+6|=|2x-1|$; **g)** $|2x+4|=|x-3|$; **h)** $\sqrt{(x-4)^2}=6$.

Rezolvare:

a) Din formula $|x|=a\Rightarrow x=\pm a,\ (a\geq 0),\ |x|=7\Rightarrow x=\pm 7,\ S=\{-7;7\}$;

b) $|x|=-5\Rightarrow x\in\varnothing$;

c) $|x-4|=6\Rightarrow x-4=\pm 6\Rightarrow x\in\{-2;10\}$;

d) $|3x-9|=12\Rightarrow 3x-9=\pm 12\Rightarrow\begin{cases}3x-9=-12\Rightarrow 3x=-3\Rightarrow x=-1\\3x-9=12\Rightarrow 3x=21\Rightarrow x=7\end{cases}$;

e) Din formula $|x|=a\Rightarrow x=\pm a,\ (a\geq 0),$ rezultă $|2x+1|=3\Rightarrow 2x+1=\pm 3\Rightarrow x\in\{-2,1\}$;

f) Din formula $|x|=|y|\Rightarrow x=\pm y,$ rezultă $|x+6|=|2x-1|\Rightarrow x+6=\pm(2x-1)\Rightarrow x\in\left\{-\frac{5}{7},7\right\}$;

g) $|2x+4|=|x-3|\Rightarrow 2x+4=\pm(x-3)\Rightarrow x\in\left\{-7;-\frac{1}{3}\right\}$;

h) $\sqrt{(x-4)^2}=6\Rightarrow|x-4|=6\Rightarrow x-4=\pm 6\Rightarrow x\in\{-2;10\}$.

19. Se consideră ecuaţia $x^2-(m+4)x+3=0$ cu soluţiile x_1,x_2. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât $2(x_1+x_2)-5x_1x_2=7$.

Rezolvare: Se scriu relațiile lui Viete: $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$, $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$, de unde

$x_1+x_2=m+4,\ x_1x_2=3$ și le înlocuim: $2(m+4)-5\cdot 3=7\Rightarrow 2m+8-15=7\Rightarrow 2m=14\Rightarrow m=7$.

20. Se consideră ecuaţia x^2-3x+7=0 cu soluţiile $x_1,x_2\notin\mathbb{R}$. Fără a determina soluţiile, să se calculeze: a) $x_1^{\,2}+x_2^{\,2}$**; b)** $x_1^{\,3}+x_2^{\,3}$**; c)** $x_1^{\,4}+x_2^{\,4}$ **; d)** $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$**;**

e) $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}$**; f)** $\frac{x_1^{\,3}}{x_2}+\frac{x_2^{\,3}}{x_1}$**; g)** $\frac{x_1+1}{x_2+2}+\frac{x_2+1}{x_1+2}$**;**

Rezolvare: Se vor utiliza relaţiile lui Viete: $ax^2+bx+c=0$, $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$, $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$;

În cazul nostru, $x_1+x_2=3$; $x_1\cdot x_2=7$.

a) $x_1^{\,2}+x_2^{\,2}=(x_1+x_2)^2-2x_1\cdot x_2=3^2-2\cdot 7=-5$;

b) $x_1^{\,3}+x_2^{\,3}=(x_1+x_2)^2-3x_1\cdot x_2(x_1+x_2)=(3)^2-3\cdot 7\cdot 3=-36$;

c) $x_1^{\,4}+x_2^{\,4}=(x_1^{\,2}+x_2^{\,2})^2-2x_1^{\,2}\cdot x_2^{\,2}=(-5)^2-2\cdot 49=-73$

d) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1\cdot x_2}=\frac{3}{7}$; **e)** $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=\frac{x_1^{\,2}+x_2^{\,2}}{x_1x_2}=-\frac{5}{7}$;

f) $\frac{x_1^{\,3}}{x_2}+\frac{x_2^{\,3}}{x_1}=\frac{x_1^{\,4}+x_2^{\,4}}{x_1\cdot x_2}=-\frac{73}{7}$; **g)** $\frac{x_1+1}{x_2+2}+\frac{x_2+1}{x_1+2}=\frac{x_1^{\,2}+x_2^{\,2}+x_1+x_2+4}{x_1x_2+2(x_1+x_2)+4}=\frac{-5+3+4}{7+6+4}=\frac{2}{17}$;

21. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ ştiind că soluţiile ecuaţiei $x^2-mx+m+2=0$ verifică relaţia $x_1^{\,2}+x_2^{\,2}+x_1\cdot x_2=4$.

Rezolvare: Se scriu mai întâi relaţiile lui Viete, $\begin{cases}x_1+x_2=-\frac{b}{a}\\ x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+x_2=m\\ x_1\cdot x_2=m+2\end{cases}$, după care,

relaţia dată este echivalentă cu $(x_1+x_2)^2-2x_1x_2+x_1x_2=4\Rightarrow\ m^2-m-6=0\Rightarrow m\in\{-2;3\}$.

Exercitii propuse

1. Să se calculeze: a) $(-8-4):(-6)+(-2)^3-2^4$; b) $-3\cdot(-2)^4+(-5)^3:(-25)$;
c) $-4^2+(-7)^2\cdot(-7)^3:(-7)^4$; d) $2^{100}:(2^{55}\cdot 2^{44})+2^{-2}$; e) $(-6)^3:3^2$; f) $(-8)^2:2^6$;
g) $25^6:5^{10}$; h) $(-36)^4:6^7$.

2. Se consideră numărul $a=(-3)^2+2\cdot(-3)-4^2$. Să se calculeze $|a|$.

3. Fie numărul $a=\frac{23}{15}=1,a_1a_2a_3.....a_n...$. Calculați $a_1+a_2+a_3+....+a_{2020}$.

4. Să se calculeze: a) $\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{2}$; b) $\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{15}\cdot\frac{75}{8}$; c) $(-\frac{7}{16}):\frac{28}{32}$; d) $(-\frac{1}{2})\cdot(-\frac{1}{2})^2\cdot(-\frac{1}{2})^3$;

e) $8\cdot\frac{1}{2^4}-125\cdot\frac{1}{2\cdot 5^3}$; f) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}$; g) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}$.

5. Să se calculeze: a) $\frac{7}{9}\cdot\left(-\frac{3}{14}\right)+\left(-\frac{4}{3}\right)^2:\frac{32}{3}$;

6. Se consideră numărul $\sqrt{41}\approx 6,a_1a_2a_3.....$. Să se calculeze $a_1\cdot a_2\cdot a_3$.

7. Să se calculeze: a) $\frac{3}{\sqrt{18}}-\frac{2}{2+\sqrt{2}}$; b) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{-3}+\frac{1}{\sqrt{3}-2}+\left|\sqrt{12}-4\right|$.

8. Să se raționalize: a) $\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$; b) $\frac{1}{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$; c) $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}}$;

9. Să se calculeze: a) $2\sqrt{16}+3\sqrt{25}-4\sqrt{81}$; b) $(12\sqrt{2})\cdot(3\sqrt{2})$; c) $(-3\sqrt{2})\cdot(2\sqrt{5})$;
d) $(-8\sqrt{5}):(-2\sqrt{5})$; e) $(2\sqrt{5})^3$; f) $(-3\sqrt{2})^4$; g) $(-2\sqrt{3})^3$; h) $\sqrt{18}+5\sqrt{50}-8\sqrt{32}$;
i) $(\sqrt{28}-3\sqrt{63})+(-2\sqrt{3})\cdot\sqrt{21}$; j) $4\sqrt{12}-5\sqrt{27}$; k) $\sqrt{125}-2\sqrt{45}-3\sqrt{20}$;

10. Să se calculeze $(2\sqrt{3}-1)^3+(\sqrt{3}+2)^2$.

11. Să se calculeze: a) $\left(2+\sqrt{3}\right)^2+\sqrt{\left(4\sqrt{3}-7\right)^2}+\left(\sqrt{3}-2\right)^{-1}$;

b) $(1+\sqrt{3})^2-\sqrt{\left(2\sqrt{3}-3\right)^2}+(\sqrt{3}-2)^{-1}$ c) $\frac{1}{2\sqrt{5}-3\sqrt{2}}+\left|3\sqrt{5}-5\sqrt{2}\right|$;

12. Să se arate că numărul $A=\sqrt{(\sqrt{5}-3)^2}+\sqrt{(2-\sqrt{5})^2}\in\mathbb{N}$.

13. Să se calculeze:

a) $(2\sqrt{5}-3)^2$; b)$(3\sqrt{3}-2)^2$; c) $(3\sqrt{2}-4)^{-1}$; d) $\frac{3}{4\sqrt{2}}$; e) $\sqrt{14+6\sqrt{5}}$; f) $\sqrt{3-\sqrt{5}}$;

g) $(2\sqrt{2}+1)^3$;h) $(\sqrt{3}-2)^3$; i) $(3\sqrt{2}+5)^3$; j) $(2\sqrt{3}-1)^3$;

14. Să se calculeze:

a) $6x+3x-8x-9x$; b) $7x^2-5x-9x^2+2x$; c) $3x^2-4x^2-10x^2$;
d) $-5x\cdot(-2x)+6x-7x^2$; e) $\left(-4x^3\right)\cdot\left(-2x^2\right)$; f) $6x^3\cdot\left(-2x^4\right)$;
g) $-9x\cdot\left(4x^2-3x+5\right)$; h) $-3x^2\cdot(5x-4)$; i) $-81x^4:\left(-9x^3\right)$;

j) $-36x^3:(-4x)$; k) $\left(-3x^2\right)^3+(-2x)^6$; l) $\left(-2\sqrt{3}x^2\right)\cdot\left(\sqrt{3}x^3\right)$;

m) $-6\sqrt{2}x\cdot\left(3\sqrt{2}x-4x^2\right)$; n) $\left(4x^2-5x\right)\cdot\left(3x^2-x\right)$; o) $\left(3x^2-6x+2\right)\cdot(x-3)$;

p) $\left(2x^2+3\right)\cdot(4x-4)$;

15. Să se calculeze:

a) $(x+5)^2$; b) $(x+2)^2$; c) $(3x+2)^2$; d) $(x-2)^2$; e) $(3x-2)^2$; f) $(5x-3)^2$;

g) $(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$; h) $(2x-5)(2x+5)$; i) $(3x-2)(3x+2)$; j) $(3x-4)^2+(2x+4)^2$;

k) $\left(x^2+x+2\right)^2$; l) $(x+1)^3$; m) $(x+2)^3$; n) $(x-2)^3$; o) $(2x+3)^3$; p) $(3x-1)^3$;

16. Să se arate că numărul $A=\sqrt{1+3+5+...+99}$ este natural.

17. Să se determine numerele a şi b pentru care $(3a-6)^2+(b+2)^2=0$.

18. Să se determine numărul a pentru care $(a^2-3)^2+(a+\sqrt{3})^2=0$.

19. Să se determine numerele a şi b pentru care $|a+3|+|b-2|=0$.

20. Să se calculeze: a) $(2x+3)^2-(3x-1)^2+(x-4)(x+4)$; b) $\dfrac{(3x+1)^3-(3x-1)^3}{27x^2+1}$.

21. Determinaţi $m\in\mathbb{R}$ astfel încât ecuaţia $(3m+5)x-6(m+1)=0$ să admită soluţia $x=3$.

22. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţiile:

a) $4x+6=26$; b) $5x-17=8$; c) $4x+2=x-13$; d) $3(x-4)=x+2$;

e) $\dfrac{x}{6}-\dfrac{x-5}{2}=1$; f) $\dfrac{x}{9}+\dfrac{2x-1}{3}+\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{2x-1}{6}$; g) $\dfrac{x+3}{5}=\dfrac{x-2}{3}$; h) $\dfrac{x+4}{x+1}=\dfrac{x-2}{x-3}$.

i) $4(2+x)-3(2x-3)=2(8-x)$

23. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţiile:

a) $x^2=-16$; b) $x^2=81$; c) $x^2=12$; d) $(x-8)^2=0$;

e) $(x-5)^2=100$; f) $x^2+x=56$; g) $x^2-2x=8$; h) $x^2+5x=24$;

24. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $|x|=8$; b) $|x|=12$; c) $|x|=-4$; d) $|6x-12|=0$;

e) $|x+3|=6$; f) $|2x-8|=10$; g) $|5x+30|=5$; h) $|4x+2|=18$;

i) $|2x-16|+|3y+9|=0$; j) $|x^2-4|+|2y-4|=0$; k) $|(4x-2)\cdot(y+3)|=0$;

l) $|4x^2-4x+1|+|y^2-10y+25|=0$; m) $\sqrt{(x-4)^2}+|x^2-16|=0$;

n) $\sqrt{(x+5)^2}+\sqrt{(y-2)^2}=0$; o) $(2x+6)^2+|x^2-9|=0$;

25. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $|5x-3|=|2x+9|$; b) $|2x-6|=|x+4|$;

c) $|x^2+3x-8|=|x^2+x+2|$; d) $|2x+2|=x-3$;

e) $|5x-6|=x+3$; f) $|x^2+x-2|=x-1$;

g) $|(x+5)(x-2)-(x-1)^2|=4$; h) $|(2-x)(2+x)+(2-x)^2|=3$;

26. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $(x-3)\cdot(x+3)=16$; b) $(x-4)\cdot(x+4)=9$;

c) $(x-4)\cdot(x+3)-(x+5)\cdot(x+1)=0$; d) $(x+1)^2-(x-3)^2=4$;

e) $(x+4)^2+(x-2)^2=2(x-3)\cdot(x+3)$; f) $(x-3)^3-(x+3)^3=18x\cdot(4-x)$;

27. Să se rezolve inecuațiile:

a) $6x-4\geq 2$; b) $3x+5\leq 26$; c) $4x+6\rangle 3+3x$;

d) $2x+5\geq 10-3x$; e) $5x+9\leq 10x-6$; f) $3(2+x)-5(x+4)\geq 0$;

g) $2(x-5)-10\rangle 3(x+4)-6$; h) $5(x-3)\geq 8x+3(x-2)$; i) $\frac{x-3}{2}+\frac{x+4}{3}\geq \frac{1}{4}$;

j) $\frac{2x-1}{2}+\frac{3x-2}{8}+\frac{1}{4}\geq 2$; k) $x^2\leq 16$; l) $x^2\leq 25$;

m) $2x^2\leq 72$; n) $(x-6)^2\leq 49$; o) $(x-6)^2\leq 49$;

p) $x^2\geq 9$; q) $(x+2)^2\geq 9$; r) $x^2-6x\geq 0$;

s) $x^2-10x\leq 0$; t) $x^2+9x\rangle 0$; u) $x^2-9x+8\geq 0$;

v) $x^2-4x-12\langle 0$; x) $\frac{1}{2x+6}\rangle 0$; y) $\frac{2x+8}{x-2}\geq 0$;

28. Să se rezolve inecuațiile:

a) $|x|\leq 5$; b) $|x|\leq 8$; c) $|x+4|\leq 9$;

d) $|2x-3|\langle 8$; e) $|3x-6|\langle 10$; f) $\left|\frac{x-3}{2}\right|\leq 1$;

g) $\left|\frac{2x-6}{3}\right|\leq 2$; h) $\left|\frac{x+2}{3}-4\right|\leq 5$; i) $\left|\frac{2x+3}{2}-\frac{x-4}{3}\right|\leq 8$;

j) $|x|\geq 2$; k) $|x|\geq 5$; l) $|x|\rangle 7$;

m) $|x-9|\geq 3$; n) $|2x+8|\geq 10$; o) $|5x-10|\rangle 5$;

29. Fie $f:(0;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x+1}{x}$. Să se calculeze $f(1)\cdot f(2)\cdot....\cdot f(2019)\cdot f(2020)$;

30. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+10$. Să se determine $f(-10)\cdot f(-9)\cdot.....\cdot f(0)\cdot.....\cdot f(9)\cdot f(10)$.

31. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=7-x$. Să se calculeze $f(1)\cdot f(2)\cdot....\cdot f(7)$.

32. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-5x-6$. Să se calculeze $f(1)\cdot f(2)\cdot f(3)\cdot.....\cdot f(10)$.

33. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+5$. Să se calculeze $f(-5)+f(-4)+...+f(0)+...+f(4)+f(5)$.

34. Se dă funcția f:R→R , f(x)=2x+3, să se calculeze f(0)+f(1)+.....+f(6);

35. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}-x+3, & x\langle 1\\ 2x+5, & x\geq 1\end{cases}$. Să se calculeze :

a) $f(-\frac{1}{2})+f(\sqrt{3}-1)+f(\frac{3}{2})$; b) $f(1)+f(3)+f(3^2)+...+f(3^{20})$.

36. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+5$. Să se calculeze $f(3)+f(3^2)+f(3^3)+...+f(3^{10})$;

37. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1$. Să se calculeze suma $S=f(1)+f(2)+f(2^2)+...+f(2^{10})$.

38. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x+2$. Să se calculeze suma $S=f(1)+f(4)+f(4^2)+...+f(4^{10})$.

39. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^4+(1-a)x^2+7$, $a\in\mathbb{R}$. Să se arate că punctele $A(-1;8)\in G_f$, $\forall a\in\mathbb{R}$.

40. Determinați $m\in\mathbb{R}$ pentru care punctul $A(m+1;0)$ să aparțină graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-5x+1$.

41. Funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2+ax+4$ verifică relaţia $f(-2)=2$. Calculaţi $f(a)$.

42. Să se determine parametrul real m, știind că punctul A(2;-5) aparține graficului funției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, f(x) = mx+3.

43. Fie funcţiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x+4,\ g(x)=3x-2$.Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei $3f(x)-2g(x)=7$.

44. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=3x-1$. Să se rezolve inecuaţia: $f(x)\le 3\cdot f(x+1)-5$.

45. Să se determine mulțimea $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,(2x-1)^2-(x+1)\cdot x\le -1\right\}$.

46. Să se rezolve inecuația $2f(x)+f(1)\ge 4\cdot f(2)$ unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=3x-1$.

47. Se consideră ecuația $x^2+3(m-1)x+m=0$. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ știind că $x_1^2+x_2^2=3$.

48. Se consideră ecuația $x^2-(2m+1)x+m=0$. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ știind că $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=3$.

49. Se consideră ecuația $x^2-(m+1)x+5=0$ cu soluțiile x_1,x_2. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât $x_1\cdot x_2+3x_1+3x_2=10$.

50. Determină $m\in\mathbb{R}$ dacă soluţiile $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ ale ecuaţiei $x^2-4x+m=0$ satisfac relaţia:

a) $x_1^2+x_2^2=10$; b) $x_1^3+x_2^3=16$; c) $x_1^2-x_2^2=8$;

51. Se consideră ecuaţia $x^2-3x+1=0$ cu soluţiile $x_1,x_2\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$. Fără a determina soluţiile, să se calculeze: a) $x_1^2+x_2^2$; b) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$; c) $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}$; d) $x_1^4+x_2^4$; e) $x_1^3+x_2^3$;

f) $x_1^5+x_2^5$; g) $x_1^6+x_2^6$; h) $\frac{1}{x_1-1}+\frac{1}{x_2-1}$;

1.2 Radicalul de ordinul trei

Definiţia radicalului de ordinul trei

Fie $a\in\mathbb{R}$. Atunci numărul $\sqrt[3]{a}$ se numește radicalul de ordinul trei din numărul real a.

$$\boxed{\sqrt[3]{a}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow a\in\mathbb{R}}$$

În general, $\sqrt[n]{a}$ se numește radicalul de ordinul n din numărul real a cu $n\in\mathbb{N},n\geq 2$ și $a\in\mathbb{R}_+$ dacă n este par și $a\in\mathbb{R}$ dacă n este impar.

Proprietăţile radicalilor de ordinul trei

$Fie\, a,b\in\mathbb{R}$.

1. $\boxed{\sqrt[3]{a^3}=a,\forall a\in\mathbb{R}.}$ **Exemplu:** $\sqrt[3]{(-5)^3}=-5$;

2 $\boxed{\sqrt[3]{a\cdot b}=\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b}.}$ **Exemplu:** $\sqrt[3]{54}=\sqrt[3]{3^3}\cdot\sqrt[3]{2}=3\sqrt[3]{2}$

3. $\boxed{\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}=\sqrt[3]{\frac{a}{b}},b\neq 0}$ **Exemplu**: $\frac{\sqrt[3]{128}}{\sqrt[3]{2}}=\sqrt[3]{\frac{128}{2}}=\sqrt[3]{64}=\sqrt[3]{4^3}=4$

4. $\boxed{\sqrt[3]{a^n}=\sqrt[3]{a^n}=a^{\frac{n}{3}}}$ **Exemplu**: $\sqrt[3]{2^{60}}=\left(\sqrt[3]{2}\right)^{60}=2^{20}$

5. $\boxed{a\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{a^3b}}$ **Exemplu**: $2\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{2^3\cdot 3}=\sqrt[3]{24}$

6. $\boxed{\sqrt[3]{a^3b}=a\sqrt[3]{b}}$ **Exempu**: $\sqrt[3]{(-3)^3\cdot 7}=-3\sqrt[3]{7}$

7. $\boxed{x\sqrt[3]{b}\cdot y\sqrt[3]{b}=xy\sqrt[3]{ab}}$ **Exemplu**: $2\sqrt[3]{3}\cdot 4\sqrt[3]{5}=2\cdot 4\cdot\sqrt[3]{3\cdot 5}=8\sqrt[3]{15}$

8. $\boxed{x\sqrt[3]{a}\pm y\sqrt[3]{a}=(x\pm y)\sqrt[3]{a}}$ **Exemplu**: $5\sqrt[3]{3}+6\sqrt[3]{3}=(5+6)\cdot\sqrt[3]{3}=11\sqrt[3]{3}$

9. $\boxed{\frac{x\sqrt[3]{a}}{y\sqrt[3]{b}}=\frac{x}{y}\sqrt[3]{\frac{a}{b}},y,b\neq 0}$ **Exemplu**: $\frac{25\sqrt[3]{3}}{5\sqrt[3]{24}}=\frac{25}{5}\cdot\sqrt[3]{\frac{3}{24}}=5\sqrt[3]{\frac{1}{8}}=5\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

10. $\boxed{\left(x\sqrt[3]{a}\right)^n=x^n\sqrt[3]{a^n}}$ **Exemplu**: $\left(-2\sqrt[3]{5}\right)^2=4\sqrt[3]{25}$

11. Dacă $\boxed{\sqrt[3]{a}\in\mathbb{Z}\Rightarrow a=k^3}$

Media geometrică a două numere reale pozitive este $\boxed{m_g=\sqrt{x\cdot y}}$**,** $\forall x,y\in\mathbb{R}_+$* **iar pentru trei numere reale este** $\boxed{m_g=\sqrt[3]{xyz}}$

Compararea radicalilor de ordinul trei:

$\sqrt[3]{a}<\sqrt[3]{b}\Leftrightarrow a<b,\ \forall a,b\in\mathbb{R}$**,** $\sqrt[3]{a}>\sqrt[3]{b}\Leftrightarrow a>b,\ \forall a,b\in\mathbb{R}$**,**

$\sqrt[3]{a}=\sqrt[3]{b}\Leftrightarrow a=b,\ \forall a,b\in\mathbb{R}$

Exercitii rezolvate

1. Să se calculeze:

a) $\sqrt[3]{10^2-6^2}=\sqrt[3]{100-36}=\sqrt[3]{64}=\sqrt[3]{4^3}=4$;

b) $\sqrt[3]{2^3\cdot 5^6\cdot 7^9}=\sqrt[3]{(2\cdot 5^2\cdot 7^3)^3}=2\cdot 5^2\cdot 7^3=17150$;

c) $\sqrt[3]{-64\cdot 27\cdot 1000}=-4\cdot 3\cdot 10=-120$;

d) $\sqrt[3]{0,001}=0,1$;

e) $\sqrt[3]{(-3)^6\cdot(-2)^{12}}=(-3)^2\cdot(-2)^4=3\cdot 2^4=48$;

f) $\sqrt[3]{-216}=\sqrt[3]{(-6)^3}=-6$;

g) $\sqrt[3]{\frac{7^3}{5^3}}=\frac{7}{5}$;

h) $\sqrt[3]{\frac{9\cdot\sqrt[3]{27}}{64}}=\sqrt[3]{\frac{3^2\cdot 3}{4^3}}=\frac{3}{4}$;

i) $\sqrt[3]{\frac{9\cdot\sqrt[3]{16}}{144\cdot\sqrt[3]{2}}}=\sqrt[3]{\frac{9\cdot 2\sqrt[3]{2}}{3^2\cdot 2^4\cdot\sqrt[3]{2}}}=\frac{1}{2}$;

j) $\sqrt[3]{4\cdot\sqrt[3]{2\cdot\sqrt[3]{64}}}=\sqrt[3]{4\cdot\sqrt[3]{2\cdot 4}}=\sqrt[3]{4\cdot 2}=2$;

k) $\sqrt[3]{(2-\sqrt[3]{3})\cdot\sqrt[3]{4+2\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}}}\cdot\sqrt[3]{25}=\sqrt[3]{8-3}\cdot\sqrt[3]{25}=5$;

2. Să se calculeze:

a) $\sqrt[3]{5}-4\sqrt[3]{5}+2\sqrt[3]{5}=-\sqrt[3]{5}$;

b) $\sqrt[3]{40}+\sqrt[3]{5}-5\sqrt[3]{135}=2\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{5}-15\sqrt[3]{5}=-13\sqrt[3]{5}$;

c) $2\sqrt[3]{4}\cdot 3\sqrt[3]{2}=12$;

d) $2\sqrt[3]{9}\cdot 5\sqrt[3]{24}=60$;

e) $24\sqrt[3]{81}:(-12\sqrt[3]{3})=-6$;

f) $\left(-2\sqrt[3]{2}\right)^3=-16$;

g) $\left(-3\sqrt[3]{4}\right)^2=18\sqrt[3]{2}$;

h) $\left(\sqrt[3]{2}-1\right)^3=1-3\sqrt[3]{4}+3\sqrt[3]{2}$;

i) $\left(\sqrt[3]{5}+2\right)^3=13+6\sqrt[3]{25}+12\sqrt[3]{5}$;

3. Să se calculeze:

a) $\sqrt[3]{27\cdot 8}=\sqrt[3]{3^3\cdot 2^3}=6$;

b) $\sqrt[3]{2^9\cdot 5^{-3}}=\sqrt[3]{\left(2^3\right)^3\cdot 5^{-3}}=8\cdot 5^{-1}=\frac{8}{5}$;

c) $\sqrt[3]{64^2\cdot 27^{-6}}=\sqrt[3]{\left(2^4\right)^3\cdot\left(3^3\right)^{-6}}=2^4\cdot 3^{-6}=\frac{16}{729}$;

d) $\sqrt[3]{\frac{-125}{27}}=\sqrt[3]{\left(-\frac{5}{3}\right)^3}=-\frac{5}{3}$;

e) $\left(\sqrt[3]{2}\right)^9=2^3=8$;

f) $\sqrt[3]{25\sqrt{25}}=\sqrt[3]{5^3}=5$;

g) $\sqrt[3]{13^2\cdot\sqrt{169}}=\sqrt[3]{13^3}=13$;

h) $\sqrt[3]{(-2)^7}\cdot\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{(-2)^9}=-2^3$;

i) $\sqrt[3]{81}-5\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{24}=\sqrt[3]{3^3\cdot 3}-5\sqrt[3]{3}-2\sqrt[3]{3}=(3-5-2)\sqrt[3]{3}=-4\sqrt[3]{3}$;

j) $\sqrt[3]{2\sqrt{3}-2}\cdot\sqrt[3]{2\sqrt{3}+2}=\sqrt[3]{12-4}=\sqrt[3]{8}=2$; **k)** $2\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{2}=4\sqrt[3]{2}-3\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{2}=0$;

l) $(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1)(1-\sqrt{3})=1-\sqrt[3]{3^3}=1-3=-2$;

m) $(\sqrt[3]{2}+1)(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)=\left(\sqrt[3]{2}\right)^3-1=2-1=1$;

4. Să se calculeze media geometrică a numerelor 20, -48, 225;

Rezolvare:

$mg=\sqrt[3]{20\cdot(-48)\cdot 225}=-\sqrt[3]{2^2\cdot 5\cdot 2^4\cdot 3\cdot 15^2}=-2^2\cdot 15=-60$;

5. Să se calculeze media geometrică a numerelor:

a) $a=\sqrt[3]{10}$, $b=\sqrt[3]{100}$, $c=10\sqrt[3]{1000}$;

b) $a=\sqrt{3^2+4^2}+\sqrt{15^2-12^2}$, $b=7\sqrt[3]{28}$, $c=2\sqrt[3]{98}$;

Rezolvare:

a) $m_g(a,b,c)=\sqrt[3]{a\cdot b\cdot c}=\sqrt[3]{1000}=10$

b) $a=\sqrt{3^2+4^2}+\sqrt{15^2-12^2}=\sqrt{25}+\sqrt{81}=5+9=13$

$m_g(a,b,c)=\sqrt[3]{a\cdot b\cdot c}=\sqrt[3]{14\cdot 7\sqrt[3]{28}\cdot 2\sqrt[3]{98}}=14$

6. Să se compare numerele:

a) $2\sqrt[3]{4}$ *si* $\sqrt[3]{30}$; **b)** $4\sqrt[3]{2}$ *si* $3\sqrt[3]{4}$; **c)** $-2\sqrt[3]{81}$ *si* $-3\sqrt[3]{7}$;

Rezolvare: **a**) Se ridică ambele numere la puterea a treia: $32>30\Rightarrow 2\sqrt[3]{4}\ \rangle\ \sqrt[3]{30}$;

b) $128>108\Rightarrow 4\sqrt[3]{2}\ \rangle\ 3\sqrt[3]{4}$;

c) $-648<-189\Rightarrow -2\sqrt[3]{81}\ \langle\ -3\sqrt[3]{7}$;

7. Să se arate că numărul $A=\sqrt[3]{1+3+5+7+....+127}$ **este natural;**

Rezolvare:

Suma termenilor de sub radical este suma unei progresii aritmetice de raţie 2 aşadar trebuie să găsim numărul de termeni ai progresiei.

Cum $127=1+(n-1)\cdot 2$, $126=(n-1)\cdot 2$, $63=n-1$ rezultă $n=64$. Atunci,

$1+3+5+7+.....+127=\frac{(1+127)\cdot n}{2}\Rightarrow 1+3+5+7+.....+127=\frac{128\cdot 64}{2}=64^2\Rightarrow$

$A=\sqrt[3]{64^2}=\sqrt[3]{2^{12}}=2^4=16$;

8. Să se calculeze x^3-3x **dacă** $x=\sqrt[3]{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\sqrt[3]{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$;

Rezolvare:

$x^3=\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{2}+3\sqrt[3]{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}\cdot x\ =2\sqrt{3}+3\cdot x$**. Atunci,**

$x^3-3x=2\sqrt{3}+3x-3x=2\sqrt{3}$;

9*. Fie $x=\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}$ **şi** $y=\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}$**. Să se arate că** $x^2+y^2=7$**.**

Rezolvare:

Notăm $S=\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}=x+y\,\big|()^3\Rightarrow \quad S^3=x^3+y^3+3xy(x+y)$

$\Rightarrow S^3-3S-18=0$ deoarece $x\cdot y=\sqrt[3]{(9+4\sqrt{5})\cdot(9-4\sqrt{5})}=1$.Se obţine S = 3.

Din $\begin{cases}x+y=3\\ x\cdot y=1\end{cases}\Rightarrow x^2+y^2=7$.

Exercitii propuse

1. Să se calculeze:

a) $\sqrt[3]{27\cdot 8}$; **b)** $\sqrt[3]{2^9\cdot 5^{-3}}$; **c)** $\sqrt[3]{64^2\cdot 27^{-6}}$; **d)** $\sqrt[3]{\frac{-125}{27}}$;

e) $\left(\sqrt[3]{2}\right)^9$; **f)** $\sqrt[3]{25\cdot\sqrt{25}}$; **g)** $\sqrt[3]{13^2\cdot\sqrt{169}}$; **h)** $\sqrt[3]{(-2)^7}\cdot\sqrt[3]{4}$;

i) $\sqrt[3]{81}-5\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{24}$; **j)** $\sqrt[3]{2\sqrt{3}-2}\cdot\sqrt[3]{2\sqrt{3}+2}$; **k)** $2\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{2}$; **l)** $\left(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1\right)\left(1-\sqrt[3]{3}\right)$;

m) $\left(\sqrt[3]{2}+1\right)\left(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1\right)$;

2. Să se calculeze:

a) $\left(4\cdot\sqrt[3]{32}\right):\left(2\cdot\sqrt[3]{-8}\right)$; **b)** $\sqrt[3]{\frac{4}{9}}:\sqrt[3]{\frac{81}{2}}$; **c)** $\sqrt[3]{81}-\sqrt[3]{24}-\sqrt[3]{375}$;

d) $\sqrt[3]{24}-\sqrt[3]{192}+\sqrt[3]{-81}$; **e)** $\left(\sqrt[3]{2}+3\right)^3$; f) $\left(\sqrt[3]{3}+2\right)^3$; **g)** $\sqrt[3]{2\sqrt{6}-4}\cdot\sqrt[3]{2\sqrt{6}+4}$;

h) $\sqrt[3]{2\sqrt{2}-3}\cdot\sqrt[3]{2\sqrt{2}+3}$;

3) Să se calculeze:

a) $\left(3\sqrt[3]{4}\right)\cdot\left(-5\sqrt[3]{2}\right)+\left(18\sqrt[3]{81}\right):\left(-2\sqrt[3]{3}\right)$; **b)** $\left(4\sqrt[3]{9}\right)\cdot\left(-2\sqrt[3]{3}\right)+\left(12\sqrt[3]{16}\right):\left(-4\sqrt[3]{2}\right)$;

c) $\sqrt[3]{24}+4\cdot\sqrt[3]{-81}-6\cdot\sqrt[3]{192}$; **d)** $\sqrt[3]{54}-2\cdot\sqrt[3]{128}+\sqrt[3]{-16}$;

e) $\sqrt[3]{54}+\sqrt[3]{-16}-\sqrt[3]{250}$; **f)** $\sqrt[3]{48}+\sqrt[3]{-135}-\sqrt[3]{384}$;

g) $\sqrt[3]{81}-\sqrt[3]{24}-\sqrt[3]{-8}$; **h)** $\sqrt[3]{24}-3\sqrt[3]{192}+\sqrt[3]{81}$;

4. Să se calculeze media geometrică a numerelor 20, -48, 225;

5. Să se calculeze:

a) $\sqrt[3]{54}-2\sqrt[3]{250}+\sqrt[3]{16}$; **b)** $\sqrt[3]{24}-3\sqrt[3]{192}+\sqrt[3]{-81}$; **c)** $\sqrt[3]{40}-\sqrt[3]{625}+2\sqrt[3]{-135}$;

d) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}-\sqrt[3]{\frac{125}{8}}+\frac{3}{\sqrt{2}}$; **e)** $(\sqrt[3]{2}+3)^3$; **f)** $(\sqrt[3]{2}+1)^3$; **g)** $(2\sqrt[3]{2}-3)^3$;

h) $(2\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2})^3$; **i)** $(3\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4})^3$; **j)** $(2\sqrt[3]{3}-2)^3$; **k)** $\frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt{16}}+\left(\frac{4}{2\sqrt{3}}\right)^{-1}-\frac{1}{2\sqrt{3}-2\sqrt{2}}$;

l) $\sqrt[3]{2\sqrt{2}-3}\cdot\sqrt[3]{2\sqrt{2}+3}+\sqrt[3]{\frac{4}{9}}:\sqrt[3]{\frac{81}{2}}$; **m)** $\sqrt[3]{2\sqrt{6}-4}\cdot\sqrt[3]{2\sqrt{6}+4}-\left[\left(\sqrt[3]{4}\right)^6\right]^2$;

n) $\sqrt[3]{7+\sqrt{22}}\cdot\sqrt[3]{7-\sqrt{22}}+\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^{-3}$; **o)** $\sqrt[3]{\frac{25}{27}}\cdot\sqrt[3]{\frac{15}{24}}-\sqrt[3]{\frac{2}{21}}:\sqrt[3]{\frac{72}{14}}$;

6. Să se compare numerele:

a) $2\sqrt[3]{4}$ *si* $\sqrt[3]{30}$; **b)** $4\sqrt[3]{2}$ *si* $3\sqrt[3]{4}$; **c)** $-2\sqrt[3]{81}$ *si* $-3\sqrt[3]{7}$;

7. Să se ordoneze crescător numerele:

a) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$; 64; $\sqrt[3]{8}$; **b)** 2; $\sqrt[3]{3}$; $\sqrt{2}$; **c)** $\sqrt{2}$; $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$;

d) $3\sqrt[3]{2}$; $2\sqrt[3]{5}$; $\sqrt[3]{60}$; **e)** $3\sqrt{5}$; 7; $4\sqrt{3}$; $-2\sqrt[3]{-27}$; **f)** $\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}$; $\frac{2}{\sqrt{2}}$; 2012^0; $(-2)^{-2}$;

8. Să se calculeze: $\left(\frac{6x^3}{45y^2}\sqrt[3]{\frac{9y}{x^5}}\right):\left(\frac{2x}{5y}\sqrt[3]{\frac{x}{3y^2}}\right)$;

9. Să se calculeze $\frac{2^{\sqrt{3}}\cdot 8^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\cdot\sqrt[3]{2^{\sqrt{27}}}}{(0,5)^{\sqrt{12}}}$**;**

10. Să se arate că: a) $\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}=3$; b) $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}=2$;

11*. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-6x+8$**. Să se calculeze** $f\left(\sqrt[3]{4-2\sqrt{2}}+\sqrt[3]{4+2\sqrt{2}}\right)$**.**

1.3 Raționalizarea numitorilor fracțiilor

Raționalizarea numitorului unei fracții care conține unul sau doi radicali înseamnă amplificarea numitorului cu un radical sau cu expresia conjugată de la numitor astfel încât la numitor să nu mai rămână radicali.

$$\frac{x}{\sqrt{a}}=\frac{x\sqrt{a}}{a},\qquad \frac{x}{a\sqrt{b}}=\frac{x\sqrt{b}}{ab}$$
$$\frac{x}{a+\sqrt{b}}=\frac{x(a-\sqrt{b})}{a^2-b},\qquad \frac{x}{a-\sqrt{b}}=\frac{x(a+\sqrt{b})}{a^2-b}$$

1. $\frac{1}{\sqrt[3]{a}}=\frac{\sqrt[3]{a^2}}{a};$ Exemplu: $\frac{\sqrt[3]{5^2})1}{\sqrt[3]{5}}=\frac{\sqrt[3]{25}}{5};$

2. $\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}=\frac{\sqrt[3]{a}}{a};$ Exemplu: $\frac{\sqrt[3]{7})1}{\sqrt[3]{49}}=\frac{\sqrt[3]{7}}{7};$

3. $\frac{1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}=\frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{a-b};$ Exemplu: $\frac{\sqrt[3]{7^2}+\sqrt[3]{7\cdot5}+\sqrt[3]{5^2})1}{\sqrt[3]{7}-\sqrt[5]{5}}=\frac{\sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{35}+\sqrt[3]{25}}{7-5};$

4. $\frac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}=\frac{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{a+b};$ Exemplu: $\frac{\sqrt[3]{7^2}-\sqrt[3]{7\cdot5}+\sqrt[3]{5^2})1}{\sqrt[3]{7}+\sqrt[5]{5}}=\frac{\sqrt[3]{49}-\sqrt[3]{35}+\sqrt[3]{25}}{7+5}.$

5. $\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}=\frac{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}{a-b};$ Exemplu: $\frac{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{3})1}{\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{15}+\sqrt[5]{9}}=\frac{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{3}}{5-3}=\frac{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{3}}{2}$

6. $\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}=\frac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}{a+b};$ Exemplu: $\frac{\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{2})1}{\sqrt[3]{36}-\sqrt[3]{12}+\sqrt[5]{4}}=\frac{\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{2}}{6-2}=\frac{\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{2}}{4}$

Sunt utile pentru raţionalizări următoarele formule:

$$\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)=a-b;$$
$$\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)=a+b;$$

Exercitii rezolvate

1. Să se raţionalizeze:

a) $\frac{2}{\sqrt[3]{4}}=\frac{2\sqrt[3]{4^2}}{4}=\frac{\sqrt[3]{16}}{2}=\frac{2\sqrt[3]{2}}{2}=\sqrt[3]{2}$; **sau** $\frac{2}{\sqrt[3]{4}}=\frac{2\cdot\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{8}}=\frac{2\cdot\sqrt[3]{2}}{2}=\sqrt[3]{2}$.

b) $\frac{3}{\sqrt[3]{9}}=\frac{3\sqrt[3]{3}}{3}=\sqrt[3]{3}$;

c) $\frac{1}{\sqrt[3]{-25}}=\frac{\sqrt[3]{5}}{-5}$;

d) $\frac{1}{\sqrt[3]{16}}=\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{64}}=\frac{\sqrt[3]{4}}{4}$;

2. Să se raționalizeze:

a) $\frac{6}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}}=\frac{6(\sqrt[3]{4^2}-\sqrt[3]{4\cdot 2}+\sqrt[3]{2^2})}{4+2}=\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{4}$;

b) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}{1}$;

c) $\frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}=\frac{\sqrt[3]{2}-1}{2-1}=\sqrt[3]{2}-1$;

d) $\frac{1}{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1}=\frac{\sqrt[3]{3}+1}{4}$;

3*. Aduceţi la o formă mai simplă expresia:

a) $A=\frac{\sqrt[3]{a^{-1}}-\sqrt[3]{a}}{\frac{1+a}{1+\sqrt[3]{a}}-\sqrt[3]{a^2}}-\frac{\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a^2\cdot\sqrt{a}}}-\frac{a}{\sqrt[3]{a^4}}$, $a\in\mathbb{R}_+$;

Rezolvare:

a) $\frac{\sqrt[3]{a^{-1}}-\sqrt[3]{a}}{\frac{1+a}{1+\sqrt[3]{a}}-\sqrt[3]{a^2}}=\frac{\frac{1}{\sqrt[3]{a}}-\sqrt[3]{a}}{\frac{(1+a)(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{a}+1)}{1+a}}=\frac{1-\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a}}\cdot\frac{1}{1-\sqrt[3]{a}}=\frac{\left(1-\sqrt[3]{a}\right)\left(1+\sqrt[3]{a}\right)}{\sqrt[3]{a}\left(1-\sqrt[3]{a}\right)}=\frac{1}{\sqrt[3]{a}}+1$

$\frac{\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a^2\cdot\sqrt{a}}}=\frac{a^{\frac{1}{3}}\cdot a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{2}{3}}\cdot a^{\frac{1}{6}}}=\frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{3}}\cdot a^{\frac{1}{6}}}=1$. $\frac{a}{\sqrt[3]{a^4}}=\frac{a}{a\sqrt[3]{a}}=\frac{1}{\sqrt[3]{a}}$. Rezultă, $A=\frac{1}{\sqrt[3]{a}}+1-1-\frac{1}{\sqrt[3]{a}}=0$

4*. Se consideră numărul $A=\frac{1}{\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}}+\frac{1}{\sqrt{7+4\sqrt{3}}}$**. Să se arate că** $A\in\mathbb{N}$.

Rezolvare: $A=\frac{1}{\sqrt[3]{(2-\sqrt{3})^3}}+\frac{1}{\sqrt{(2+\sqrt{3})^2}}=\frac{1}{2-\sqrt{3}}+\frac{1}{2+\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}=4\in\mathbb{N}$.

5*. Să se compare numerele A şi B unde $A=\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{12\sqrt[3]{3}-6\sqrt[3]{9}-5}$ **şi**

$B=\dfrac{1}{\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{4}}-(\sqrt[3]{4}-2)^{-1}$.

Rezolvare:

$A=\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{12\sqrt[3]{3}-6\sqrt[3]{9}-5}=\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{(\sqrt[3]{2}-2)^3}=2$ $\qquad B=\dfrac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}}{4-2}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}-2}=$

$B=\dfrac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}}{2}-\dfrac{\sqrt[3]{4^2}+2\sqrt[3]{4}+4}{4-8}=$

$B=\dfrac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}}{2}-\dfrac{2\sqrt[3]{2}}{-4}-\dfrac{2\sqrt[3]{4}}{-4}+1=\sqrt[3]{4}+1.$ $\qquad$ Rezultă $2<\sqrt[3]{4}+1\Rightarrow A<B.$

Exercitii propuse

1. Să se raționalizeze:

a) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{7}}$; b) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{36}}$; c) $\dfrac{5}{\sqrt[3]{25}}$; d) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{-81}}$; e) $\dfrac{4}{\sqrt[3]{32}}$;

2. Să se calculeze:

a) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{2}}$; b) $\dfrac{1}{3\sqrt[3]{4}}$; c**l**) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}-1}$; d) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}+2}$; e) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}}$;

3. Să se calculeze : a) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{9}}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}+3}$; b) $\dfrac{4}{\sqrt[3]{4}}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}-2}$;

c) $\dfrac{1}{3\cdot\sqrt[3]{2}}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}-1}$**; d)** $\dfrac{1}{2\cdot\sqrt[3]{3}}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}+1}$**;**

4*. a) Să se demonstreze relaţia $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$**;**

b) Să se raţionalizeze numitorul fracţiei $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{12}}$**;**

1.4 Puteri cu exponent raţional, real

Definiţie: Fie $m\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{N}^*, n\geq 2,\ x\rangle 0$. Numărul $x^{\frac{m}{n}}$ se numeşte **putere cu exponent raţional** unde **x** este baza puterii iar $\frac{m}{n}$ este **exponentul puterii**.

Pentru $x\langle 0$, n par, m impar nu se defineşte puterea cu exponent rational;

Dacă $n\in\mathbb{N}$, atunci $x^n=\underbrace{x\cdot x\cdot x\cdot .....\cdot x}_{n\ de\ x}$.

Proprietăţi ale puterii cu exponent raţional:

$x^{\frac{m}{n}}\cdot x^{\frac{p}{q}}=x^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$; $x^{\frac{m}{n}}:x^{\frac{p}{q}}=x^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}$; $\left(x^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}}=x^{\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}}$; $(x\cdot y)^{\frac{m}{n}}=x^{\frac{m}{n}}\cdot y^{\frac{m}{n}}$; $(x:y)^{\frac{m}{n}}=x^{\frac{m}{n}}:y^{\frac{m}{n}}$;

Convenţie: $x^0=1$;

Mai simplu putem scrie: Fie $m,n\in\mathbb{Q}(sau\ \mathbb{R})$ şi $x,y\in\mathbb{R}_+^*$.

1. $x^m\cdot x^n=x^{m+n}$; **2.** $x^m:x^n=x^{m-n}$; **3.** $\left(x^m\right)^n=x^{m\cdot n}$; **4.** $x^n\cdot y^n=\left(x\cdot y\right)^n$; **5.** $\frac{x^n}{y^n}=\left(\frac{x}{y}\right)^n$.

Scrierea puterilor cu exponent raţional cu ajutorul radicalilor se face după formula:

$x^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{x^m}$ $\qquad$ $x^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{x^{\frac{m}{n}}}=\frac{1}{\sqrt[n]{x^m}}$;

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}}=\sqrt[m\cdot n]{x},\ m,n\in\mathbb{N}^*, x\geq 0$; $\qquad$ $\sqrt[n]{x}=\sqrt[m\cdot n]{x^m},\ m,n\in\mathbb{N}^*, x\geq 0$;

Compararea puterilor cu exponent raţional:

Fie $x,y\rangle 0$şi $m,n\in\mathbb{Q}$;

1. Dacă $x\rangle 1$ atunci, $x^m\rangle x^n\Leftrightarrow m\rangle n$

2. Dacă $x\in(0;1)$ atunci, $x^m\rangle x^n\Leftrightarrow m\langle n$

3. $x^n=y^n\Leftrightarrow x=y$

Analog se defineşte şi **puterea cu exponent real** $x^r,\ x\rangle 0,\ r\in\mathbb{R}$; Proprietăţile puterii sunt aceleaşi ca în cazul puterii cu exponent rational. În plus, avem:

	$r\rangle 0$	$r\langle 0$
$x\rangle 1$	$x^r\rangle 1$	$x^r\in(0;1)$
$x\in(0;1)$	$x^r\in(0;1)$	$x^r\rangle 1$

Exercitii rezolvate

1. Să se calculeze:

a) $32^3 \cdot 16^2 \cdot 2^3 = (2^5)^3 \cdot (2^4)^2 \cdot 2^3 = 2^{15+8+3} = 2^{26}$

b) $27^4 : 9^2 : 3^5 = (3^3)^4 : (3^2)^2 : 3^5 = 3^{12-4-5} = 3^3 = 27$

c) $8^{\frac{5}{3}} \cdot 16^{\frac{3}{4}} \cdot 32^{\frac{1}{5}} = \left(2^3\right)^{\frac{5}{3}} \cdot \left(2^4\right)^{\frac{3}{4}} \cdot \left(2^5\right)^{\frac{1}{5}} = 2^5 \cdot 2^3 \cdot 2^1 = 2^9 = 512$ **;**

d) $27^{\frac{4}{3}} \cdot 9^{\frac{3}{2}} \cdot 81^{\frac{1}{4}} = \left(3^3\right)^{\frac{4}{3}} \cdot \left(3^2\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \left(3^4\right)^{\frac{1}{4}} = 3^4 \cdot 3^3 \cdot 3^1 = 3^8$ **;**

e) $125^4 \cdot \frac{1}{25} : 5^{10} = (5^3)^4 \cdot 5^{-2} : 5^{10} = 5^{10} : 5^{10} = 1;$

f) $\left(3^{\frac{6}{5}}\right)^{\frac{5}{3}} = 5^{\frac{6}{5} \cdot \frac{5}{3}} = 5^2 = 25;$

g) $4^{-3} \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^{-2} \cdot 64^{\frac{2}{3}} : 4^3 = 4^{-3} \cdot \left(4^{-2}\right)^{-2} \cdot (4^3)^{\frac{2}{3}} : 4^3 = 4^{-3} \cdot 4^4 \cdot 4^2 : 4^3 = 4^{3-3} = 4^0 = 1;$

h) $\frac{1}{81} \cdot \sqrt{3} \cdot 9^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{9} = 3^{-4} \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{4}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}} = 3^{-4+\frac{1}{2}+2} = 3^{-\frac{3}{2}};$

i) $\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{5}{2}} : \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}} : \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}} = (2^{-4})^{\frac{5}{2}} : (2^{-2})^{-\frac{3}{2}} : (2^{-3})^{\frac{1}{3}} = 2^{-10} : 2^3 : 2^{-1} = 2^{-10-3+1} = 2^{-12};$

j) $3^{2\sqrt{3}} \cdot 9^{\sqrt{12}} : 81^{\sqrt{3}} = 3^{6\sqrt{3}-4\sqrt{3}} = 3^{2\sqrt{3}};$

k) $\left(2^{5\sqrt{2}}\right)^{3\sqrt{2}} \cdot 16 : \left[\left(-2\sqrt{2}\right)^{10}\right]^2 = 2^{34} : 2^{30} = 16.$

2. Să se calculeze $\left(\sqrt{5}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{1}{5\sqrt[3]{25}}\right)^{-1} : \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} \cdot (125)^{\frac{1}{3}};$

Rezolvare:

$\left(\sqrt{5}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{1}{5\sqrt[3]{25}}\right)^{-1} : \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} \cdot (125)^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{1}{4}} \cdot 5 \cdot 25^{\frac{1}{3}} : 5^2 \cdot \left(5^3\right)^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{1}{4}+1+\frac{2}{3}-2+1} = 5^{\frac{1}{4}+\frac{2}{3}} = 5^{\frac{11}{12}}$ **;**

3. Să se calculeze $\frac{2^{\sqrt{3}} \cdot 8^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \cdot \sqrt[3]{2^{\sqrt{27}}}}{(0,5)^{\sqrt{12}}}$ **;**

Rezolvare: $\frac{2^{\sqrt{3}} \cdot 8^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \cdot \sqrt[3]{2^{\sqrt{27}}}}{(0,5)^{\sqrt{12}}} = \frac{2^{\sqrt{3}} \cdot 2^{\frac{3\sqrt{3}}{3}} \cdot 2^{\frac{3\sqrt{3}}{3}}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{2\sqrt{3}}} = 2^{\sqrt{3}+\sqrt{3}+\sqrt{3}} \cdot 2^{2\sqrt{3}} = 2^{5\sqrt{3}}$ **;**

4*. Să se rezolve ecuația: $64^{x-2} \cdot \sqrt{2}^{2x+4} \cdot \left(\frac{1}{32}\right)^{x+1} \cdot \left(\sqrt[3]{2}\right)^{3x+9} = 512$

Rezolvare: $\left(2^6\right)^{x-2} \cdot \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{2x+4} \cdot \left(\left(\frac{1}{2}\right)^5\right)^{x+1} \cdot \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^{3x+9} = 512$

$2^{6x-12} \cdot 2^{x+2} \cdot 5^{-5x-5} \cdot 2^{x+3} = 2^9 \qquad 2^{3x-12} = 2^9 \Leftarrow 3x-12 = 9 \Rightarrow x = 7.$

Exercitii propuse

1. Să se transforme radicalii în puteri cu exponent raţional:

a) $\sqrt{2}$; **b)** $\sqrt{7^3}$; **c)** $3\sqrt{3}$; **d)** $5\sqrt{5^3}$; **e)** $\sqrt[3]{2}$; **f)** $2\sqrt[3]{2}$; **g)** $2^4\cdot\sqrt[3]{2^6}$; **h)** $\frac{\sqrt[3]{2}}{4}$; **i)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$;

2. Să se transforme radicalii în puteri cu exponent raţional:

a) $\sqrt{x}$; **b)** $x\sqrt{x}$; **c)** $\sqrt{x^5}$; **d)** $x^2\sqrt{x^6}$; **e)** $\sqrt[3]{x}$; **f)** $\sqrt[3]{x^2}$; **g)** $\sqrt[3]{x^{12}}$; **h)** $x\sqrt[3]{x}$; **i)** $x^2\cdot\sqrt[3]{x}$;

j) $\sqrt[3]{x^3\cdot\sqrt{x}}$; **k)** $\frac{x\sqrt{x^8}}{\sqrt[3]{x^2}}$; **l)** $\frac{x^2\cdot\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x\sqrt{x}}}$;

3. Să se transforme puterile în radicali:

a) $3^{\frac{1}{2}}$; b) $2^{\frac{3}{2}}$; c) $5^{\frac{1}{3}}$; d) $7^{\frac{2}{3}}$; e) $4^{\frac{5}{3}}$; f) $24^{\frac{2}{3}}$

4. Să se calculeze:

a) $\left(\frac{1}{27}\right)^{-4}\cdot 9^{-5}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^4:\left(\frac{1}{81}\right)^{\sqrt[3]{-27}}$; **b)** $\left(\frac{1}{16}\right)^5\cdot 4^{-2}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^{\sqrt[3]{-8}}:\left(\frac{1}{2}\right)^{-10}$;

c) $9^{\frac{5}{2}}\cdot\sqrt{3}\cdot\left(\frac{1}{27}\right)^4\cdot\sqrt[3]{81}$; **d)** $\left(\frac{1}{16}\right)^{-3}\cdot 4^{\frac{1}{2}}\cdot(\sqrt{2})^{-4}\cdot\sqrt[3]{4}$;

e) $\left(\frac{1}{27}\right)^{-2}\cdot 9^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\sqrt{3}\right)^{-4}\cdot\sqrt[3]{9}$;

5. Să se calculeze :

a) $0{,}1^{\frac{1}{3}}\cdot 0{,}01^{\frac{1}{3}}\cdot 0{,}001^{\frac{1}{3}}$; **b)** $\left(9^{\frac{1}{2}}\cdot 9^{\frac{1}{4}}\cdot 9^{\frac{1}{8}}\cdot.....\cdot 9^{\frac{1}{64}}\right)^{64}$;

c) $\left(\frac{1}{9}\right)^2\cdot\sqrt[3]{81}^{\frac{3}{2}}\cdot\left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}$; **d)** $\left(\frac{1}{5}\right)^3\cdot 25^{\sqrt[3]{-8}}\cdot 5^{-5}:\left(\frac{1}{25}\right)^{-6}$;

e) $\left(\frac{1}{3}\right)^{15}\cdot 9^{\sqrt{72}}\cdot\left(\frac{1}{27}\right)^{\sqrt{32}}\cdot\left(81^{\sqrt{2}}\right)^{2\sqrt{2}}$; **f)** $\left[\left(\sqrt[3]{5}\right)^{\sqrt{5}}\right]^{-3\sqrt{5}}$;

g) $\left(\frac{1}{5}\right)^{12}\cdot 25^{\frac{\sqrt{18}}{2}}\cdot\left(\frac{1}{125}\right)^{\sqrt{\frac{8}{9}}}\cdot 25^{\sqrt{128}}$; **h)** $\left(\frac{1}{3}\right)^{15}\cdot 9^{\sqrt{12}}\cdot\left(\frac{1}{27}\right)^{\sqrt{32}}\cdot\left(81^{-\sqrt{2}}\right)^{2\sqrt{2}}$;

6. Să se determine $n\in\mathbb{R}$ **ştiind că** $2^{n-1}\cdot 4^{n+2}\cdot 8^{n-3}=2^{12}$**.**

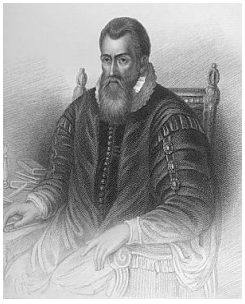
7. Să se determine $n\in\mathbb{R}$ **ştiind că** $\sqrt[3]{5^{\frac{3n-1}{2}}}=25^{\frac{n+1}{3}}$**.**

8. Să se calculeze :

a) $\sqrt{27}\cdot\sqrt[3]{9}:\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$; b) $\sqrt[3]{81}\cdot\sqrt{3}+\left(2\cdot\sqrt[3]{2}\right)^4:\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{3}}$; c) $\left(\frac{1}{9}\right)^2\cdot\sqrt[3]{81}^{\frac{3}{2}}\cdot\left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}$;

d) $\left(\frac{1}{5}\right)^3\cdot 25^{\sqrt[3]{-8}}\cdot 5^{-5}:\left(\frac{1}{25}\right)^{-6}$; e) $\left(\frac{1}{3}\right)^{15}\cdot 9^{\sqrt{72}}\cdot\left(\frac{1}{27}\right)^{\sqrt{32}}\cdot\left(81^{\sqrt{2}}\right)^{2\sqrt{2}}$;

1.5 Logaritmi



În **1614** prin lucrarea ‘’**Mirifici logarithmorum canonis descriptio’’**, **John Neper**(1550-1617) introduce tablele de logaritmi naturali iar în **1624**, Henry Brigs(1556-1630), publică ’’**Arithmetica logarithmica** ‘‘ în care introduce logaritmii zecimali. Apariţia logaritmilor a revoluţionat calculele inginereşti, în general cele foarte complexe când în loc de înmulţiri şi împărţiri se foloseau nişte adunări şi scăderi. Încă de la apariţia logaritmilor ca urmare a dezvoltării societăţii şi a directei sale dependenţe de matematică, prin creşterea interesului faţă de diversele calcule din domeniile geometriei, astronomiei, trigonometriei sau cele negustoreşti, matematicienii **Jost Bürgi** (1552-1632) , **John Neper** (desen) şi **Henry Briggs**, cei care au introdus şi dezvoltat calculul cu logaritmi au arătat importanţa acestora şi în alte domenii ale ştiinţelor.

Astfel, ca exemplu, în astronomie se pot lua ca măsură pentru strălucirea unei stele, în chimie se pot utiliza la calculul timpului de înjumătăţire a unei substanţe radioactive, în biologie, la relaţia ce dă creşterea naturală, iar în matematică însăşi la determinarea unor aproximări mai bune.

Definiţie: Fie $a\in(0;1)\cup(1;\infty)$ şi $x\rangle 0$. Atunci, există şi este unic numărul real $y=\log_a x$ (citim logaritm în baza a din x) pentru care $x=a^y$;

Exemple: $\log_2 8=3$ **deoarece** $8=2^3$**;** $\log_6 1=0$ **deoarece** $1=6^0$**;** $\log_{\sqrt{5}} 25=4$ **deoarece** $25=\sqrt{5}^4$**;**

Aşadar, $\boxed{\log_a x=y\Rightarrow x=a^y,\ x\rangle 0, a\in(0;1)\cup(1;\infty)}$;

Proprietăţi:

Fie $a,b,c\in(0,\infty), a,b,c\neq 1, x,y\in(0,\infty), m\in\mathbb{R}\Rightarrow$

1. $\boxed{\log_a 1=0}$; Exemplu: $\log_5 1=0$**;** $\log_{\frac{1}{4}} 1=0$**;** $\log_{\sqrt{3}} 1=0$**;**

2. $\boxed{\log_a a=1}$; Exemplu: $\log_5 5=1$**;** $\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{3}=1$**;** $\log_{\sqrt{3}}\sqrt{3}=1$**;**

3. $\boxed{\log_a x\cdot y=\log_a x+\log_a y}$; Exemplu: $\log_2 14=\log_2 2\cdot 7=\log_2 2+\log_2 7=1+\log_2 7$**;**

4. $\boxed{\log_a\frac{x}{y}=\log_a x-\log_a y}$; Exemplu: $\log_3\frac{10}{3}=\log_3 10-\log_3 3=\log_3 10-1$**;**

5. $\boxed{\log_a b^m=m\log_a b}$; $\boxed{\log_a a^m=m}$; Exemplu: $\log_3 54=\log_3 27\cdot 2=\log_3 3^3+\log_3 2=3+\log_3 2$**;**

6. $\boxed{\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}}$; $\boxed{\frac{1}{\log_a b}=\log_b a}$; Exemplu: $\log_2 125=\frac{\log_5 5^3}{\log_5 2}=\frac{3\log_5 5}{\log_5 2}=\frac{3}{\log_5 2}=3\cdot\log_2 5$**;**

7. $\boxed{a^{\log_b c}=c^{\log_b a}}$; $\boxed{x=a^{\log_a x}}$; Exemplu: $9^{\log_3 5}=5^{\log_3 9}=5^2=25$**;**

Logaritmi zecimali

Notaţie: $\log_{10} x$ *notam* $\lg x$ **(logaritm în baza 10 sau logaritm zecimal);**

Exemple:

$\lg 1 = 0;$

$\lg 10 = 1;$

$\lg 20 + \lg 5 = \lg 100 = \lg 10^2 = 2\lg 10 = 2;$

$\lg 60 - \lg 6 = \lg 10 = 1;$

$\lg 1000 = \lg 10^3 = 3\lg 10 = 3.$

Logaritmi naturali

Notaţie: $\log_e x$ *notam* $\ln x$ **(logaritm în baza e = 2,718281…. sau logaritm natural)**

Exemple:

$\ln 1 = 0;$

$\ln e = 1;$

$\ln 5e + \ln 2e = \ln 10e^2 = \ln 10 + 2\ln e = \ln 10 + 2;$

$\ln 8e^2 - \ln 4e = \ln 2e = \ln 2 + 1;$

$\ln e^5 = 5\ln e = 5.$

Compararea logaritmilor

1. Fie $a \in \mathbb{R},\ a \rangle 1 \Rightarrow \quad \log_a x \langle \log_a y \Leftrightarrow x \langle y\ \forall x, y \rangle 0;$;
2. Fie $a \in \mathbb{R},\ a \in (0;1) \Rightarrow \quad \log_a x \langle \log_a y \Leftrightarrow x \rangle y\ \forall x, y \rangle 0;$;

Exemplu: Să se arate că $\log_2 3 \rangle \log_3 4$.

Metoda I: Se pleacă de la inegalitatea evidentă,

$\lg 9 \rangle \lg 8 \Leftrightarrow \lg 3^2 \rangle \lg 4 \cdot 2 \Rightarrow 2\lg 3 \rangle \lg 4 + \lg 2 \,|:2 \Rightarrow \lg 3 \rangle \frac{\lg 4 + \lg 2}{2} \geq \sqrt{\lg 4 \cdot \lg 2}$

$\Leftrightarrow (\lg 3)^2 \rangle \lg 4 \cdot \lg 2 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \frac{\lg 3}{\lg 2} \rangle \frac{\lg 4}{\lg 3} \Leftrightarrow \log_2 3 \rangle \log_3 4.$

Metoda II: Logaritmul din dreapta se poate transforma în baza celui din stânga, astfel:

$\log_2 3 \rangle \log_3 4 \Leftrightarrow \log_2 3 \rangle \frac{\log_2 4}{\log_2 3} \,|\cdot \log_2 3 \Rightarrow (\log_2 3)^2 \rangle \log_2 4 \Rightarrow (\log_2 3)^2 \rangle 2 \cdot \log_2 2$

$\Rightarrow (\log_2 3)^2 \rangle 2 \cdot 1 \Rightarrow (\log_2 3)^2 \rangle 2 \cdot (\log_2 2)^2 \Rightarrow (\log_2 3) \rangle \sqrt{2} \cdot (\log_2 2) \Rightarrow \log_2 3 \rangle \log_2 2^{\sqrt{2}}$. Rezultă că $3 \rangle 2^{\sqrt{2}}$ ceea ce este adevărat deoarece $2^{\sqrt{2}} \langle 2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2^3} = \sqrt{8} \langle \sqrt{9} = 3.$

Metoda III. O altă metodă presupune transformarea tuturor logaritmilor într-o bază comună, de exemplu, în baza e.

$\log_2 3 = \frac{\ln 3}{\ln 2}$, iar $\log_3 4 = \frac{\ln 4}{\ln 3} = \frac{\ln(3+1)}{\ln(2+1)} = \frac{\ln\left[3(1+\frac{1}{3})\right]}{\ln\left[2(1+\frac{1}{2})\right]} = \frac{\ln 3+\ln(1+\frac{1}{3})}{\ln 2+\ln(1+\frac{1}{2})}$. Atunci, inegalitatea de demonstrat $\log_2 3 \rangle \log_3 4$, devine $\frac{\ln 3}{\ln 2} \rangle \frac{\ln 3+\ln(1+\frac{1}{3})}{\ln 2+\ln(1+\frac{1}{2})} \Leftrightarrow$

$\cancel{\ln 3\cdot\ln 2} + \ln 3\cdot\ln(1+\frac{1}{2}) \rangle \cancel{\ln 2\cdot\ln 3} + \ln 2\cdot\ln(1+\frac{1}{3}) \Leftrightarrow \ln 3\cdot\ln(1+\frac{1}{2}) \rangle \ln 2\cdot\ln(1+\frac{1}{3})$ adevărată deoarece funcția lnx este crescătoare iar din $3\rangle 2 \Rightarrow \ln 3\rangle \ln 2$, și

$1+\frac{1}{2} \rangle 1+\frac{1}{3} \Rightarrow \ln(1+\frac{1}{2}) \rangle \ln(1+\frac{1}{3})$, adică c.c.t.d.

Metoda IV. Putem utiliza de asemenea, inegalitatea mediilor, astfel, a demonstra inegalitatea $\log_2 3 \rangle \log_3 4$ este echivalentă cu a demonstra că $\frac{\log_3 3}{\log_3 2} \rangle \log_3 4 \Leftrightarrow \log_3 2\cdot\log_3 4 \langle 1$. (*)

$\sqrt{\log_3 2 \cdot \log_3 4} \le \frac{\log_3 2+\log_3 4}{2} = \frac{\log_3 8}{2} \langle \frac{2}{2} = 1$, deoarece $\log_3 8 \langle \log_3 9 = 2$. Așadar,

$\sqrt{\log_3 2 \cdot \log_3 4} \langle 1 \left|()^2 \right. \Rightarrow \log_3 2 \cdot \log_3 4 \langle 1$, adică tocmai relația de demonstrat (*).

Mai general, putem arăta că $\log_a(a+1) \rangle \log_{(a+1)}(a+2),\ \forall a\rangle 0,\ a\neq 1$.

Inegalitatea de demonstrat devine $\log_{a+1} a \cdot \log_{a+1}(a+2) \langle 1,\ \forall a\rangle 0,\ a\neq 1$.

Folosind inegalitatea mediilor, rezultă

$\sqrt{\log_{a+1} a \cdot \log_{a+1}(a+2)} \le \frac{\log_{a+1} a + \log_{a+1}(a+2)}{2} = \frac{1}{2}\cdot\log_{a+1} a(a+2) = \frac{1}{2}\cdot\log_{a+1}(a^2+2a)\langle$

$\langle \frac{1}{2}\cdot\log_{a+1}(a+1)^2 = \frac{2}{2} = 1$. Prin ridicare la pătrat, se obține $\log_{a+1} a \cdot \log_{a+1}(a+2)\langle 1$. c.c.t.d

Metoda V:

$\log_2 3 \rangle \log_3 4 \Leftrightarrow \log_2 3 \rangle 2\cdot\log_3 2 \Leftrightarrow \log_2 3 \rangle 2\cdot\frac{\log_2 2}{\log_2 3} \Leftrightarrow (\log_2 3)^2 \rangle 2$ (*).

Pentru a demonstra această inegalitate se pleacă de la dubla inegalitate $2\sqrt{2} \langle 3 \langle 4$ care se logaritmează, astfel:

$\log_2\sqrt{8} \langle \log_2 3 \langle \log_2 2^2 \Rightarrow 1{,}5 \langle \log_2 3 \langle 2 \left|()^2 \right.$ De aici, rezultă

$2{,}25 \langle (\log_2 3)^2 \langle 4 \Rightarrow (\log_2 3)^2 \rangle 2{,}25 \rangle 2$, adică,(*), c.tc.t.d.

Metoda VI:

Putem demonstra și că $\log_2 3 \rangle \frac{3}{2} \rangle \log_3 4$.

Astfel, $\log_2 3 \rangle \frac{3}{2} \Leftrightarrow 3 \rangle 2^{\frac{3}{2}} \left|()^2 \right. \Rightarrow 3^2\rangle 2^3$, (adevărat deoarece $9 \rangle 8$).

$\log_3 4 \langle \frac{3}{2} \Leftrightarrow 4 \rangle 3^{\frac{3}{2}} \left|()^2 \right. \Rightarrow 4^2\langle 3^3$, adevărat deoarece $16 \langle 27$).

Exercitii rezolvate

1. Să se calculeze:

a) $\log_2 \frac{1}{2} = \log_2 2^{-1} = -1 \cdot \log_2 2 = -1;$

b) $\log_2 \sqrt{2} = \log_2 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \log_2 2 = \frac{1}{2};$

c) $\log_2 \sqrt[3]{2} = \log_2 2^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \log_2 2 = \frac{1}{3};$

d) $\log_{\frac{1}{2}} 2 = \frac{\log_2 2}{\log_2 2^{-1}} = \frac{1}{-1} = -1;$

e) $\log_{\sqrt{2}} 2 = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{2}^2 = 2 \cdot \log_{\sqrt{2}} \sqrt{2} = 2;$

f) $\log_{\sqrt[3]{2}} \frac{1}{4} = \frac{\log_2 \frac{1}{4}}{\log_2 \sqrt[3]{2}} = \frac{\log_2 2^{-2}}{\log_2 2^{\frac{1}{3}}} = \frac{-2}{\frac{1}{3}} = -6;$

g) $\log_{16} 2 = \frac{\log_2 2}{\log_2 16} = \frac{1}{\log_2 2^4} = \frac{1}{4};$

h) $\log_2 9 \cdot \log_9 2 = \log_2 9 \cdot \frac{1}{\log_2 9} = 1$

i) $2^{\log_2 9} = 9^{\log_2 2} = 9^1 = 9;$

j) $\frac{1}{2} \cdot \log_{\sqrt{2}} 16 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\log_2 16}{\log_2 \sqrt{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{\frac{1}{2}} = 4;$

k) $\log_2 2 \cdot \sqrt{2} = \log_2 2 + \log_2 \sqrt{2} = 1 + \log_2 2^{\frac{1}{2}} = {}^{2)}1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

l) $\log_2 64 \cdot \sqrt[3]{2} = \log_2 2^6 + \log_2 2^{\frac{1}{3}} = 6 + \frac{1}{3} = \frac{19}{3};$

m) $\log_2 \sqrt[3]{2 \cdot \sqrt{2}} = \log_2 \sqrt[3]{2 \cdot 2^{\frac{1}{2}}} = \log_2 \sqrt[3]{2^{\frac{3}{2}}} = \log_2 2^{\frac{3}{6}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2};$

n) $2^{\frac{\lg 7}{\lg 2}} = 2^{\log_2 7} = 7^{\log_2 2} = 7^1 = 7;$

o) $\sqrt[3]{2}^{\frac{1}{\log_8 2}} = \sqrt[3]{2}^{\log_2 8} = (2^{\frac{1}{3}})^3 = 2^1 = 2;$

p) $\log_2 93 - \log_2 3 = \log_2 \frac{96}{3} = \log_2 32 = \log_2 2^5 = 5;$

q) $\log_2 \left(5\sqrt{2} - 4\sqrt{3}\right) + \log_2 \left(5\sqrt{2} + 4\sqrt{3}\right) = \log_2 \left(5\sqrt{2} - 4\sqrt{3}\right) \cdot \left(5\sqrt{2} + 4\sqrt{3}\right) = \log_2 (50 - 48) = \log_2 2 = 1;$

r) $\log_2 \sqrt[3]{5\sqrt{2} - 7} + \log_2 \sqrt[3]{5\sqrt{2} + 7} = \log_2 \sqrt[3]{5\sqrt{2} - 7} \cdot \sqrt[3]{5\sqrt{2} + 7} = \log_2 \sqrt[3]{50 - 49} = \log_2 1 = 0;$

s) $\log_8 9 \cdot \log_7 8 \cdot \log_6 7 \cdot \log_5 6 \cdot \log_4 5 \cdot \log_3 4 = \frac{\log_3 9}{\log_3 8} \cdot \frac{\log_3 8}{\log_3 7} \cdot \frac{\log_3 7}{\log_3 6} \cdot \frac{\log_3 6}{\log_3 5} \cdot \frac{\log_3 5}{\log_3 4} \cdot \frac{\log_3 4}{\log_3 3} = \frac{\log_3 9}{\log_3 3} = 2;$

2. Să se calculeze:

a) $\log_2 24 + \log_2 36 - \log_2 27 = \log_2 \frac{24 \cdot 36}{27} = \log_2 32 = 5;$

b) $\log_2 \sqrt[3]{2}+\log_{\frac{1}{16}}\sqrt{2}-\log_{\sqrt{2}}\frac{1}{2}=\log_2 2^{\frac{1}{3}}+\frac{\log_2 2^{\frac{1}{2}}}{\log_2 2^{-4}}-\frac{\log_2 2^{-1}}{\log_2 2^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{3}+\frac{\frac{1}{2}}{-4}-\frac{-1}{\frac{1}{2}}=\overset{8)}{=}\frac{1}{3}-\overset{3)}{\frac{1}{8}}+\overset{24)}{2}=\frac{53}{24}$

c) $\log_2(2+\sqrt{3})+\log_2(2-\sqrt{3})=\log_2(2-\sqrt{3})\cdot(2-\sqrt{3})=\log_2 1=0;$

d) $2^{1-\log_2 3}+\sqrt{2}^{\frac{1}{\log_3 2}}=2^{\log_2\frac{2}{3}}+\sqrt{2}^{\log_2 3}=\left(\frac{2}{3}\right)^{\log_2 2}+3^{\log_2\sqrt{2}}=\frac{2}{3}+3^{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}+\sqrt{3}$

3. Să se determine $x\in\mathbb{R}$ astfel încât să aibă sens logaritmii:

a) $\log_2(4x-20);$ b) $\log_2(x^2-25);$ c) $\log_2(9-x^2);$ d) $\log_{3x-9}(2x+6);$

Rezolvare:

a) $4x-20\rangle 0\Rightarrow 4x\rangle 20\Rightarrow x\rangle 5\Rightarrow x\in(5;\infty)$;

b) $x^2-25\rangle 0\Rightarrow x^2\rangle 25\Rightarrow x\in(-\infty,-5)\cup(5;\infty);$

c) $9-x^2\rangle 0\Rightarrow x^2\langle 9\Rightarrow x\in(-3;3);$

d) $2x+6\rangle 0\Rightarrow x\rangle -3,\ 3x-9\rangle 0\Rightarrow x\rangle 3$. Rezultă $x\in(3;\infty)$.

4. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât $\log_2\left(\log_3(x^2-mx+12)\right)\geq 0.$

Rezolvare:

Se pun condițiile $\log_3(x^2-mx+12)\geq 1\Leftrightarrow x^2-mx+12\geq 3\Rightarrow\ x^2-mx+9\geq 0\Leftrightarrow\Delta\leq 0$ adică $m^2-36\leq 0\Rightarrow m\in[-6;6]$.

5. Să se arate că $\sqrt{2}$ aparține intervalului $\left(\log_7\sqrt[3]{7\sqrt{7}};\sqrt[3]{3}\right)$.

Rezolvare:

$\log_7\sqrt[3]{7\sqrt{7}}=\log_7 7^{\frac{1}{3}}\cdot 7^{\frac{1}{6}}=\log_7 7^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2};\quad \sqrt{2}\ \langle\ \sqrt[3]{3}\,|()^6\Rightarrow 2^3\langle 3^2$, adevărat. Rezultă $\frac{1}{2}\langle\sqrt{2}\langle\sqrt[3]{3}$.

6. Să se calculeze $100^{0,5-\lg\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7}^{\frac{1}{\log_8 7}}-2^{\frac{\log_{100}7}{\lg 7}}$.

Rezolvare:

1). $\log_{25}18=\frac{\lg 9\cdot 2}{\lg 5^2}=\frac{2\lg 3+\lg 2}{2(\lg 10-\lg 2)}=\frac{2b+a}{2(1-a)}$.

2). $100^{0,5-\lg\sqrt{2}}=100^{0,5}:100^{\lg\sqrt{2}}=100^{\frac{1}{2}}:\sqrt{2}^{\lg 100}=10:\sqrt{2}^2=10:2=5$.

$\sqrt[3]{7}^{\frac{1}{\log_8 7}}=\sqrt[3]{7}^{\log_7 8}=8^{\log_7\sqrt[3]{7}}=8^{\frac{1}{3}}=2,\qquad 2^{\frac{\log_{100}7}{\lg 7}}=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$.

7. Să se arate că $\log_2 7+\log_7 17+\log_{17}256\rangle 6$**;**

Rezolvare: $\log_2 7+\log_7 17+\log_{17}256\geq 3\sqrt[3]{\log_2 7\cdot\log_7 17\cdot\log_{17}256}=$

$\sqrt[3]{\log_2 7\cdot\frac{\log_2 17}{\log_2 7}\cdot\frac{\log_2 256}{\log_2 17}}=\qquad =3\sqrt[3]{\log_2 256}=3\sqrt[3]{\log_2 2^8}=3\cdot\sqrt[3]{8}=6$

8*. Să se arate că $\sqrt{2\cdot\log_x\sqrt{y}}+\sqrt{3\cdot\log_y\sqrt[3]{x}}=2\Leftrightarrow x=y,\ \forall x,y\in\mathbb{R}_+-\{1\}$.

Rezolvare:

Dacă x=y relaţia dată este evidentă;

Relaţia dată este echivalentă cu $\sqrt{2\cdot\frac{1}{2}\log_x y}+\sqrt{3\cdot\frac{1}{3}\log_y x}=2\Leftrightarrow\ \sqrt{\log_x y}+\sqrt{\log_y x}=2\Leftrightarrow$

$\sqrt{\log_x y}+\sqrt{\frac{1}{\log_x y}}=2\Leftrightarrow\log_x y=1\Leftrightarrow x=y$.

9*. a) Se consideră numerele

$A=\lg\left(\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+...+\frac{1}{(n-1)(n+1)}\right),\ n\in\mathbb{N},n\geq2$ **,**

$B=\lg\left(1-\frac{1}{2^2}\right)+\lg\left(1-\frac{1}{3^2}\right)+...+\lg\left(1-\frac{1}{n^2}\right),\ n\in\mathbb{N},n\geq2.$ **Să se arate că** $A+B+\lg4=0$**.**

Rezolvare:

$A=\lg\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+...+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)\right]=\ \lg\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\lg n-\lg2-\lg(n+1).$

$B=\lg\frac{2^2-1}{2^2}\cdot\frac{3^2-1}{3^2}\cdot...\cdot\frac{n^2-1}{n^2}=\lg\frac{1\cdot2}{2\cdot2}\cdot\frac{2\cdot4}{3\cdot3}\cdot...\cdot\frac{(n-1)\cdot(n+1)}{n\cdot n}=$

$=\lg\frac{n+1}{2n}=lg(n+1)-\lg2-\lg n$ Rezultă $A+B+\lg4=0$.

10*. Dacă $\log_2 5=a$ **şi** $\log_2 3=b$**. Aflaţi în funcţie de a şi b,** $\log_{45}120$**.**

Rezolvare: $\log_{45}120=\frac{\log_2 120}{\log_2 45}=\frac{\log_2 2^2\cdot3\cdot5}{\log_2 3^2\cdot5}=\frac{\log_2 2^2+\log_2 3+\log_2 5}{\log_2 3^2+\log_2 5}=\frac{2+b+a}{2+a}$;

11*. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ **astfel încât logaritmul** $\log_3\left[\left(m^2+1\right)x^2-2(m+4)x+2\right]$ **să fie definit pentru orice x număr real.**

Adrian Stan (Sclipirea Minţii 2012)

Rezolvare: Trebuie ca $\left(m^2+1\right)x^2-2(m+4)x+2\rangle0\Leftrightarrow\Delta\langle0\Rightarrow\ \ 4(m^2+8m+16)-8(m^2+1)\langle0\Rightarrow$

$-m^2+8m+14\langle0\Leftrightarrow m^2-8m-14\rangle0\Rightarrow m\in\left(-\infty;4-\sqrt{30}\right)\cup\left(4+\sqrt{30},+\infty\right).$

Exercitii propuse

1. Să se calculeze:

a) $\log_5 15-\log_5 3$**;** **b)** $\log_2 6+\log_2 4-\log_2 12$**;** **c)** $\log_3 243-\log_4\frac{1}{4}$**;** **d)** $5^{\log_5 2}-\log_{\frac{1}{2}}2$

e) $\log_3 12+\log_9 12$**;** **f)** $\lg\frac{6}{7}+\lg\frac{14}{8}+\lg\frac{40}{6}$**;** **g)** $\lg100^5-\ln e$**;** **h)** $\lg25\cdot\lg10\cdot\lg1$**;**

i) $-log_3\left(\log_2\sqrt[3]{2}\right)$**;** **j)** $\log_2\left(\log_4\left(\log_3 81\right)\right)$**;** **k)** $2\log_6\sqrt{2}+\log_6 3$**;**

l) $\sqrt{4^{\frac{1}{\log_6 4}}+100^{\frac{1}{\lg100}}}$**;** **m)** $\log_5\sqrt[3]{5}-\log_8\frac{1}{16}+\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{2}$;

2. Să se calculeze: a) $\lg80+\lg20-\lg16;$ **b)** $\log_6 5\cdot\log_5 4\cdot\log_4 3\cdot\log_3 2\cdot\log_2 1$**;**

c) $\log_5\left(\log_3(\log_4 64)\right)$; **d)** $\log_2\frac{1}{32}+\log_{\sqrt{3}}81-\log_{\frac{1}{25}}\sqrt[3]{5}$; **e)** $\log_2 24+\log_2 6-\log_2 9$.

3. Să se determine valorile reale ale lui x astfel încât să aibă sens logaritmii:

a) $\log_3(x+4)$; **b)** $\log_2\frac{x-2}{x+2}$; **c)** $\log_{3+x}(x^2-1)$; **d)** $\log_3(\log_3 x)$;

4. Să se determine $x\in\mathbb{R}$ **astfel încât să aibă sens logaritmii:**

a) $\log_5\frac{3x-9}{x+5}$; **b)** $\log_3(x^2+3x-10)$;

5. Să se determine valorile reale ale lui x astfel încât să aibă sens logaritmii:

a) $\log_4(x-8)$; **b)** $\log_3\frac{x-4}{x+4}$; **c)** $\log_2(x^2-9)$; **d)** $\log_2(4-x^2)$;

e) $\log_{2+x}(x^2-4)$; **f)** $\lg(x^2-5x+4)$; **g)** $\log_{x-1}(x^2-3x-10)$; **h)** $\log_x(x^2-2x-3)$;

i) $\log_{x+4}(x^2-4)$; **j)** $\log_{x-7}(x^2-10x+9)$; **k)** $\log_{x-3}(x^2-3x-4)$; **l)** $\log_{3-x}\frac{x+2}{x-2}$;

m) $\log_2(\log_2 x)$; **n)** $\log_{x-8}\sqrt{25-x^2}$;

6. Să se calculeze:

a) $\log_3 27-\log_2 8$; **b)** $\log_3 9-\log_2 16$; **c)** $2\log_3 4-4\log_3 2$; **d)** $\log_2 5+\log_2\frac{1}{5}$;

e) $\log_6 24-\log_6 4$; **f)** $\log_3 6+\log_3 2-\log_3 4$; **g)** $\lg 20+\lg 3-\lg 6$;

h) $\log_5 10+\log_5 3-\log_5 6$; **i)** $\lg\frac{1}{2}+\lg\frac{2}{3}+....+\lg\frac{9}{10}$; **j)** $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}-\log_5 25$;

k) $\log_2\frac{1}{4}-\sqrt[3]{-8}$; **l)** $4^{\log_2 3}+7^{\frac{1}{\log_2 49}}$; **m)** $\log_3 27\cdot\log_3 9\cdot\log_3 1$;

n) $\log_2 32\cdot\log_2 16\cdot\log_2 8$; **o)** $\log_3\frac{1}{9}-\log_5 125$; **p)** $(\sqrt[3]{2})^{\log_2 8}+\sqrt{3}^{\log_3 9}$;

q) $\lg\frac{15}{14}+\lg\frac{6}{5}-\lg\frac{9}{7}$; **r)** $\log_2(\log_5(\log_3 243))$; **s)** $\log_5(\log_3(\log_6 216))$;

7. Să se calculeze:

a) $\log_5 100+2\log_5 3-\log_5 36$; **b)** $\log_5 12-\log_5 3-\log_5 4$;

c) $(1+\sqrt{2})^{-1}+9^{\log_3\sqrt{2}}$; **d)** $(1+\sqrt{2})^{-2}+3\cdot\log_4\sqrt[3]{4}$;

e) $(2+\sqrt{2})^{-1}+\sqrt[3]{2}^{\log_2\frac{1}{64}}$; **f)** $\log_3 27^{-1}-\log_{\frac{1}{9}}\sqrt{3}+\log_{\sqrt[3]{3}}\frac{1}{27}$;

g) $\log_2 64-\log_3 243+\log_5 125$; **h)** $\log_3 36+\log_3 7-\log_3 28$;

i) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}-\sqrt[3]{\frac{8}{27}}+\log_{\frac{1}{9}}\sqrt[3]{3}$; **j)** $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{-2}-2012^0+\log_2 2\sqrt{2}$;

8. Să se calculeze:

a) $\log_5 100+2\log_5 3-\log_5 36$; **b)** $\log_5 15-\log_5 3$; **c)** $\log_3 4+\log_3 6-\log_3 8$;

d) $\log_4 64-\log_2 8$; **e)** $\log_3 2+\log_3\frac{1}{2}$; **f)** $\log_5 25-\log_5 125$;

g) $\log_3 6+\log_3 2-\log_3 4$; **h)** $\log_2 80-\log_2 10$; **i)** $\log_3 2-\frac{1}{2}\log_3 4$;

j) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}-\log_3 81$; **k)** $\log_3 \frac{1}{9}-\sqrt[3]{-27}$; **l)** $\lg(tg43^0)\cdot\lg(tg44^0)\cdot\lg(tg45^0)$;

m) $\log_3 \frac{2}{1}+\log_3 \frac{3}{2}+\log_3 \frac{4}{3}+....+\log_3 \frac{9}{8}$; **n)** $\lg 20+\lg 30-\lg 6$; **o)** $2\log_3 4-\log_3 2$;

p) $\left(\sqrt[3]{2}\right)^{\log_3 27}$; **q)** $\log_2 \frac{1}{16}-\log_4 \sqrt[3]{2}+\log_{\frac{1}{2}} 64$; **r)** $4\log_5 \sqrt{5}$;

s) $8^{\log_2 3}$; **t)** $\log_{\frac{1}{5}} 25-\log_5 125$; **u)** $2^{\log_2 \sqrt{3}}$;

v) $\log_4 64-\log_{\frac{1}{4}} 64-\log_{\frac{1}{\sqrt{8}}} 64$; **x)** $\log_3 27-\log_{\sqrt{3}} 27-\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} 27$;

9. Să se calculeze:

a) $\lg(\sin 1^0)\cdot\lg(\sin 2^0)\cdot....\cdot\lg(\sin 90^0)$; **b)** $\log_2 3\cdot\log_3 4\cdot....\cdot\log_{2011} 2012\cdot\log_{2012} 2$;

c) $\lg\frac{1}{2}+\lg\frac{2}{3}+\lg\frac{3}{4}+....+\lg\frac{2011}{2012}$; **d)** $\lg(tg30^0)\cdot\lg(tg31^0)\cdot....\cdot\lg(tg59^0)\cdot\lg(tg60^0)$;

e) $\sqrt[3]{81^{\log_9 6}-7^{\log_7 9}}$; **f)** $\log_3(\log_4(3^{\log_3 64}))$; **g)** $16^{-\log_{\frac{1}{4}} 3}-49^{\frac{1}{\log_2 7}}$; **h)** $3^{(2\log_3 2+4\log_{81} 2)}$;

i) $\log_{\frac{1}{2}} 0,25\cdot\log_{0,3} 0,09$; **j)** $3\log_5 \sqrt[3]{5}+\frac{1}{2}\log_{\sqrt{5}} 25-\log^2_5 \sqrt{5}$; **k)** $36^{\log_6 5}+10^{2-\lg 2}-3^{\log_9 36}$;

l) $\log_{\frac{1}{8}} \sqrt{2}+\log_{\sqrt{3}} \sqrt[3]{9}\cdot\log_{\frac{1}{2}} 64$; **m)** $\log_{\frac{1}{6}} 36+\log_{\sqrt{5}} \sqrt[3]{25}\cdot\log_{\frac{1}{9}} \sqrt[3]{3}$; **n)** $\frac{\log_5 625-\log_3 \sqrt[3]{9}}{64^{\log_4 2}+\log_2 \sqrt{2}}$;

10. Să se calculeze media geometrică a numerelor $a=\log_5 125$ **şi** $b=\log_3 81\cdot\log_4 64$;

11. Să se compare numerele:

a) $x=\log_2 6$ **şi** $y=\log_2 4$; **b)** $x=\log_{\frac{1}{2}} 8$ **şi** $y=\log_{\frac{1}{2}} 6$; **c)** $x=5$ **şi** $y=\lg\ 5^{10}$;

d) $x=\log_2 7$ **şi** $y=\log_7 2$; **e)** $x=\log_3 8$ **şi** $y=\log_2 \frac{1}{8}$; **f)** $x=\log_2 \frac{1}{8}$ **şi** $y=\log_3 \frac{1}{9}$;

g) $x=\log_{15} 7$ **şi** $y=\log_{12} 7$; **h)** $x=\log_2 \sqrt[3]{4}$ **şi** $y=\log_3 \sqrt[3]{9}$; **i)**

$x=\log_5(\sqrt{3}+\sqrt{5})$ **şi** $y=\log_5(\sqrt{2}+\sqrt{6})$

12. Să se ordoneze crescător numerele:

a) $\log_3 \sqrt{3};\ \sqrt[3]{\frac{1}{64}};\ \log_2 \sqrt[3]{2}$; **b)** $\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^{-1};\ \log_5 \sqrt{5};\ \log_3 9^0$;

c) $|-8|;\ \sqrt{25};\ \log_5 125;\ \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$; **d)** $2\cdot\sqrt[3]{27};\ \log_2 128;\ \sqrt{64};\ |-6-3|$;

13. Să se arate că numerele $\log_5 \sqrt[3]{5};\ \log_{25} 5;\ \sqrt[3]{\frac{27}{64}}$ **sunt termenii consecutivi ai unei progresii geometrice.**

14. Să se calculeze probabilitatea ca alegând la întâmplare unul din numerele $\log_2 128;\ \log_2 \frac{1}{64};\ \log_5 125$**, acesta să fie divizibil cu 3.**

15. Să se calculeze probabilitatea ca alegând la întâmplare unul din numerele $\log_5 1;\ \log_3 \frac{1}{9};\ \log_{\sqrt{2}} 8$**, acesta să fie divizibil cu 3.**

16*. Să se arate că, pentru orice $a, x \in (0,\infty)$, $a \neq 1$**,**

$\log_a \sqrt{x^3} + \log_{\frac{1}{a}} \sqrt[3]{x^2} - \frac{5}{3}\log_{a^2} x + a^{\log_{\sqrt{a}} 2} \in Z.$

17*. Să se demonstreze egalitatea

$\log_a n \cdot \log_b n + \log_b n \cdot \log_c n + \log_c n \cdot \log_a n = \frac{\log_a n \cdot \log_b n \cdot \log_c n}{\log_{abc} n}.$

18*. Fie $a, b \in (0;2)$ **astfel încât** $\log_{\frac{1}{2}}(1-\frac{a}{2}) \cdot \log_{\frac{1}{2}}(1-\frac{b}{2}) = 1$**. Să se determine maximul expresiei** $E = ab - 2a - 2b$**.**

19*. Dacă $a, b \in (0;\infty)$**, să se arate că** $a^2 + 9b^2 = 4ab \Leftrightarrow \lg(a+3b) = \frac{\lg a + \lg b + 1}{2}$**.**

20*. Fie $a = \lg 2$ **şi** $b = \lg 3$**. Să se demonstreze că** $(2-2a)\log_{25} 12 = 2a + b$**;**

21.* Fie $x, y, z \geq 0$**, numere reale cu proprietatea** $x + y + z = 3$**. Să se arate că** $\lg(1+x) \cdot \lg(2+y) \cdot \lg(3+z) \leq \lg 3$**.**

22*. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ **astfel încât** $\log_3 \left[\log_2 \left(x^2 + (m-3)x + m + 2 \right) \right] \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$

23* . Dacă se cunoaşte că $\frac{\lg x}{\lg \sqrt{10}} = \lg(x+6y) + \lg y$**, atunci, să se determine valoarea raportului** $\frac{x}{y}$.

1.6 Teste de autoevaluare

Testul 1. Numere reale

1. Să se calculeze $\left(4 \cdot \sqrt[3]{32}\right) : \left(2 \cdot \sqrt[3]{-8}\right)$

2. Să se calculeze $\left(\sqrt[3]{2} + 3\right)^3$;

3. Să se calculeze $\sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{24} - \sqrt[3]{375}$;

4. Să se calculeze $\frac{3}{\sqrt[3]{9}} - \frac{1}{\sqrt[3]{3}+3}$;`

5. Să se calculeze $\sqrt[3]{2\sqrt{6}-4} \cdot \sqrt[3]{2\sqrt{6}+4}$;

6. Să se arate că $\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9-4\sqrt{5}} = 3$;

Testul 2 Numere reale

1. Să se calculeze $\sqrt[3]{\frac{4}{9}} : \sqrt[3]{\frac{81}{2}}$

2.Să se calculeze $\left(\sqrt[3]{3} + 2\right)^3$;

3. Să se calculeze $\sqrt[3]{24} - \sqrt[3]{192} + \sqrt[3]{-81}$;

4. Să se calculeze $\frac{4}{\sqrt[3]{4}}-\frac{1}{\sqrt[3]{4}-2}$;

5. Să se calculeze $\sqrt[3]{2\sqrt{2}-3}\cdot\sqrt[3]{2\sqrt{2}+3}$;

6. Să se arate că $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}=2$;

Testul 3. Puteri cu exponent rațional

1. Să se compare numerele $a=(0,25)^{-\frac{1}{2}}$ și $b=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-4}$;

2. Să se calculeze $\sqrt{27}\cdot\sqrt[3]{9}:\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$;

3. Să se calculeze $\sqrt[3]{81}\cdot\sqrt{3}+\left(2\cdot\sqrt[3]{2}\right)^4:\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{3}}$;

4. Să se calculeze $\left(\frac{1}{9}\right)^2\cdot\sqrt[3]{81}^{\frac{3}{2}}\cdot\left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}$;

5. Să se calculeze $\left(\frac{1}{5}\right)^3\cdot 25^{\sqrt[3]{-8}}\cdot 5^{-5}:\left(\frac{1}{25}\right)^{-6}$;

6. Să se calculeze $\left(\frac{6x^3}{45y^2}\sqrt[3]{\frac{9y}{x^5}}\right):\left(\frac{2x}{5y}\sqrt[3]{\frac{x}{3y^2}}\right)$;

Testul 4. Logaritmi

1. Să se calculeze $\lg 80+\lg 20-\lg 16$;

2. Să se calculeze $\log_6 5\cdot\log_5 4\cdot\log_4 3\cdot\log_3 2\cdot\log_2 1$;

3. Să se calculeze $\log_5\left(\log_3(\log_4 64)\right)$;

4. Să se calculeze $\log_2\frac{1}{32}+\log_{\sqrt{3}}81-\log_{\frac{1}{25}}\sqrt[3]{5}$;

5. Să se calculeze $9^{\log_3\sqrt{2}}-\sqrt[3]{2}^{\log_2\frac{1}{64}}$;

6. Să se determine $x\in\mathbb{R}$ astfel încât să aibă sens logaritmul $\log_5\frac{3x-9}{x+5}$.

Testul 5. Logaritmi

1. Să se calculeze $\log_2 24+\log_2 6-\log_2 9$.

2. Să se calculeze $\lg tg1^0\cdot\lg tg2^0\cdot\lg tg3^0\cdot....\cdot\lg tg88^0\cdot\lg tg89^0$;

3. Să se calculeze $\log_2\left(\log_3(\log_5 125)\right)$;

4. Să se calculeze $\log_5\sqrt[3]{5}-\log_8\frac{1}{16}+\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{2}$;

5. Să se calculeze $\sqrt[3]{2}^{\log_3 27}+7^{\frac{1}{\log_2 49}}$;

6. Să se determine $x\in\mathbb{R}$ astfel încât să aibă sens logaritmul $\log_3(x^2+3x-10)$.

Cap. 2. MULȚIMEA NUMERELOR COMPLEXE

Scurt istoric

Până la mijlocul secolului al XVI-lea era de neconceput rezolvarea unor ecuații de forma $x^2+1=0$, $x^2+x+1=0$, $x^3+1=0$, etc. întrucât acestea nu aveau soluții în mulțimea numerelor reale.

Matematicieni ca **Scipione del Ferro** (1456-1526), **Niccolo Tartaglia**(1500-1557), **Gerolamo Cardano** (1501-1576), **Ludovico Ferrari** (1522- 1561) făceau primii pași în rezolvarea unor ecuații algebrice de gradul trei și patru cu ajutorul radicalilor intuind existența și a altor numere care să verifice ecuațiile dar pe care nu le considerau soluții.

Cel care a dus mai departe munca lui **Cardano** a fost italianul **Rafael Bombelli** (1526- 1572) care prin cartea sa din 1972, „ Algebra" este creditat cu introducerea numerelor complexe. Astfel, el introduce termenul $\sqrt{-1}$ și denumirile $+\sqrt{-1}=+i$ „ piu di meno" (plus din minus) $-\sqrt{-1}=-i$, „ meno di meno" (minus din minus), precum și regulile $+1\cdot+i=+i,\ -1\cdot+i=-i,\ +1\cdot-i=-i,\ -1\cdot-i=+i,\ +i\cdot+i=-1,\ -i\cdot-i=+1,$ etc.

Bombelli pe lângă regulile cu numere negative a prezentat și operații cu numere de forma $a+b\sqrt{-1}$ cu a și b numere raționale, a dat modul de înmulțire a puterilor lui „**i**" și a făcut observația că în rezolvarea ecuațiilor de gradul 3 cu coeficienți raționali rădăcinile complexe apar în perechi conjugate iar produsul lor dă un număr real ca în exemplul $\sqrt{2+i\cdot 3}\cdot\sqrt{2-i\cdot 3}=\sqrt{7}$. Trebuie menționat că notațiile corespunzătoare pe care le cunoaștem astăzi au apărut mult mai târziu, Bombelli cât și ceilalți foloseau cuvinte pentru a exprima notațiile respective.

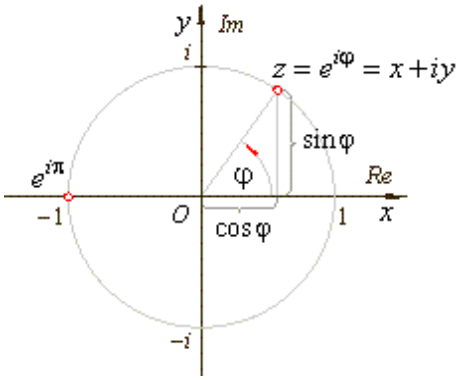
De abia în 1629, matematicianul olandez **Albert Girard** (1595-1632), introduce prin lucrarea sa „ Invention nouvelle en Algebre" notația $\sqrt{-1}$ respectiv $\sqrt{-n}$, și este primul care consideră ca rădăcini ale unei ecuații și numerele complexe. Este primul care formulează celebra teoremă a algebrei (demonstrată peste 200 de ani de către Gauss): „ Orice ecuație algebrică de grad n are exact n rădăcini reale sau complexe).

Și **G. Leibnitz** (1646-1716) a ajuns la exemple de operații cu acest concept de numere complexe în care suma lor dă un număr real precum și descompuneri ale numerelor de forma x^4+a^4 în funcție de numerele imaginare.

După ce **Francois Viete** (1540-1603) dă formula $(\cos\alpha+\sin\alpha)^n$ cu ajutorul formulei binomiale, **Abraham de Moivre** (1667- 1754) exprimă această formulă cu ajutorul unității imaginare „i": $(\cos\alpha+i\cdot\sin\alpha)^n=\cos n\alpha+i\sin n\alpha$. De asemenea s-a ocupat și cu studiul rădăcinilor de ordinul n ale unității dând formula $\sqrt[n]{r(\cos\alpha+i\sin\alpha)}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right),\ k\in\{0;1;2;....;n-1\}$.

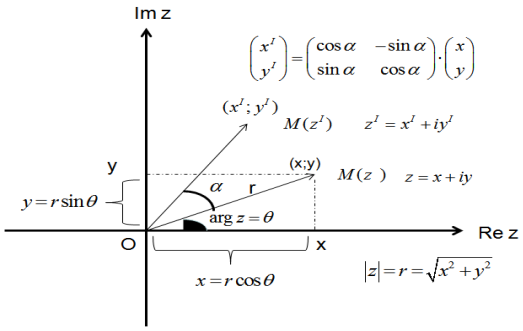
Cel mai prolific matematician al tuturor timpurilor, **Leonhard Euler** (1707- 1783) introduce notația de „**i**” pentru unitatea imaginară $\sqrt{-1}$, și deși a lucrat cu aceste numere și a obținut o serie de rezultate importante nu le-a dat prea mare importanță. De la Euler ne-au rămas formulele: $e^{ix}=\cos x+i\sin x$, $e^{i\pi}+1=0$.

Mult mai târziu, în 1799 topograful norvegian **Caspar Wessel** (1775- 1818) vine cu ideea de a nota un număr imaginar sub forma a + ib și $\sqrt{-1}=\varepsilon$, dând astfel o interpretare geometrică a numerelor imaginare. El făcea observația că dacă operațiile cu segmentele orientate din plan nu se pot face cu ajutorul aritmeticii nu înseamnă că ele nu există.



În 1806, **Jean Robert Argand** (1768- 1822) prin lucrarea „ Essai sur une maniere de reprezenter les quantites imaginaires dans les constructions geometriques”, independent de Wessel va da o intrerpretare a numerelor complexe lucrare pe care autorul i-o dă matematicianului **Adrien Legendre** (1808- 1833) și apoi în 1813 este cunoscută mai mult în urma articolului pulicat de un matematician J. Francais.





O teorie completă a numerelor complexe a dat-o **Carl F. Gauss** (1777- 1855) începând cu 1801 prin lucrarea „ Disquisitiones Arithmeticae ” „ Cercetări aritmetice”, în care face legătura numerelor complexe – (termen pe care-l introduce) cu geometria și apoi până în 1831 când definește operațiile cu numere complexe și norma acestora. Este momentul când lui „i” i se recunoaște identitatea de unitate imaginară iar punctele planului se pun în corespondență bijectivă cu numerele complexe.

Willian Rowan Hamilton (1805-1865) matematician irlandez completează teoria lui **Gauss** introducând în 1833 cuaternionii- o generalizare a numerelor complexe în patru dimensiuni. Pentru el, numerele complexe erau perechi ordonate (a;b) cu care se puteau face diverse operații iar (0;1)=i, unde $i^2=1$.



În perioada următoare matematicienii nu au mai reușit să găsească metode de rezolvare a ecuațiilor de grad mai mare ca patru cu ajutorul radicalilor până când norvegianul **Niels H. Abel**(1802- 1829) și italianul **Ruffini** (1765- 1832) demonstrează acest fapt și anume că ecuațiile de grad mai mare ca 4 nu pot fi rezolvate prin radicali încheind astfel o perioadă dar dând liber la găsirea unor noi moduri de abordare a algebrei și găsirea soluțiilor raționale și la aproximarea rădăcinilor reale la ecuațiile de grad superior.

2.1 Operații cu numere complexe sub formă algebrică

Numerele complexe reprezintă o extindere a numerelor reale în demersul de a rezolva ecuațiile algebrice de orice grad ele nefiind rezultatul unei măsurători ca în cazul numerelor reale de aceea putem spune că au un grad mai mare de abstractizare și le asociem geometric cu toate punctele din plan. Aplicațiile practice ale numerelor complexe se găsesc în mecanică, astronomie, electrotehnică, telecomunicații, fizică atomică, etc.

Numerele complexe se pot scrie sub formă algebrică sau trigonometrică iar pe parcursul capitolului vom aborda forma algebrică.

Definiție: **Mulțimea numerelor complexe** se scrie de forma:

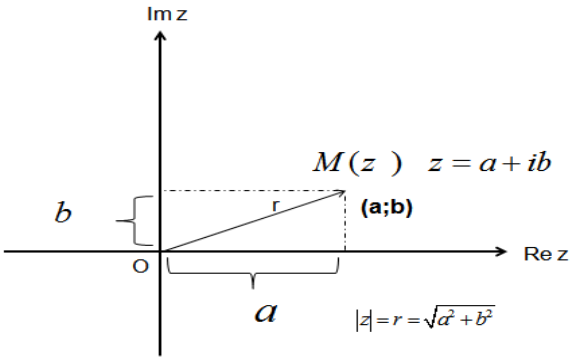
$\mathbb{C}=\{z \mid z=a+ib,\ a,b\in\mathbb{R},\ i^2=-1\}$, unde i se numește unitatea imaginară iar $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$.

Orice **număr complex** îl putem scrie sub forma $z=a+ib=\operatorname{Re}z+\operatorname{Im}z$ unde a se numește partea reală iar ib partea imaginară (b coeficientul părții imaginare) a numărului complex z.

Dacă **b=0** atunci z este real iar dacă **a = 0** atunci z se numește pur imaginar.

Reprezentarea în plan a numerelor complexe

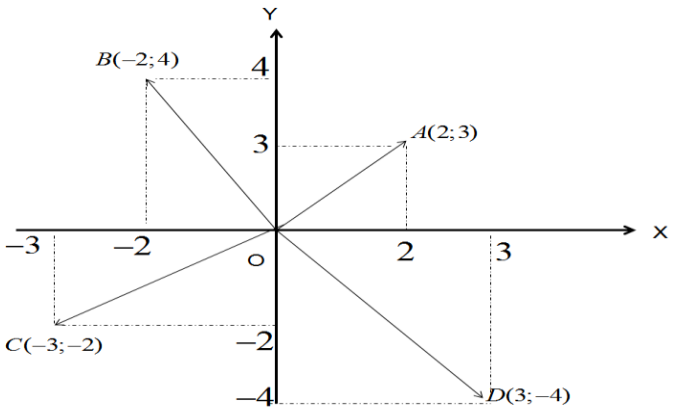
Numărului complex $z=a+ib$ i se asociază în plan punctul $M(a;b)$, M de coordonate a și b sau $M(z)$ adică M de afix z.



Exemplu: Să se reprezinte în plan următoarele numere complexe.

a) $z=2+3i$; b) $z=-2+4i$; c) $z=-3-2i$; d) $z=3-4i$.

Rezolvare:



Egalitatea numerelor complexe

Definiție: Fie $z_1 = a + ib,\quad z_2 = c + id$ numere complexe. Atunci, $z_1 = z_2 \Leftrightarrow a = c$ și $b = d$

Exemplu: Numerele complexe $z_1 = 3 + (m-2)i$ şi $z_2 = (2n-5) + 8i$ sunt egale dacă şi numai dacă $3 = 2n - 5$ și $m - 2 = 8$. Rezultă n = 4, şi m = 5.

Operații cu numere complexe

1. $\boxed{z_1 + z_2 = (a + c) + i(b + d).}$ **(adunarea numerelor complexe)**

Exemplu: Fie $z_1 = 5 + 2i$ şi $z_2 = 7 + 3i$.

Atunci, $z_1 + z_2 = 5 + 2i + 7 + 3i = (5 + 7) + (2 + 3)i = 12 + 5i$.

2. $\boxed{z_1 \cdot z_2 = (a \cdot c - b \cdot d) + i(a \cdot d + b \cdot c).}$ **(înmulţirea numerelor complexe)**

Exemplu: Fie $z_1 = 5 + 2i$ şi $z_2 = 7 + 3i$.

Atunci, $z_1 \cdot z_2 = (5 + 2i) \cdot (7 + 3i) = 5 \cdot 7 - 2 \cdot 3 + (5 \cdot 3 + 2 \cdot 7)i = = 29 + 29i$

3. $\boxed{\overline{z_1} = a - ib,}$ **(conjugatul lui z_1)**

Exemplu: Pentru numărul $z_1 = 5 + 2i$, conjugatul său este $\overline{z_1} = 5 - 2i$;

4. $\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{a \cdot c + b \cdot d}{c^2 + d^2} + i\frac{b \cdot c - a \cdot d}{c^2 + d^2}}$ **(împărţirea numerelor complexe)**

Exemplu: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{5 + 2i}{7 + 3i} = \frac{5 \cdot 7 + 2 \cdot 3}{7^2 + 3^3} + i \cdot \frac{2 \cdot 7 - 5 \cdot 3}{7^2 + 3^3} = \frac{41}{58} + i \cdot \frac{-1}{58}$

5. $\boxed{\frac{1}{z_1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i\frac{b}{a^2 + b^2}}.$ **(inversul lui z_1)**

Exemplu: Pentru numărul $z_1 = 5 + 2i$, inversul său este $\frac{1}{z_1} = \frac{5}{5^2 + 3^2} - i\frac{2}{5^2 + 3^2} = \frac{5}{34} - i\frac{2}{34}$;

Puterile lui i

1. $i^{4k} = 1$ **2.** $i^{4k+1} = i$ **3.** $i^{4k+2} = -1$ **4.** $i^{4k+3} = -i$ **5.** $i^{-n} = \frac{1}{i^n}, i^{-1} = \frac{1}{i} = -i$

6. $i^{-n} = (-i)^n = (-1)^n \cdot i^n = \begin{cases} i^n, n \quad par \\ -i^n, n \quad impar \end{cases}$

Exemple:

a) $i^{100} = i^{4 \cdot 25} = 1;$ **b)** $i^{76} = i^{4 \cdot 19} = 1;$

c) $i^{121} = i^{4 \cdot 30 + 1} = i;$ **d)** $i^{161} = i^{4 \cdot 40 + 1} = i;$

e) $i^{82} = i^{4 \cdot 20 + 2} = -1;$ **f)** $i^{206} = i^{4 \cdot 51 + 2} = -1;$

g) $i^{327} = i^{4 \cdot 81 + 3} = -i;$ **h)** $i^{71} = i^{4 \cdot 17 + 3} = -i;$

Modulul numerelor complexe

Definiţie: Pentru un număr complex $z=a+ib$ **modulul sau norma sa este numărul** $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ **.**

Proprietăţile modulului

1. $|z|\geq 0, |z|=0 \Leftrightarrow z=0$ **2.** $z\cdot\overline{z}=|z|^2$

3. $|z|=|\overline{z}|$ **4.** $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$

5. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}, z_2\neq 0$ **6.** $\big||z_1|-|z_2|\big|\leq|z_1\pm z_2|\leq|z_1|+|z_2|$

7. $|z^n|=|z|^n$ **8.** $z\in C;\quad z\in R\Leftrightarrow \operatorname{Im} z=0\Leftrightarrow z=\overline{z}$.

Exemplu: Pentru numărul $z=6+8i$ modulul său este numărul $|z|=|6+8i|=\sqrt{6^2+8^2}=\sqrt{100}=10$.

Exercitii rezolvate

1. Să se determine $m,n\in\mathbb{R}$ astfel încât $z_1=z_2$ unde:

a) $z_1=4-n+2i,\quad z_2=8+(n-3)i$ **;**

b) $z_1=6+3i,\quad z_2=2m-4+(n-5)i$ **;**

c) $z_1=3m-4+(2n-6)i,\quad z_2=8+2i$ **.**

Rezolvare:

a) $4-n+2i=8+(n-3)i\Rightarrow\begin{cases}4-m=8\\2=n-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=-4\\n=5\end{cases}$ **;**

b) $6+3i=2m-4+(n-5)i\Rightarrow\begin{cases}6=2m-4\\3=n-5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=5\\n=8\end{cases}$ **;**

c) $3m-4+(2n-6)i=8+2i\Rightarrow\begin{cases}3m-4=8\\2n-6=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=4\\n=4\end{cases}$ **.**

2. Să se determine numerele reale a şi b din egalităţile:

a) $2a+3+(b-2)i=a+7+2bi$ **;**

b) $a^2-4+(b^2-9)i=5+16i$ **;**

c) $2a+2+(a+2b)i=3-b-2ai$ **;**

d) $(a+b)^2+3ai=2ab+5-3i$ **.**

Rezolvare:

a) Se egalează părţile reale de la cele două numere complexe şi apoi părţile imaginare:

$\begin{cases}2a+3=a+7\\b-2=2b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=4\\b=-2\end{cases}$ **;**

b) $\begin{cases}a^2-4=5\\b^2-9=18\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^2=9\\b^2=25\end{cases}\Rightarrow a=\pm 3,\ b=\pm 5.$

c) $\begin{cases} 2a+2=3-b \\ a+2b=-2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-3 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} (a+b)^2=2ab+5 \\ 3a=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^2=4 \\ a=-1 \end{cases} \Rightarrow a=-1,\ b=\pm 2$.

3. Se consideră numerele $z_1=2+4i,\ z_2=3-2i$ **. Să se calculeze:**

a) z_1+z_2; **b)** $2z_1+3z_2$; **c)** $z_1\cdot z_2$; **d)** $\frac{z_1}{z_2}$; **e)** z_1^{-1}; **f)** $|z_1|$.

Rezolvare:

a) $2+4i+3-2i=5+2i$;

b) $2(2+4i)+3(3-2i)=4+8i+9-6i=13+2i$;

c) $(2+4i)(3-2i)=6-4i+12i-8i^2=14+8i$;

d) $\frac{2+4i}{3-2i}=\frac{6-8}{9+4}+\frac{12+4}{9+4}\cdot i=\frac{-2}{13}+\frac{16}{13}i$;

e) $\left(2+4i\right)^{-1}=\frac{2}{2^2+4^2}-\frac{4}{2^2+4^2}i=\frac{1}{10}-\frac{1}{5}i$;

4. Să se determine numărul real m astfel încât numărul z să fie pur imaginar:

a) $z=(2m-6)+(3+n)i$;

b) $z=(m-2i)(2+3i)$;

c) $z=\frac{m+i}{6+2i}$;

d) $z=(m+2+i)^2$.

Rezolvare:

a) Pentru ca z să fie pur imaginar trebuie ca partea sa reală să fie egală cu zero.

$2m-6=0\Rightarrow m=3$.

b) $z=(m-2i)(2+3i)=2m+6+(3m-4)i\Rightarrow 2m+6=0\Rightarrow m=-3$;

c) $z=\frac{m+i}{6+2i}=\frac{6m+2}{6^2+2^2}+i\frac{6-2m}{6^2+2^2}=\frac{6m+2}{40}+i\frac{6-2m}{40}\Rightarrow 6m+2=0\Rightarrow m=-\frac{1}{3}$;

d) $z=(m+2+i)^2=(m+2)^2-1+2(m+2)i\Rightarrow (m+2)^2=1\Rightarrow m+2=\pm 1\Rightarrow m\in\{-3;-1\}$.

5. Să se calculeze:

a) $4-2i+3(2-5i)$; **b)** $(1+i)(1-i)$; **c)** $(2-i)(3+2i)(4-2i)$;

d) $(3+i)^2+(3-i)^2$; **e)** $\left(\frac{2+i}{2-i}\right)^2$; **f)** $i\cdot i^2\cdot i^3\cdot .....\cdot i^{10}$;

g) $i+i^2+i^3+.....+i^{10}$; **h)** $\frac{(1+i)^6-(1+i)^4}{(1+i)^8}$;

Rezolvare:

a) $4-2i+3(2-5i)=4-2i+6-15i=10-17i$

b) $(1+i)(1-i)=1-i^2$;

c) $(2-i)(3+2i)(4-2i)=(8+i)(4-2i)=34-12i$;

d) $(3+i)^2+(3-i)^2=9+6i+i^2+9-6i+i^2=18-2=16$;

e) $\left(\frac{2+i}{2-i}\right)^2=\left(\frac{4-1}{4+1}+i\frac{2+2}{4+1}\right)^2=\left(\frac{3}{5}+i\frac{4}{5}\right)^2=\frac{9}{25}+\frac{24}{25}i-\frac{16}{25}=\frac{-7}{25}+\frac{24}{25}i$.

f) $i\cdot i^2\cdot i^3\cdot.....\cdot i^{10}=i^{1+2+3+...+10}=i^{55}=i^3=-i$;

g) $i+i^2+i^3+.....+i^{10}=(i-1+-i+1)\cdot 2+i^9+i^{10}=0+i-1=i-1$.

h) $\frac{(1+i)^6-(1+i)^4}{(1+i)^8}=\frac{(2i)^3-(2i)^2}{(2i)^4}=\frac{8\cdot(-i)+4}{16}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}i$.

6. Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât să aibă loc egalitățile:

a) $(1-i\sqrt{2})^2=a+ib$; **b)** $\frac{a+ib}{3+4i}=i$;

Rezolvare:

a) $(1-i\sqrt{2})^2=a+ib\Leftrightarrow 1-2i\sqrt{2}+2i^2=a+ib\Rightarrow -1-2\sqrt{2}i=a+ib\Rightarrow$ $a=-1$ și $b=-2\sqrt{2}$.

b) $\frac{a+ib}{3+4i}=i\Rightarrow\frac{3a+4b}{25}+i\frac{3b-4a}{25}=i\Rightarrow\frac{3a+4b}{25}=0$ și $\frac{3b-4a}{25}=1\Rightarrow$

$\begin{cases}3a+4b=0\\-4a+3b=25\end{cases}\Rightarrow b=3\Rightarrow a=-4.$

7. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât partea reală a numîărului complex $z=\frac{4-2mi}{3+i}$ să fie egală cu 2.

Rezolvare:

$z=\frac{4-2mi}{3+i}=\frac{12-2m}{9+1}+i\frac{-6m-4}{9+1}\Rightarrow$ partea reală a lui z este

$\operatorname{Re}z=\frac{12-2m}{10}=2\Rightarrow 12-2m=20\Rightarrow m=-4.$

8. Să se calculeze modulul următoarelor numere complexe:

a) $z=4+2i$; **b)** $z=\frac{3+2i}{3-2i}$; **c)** $z=\frac{(6+8i)^4}{(2+4i)(3-i)}$;

d) $z=(6+2i)^8\cdot(1+3i)^4$. **e)** $z=\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2(1-i)}\right)^8$

Rezolvare:

a) $|z|=|4+2i|=\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$.

b) $|z|=\left|\frac{3+2i}{3-2i}\right|=\frac{|3+2i|}{|3-2i|}=\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{13}}=1$;

c) $|z|=\left|\frac{(6+8i)^4}{(2+4i)(3-i)}\right|=\frac{|6+8i|^4}{|2+4i|\cdot|3-i|}=\frac{\sqrt{100}^4}{\sqrt{20}\cdot\sqrt{5}}=1000$.

d) $|z|=\left|(6+2i)^8\cdot(1+3i)^4\right|=\left|(6+2i)^8\right|\cdot\left|(1+3i)^4\right|=\sqrt{40}^8\cdot\sqrt{9}^4=40^4\cdot 9^2$.

e) $|z|=\left|\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2(1-i)}\right)^8\right|=\left|\frac{1-i\sqrt{3}}{2(1-i)}\right|^8=\frac{\left|1-i\sqrt{3}^8\right|}{2^8\cdot|1-i|^8}=\frac{\sqrt{4}^8}{2^8\cdot\sqrt{2}^8}=\frac{1}{16}$.

9. Să se determine $m \in \mathbb{C}$ astfel încât :

a) $\left|\frac{2-i}{1+mi}\right| = 3$; **b)** $\left|\frac{2-3i}{1+mi}\right| = 2$.

Rezolvare:

a) $\left|\frac{2-i}{1+mi}\right| = 3 \Leftrightarrow \frac{|2-i|}{|1+mi|} = 3 \Rightarrow |2-i| = 3|1+mi| \Rightarrow \sqrt{2^2+1^2} = 3\sqrt{1^2+m^2}\,|()^2 \Rightarrow 5 = 9(1+m^2) \Rightarrow$

$m^2 = \frac{-4}{9} \Rightarrow m = \pm\frac{2}{3}i$;

b) $\left|\frac{2-3i}{1+mi}\right| = 2 \Leftrightarrow |2-3i| = 2|1+mi| \Rightarrow \sqrt{2^2+3^2} = 2\sqrt{1+m^2} \Rightarrow 13 = 4+4m^2 \Rightarrow m^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow m = \pm\frac{3}{2}$.

10. Să se determine numărul complex z pentru care au loc egalitățile:

a) $|z+1|+z = 4-2i$; **b)** $|z|-iz = 9-3i$; **c)** $|z-1|+(i+1)z = 3$.

Rezolvare: Se va lua de fiecare dată $z = a+ib$.

a) $|z+1|+z = 4-2i \Rightarrow |a+ib+1|+a+ib = 4-2i \Rightarrow \sqrt{(a+1)^2+b^2}+a+ib = 4-2i \Rightarrow$ b = - 2.

$\Rightarrow \sqrt{(a+1)^2+4} = 4-a\,|()^2 \Rightarrow (a+1)^2+4 = 16-8a+a^2 \Rightarrow 10a = 11 \Rightarrow a = \frac{11}{10}$. Deci, $z = \frac{11}{10}-2i$.

b) $|z|-iz = 9-3i \Rightarrow |a+ib|-i(a+ib) = 9-3i \Rightarrow \sqrt{a^2+b^2}+b-ia = 9-3i \Rightarrow a = 3 \Rightarrow$

$\sqrt{9+b^2} = 9-b\,|()^2 \Rightarrow 9+b^2 = 81-18b+b^2 \Rightarrow 18b = 72 \Rightarrow b = 4$. Deci, $z = 3+4i$.

c) $|z-1|+(i+1)z = 3 \Rightarrow |a+ib-1|+(i+1)(a+ib) = 3 \Rightarrow \sqrt{(a-1)^2+b^2}+ia+i^2b+a+ib = 3 \Rightarrow$

$\sqrt{(a-1)^2+b^2}+(a-b)+i(a+b) = 3 \Rightarrow a+b = 0 \Rightarrow b = -a \Rightarrow$

$\sqrt{(a-1)^2+a^2}+2a = 3 \Rightarrow (a-1)^2+a^2 = (3-2a)^2 \Rightarrow a^2-5a+4 = 0 \Rightarrow a \in \{1;4\}$.

Așadar, $a = 1 \Rightarrow b = -1 \Rightarrow z = 1-i$ și $a = 4 \Rightarrow b = -4 \Rightarrow z = 4-4i$.

Exercitii propuse

1. Fie $z_1 = 3-5i,\ z_2 = 4+5i$. Să se calculeze $z_1 \cdot z_2,\ \frac{z_1}{z_2}$.

2. Se consideră numerele complexe $z_1 = 6-2i,\ z_2 = -4+3i$. Să se calculeze:

a) z_1+z_2; **b)** $z_1 \cdot z_2$; **c)** $\frac{z_1}{z_2}$; **d)** $|z_1|+|z_2|$; **e)** $\left|z_1^4\right|+\left|z_2^4\right|$;

3. Fie $z_1 = 5-3i,\ z_2 = 3-2i$. Să se calculeze : **a)** $z_1 \cdot z_2$; **b)** $z_1 : z_2$; **c)** $\left|\frac{z_1^{20}}{z_1 \cdot z_2^6}\right|$.

4. Fie $z_1 = 4-2i,\ z_2 = 3-4i$. Să se calculeze : **a)** $z_1 \cdot z_2$; **b)** $z_1 : z_2$; **c)** $\left|\frac{z_1^{30}}{z_1^8 \cdot z_2}\right|$.

5. Să se calculeze: **a)** $i^{251}+i^{10}+i^7$; **b)** i^{-91}; **c)** $1+i+i^2+i^3+...+i^{100}$; **d)** $1 \cdot i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot ... \cdot i^{100}$.
e) $(1+i)^2$; **f)** $(1+i)^3$; **g)** $(1+i)^4$; **h)** $(3i-2)^2$; **i)** $(6-2i)\cdot(4+3i)$; **j)** $(3-i)\cdot(3+i)\cdot(1-i)\cdot(1+i)$;

k) $\sqrt{1+2i}$ **; l)** $\sqrt{-5-12i}$ **; m)** $(\sqrt{3}+\sqrt{2}i)\cdot(\sqrt{3}-\sqrt{2}i)$**; n)** $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2$; **o)** $\left(\frac{1+i}{2}\right)^{20}$ **; p)** $(1-i)^{2016}$;

6. Să se determine $x, y \in \mathbb{R}$ astfel încât: **a)** $2x(1+i)+y(6-5i)=3xi+y-5$**.**

b) $(4-8i)\cdot x+(3-2i)\cdot y=(-6x+4)\cdot i-5y$;

7. Fie $z=\frac{(2+4i)(3+i)}{6(-3+4i)^4}$. Să se calculeze modulul lui z.

8. Să se calculeze modulul numărului complex z unde :

a) $z=12+5i$ **; b)** $z=(4-2i)(3-5i)$ **; c)** $z=\frac{4-5i}{3+2i}$**; d)** $z=\left(\sqrt{2}+\sqrt{7}i\right)^{100}$ **; e)** $z=\left(\frac{5-3i}{2+\sqrt{7}i}\right)^{40}$ **.**

9. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât numărul complex z să fie real:

a) $z=\frac{2+mi}{1+(m-2)i} \in \mathbb{R}$; **b)** $z=\frac{m+5+2mi}{4+3i} \in \mathbb{R}$;

2.2 Ecuaţii în mulţimea numerelor complexe

I. $x^2 = a$		
$a \rangle 0$	$a = 0$	$a \langle 0$
Ecuația are soluții reale diferite	**Ecuația are soluții reale egale**	**Ecuația are soluții complexe conjugate**
$x_{1,2} = \pm\sqrt{a}$	$x_{1,2} = 0$	$x_{1,2} = \pm\, i\sqrt{-a}$

Exemple:

1. $x^2 = -9 \Rightarrow x = \pm i\sqrt{9} = \pm 3\ i$;

2. $x^2 = -25 \Rightarrow x = \pm i\sqrt{25} = \pm 5\ i$

3. $x^2 + 36 = 0 \Rightarrow x^2 = -36 \Rightarrow x = \pm 6\ i$;

4. $x^2 + 12 = 0 \Rightarrow x^2 = -12 \Rightarrow x = \pm 2\sqrt{3}\ i$;

II. $ax^2 + bx + c = 0,\ a \in \mathbb{R}^*,\ b, c \in \mathbb{R},\ \Delta = b^2 - 4ac$		
$\Delta \rangle 0$	$\Delta = 0$	$\Delta \langle 0$
Ecuația are soluții reale diferite	**Ecuația are soluții reale egale**	**Ecuația are soluții complexe conjugate**
$x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$	$x_{1,2} = \dfrac{-b}{2a}$	$x_{1,2} = \dfrac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

Exemple:

1. $x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$;

2. $2x^2 + 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-3 \pm i\sqrt{7}}{4}$;

III. $x^3 = a^3 \Rightarrow (x-a)(x^2 + ax + a^2) = 0$.

Se folosesc formulele: $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ $\qquad a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

Exemple:

1. $x^3 = 1 \Rightarrow x^3 - 1^3 = 0 \Rightarrow (x-1)(x^2 + x + 1) = 0$;

$x_1 = 1$ și din $x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow x_{2,3} = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

2. $x^3 = -8 \Rightarrow x^3 + 2^3 = 0 \Rightarrow (x+2)(x^2 - 2x + 4) = 0$

$x_1 = -2$ și din $x^2 - 2x + 4 = 0 \Rightarrow x_{2,3} = \dfrac{-2 \pm 2i\sqrt{3}}{2}$.

IV. $z^2 = a + ib \Rightarrow z_{1,2} = \pm\sqrt{a+ib} = = \pm\left[\sqrt{\dfrac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} + \sqrt{\dfrac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}\right]$.

‚+' dacă b pozitiv; ‚-, dacă b negativ, pentru semnul dintre radicali

Altfel: expresia a+ib de sub radical se va scrie ca un pătrat perfect.

Exemple:

1. $z^2=3+4i\Rightarrow z_{1,2}=\pm\sqrt{3+4i}=\pm\sqrt{(2+i)^2}=$

$=\pm(2+i)$, deoarece $3+4i=(a+bi)^2=a^2+2abi+(ib)^2$ adică

$3+4i=a^2-b^2+2abi\Rightarrow\ 3=a^2-b^2$ și $4=2ab$. De aici se obțin $a=2,b=1$.

2. $z^2=8-6i\Rightarrow z_{1,2}=\pm\sqrt{8-6i}=\pm\sqrt{(3-i)^2}=$

$=\pm(3-i)$, deoarece $8-6i=(a-bi)^2=a^2-2abi+(ib)^2$ adică

$8-6i=a^2-b^2+2abi\Rightarrow\ 8=a^2-b^2$ și $6=2ab$. De aici se obțin $a=3,b=1$.

V. Ecuații bipătrate

$$\begin{cases} ax^4+bx^2+c=0 \\ notăm\ x^2=t \end{cases}\Rightarrow at^2+bt+c=0.$$

Exemplu: $x^4+10x^2+9=0$**;**

Notăm cu $x^2=t\Rightarrow t^2+10t+9=0\ \Rightarrow t_{1,2}=\dfrac{-10\pm8}{2}\Rightarrow\ t_1=-9,\ t_2=-1.$ Rezultă,

Din $x^2=-9\Rightarrow x_{1,2}=\pm3i,$ iar din $x^2=-1\Rightarrow x_{3,4}=\pm\ i.$

Exercitii rezolvate

1. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ știind că numărul i este soluție a ecuației $x^2+(m+2)ix+3=0$.

Rezolvare:

Cum i este soluție a ecuației, aceasta înseamnă că i verifică ecuația dată adică

$i^2+(m+2)i\cdot i+3=0\Rightarrow\ -1-m-2+3=0\Rightarrow m=0$.

2. Să se determine $m\in\mathbb{C}$ știind că numărul i este soluție a ecuației $mx^2+2(i+1)x+m+2=0$.

Rezolvare:

Cum i este soluție a ecuației, aceasta înseamnă că i verifică ecuația dată adică

$m(i+2)^2+2(i+1)(i+2)+m+2=0\Rightarrow\ m(3+4i)-2+6i+4+m+2=0\Rightarrow$

$m(3+4i)=-4-6i\Rightarrow m=\dfrac{-4-6i}{3+4i}=\dfrac{-36}{25}+i\dfrac{-2}{25}$.

3. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât ecuația $mx^2+2mx+m+3=0$ să aibă ambele soluții complexe.

Rezolvare:

Se pune condiția ca discriminantul ecuației să fie negativ.

$\Delta\ \langle\ 0\Rightarrow 4m^2-4m^2-12m\ \langle\ 0\Rightarrow m\ \rangle\ 0$

4. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât ecuația $mx^2+mx+m+3=0$ să aibă ambele soluții complexe.

Rezolvare:

Se pune condiția ca discriminantul ecuației să fie negativ.

$\Delta\ \langle\ 0\Rightarrow m^2-4m-12\ \langle\ 0\Rightarrow m\ \in(-2;6)$.

5.Să se rezolve ecuaţiile:

a) $z^2=3+4i$**;** **b)** $2x^2-4x^2+5=0$**;**

Rezolvare: a)

$$z^2=a+ib\Rightarrow z_{1,2}=\pm\left[\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\pm i\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\right]$$

$$z^2=3+4i\Rightarrow z_{1,2}=\pm\left[\sqrt{\frac{3+\sqrt{3^2+4^2}}{2}}+i\sqrt{\frac{-3+\sqrt{3^2+4^2}}{2}}\right]=\pm\left(\sqrt{\frac{8}{2}}+\sqrt{\frac{2}{2}}i\right)=\pm(2+1i)$$

;

b)

$$ax^2+bx+c=0\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\,sau\quad\frac{-b\pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}\,daca\quad\Delta\langle 0$$

$$2x^2-4x^2+5=0\Rightarrow\Delta=(-4)^2-4\cdot2\cdot5=16-40=-24,\,x_{1,2}=\frac{4\pm i\sqrt{24}}{2\cdot2}=\frac{4\pm2i\sqrt{6}}{4}.$$

6. Să se rezolve ecuațiile:

a) $(x+4)^4-4(x+4)^2+4=0$;

b) $(x+3)^4+8(x+3)^2+16=0$;

c) $x^2-\frac{4}{x^2}+4(x-\frac{2}{x})=1.$

Rezolvare:

a) Notăm $(x+4)^2=t$ și ecuația dată devine $t^2-4t+4=0$ cu soluția dublă $t=2$ adică

$(x+4)^2=2\Rightarrow x+4=\pm\sqrt{2}\Rightarrow\ x\in\left\{-\sqrt{2}-4;\sqrt{2}-4\right\}.$

b) Notăm $(x+3)^2=t$ și ecuația dată devine $t^2+8t+16=0$ cu soluția dublă $t=-4$ adică

$(x+3)^2=-4\Rightarrow x+3=\pm2i\Rightarrow\ x\in\{2i+3;-2i-3\}$.

c) Ecuația dată este echivalentă cu $\left(x-\frac{2}{x}\right)^2+4+4(x-\frac{2}{x})=1$. Se face notația $x-\frac{2}{x}=t\Rightarrow$

ecuația $t^2+4t+3=0$ cu soluțiile $t_1=-1$ și $t_2=-3$ adică $x-\frac{2}{x}=-1\Rightarrow x^2+x-2=0$ cu soluțiile -2

si 1 și $x-\frac{2}{x}=-3\Rightarrow x^2+3x-2=0$ cu soluțiile $\frac{-3\pm\sqrt{17}}{2}$.

7*. Fie $z\in\mathbb{C}$ **astfel încât** $z^2+z+1=0$**. Arătați că** $z^3=1$ **și că** $z^{2019}+\frac{1}{z^{2019}}=2$**.**

Rezolvare:

$z^2+z+1=0\Rightarrow z^2=-z-1\big|\cdot z\Rightarrow z^3=-z^2-z=-1.$

$$z^{2019}+\frac{1}{z^{2019}}=\left(z^3\right)^{673}+\frac{1}{\left(z^3\right)^{673}}=2.$$

8*. Se consideră ecuaţia $x^2-2x+4=0$ **cu soluţiile** $x_1,x_2\notin\mathbb{R}$ **(soluţii complexe).**

Să se calculeze $\frac{(x_1-2)^{1006}}{x_2}+\frac{(x_2-2)^{1006}}{x_1}$**.**

Rezolvare:

Din $(x+2)\left(x^2-2x+4\right)=0 \Leftrightarrow x^3+8=0$ şi cum x= - 2 nu este soluţie, rezultă $x^3=-8$.

Cum x_1, x_2 sunt soluţiile ecuaţiei date, rezultă $x_1^2-2x_1+4=0 \Rightarrow x_1-2=\frac{x_1^2}{2}$. Analog, pentru x_2.

De asemenea, rezultă şi că $x_1^3=-8,\ x_2^3=-8.$ Atunci, $\frac{(x_1-2)^{1006}}{x_2}+\frac{(x_2-2)^{1006}}{x_1}=$

$$\frac{x_1^{2012}\cdot x_1+x_2^{2012}\cdot x_2}{2^{1006}x_1x_2}=\frac{x_1^{2013}+x_2^{2013}}{2^{1006}x_1x_2}=\frac{\left(x_1^3\right)^{671}+\left(x_2^3\right)^{671}}{2^{1006}x_1x_2}=\frac{2\cdot(-8)^{671}}{2^{1006}\cdot 4}=-\frac{2^{2014}}{2^{1008}}=-2^{1006}.$$

9*. Se consideră ecuaţia $x^2+2x+m=0,\ m\in\mathbb{R}$ **cu soluţiile** $x_1, x_2\in\mathbb{C}$..

a) Să se calculeze $(1-x_1)(1-x_2)$ **în funcţie de m.**

b) Să se determine $m\in\mathbb{R}$ **astfel încât** $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=-\frac{1}{4}$;

c) Pentru m=4 să se calculeze $x_1^{2011}+x_2^{2011}$.

Rezolvare:

a) Întrucât $f(x)=x^2+2x+m=(x-x_1)(x-x_2)\Rightarrow\ (1-x_1)(1-x_2)=f(1)=3+m.$

b) Se folosesc relaţiile lui Viete :

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-2,\ x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}=m\Rightarrow$$

$$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=-\frac{1}{4}\Leftrightarrow\frac{\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2}{\left(x_1\cdot x_2\right)^2}=-\frac{1}{4}\Leftrightarrow\frac{4-2m}{m^2}=-\frac{1}{4}\Rightarrow(m-4)^2=0\Rightarrow m=4.$$

c) Pentru m=4 avem : $x^2+2x+4=0,\ \Rightarrow(x-2)(x^2+2x+4)=0\Leftrightarrow x^3-2^3=0\Rightarrow x^3=8$. Cele două soluţii $x_1, x_2\in\mathbb{C}.$ ale ecuaţiei iniţiale sunt soluţii si pentru ecuaţia $x^3=8$. Rezultă că $x_1^3=8$ şi $x_2^3=8$. Cum

$$2011=670\cdot 3+1\Rightarrow x_1^{2011}+x_2^{2011}=\left(x_1^3\right)^{670}\cdot x_1+\left(x_2^3\right)^{670}\cdot x_2=8^{670}(x_1+x_2)=-2^{2011}.$$

10*. Fie ecuaţia $x^2-x+1=0$ **cu soluţiile** $x_1, x_2\in\mathbb{C}$**. Să se arate că**

$$\frac{x_1^2-x_1+4}{x_1^2+2x_1-2}+\frac{x_2^2-x_2+3}{x_2^2-3x_2-1}=x_1^{2012}+x_2^{2012}.$$

Rezolvare: Din $(x+1)(x^2-x+1)=0\Rightarrow x^3+1=0\Rightarrow x^3=-1.$ Cum $x_1, x_2\in\mathbb{C}$ sunt soluţiile şi a acestei ecuaţii rezultă $x_1^3=-1, x_2^3=-1.$ Atunci,

$x_1^{2012}+x_2^{2012}=\left(x_1^3\right)^{670}\cdot x_1^2+\left(x_2^3\right)^{670}\cdot x_2^2=x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=1-2=-1$; S-au folosit relaţiile lui Viete, $x_1+x_2=1,\ x_1x_2=1$.

Din $x_1^2-x_1+1=0\Rightarrow x_1^2-x_1+4=x_1^2-x_1+1+3=3$ şi

$x_1^2+2x_1-2=x_1^2-x_1+1-3x_1-3=-3(x_1+1)$

Din $x_2^2-x_2+1=0\Rightarrow x_2^2-x_2+3=x_2^2-x_2+1+2=2$ şi

$x_2^2-3x_2-1=x_2^2-x_2+1-2x_2-2=-2(x_2+1)$

Atunci,

$$\frac{x_1^2-x_1+4}{x_1^2+2x_1-2}+\frac{x_2^2-x_2+3}{x_2^2-3x_2-1}=\frac{3}{-3(x_1+1)}+\frac{2}{-2(x_2+1)}=-\left(\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1}\right)=-\frac{x_1+x_2+2}{x_1x_2+x_1+x_2+1}=-\frac{3}{3}=-1$$

11*. Fie $z_1,z_2\in\mathbb{C}$ **soluțiile ecuației** $z^2-z+1=0$**. Să se calculeze valoarea expresiei** $E=(z_1^4-z_1^3+3z_1^2-3z_1+2)^{2020}+(z_2^3+2z_2^2-z_2+3)^{2020}$**.**

Rezolvare:

Cum $\left(z^2-z+1\right)\cdot(z+1)=0\Rightarrow z^3+1=0\Rightarrow z^3=-1$. Atunci, z_1,z_2 verifică ecuațiile obținute din cea dată, $z_1^3=-1$, $z_1^2-z_1+1=0$ *sau* $z_1^4-z_1^3+z_1^2=0$.

Analog pentru z_2. Așadar,

$$E=\left[(z_1^4-z_1^3+z_1^2)+2(z_1^2-z_1+1)-z_1\right]^{2020}+\left[(z_2^3+1)+(z_2^2-z_2+1)+z_2^2+1)\right]^{2020}=$$

$$=(-z_1)^{2020}+(z_2^2+1)^{2020}=z_1^{2020}+z_2^{2020}=\left(z_1^3\right)^{673}\cdot z_1+\left(z_2^3\right)^{673}\cdot z_2=z_1+z_2=1.$$

Exercitii propuse

1. Să se rezolve ecuațiile:

a) $x^2=-4$; b). $x^2=-64$; c) $x^2=-144$;

d). $x^2+81=0$; e). $x^2+121=0$; f). $x^2+27=0$.

2. Să se rezolve ecuațiile:

a). $x^2-4x+6=0$; b). $2x^2-2x+5=0$; c). $x^2+4x+3=0$.

3. Să se rezolve ecuațiile:

a). $x^3=-1$; b). $x^3=-27$; c). $x^3=64$;

d). $x^3=125$;

4. Să se rezolve ecuațiile :

a). $z^2=5+12i$ b). $z^2=-3-4i$;

5. Să se rezolve ecuațiile :

a). $x^4+6x^2+8=0$; b). $x^4-9x^2-10=0$; c). $x^6+9x^3+8=0$.

6. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât ecuația $x^2+(m+1)x+2=0$ să aibă ambele soluții complexe.

7. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ știind că numărul i este soluție a ecuației $mx^2+(m+3)ix+m+1=0$**.**

8. Să se descompună în factori ireductibili următoarele expresii:

a) x^2+4**;** **b)** x^2+9**;** **c)** $4x^2+16$**;**

d) x^4-4**;** **e)** x^2+25x**;** **f)** x^2+6x+8**;**

9. Să se rezolve sistemele de ecuații:

a) $\begin{cases}x+y=2\\x^2+y^2=0\end{cases}$**;** **b)** $\begin{cases}x+y=4\\x^2+y^2=6\end{cases}$**;** **c)** $\begin{cases}x\cdot y=10\\x^2+y^2=16\end{cases}$

10. Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuaţiile:

a) $x^2=-16$. **b)** $x^2+9=0$**;** **c)** $x^4+16=0$. **d)** $x^3=-27$;

e) $x^2+4x+6=0$**;** **f)** $x^2+2x+2=0$**;** **g)** $x^2-6x+10=0$**;** **h)** $2x^2-3x+4=0$**;**

i) $2x^2-3x+4=0$;

11. Să se rezolve ecuațiile:

a) $x^4+5x^2+6=0$; **b)** $x^4+8x^2+7=0$; **c)** $x^4+8x^2+7=0$; **d)** $x^4+7x^2+10=0$;

e) $x^6-9x^3+8=0$;

12. Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuațiile: **a)** $z^2=4+3i.$; **b)** $z^2=5-12i$; **c)** $z^2=15+8i$.

13. Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuația $4x^2-i\cdot x+3=0.$

14. Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuațiile : **a)** $\frac{3}{x-2}-\frac{1}{x+2}+1=0$; **b)** $x(x-1)(4x-1)(4x-5)=2$;

c) $\frac{x^2-4x+2}{x^2-3x+2}=2$; **d)** $\frac{3x+1}{2x-3}+\frac{3x}{x+5}=3$;

15. Să se determine suma soluțiilor ecuației $z^4=4$;

16. Să se determine numărul complex z care verifică egalitățile:

a) $z+8i=3\cdot\bar{z};$ **b)** $z+2\cdot|z|=4+2i;$ **c)** $z^2=5+12i$; **d)** $z^2=\bar{z}$;

e) $\frac{\bar{z}+9i+7}{z}=8$;

17. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ pentru care ecuațiile următoare au soluții în mulțimea $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$.

a) $x^2-6x+m=0;$ **b)** $x^2-mx+4=0;$

c) $x^2-(m+1)x+m+1=0;$ **d)** $mx^2-2(m+1)x+m+3=0;$

18. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ știind că ecuația $z^2+(m+1)z+2=0$, are soluția $z_1=1-i$.

19. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ știind că ecuația $z^2+(m-4)z+m-3=0$, are soluția $z_1=i$.

20. Fie ecuația $x^2-x+3=0$ cu soluțiile x_1,x_2 numere complexe. Să se calculeze:

a) $x_1^2+x_2^2$; **b)** $x_1^3+x_2^3$; **c)** $x_1^4+x_2^4$; **d)** $x_1^5+x_2^5$;

21. Știind că x_1,x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2+2x+3=0$ să se calculeze $x_1^5+x_2^5$.

22. Știind că x_1,x_2 sunt rădăcinile ecuației $x^2-2x+4=0$ să se calculeze:

a) $x_1^{2015}+x_2^{2015}$; b) $(x_1-2)^5+(x_2-2)^5$;

23. Să se arate că $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^6+\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^6=2$;

24. Dacă $z^2+z+1=0$, atunci, să se calculeze $z^{2016}+\frac{1}{z^{2016}}$.

25. Fie $z\in\mathbb{C}$ astfel încât $z^2+z+1=0$. Să se calculeze suma $(1+z)^{2015}+(1+z^2)^{2015}+(z+z^2)^{2015}$.

26. Să se calculeze sumele : a) $\sum_{k=1}^{n}(1+i)^k$; b) $\sum_{k=1}^{n}k\cdot i^k$;

2.3 Teste de autoevaluare

Testul 1. Operații cu numere complexe

1. Să se calculeze $i^{251}+i^{10}+i^{7}$.

2. Fie $z_1=3-5i,\ z_2=4+5i$. Să se calculeze $z_1\cdot z_2,\ \frac{z_1}{z_2}$.

3. Să se calculeze i^{-91}.

4. Să se determine $x,y\in\mathbb{R}$ astfel încât $2x(1+i)+y(6-5i)=3xi+y-5$.

5. Să se calculeze a) $1+i+i^2+i^3+...+i^{100}$; b) $1\cdot i\cdot i^2\cdot i^3\cdot....\cdot i^{100}$.

6. Fie $z=\frac{(2+4i)(3+i)}{6(-3+4i)^4}$. Să se calculeze modulul lui z.

Testul 2. Ecuații în $\mathbb{C}$

1. Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuația $x^2=-16$.

2. Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuația $x^2+4x+6=0$.

3. Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuația $z^2=4+3i$.

4. Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuația $\frac{3}{x-2}-\frac{1}{x+2}+1=0$.

5. Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuația $4x^2-i\cdot x+3=0$.

6. Știind că x_1,x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2+2x+3=0$ să se calculeze $x_1^{\,5}+x_2^{\,5}$.

Test 3. Numere complexe

1. Se consideră numerele complexe $z_1=4-2i,\ z_2=3+5i$. Să se calculeze:

a) $2z_1+3z_2$; b) $z_1\cdot z_2$; c) $z_1:z_2$; d) $\left|z_1^{\,4}\cdot z_2^{\,6}\right|$;

2. Să se determine $x,y\in\mathbb{R}$ din egalitatea: $2(x-3yi)-3(y+2xi)=3-24i$;

3. Să se rezolve ecuațiile:

a) $x^2+5^2=0$; b) $x^2+5x+4=0$; c) $x^3+64=0$; d) $x+\frac{25}{x}+8=0$;

Cap. 3. FUNCȚII. PROPRIETĂȚI GENERALE

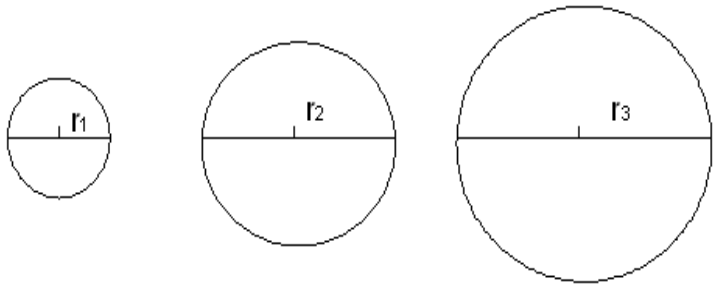
Una din noţiunile fundamentale ale matematicii o constituie noţiunea de **funcţie**, (de la latinescul functio = realizare) aceasta fiind rezultatul unui îndelungat proces de abstractizare, în dorinţa de a obţine o descriere cât mai riguroasă, ştiinţifică, a fenomenelor din natură.

În 1749, matematicianul **Leonhard Euler**(1701-1783) prezenta noţiunea de **funcţie** ca o mărime variabilă ce depinde de altă mărime variabilă, însă fundamentarea teoretică a acestei noţiuni la care au contribuit şi **Gottfried Leibniz**(1646-1716) şi **Isaac Newton**(1643-1727), a ţinut cont de corespondenţa ce se poate stabili între două mulţimi de obiecte, în cazul matematicii, mulţimi de numere, corespondenţă ce face ca unor elemente dintr-o mulţime A să le corespundă alte elemente dintr-o mulţime B.

Să considerăm un mobil care se deplasează rectiliniu şi uniform într-un singur sens pe o dreaptă începând dintr-un punct O şi să măsurăm cu t_1, t_2, t_3,….momentele la care ajunge parcurgând diferite distanţe d_1, d_2, d_3,…… Observăm că se cunoaşte mişcarea mobilului dacă în fiecare moment t se cunoaşte distanţa corespunzătoare d. Astfel, spunem că distanţa parcursă este în funcţie de timp adică depinde de timp sau că distanţa **este funcţie de timp**.

Curentul electric ce trece printr-o rezistenţă la diferite tensiuni U_1, U_2, U_3, ….U_n va avea diferite intensităţi I_1, I_2, I_3,…,I_n, iar modul în care variază curentul electric esta dat tocmai de corespondenţa dintre valorile pe care le ia tensiunea şi cele pe care le ia intensitatea. Spunem astfel, că variaţia intensităţii depinde de tensiune sau că **este funcţie de tensiune**.

De asemenea, cercurile de raze diferite au arii diferite, adică aria fiecărui cerc depinde de raza sa, conform formulei $A = \pi r^2$ adică aria unui cerc **este funcţie de raza sa**.



Cum $r_1 < r_2 < r_3 \Rightarrow A_1 < A_2 < A_3$ Fig. 1

Matematica nu se poate limita la studierea unor corespondenţe particulare, aşa cum apar în fizică , chimie şi în alte domenii, ci studiază aceste aspecte la un nivel general ca mai apoi, rezultatele obţinute să poată fi folosite de celelalte ştiinţe conform specificului fiecăreia. Cercetarea acestor corespondenţe care se pot stabili între două mulţimi de numere este introdusă prin următoarea definiţie :

3.1 Funcţii. Definiţie

Definiţie : Fie A şi B două mulţimi nevide. Se numeşte **funcţie definită pe A cu valori în B** , un triplet de forma **(A,B,f)** în care, printr-un procedeu (lege, corespondenţă) notat cu **f**, fiecărui element **x** din A îi corespunde un singur element **y** din B.

Convenim să notăm o funcţie astfel, $f:A\to B$ sau $A\overset{f}{\to}B$, unde

A se numeşte **domeniul de definiţie** ($\mathbf{D_f}$), adică mulţimea de unde **f** ia valori ,

B se numeşte **codomeniu** ($\mathbf{Cd_f}$) sau mulţimea valorilor funcţiei, adică mulţimea în care funcţia ia valori, iar legătura pe care o stabileşte funcţia între elementele $x\in A$ şi valorile corespunzătoare $y\in B$ se numeşte **lege de corespondenţă.**

Dacă x este un element din A şi dacă lui x îi corespunde elementul y din B, se spune că y este imaginea lui x prin funcţia **f** sau că **y este valoarea funcţiei f în x** şi se notează cu **f**(x). Aşadar, y=**f**(x) adică, y este funcţie de x, în sensul că y depinde de x.

Exemplu :

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3x+4$. Să se calculeze valoarea funcţiei f în punctele :

a) -1 ; b) 2 ; c) $\frac{1}{2}$; d) $\sqrt{2}$;

Rezolvare :

a) $f(-1)=(-1)^2-3(-1)+4=1+3+4=8$;

b) $f(2)=2^2-6+4=2$;

c) $f(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}-\frac{3}{2}+4=\frac{1-6+16}{4}=\frac{11}{4}$;

d) $f(\sqrt{2})=\left(\sqrt{2}\right)^2-3\cdot\sqrt{2}+4=2-3\sqrt{2}+4=6-3\sqrt{2}$.

Definiţie: Fie $f:A\to B$. Se numeşte **imaginea funcţiei f** , mulţimea tuturor valorilor funcţiei f pe care o notăm cu **f(A) sau $\mathbf{Im_f}$** .

Aşadar, pentru o funcţie $f:A\to B$, $f(A)=\{f(x)\,|\,x\in A, y=f(x)\in B\}$

Exemplu: Fie $f:\{-\sqrt{2};-1;0;3;\}\to R$, $f(x)=-2x+3$. Să se determine imaginea funcţiei f.

Rezolvare : $\mathrm{Im}_f=\{f(-\sqrt{2});f(-1);f(0);f(3)\}=\{2\sqrt{2}+3;5;3;-3\}$.

Definiţie: Două funcţii **f şi g sunt egale** dacă şi numai dacă, au acelaşi domeniu de definiţie, acelaşi codomeniu şi stabilesc aceeaşi corespondenţă.

Exemplu: Fie funcţiile $f:\{-2;-1;0;1;2\}\to Z$, $f(x)=5x+6$ şi $g:A\to Z$, $g(x)=(a-4)x+2b$.

Să se determine a şi b astfel încât funcţiile f şi g să fie egale.

Rezolvare: $f=g\Leftrightarrow A=\{-2;-1;0;1;2\}$ şi a-4=5, a=9 şi 2b=6 adică b=3.

Observaţie: Dacă două funcţii **f** şi **g** au acelaşi domeniu de definiţie A dar au valori diferite cel puţin pentru un element x din domeniul de definiţie, atunci **f** şi **g** nu sunt egale.

Observaţie : Fie $f:A\to B$ şi $x\in A$ un element arbitrar din A. Atunci, **x** se numeşte argumentul funcţiei **f** (sau variabila independentă a funcţiei **f**).
Dacă A şi B sunt mulţimi finite sau A,B=R şi $f:A\to B$, atunci, astfel de funcţii se numesc **funcţii reale** de o variabilă reală sau **funcţii numerice** şi au întodeauna valori finite.
Unele funcţii pot fi definite pe o reuniune de intervale, în moduri diferite pe fiecare interval în parte.

$f:I\cup J\to R,\ f(x)=\begin{cases}f_1(x), x\in I\\ f_2(x), x\in J\end{cases}$. În acest caz, $\mathbf{f_1}$ şi $\mathbf{f_2}$ se numesc **restricţiile funcţiei f.**

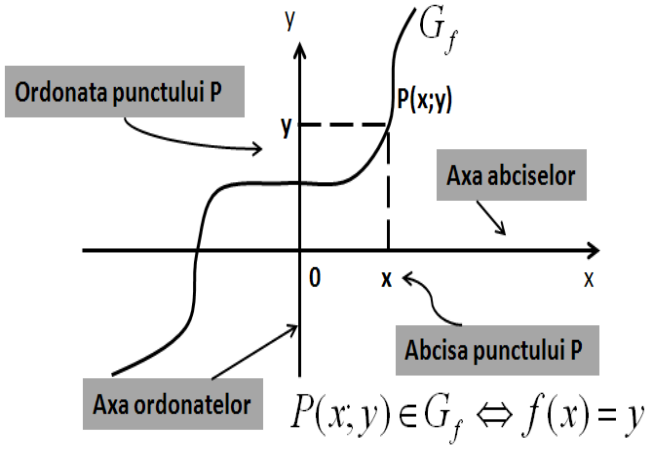
De exemplu,

$f:R\to R,\ f(x)=\begin{cases}-x+4, x\in(-\infty,1]\\ 2x+1, x\in(1,+\infty)\end{cases}$. Restricţiile în acest caz sunt funcţiile, $f_1(x)= -x+4$ şi $f_2(x)=2x+1$.

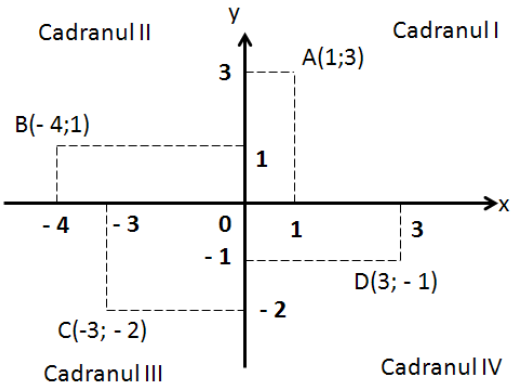
- **<u>Graficul unei funcţii</u>**

Definiţie : Fie A şi B două mulţimi (finite) de numere reale şi $f:A\to B$. Graficul funcţiei f reprezintă mulţimea tuturor punctelor de forma (x, f(x)) unde $x\in A$ iar f(x) este valoarea funcţiei f în x.
$G_f=\{(x,f(x))\,|\,x\in A, f(x)\in B\}\subset A\times B$.

Ecuaţia **y=f(x)** se numeşte **ecuaţia graficului funcţiei f**. Reprezentarea grafică a unei funcţii se face într-un **sistem de axe de coordonate** sau sistem de axe ortogonale.



Exemplu : Să se reprezinte în plan punctele : **A(1 ;3), B(- 4 ; 1), C(- 3 ;- 2), D(3 ;- 1).**



Definiţie : Un punct M(a,b) aparţine graficului unei funcţii $M(a,b)\in G_f \Leftrightarrow f(a)=b$.

Exemplu:
Să se determine $m\in R$ astfel încât punctul A(m;3) să aparţină graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, f(x)=5x-2.
Rezolvare : $A(m;3)\in G_f \Leftrightarrow f(m)=3\Rightarrow$ 5m-2=3, adică m=1.

Exercitii rezolvate

1. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=5x-30$**. Să se calculeze** $f(1)\cdot f(2)\cdot f(3)\cdot.....\cdot f(20)$**.**
Rezolvare: Deoarece $5x-30=0\Rightarrow x=6\Rightarrow f(1)\cdot f(2)\cdot f(3)\cdot.....\cdot f(20)=0$;

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$**,** $f(x)=2x+1$**. Să se determine** $a\in\mathbb{R}$ **astfel încât punctul** $P(a^2,4a+1)$ **să se afle pe graficul funcţiei f.**
Rezolvare: . $P(a^2,4a+1)\in G_f \Leftrightarrow f(a^2)=4a+1\Rightarrow 2a^2+1=4a+1\Rightarrow a\in\{0,2\}$.

3. Fie funcţiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$**,** $f(x)=ax+b,\ g(x)=bx+a-3$**. Determinaţi numerele reale a şi b astfel încât punctul A(2;3) să fie punctul de intersecţie a graficelor celor două funcţii.**
Rezolvare: Cum $A=G_f\cap G_g$ rezultă $f(2)=3$ şi $g(2)=3$. Din cele două rezultă
$2a+b=3,\ 2b+a-3=3$. Din $\begin{cases}2a+b=3\\a+2b=6\end{cases}\Rightarrow a=0,b=3$.

4. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$**,** $f(x)=(x-2)^2-(x-3)(x+3)-5$**. Să se determine o funcţie** $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **astfel încât** $g(x+2)=f(x)+3$**.**
Rezolvare: Se aduce mai întâi f(x) la forma cea mai simplă.
$f(x)=x^2-4x+4-x^2+9-5=-4x+8$.
Cum $f(x)+3=-4x+8+3=-4x+11$ este o funcţie de gradul întâi rezultă că şi funcţia g(x) este de gradul întâi. Fie $g(x)=ax+b,\ a,b\in\mathbb{R}$. Atunci, $g(x+2)=a(x+2)+b$. Din $g(x+2)=f(x)+3$ rezultă $ax+2a+b=-4x+11\Rightarrow a=-4$ şi din $2a+b=11\Rightarrow b=19$. Aşadar, $g(x)=-4x+19$.

5. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$**,** $f(x)=\begin{cases}4x-1,\ x<-1\\ax+4,\ x\ge -1\end{cases}$**.**
a) Să se determine $a\in\mathbb{R}$ **astfel încât punctul** $A(2,-8)$ **să aparţină graficului lui f;**
b) Pentru a = -6, să se determine mulţimea $M=\{x\in\mathbb{R}\,|\,f(x)\ge -2\}$**.**
Rezolvare:
a) $A(2,-8)\in G_f \Leftrightarrow f(2)=-8\Rightarrow 2a+4=-8\Rightarrow 2a=-12\Rightarrow a=-6$;
b) Pentru a = -6, $f(x)\ge -1\Leftrightarrow -6x+4\ge -2\Rightarrow -6x\ge -6\Rightarrow x\le 1$. Aşadar, $M=(-\infty;1]$.

6. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ **astfel încât punctul** $A(m;2)$ **să aparţină graficului funcţiei** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3x+4$

Rezolvare:. $A(m;2)\in G_f \Leftrightarrow f(m)=2\Leftrightarrow m^2-3m+4=2\Rightarrow\ m^2-3m+2=0\ \Rightarrow m_1=1,\ m_2=2;$

Exercitii propuse

1. Fie $f:\{-3;-2;-1;0;1;2\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-2x+3$. Să se determine imaginea lui f.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x+10$. Să se determine $f(-10)\cdot f(-9)\cdot.....\cdot f(0)\cdot.....\cdot f(9)\cdot f(10)$.

3. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x-1$. Să se calculeze $f(1)+f(2)+f(3)+....+f(50)$.

4. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+3$. Să se calculeze $f(1)+f(2)+f(2^2)+f(2^3)+....+f(2^{30})$.

5. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}-x+3, & x<1\\ 2x+5, & x\geq 1\end{cases}$. Să se calculeze :

a) $f(-\frac{1}{2})+f(\sqrt{3}-1)+f(\frac{3}{2});$ b) $f(1)+f(3)+f(3^2)+...+f(3^{20})$.

6. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=4x+8$. Să se determine numărul real $m\in\mathbb{R}$ astfel încât punctul $P(m+4,16)$ să aparţină graficului funcţiei f.

7. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=mx-2$. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ ştiind că punctul A(m+1; 0) aparţine graficului lui f.

8. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(m+4)x-4m+3;$Să se determine $m\in R$ astfel încât $(2;2-m^2)\in G_f$;

9. Fie funcţiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=(m-6)x+n^2-16,\ g(x)=8x+9$. Să se determine $m,n\in\mathbb{R}$ astfel încât f(x)=g(x) .

10. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât punctul $A(m;2)$ să aparţină graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-2x+3$

11. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât punctul $A(-1;4)$ să aparţină graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=mx^2-3x+2$

12. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2+(2m+1)x+n^2-n-1$. Să se determine $m,n\in\mathbb{R}$ astfel încât f(x)=g(x) unde, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=x^2+7x+1$.

3.2 Proprietăţi generale ale funcţiilor

- **Funcţii simetrice. Funcţii pare. Funcţii impare.**

Definiţie: Fie $D \subseteq \mathbb{R}$ o mulţime de numere reale. Atunci, o funcţie $f : D \to \mathbb{R}$ se numeşte funcţie reală de variabilă reală sau mai simplu **funcţie reală** sau **funcţie numerică**.

Definiţie: Fie $f : D \to \mathbb{R}$ şi $a \in D$ **.** Dreapta de ecuaţie **x = a**, se numeşte **axă de simetrie** pentru graficul funcţiei **f** , dacă oricare ar fi un punct al graficului, simetricul lui faţă de dreapta **x =a** aparţine graficului.

Pentru a verifica însă dacă o funcţie admite axă de simetrie se foloseşte următoarea teoremă :

Teoremă : Fie $f : D \to \mathbb{R}$ şi $a \in D$. Dreapta de ecuaţie **x = a** este **axă de simetrie** pentru graficul funcţiei **f** dacă şi numai dacă **f(a-x)=f(a+x)**, $\forall x \in D$.

Exemplu : **Să se verifice dacă funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f(x)= 2x+6 admite axă de simetrie.**

Rezolvare :

Dacă dreapta de ecuaţie x= a este axă de simetrie pentru graficul funcţie f atunci are loc relaţia f(a-x)=f(a+x) ceea ce este echivalent cu 2(a-x)+6=2(a+x)+6 de unde se obţine că x=0 ceea ce constituie o contradicţie cu condiţia lui x din enunţul teoremei, prin urmare, f nu admite axă de simetrie.

Observaţie : În aplicaţii se mai poate folosi şi relaţia f(x)=f(2a-x), $\forall x \in D$ pentru a arăta că x=a este axă de simetrie pentru graficul lui f.

Definiţie : Fie $f : D \to \mathbb{R}$. Un punct $S(a,b)$ se numeşte **centru de simetrie** pentru graficul funcţie **f**, dacă oricare ar fi un punct al graficului, simetricul lui faţă de S aparţine tot graficului.
Se spune că graficul funcţiei f este simetric faţă de punctul $S(a,b)$.

Condiţia necesară şi suficientă ca un punct să fie centru de simetrie pentru graficul unei funcţii, este dată de următoarea teoremă :

Teoremă : Fie $f : D \to \mathbb{R}$. Un punct $S(a,b)$ este **centru de simetrie** pentru graficul funcţie **f**, dacă şi numai dacă f(a-x)+f(a+x)=2b , $\forall x \in D$ astfel încât $a - x, a + x \in D$.

Exemplu : **Să se verifice dacă funcţia $f : R \to R,\ f(x) = x^2 - 4x + 5$ admite centru de simetrie.**

Rezolvare : Aplicând relaţia din enunţul teoremei, f(a-x)+f(a+x)=2b , $\forall x \in \mathbb{R}$ se obţine succesiv

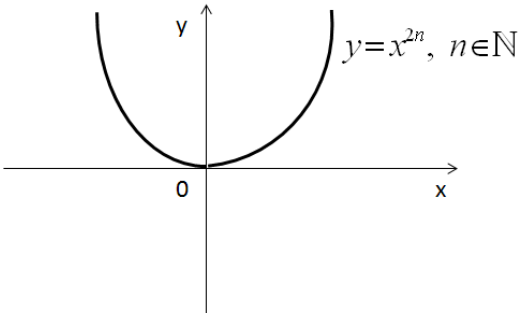
$(a-x)^2$ -4(a-x)+5+$(a+x)^2$-4(a+x)+5=2b , a^2 +x^2-4a+5=b de unde , luând în ultima egalitate x=0 respectiv x=1 se ajunge la contradicţia a^2 -4a+5=b , a^2 +1- 4a+5=b prin urmare, f nu admite centru de simetrie.

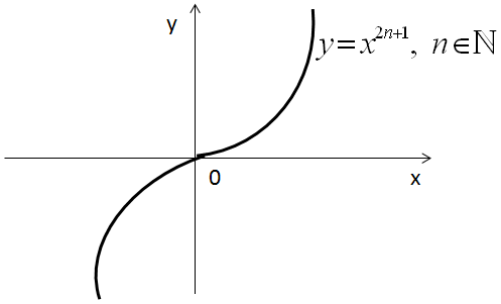
Observaţie : În aplicaţii se mai poate folosi şi relaţia f(x)+ f(2a-x)=2b , $\forall x \in D$ pentru a arăta că punctul S(a ;b) este centru de simetrie pentru graficul lui f.

Definiţie : O **mulţime** $D \subseteq \mathbb{R}$ se numeşte simetrică în raport cu originea (respectiv cu $a \in D$) sau mai simplu, **simetrică** dacă $\forall x \in D \ -x \in D$ (respectiv $(\forall) a+x \in D \Rightarrow a-x \in D$) .

Definiţie : Fie D o mulţime simetrică. O **funcţie** $f: D \to R$ **se numeşte pară** dacă $f(-x) = f(x), \ \forall x \in D$ şi se numeşte **impară** dacă $f(-x) = -f(x), \ \forall x \in D$.

Exemple:
Funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, \ f(x) = x^{2n}, \ n \in \mathbb{N}$ **este o funcţie pară. Graficul este simetric faţă de axa OX.**





Funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, \ f(x) = x^{2n+1}, \ n \in \mathbb{N}$ **este o funcţie impară. Graficul este simetric faţă de originea O a axelor.**

Exemple: **Să se studieze paritatea funcţiilor :**
a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$**,** $f(x) = 5x^6 - 3x^2$; **b)** $f: R \to R$**,** $f(x) = 2x^3 - x$;
Rezolvare : a) $f(-x) = 5(-x)^6 - 3(-x)^2 = 5x^6 - 3x^2 = f(x) \Rightarrow f$ este funcţie pară ;
b) $f(-x) = 2(-x)^3 - (-x) = -2x^3 + x = -(2x^3 - x) = -f(x) \Rightarrow f$ este funcţie impară ;

Verificarea faptului că o funcţie este pară respectiv impară se poate face şi în raport cu un punct $a \neq 0$.

Definiţie : O **funcţie** $f: D \to R$ **se numeşte pară în raport cu „ a ”** dacă $f(a-x) = f(a+x), \ \forall (a+x) \in D$ şi se numeşte **impară în raport cu „a”** dacă $f(a-x) = -f(a+x), \ \forall (a+x) \in D$.

Exemplu : **Să se arate că funcţia** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$**,** $\mathbf{f(x)= (x-4)^3}$ **este impară în raport cu punctul a = 4 ;**
Rezolvare : Conform definiţiei, pentru ca f să fie impară în raport cu 4 trebuie ca f(4-x)= - f(4+x) ceea ce este echivalent cu $(4-x-4)^3 = -(4+x-4)^3$ adică $-x^3 = -x^3$, adevărat.

- **Funcţii mărginite**

Definiţie: Se numeşte **funcţie mărginită**, o funcţie $f: D \to R, \ D \subset R, \ D \neq \emptyset$ pentru care există numerele reale **a** şi **b** astfel încât $a \leq f(x) \leq b$.

Numerele **a** respectiv **b** se numesc **marginea inferioară** respectiv **marginea superioară** a funcţiei f şi se spune că **f este minorată** pe D respectiv **majorată** pe D.

Observaţie : Pentru a arăta că o funcţie **f este mărginită**, este suficient să se găsească un număr $M\rangle 0$ astfel încât $|f(x)|\le M,(\forall)x\in D$.

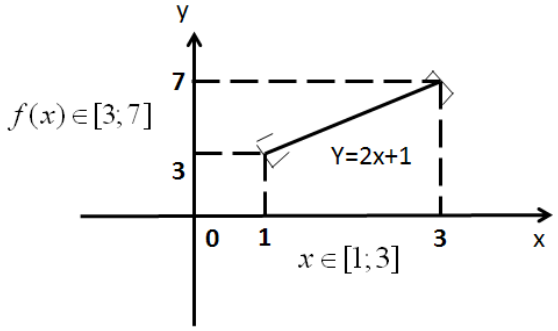
Exemplu : Să se studieze mărginirea funcţiei $f:(0;\infty)\to R$, $f(x)=\dfrac{x+1}{2x+1}$.

Rezolvare : Evident, pentru $x\rangle 0\Rightarrow \dfrac{x+1}{2x+1}\rangle 0$ şi cum $x+1\langle 2x+1\Rightarrow\ 0\langle\dfrac{x+1}{2x+1}\langle 1,\ (\forall)x\in(0;\infty)$.

Teoremă Dacă $f:[a;b]\to R$ este o funcţie monotonă pe un interval închis, atunci f este mărginită pe acel interval şi îşi atinge marginile.

Teoremă Fie $f:[a;b]\to R$, f monotonă. Atunci f este mărginită şi $f(a)\le f(x)\le f(b)$ dacă f este monoton crescătoare sau $f(b)\le f(x)\le f(a)$ dacă f este monoton descrescătoare.
Pentru a arăta că o funcţie $f:D\to R$ este nemărginită pe D către ∞, este suficient să se arate că oricare ar fi $M\rangle 0$ există un $x\in D$ astfel încât $f(x)\rangle M$.

Exemplu :
Funcţia $f:[1;3]\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1$ **este crescătoare pe intervalul [1;3], prin urmare, cum f(1)=3 şi f(3)=7 rezultă** $f(x)\in[3;7]\Leftrightarrow 3\le f(x)\le f(7)$.



- **Funcţii periodice**

Definiţie: O funcţie $f:R\to R$ se numeşte **periodică** dacă există $T\rangle 0$, astfel încât $f(x+T)=f(x),(\forall)x\in R$. Numărul **T** se numeşte **perioada funcţiei**, iar dacă **T** este cel mai mic număr cu această proprietate atunci T se numeşte perioada principală a funcţiei.

Observaţie: Dacă $f:D\to R$ este o funcţie periodică, atunci studiul proprietăţilor ei se face doar pe mulţimea
$D\cap[0;T)$ iar graficul se face doar pe intervalul de lungimea perioadei urmând să se translateze la stânga şi la dreapta pentru a se obţine graficul pe întreg domeniul de definiţie.

Teoremă Dacă numărul **T** este perioada principală a funcţiei $f:R\to R$ atunci numărul **kT** este o perioadă a funcţiei f şi are loc relaţia $f(x+kT)=f(x),(\forall)x\in R,(\forall)k\in Z.$

Teoremă Dacă graficul unei funcţii are două axe de simetrie paralele cu axa Oy, atunci funcţia este periodică.

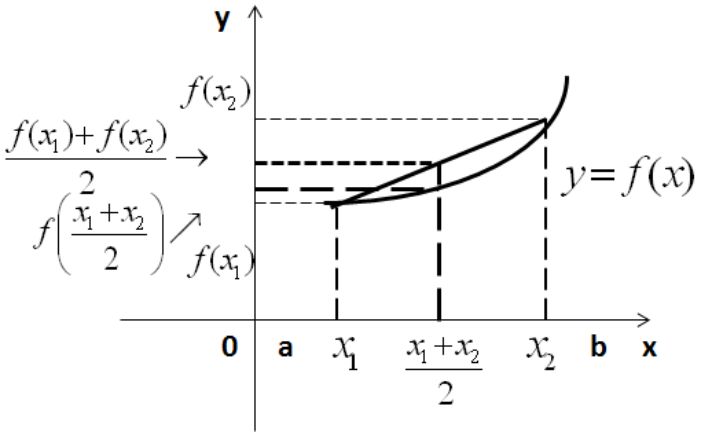
Teoremă Dacă graficul unei funcţii are două centre de simetrie situate pe o paralelă la axa Ox, atunci funcţia este periodică.

- **Funcţii convexe. Funcţii concave.**

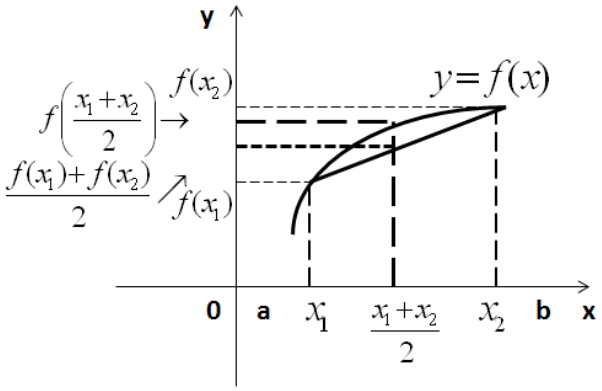
Definiţie : O funcţie $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ se numeşte **convexă pe [a ;b]** dacă $\forall x_1,x_2\in[a;b]$ şi $\forall t\in[0;1]$ rezultă $f\left((1-t)x_1+tx_2\right)\le(1-t)f(x_1)+tf(x_2)$. Dacă $f\left((1-t)x_1+tx_2\right)\ge(1-t)f(x_1)+tf(x_2)$ atunci f se numeşte **concavă.**

Exemplu : Funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax^2+bx+c$ este convexă dacă $a\rangle 0$ şi este concavă dacă $a\langle 0$

Funcţia $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ este convexă pe [a;b] dacă $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\le\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$.



Funcţia $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ este concavă pe [a;b] dacă $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\ge\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$.



Exercitii rezolvate

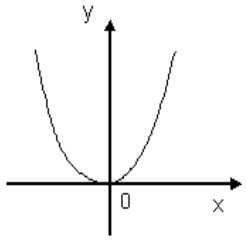
1. Să se studieze paritatea funcţiilor :

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$; **b)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=|x|$:

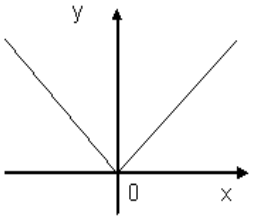
c) $f:[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\to[-1;1]$, $f(x)=\sin x$; **d)** $f:[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\to[-1;1]$, $f(x)=\cos x$

e) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x^3+2x$; **f)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^4-6x^2+3$.

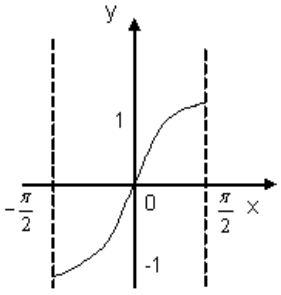
Rezolvare : La punctele a), b), c), d) se poate vedea din graficele funcţiilor care este paritatea lor.



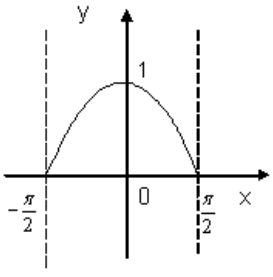
a) f(x)= x^2



b) $f(x)=|x|$



c) f(x)=sin(x)



d) f(x)=cos(x)

În general, funcţiile pare au graficul simetric faţă de axa OY, pe când funcţiile impare au graficul simetric faţă de originea sistemului de axe .

Pentru celelalte puncte se aplică definiţia : e) f(-x)= $4(-x)^3+2(-x)$= $-[4x^3+2x]$=-f(x) ceea ce înseamnă c funcţia este impară ;

f) f(-x)= $(-x)^4-6(-x)^2+3=x^4-6x^2+3$=f(x) ceea ce înseamnă că f este pară.

2. Să se studieze paritatea funcţiilor :

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+3|x|$; **b)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+2}{x}$; ***c)*** $f:[-2;2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{36-9x^2}$

Rezolvare: **a)** $f(-x)=(-x)^2+3|-x|=x^2+3|x|=f(x)\Rightarrow$ f este pară ;

b) $f(-x)=\frac{(-x)^2+2}{-x}=-\frac{x^2+2}{x}=-f(x)\Rightarrow$ f este impară ;

c) $f(-x)=\sqrt{36-9(-x)^2}=\sqrt{36-9x^2}=f(x)\Rightarrow$ f este pară.

3. Fie $f:\mathbb{R}\setminus\{2\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+1}{x-2}$; **Să se verifice dacă punctul S(2 ;4) este centru de simetrie al graficului lui f.**

Rezolvare : Trebuie verificată relaţia f(a-x)+f(a+x)=2b , $(\forall)x\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$ adică f(2-x)+f(2+x)=8 , $(\forall)x\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$. Calculând, se obţine f(2-x)+f(2+x) $=\frac{(2-x)^2+1}{2-x-2}+\frac{(2+x)^2+1}{2+x-2}=\frac{-8x}{-x}=8$. Rezultă că graficul lui f admite un centru de simetrie.

4. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, cu proprietatea că $3f(x)-f(-x)=2x^4-6x^2$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Să se demonstreze că f este o funcţie pară.

Rezolvare :

Înlocuim în relaţia dată pe x cu –x şi se obţine relaţia $3f(-x)-f(x)=2x^4-6x^2$, care împreună cu relaţia din enunţ formează un sistem de ecuaţii. De aici se obţine că $f(-x)=f(x)=x^4-3x^2$.

5. Să se studieze mărginirea următoarelor funcţii:

a) $f:R\to R,\ f(x)=\frac{2x}{x^4+1}$; **b)** $f:[0;\infty)\to R,\ f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}+1}$;

c) $f:[0;\infty)\to R,\ f(x)=\frac{x+1}{3x+1}$; **d)** $f:[-1;2]\to R,\ f(x)=\frac{2x-3}{x+2}$;

e) $f:R\to R,\ f(x)=2\sin x+3$; **f)** $f:R\to R,\ f(x)=\frac{3}{2+\cos x}$.

Rezolvare :. **a)** $\left|\frac{2x}{x^4+1}\right|\le 1\Leftrightarrow(x^2-1)^2\ge 0$, ceea ce este adevărat ;

b) Evident, $0<\frac{1}{\sqrt{x}+1}\le 1$; **c)** Cum $x\ge 0\Rightarrow\frac{x+1}{3x+1}>0$ şi $x+1<3x+1\Rightarrow 0<\frac{x+1}{3x+1}\le 1$;

d) După ce se arată că f este strict crescătoare pe [-1 ;2] rezultă că

$f(-1)\le f(x)\le f(2)\Rightarrow -5\le f(x)\le\frac{1}{4}$.

e) Cum funcţia f(x)=sin x este cuprinsă între -1 şi 1 rezultă :

$-1\le\sin x\le 1\Rightarrow -2\le 2\sin x\le 2\Rightarrow\ \Rightarrow -2+3\le 2\sin x+3\le 2+3\Rightarrow\ 1\le f(x)\le 5$;

f) $-1\le\cos x\le 1\Rightarrow 1\le 2+\cos x\le 3\Rightarrow\ 1\le\frac{3}{2+\cos x}\le 3$.

6. Să se arate că următoarele funcţii sunt mărginite:

a) $\sigma:R\to R,\ \sigma(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1, & x\ge 0\end{cases}$ (funcţia lui Heaviside) ;

b) $\operatorname{sgn}:R\to R,\ \operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ 1, & x>0\end{cases}$ (funcţia semn);

c) $f:R\to R,\ f(x)=\begin{cases}1, & x\in Q\\ 0, & x\in R\setminus Q\end{cases}$ (funcţia lui Dirichlet)

Rezolvare:

a) Mulţimea valorilor funcţiei σ este $\sigma(R)=\{0;1\}$, aşadar, este mărginită ;

b) $\operatorname{sgn}(R)=\{-1;0;1\}$; **c)** $f(R)=\{0;1\}$.

Exercitii propuse

1. Să se studieze paritatea funcţiilor :

a) $f:R\to R,\ f(x)=4x^2+|x|;$ **b)** $f:R\setminus\{0\}\to R,\ f(x)=\frac{1}{x^3};$

c) $f:R\to R,\ f(x)=x^5-2x^3+4x;$ **d)** $f:R\setminus\{\pm1\}\to R,\ f(x)=\frac{x}{x^2-1};$

e) $f:R\to R,\ f(x)=\frac{x^3+x}{x^2+5};$ **f)** $f:R\to R,\ f(x)=\begin{cases}3x+1, & x\in[-1;0]\\ 1-3x, & x\in(0;1]\end{cases};$

g) $f:R\to R,\ f(x)=\frac{3|x|}{x^2+1};$

2. Să se determine dreapta x=a care este axa de simetrie a graficului funcţiei $f:R\to R$, $f(x)=3x^2-4x+2$.

3. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, cu proprietatea că $f(-x)-2f(x)=-15x^3+3x,\ \forall x\in R$. Să se demonstreze că f este o funcţie impară.

4. Să se reprezinte grafic funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ în situaţiile :

a) f(x) = 2, dacă $x\in[0;3]$, f(x) = – x+5 dacă $x\in(3,+\infty)$ şi f(–x)= – f(x), $(\forall)x\in R$;

b) f(x) = 1, dacă $x\in[0;3]$, f(x) = x – 2 dacă $x\in(3,+\infty)$ şi f(–x)= f(x), $(\forall)x\in R$;

5. Să se verifice dacă funcţiile a) $f:R\to R,\ f(x)=|3x-6|$, b) $f:R\to R,\ f(x)=3x^2-6x+2$ admit axe de simetrie.

6. Să se verifice dacă funcţia $f:R\to R,\ f(x)=x^3-8$ admite centru de simetrie.

7. Să se arate că funcţia $f:R\to R$, $f(x)=2x^2-4x+8$ este pară în raport cu 1 ;

8. Să se studieze mărginirea funcţiei $f:[0;+\infty)\to R,\ f(x)=\frac{x}{x^2+1}$.

9. Să se studieze mărginirea următoarelor funcţii:

a) $f:(0;+\infty)\to R,\ f(x)=\frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$; **b)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$;

c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\{x\}$; **d)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=[x]$;

e) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$; **f)** $f:N\to N,\ f(n)=\frac{3+(-1)^n}{2}$.

10. Să se studieze mărginirea următoarelor funcţii:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, f(x)= 2x+1 ; **b)** $f:(1;+\infty)\to R$, f(x)= 4x-2 ;

c) $f:Z\to Z$, f(n)= restul împărţirii lui n^2 la 6 ;

11. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\setminus\{1\}$ o funcţie care satisface relaţia $f(x+1)=\frac{1}{1-f(x)},(\forall)x\in\mathbb{R}$. Să se arate că funcţia **f** este periodică ;

12. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie care satisface relaţia $f(x+1)\cdot f(x)+f(x+1)+1=f(x)(\forall)x\in\mathbb{R}$. Să se arate că funcţia **f** este periodică ;

3.3 Funcţii bijective. Funcţii inversabile

Definiţie: O funcţie $f:A\to B$ se numeşte **injectivă** dacă la orice două elemente diferite din domeniul de definiţie corespund valori diferite în codomeniu, altfel spus, f este injectivă dacă $(\forall)x_1,x_2\in A, x_1\neq x_2\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$

Definiţia poate fi exprimată şi în modul următor:
O funcţie $f:A\to B$ se numeşte **injectivă** dacă ecuaţia f(x) = y are cel mult o soluţie în A.
În aplicaţii se foloseşte în general următoarea relaţie:

$f:A\to B$ **este injectivă** $\Leftrightarrow(\forall)x_1,x_2\in A, f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$.

Exemplu 1. Să se arate că funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=5x+3$ este injectivă.
Rezolvare: Fie $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(x_1)=f(x_2)$
$\Leftrightarrow 5x_1+3=5x_2+3\,|-3\Rightarrow$
$5x_1=5x_2\,|:5\Rightarrow x_1=x_2\Rightarrow$ f este injectivă pe $\mathbb{R}$.

Grafic putem spune că o funcţie $f:A\to B$ **este injectivă** dacă orice paralelă la axa 0X dusă printr-un punct al codomeniului, intersectează graficul funcţiei în cel mult un punct.

Teoremă O funcţie $f:A\to B,\ A,B\subseteq R$ **este injectivă** dacă următoarele afirmaţii sunt echivalente:
1) $(\forall)x_1,x_2\in A, x_1\neq x_2\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$;
2) $(\forall)x_1,x_2\in A, f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$;
3) $(\forall)y\in B,$ ecuaţia $f(x)=y$ are cel mult o soluţie $x\in A$;
4) Orice paralelă la axa OX dusă printr-un punct al codomeniului, intersectează graficul funcţiei în cel mult un punct.

Teoremă Fie $f:A\to B,\ A,B\subseteq R$ o funcţie strict monotonă. Atunci f este injectivă. Reciproca teoremei nu este valabilă.

Exemplu 2: Funcţia $f:R^*\to R,\ f(x)=\frac{1}{x}$. Din $-1\langle 1\langle 2\Rightarrow -1=f(-1)\langle f(1)=1\rangle f(2)=0,5$.

Definiţie : O funcţie $f:A\to B$ se numeşte **surjectivă** dacă pentru orice element y din codomeniu există un element x din domeniul de definiţie astfel încât f(x) = y, altfel spus, f este surjectivă dacă ecuaţia $f(x)=y$ are cel puţin o soluţie în A.

$f:A\to B$ **este surjectivă** $\Leftrightarrow(\forall)y\in B,\ (\exists)x\in A$ astfel încât **f(x) = y .**

Exemplu 3: Să se arate că funcţia $f:[2;\infty)\to\mathbb{R}_+,\ f(x)=\sqrt{2x-4}$ este surjectivă:
Rezolvare: Fie $y\in\mathbb{R}_+$ astfel încât f(x) = y. Rezultă, $\sqrt{2x-4}=y\,|()^2\Rightarrow 2x-4=y^2$
$\Rightarrow x=\frac{y^2+4}{2}\geq 2,\forall y\in\mathbb{R}.$
Aşadar, există $x\in[2;\infty)$ astfel încât f(x) = y, $\forall y\in\mathbb{R}_+\Rightarrow$ f este surjectivă pe $[2;\infty)$.

Grafic putem spune că o funcţie $f:A\to B$ **este surjectivă** dacă orice paralelă la axa 0x dusă
printr-un punct al codomeniului, intersectează graficul funcţiei în cel puţin un punct.

Teoremă O funcţie $f:A\to B,\ A,B\subseteq R$ **este surjectivă,** dacă şi numai dacă imaginea funcţiei,
Im f =B.

Teoremă O funcţie $f:A\to B,\ A,B\subseteq R$ **este surjectivă** dacă următoarele afirmaţii sunt echivalente:
1) $(\forall)y\in B,\ (\exists)x\in A,$ astfel încât $f(x)=y$ **;**
2) $(\forall)y\in B,$ ecuaţia $f(x)=y$ are cel puţin o soluţie $x\in A$;
3) Im $f=f(A)=B$ **;**
4) Orice paralelă la axa OX dusă printr-un punct al codomeniului, intersectează graficul funcţiei în cel puţin un punct.

Definiţie : O funcţie $f:A\to B$ se numeşte **bijectivă** dacă este în acelaşi timp şi injectivă şi surjectivă.

Exemplu 4: Să se arate că funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=3x+7$ este bijectivă.
Injectivitatea: Fie $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(x_1)=f(x_2)\ \Leftrightarrow 3x_1+7=3x_2+7\,|-7\Rightarrow$
$3x_1=3x_2\,|:3\Rightarrow x_1=x_2\Rightarrow$ f este injectivă pe $\mathbb{R}$.
Surjectivitatea:.
Fie $y\in\mathbb{R}$ astfel încât f(x) = y. Rezultă, $3x+7=y\ \Rightarrow x=\frac{y-7}{3}\in\mathbb{R}\Rightarrow$ f este surjectivă pe $\mathbb{R}$.$\Rightarrow$ f este bijectivă pe $\mathbb{R}$.

Teoremă O funcţie $f:A\to B,\ A,B\subseteq R$ **este bijectivă** dacă următoarele afirmaţii sunt echivalente:
1) f este injectivă şi surjectivă **;**
2) $(\forall)y\in B,$ ecuaţia $f(x)=y$ are o unică soluţie $x\in A$;
3) Orice paralelă la axa OX dusă printr-un punct al codomeniului, intersectează graficul funcţiei
într-un singur punct.

Teoremă Fie $f:A\to B,\ A,B\subseteq R$. Dacă f este o funcţie strict monotonă şi imaginea funcţiei ,
Im f =B adică $f(A)=B$ **,** atunci **f este bijectivă.**
Reciproca teoremei nu este valabilă.

Definiţie : O funcţie $f:A\to B$ se numeşte **inversabilă** dacă există o funcţie $f^{-1}:B\to A$ astfel încât $f^{-1}\circ f=1_A$ şi $f\circ f^{-1}=1_B$. f^{-1} se numeşte inversa funcţiei f.

Teoremă O funcţie $f:A\to B$ se numeşte **inversabilă** dacă şi numai dacă este bijectivă.

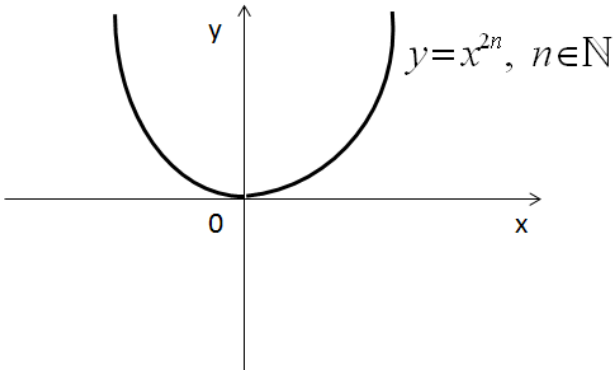
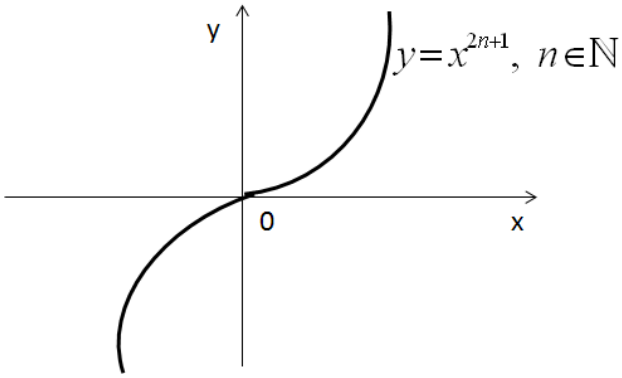
Determinarea inversei unei funcţii:

Exemplu 5: Să se determine inversa funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=3x+7$.

Rezolvare: Din $y=f(x)\Leftrightarrow y=3x+7\Rightarrow x=\dfrac{y-7}{3}\in\mathbb{R}$. Inversa funcţiei f(x) este $f^{-1}(x)=\dfrac{x-7}{3}$.

Activitate independentă		**Răspuns**
Să se studieze bijectivitatea funcției $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}\setminus\{3\},\ f(x)=\dfrac{3x-2}{x-1}$		

Exemple de funcții. Funcția putere cu exponent natural

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+,\ f(x)=x^{2n},\ n\in\mathbb{N}$	$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+,\ f(x)=x^{2n+1},\ n\in\mathbb{N}$
1. Funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+,\ f(x)=x^{2n},\ n\in\mathbb{N}$ **este o funcţie pară .** **Graficul este simetric faţă de axa OX.** **f este convexă pe** $\mathbb{R}$ **.** **f este strict descrescătoare pe** $(-\infty;0]$ **și strict descrescătoare pe** $[0;\infty)$ **f nu este bijectivă pe** $\mathbb{R}$ **ci doar pe restricțiile** $(-\infty;0]$**,** $[0;\infty)$**.**	**2. Funcţia** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+,\ f(x)=x^{2n+1},\ n\in\mathbb{N}$ **este o funcţie impară.** **Graficul este simetric faţă de originea O a axelor.** **f este convexă pe** $[0;\infty)$ **și concavă pe** $(-\infty;0]$**.** **f este strict crescătoare pe** $\mathbb{R}$ **f este bijectivă pe** $\mathbb{R}$ **.**
	

Activitate independentă		**Răspuns**
Funcția $f:[m;\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-8x+15$ **este injectivă pentru m =** ……		**m= 4**

Rezolvare: Funcția $f(x)=ax^2+bx+c$ **este injectivă pe intervalul** $\left[-\frac{b}{2a},+\infty\right)$**. În cazul nostru,**

$-\frac{b}{2a}=4$. Așadar, m = 4.

Exercitii rezolvate

1. Să se determine pentru care din graficele funcțiilor de mai jos pe domeniile de definiție date, sunt:

i) injective; ii) surjective; iii) bijective;

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x+2$;

b) $f:\mathbb{R}\to[0;\infty),\ f(x)=|x|$;

c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}x+1, & x\le 0\\ 5x+1, & x\rangle 0\end{cases}$;

d) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}-x+3, & x\le 0\\ 2x-4, & x\rangle 0\end{cases}$;

e) $f:\mathbb{R}\to[0;\infty),\ f(x)=x^2$;

f) $f:[0;\infty)\to[0;\infty),\ f(x)=x^2$;

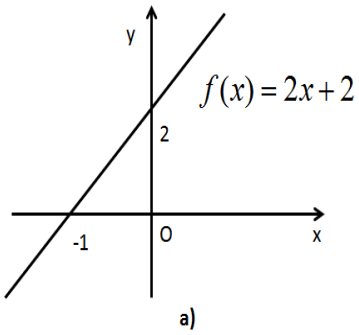
g) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3$;

h) $f:[0;\infty)\to\mathbb{R}_+,\ f(x)=\sqrt{x}$;

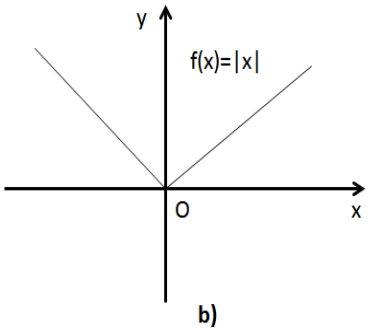
i) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt[3]{x}$;

j) $f:(0;\infty)\to\mathbb{R}_+,\ f(x)=\frac{1}{x}$;

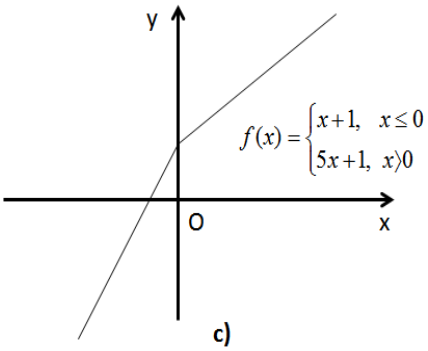
k) $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to(0;\infty),\ f(x)=\frac{1}{x^2}$.



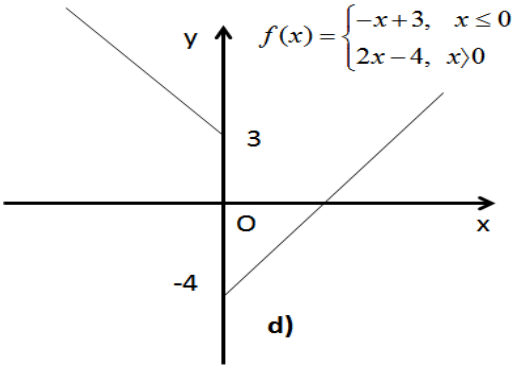
a)



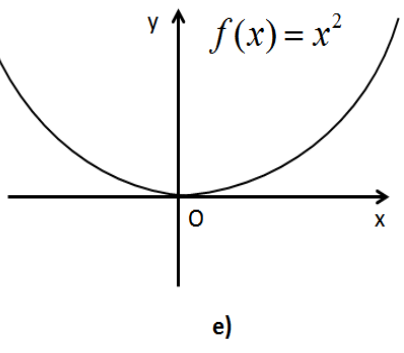
b)



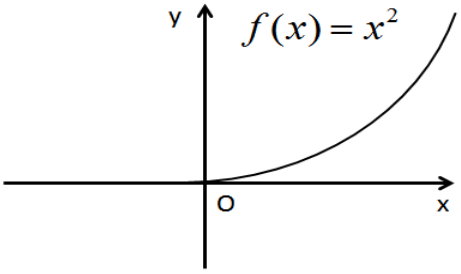
c)



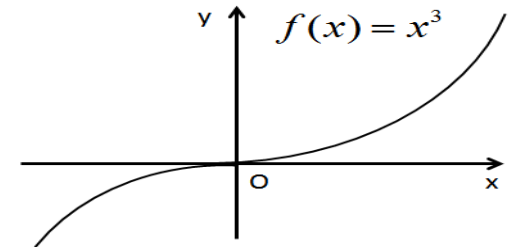
d)



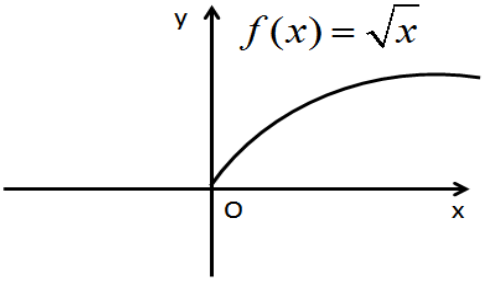
e)



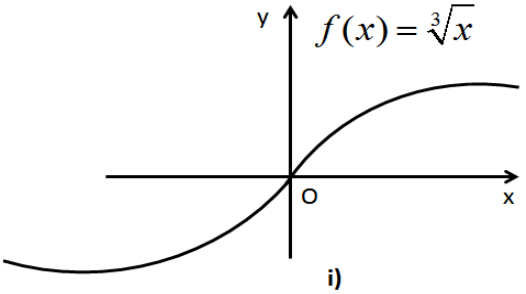
f)



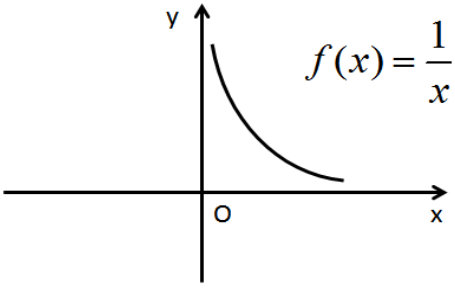
g)



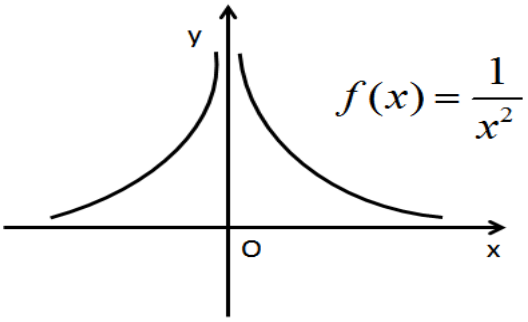
h)



i)



j)



j)

Răspuns:
i) f este injectivă la a), c), f), g), h), i) , j).
ii) f este surjectivă la a) , b), c), e), f), g), h), i), j), k).
iii) f este bijectivă la a), c), f), g), h), i), j).

2. Fie $f:[0;\infty)\to[4;\infty)$, $f(x)=x^2+4$**. Să se arate că f este inversabilă şi să se determine inversa sa,** f^{-1}**.**

Rezolvare: Pe $[0;\infty)$ funcţia este atât injectivă ($f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1^{\,2}+4=x_2^{\,2}+4\Rightarrow x_1=x_2$) cât şi surjecticvă ($\forall\ y\in[4;\infty)$ astfel încât $f(x)=y\Rightarrow x^{\,2}+4=y\Rightarrow x=\sqrt{y-4}$ şi cum $y\geq 4\Rightarrow$ există $x\in[0;\infty)$ astfel încât $x=\sqrt{y-4}\geq 0$). Aşadr, f este bijectivă, deci inversabilă şi deci $f(x)=y\Rightarrow x=f^{-1}(y),\ \forall y\geq 4\Rightarrow\ f^{-1}(x)=\sqrt{x-4}$.

3. Fie $f:(-\infty;a]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-8x+7$ **. Să se determine** $a\in\mathbb{R}$ **astfel încât f(x) să fie injectivă şi să se determine imaginea lui f, Imf.**

Rezolvare: Funcțiile de forma $f(x)=ax^2+bx+c$ sunt injective pe intervalul $\left[-\frac{b}{2a},+\infty\right)$ sau $\left(-\infty;-\frac{b}{2a}\right]$. În cazul nostru, $a=-\frac{b}{2a}=4$ iar Im $f=\left[-\frac{\Delta}{4a},+\infty\right)=[-9;\infty)$.

4. Se consideră funcția $f:[9;\infty)\to[1;2)$ $f(x)=\frac{2x-6}{x+3}$**. Să se rezolve ecuația** $f^{-1}(x)=10$**.**

Rezolvare:

Se determină inversa lui f(x) din $\frac{2x-6}{x+3}=y\Rightarrow x=\frac{3y+6}{2-y}$ rezultând că $f^{-1}(x)=\frac{3x+6}{2-x}$. Din $f^{-1}(x)=10$ rezultă $\frac{3x+6}{2-x}=10\Rightarrow 3x+6=20-10x\Rightarrow 13x=14\Rightarrow x=\frac{14}{3}$.

Altfel. $f^{-1}(x)=10\Rightarrow f(f^{-1}(x))=f(10)\Rightarrow x=\frac{2\cdot 10-6}{10+3}=\frac{14}{13}$.

5. Fie $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+8$, $g(x)=(m+4)x+4$**. Să se determine numărul real m astfel încât** $g(x)=f^{-1}(x),\forall x\in\mathbb{R}$.

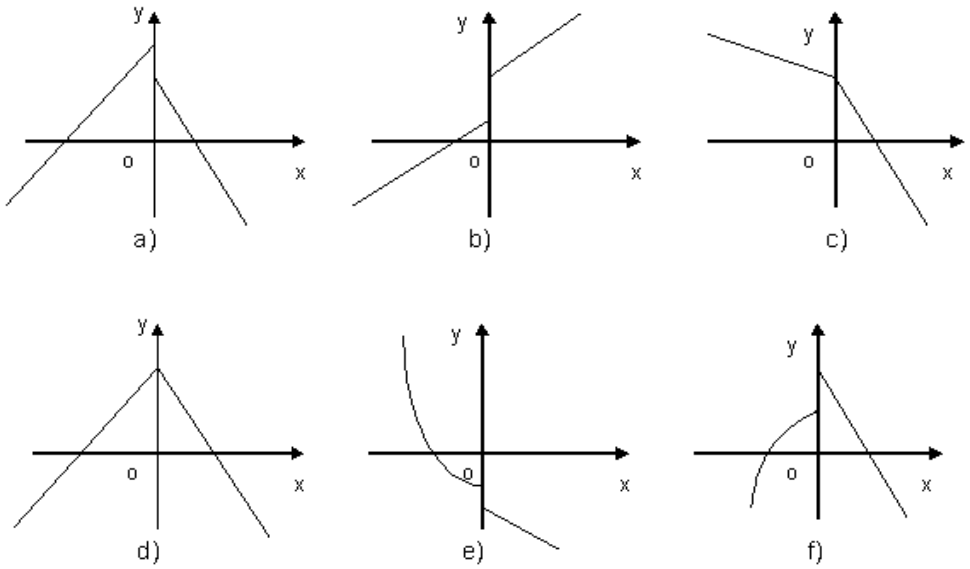
Rezolvare:

f(x) este evident funcție bijectivă ca funcție de gradul întâi, deci este inversabilă, inversa sa fiind $f^{-1}(x)=4-\frac{x}{2}$. Din

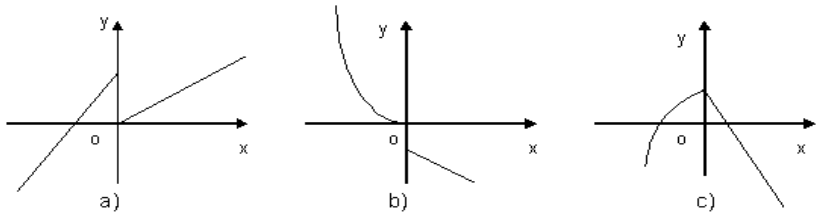
$g(x)=f^{-1}(x)\Rightarrow(m+4)x+4=4-\frac{x}{2}\Rightarrow m+4=-\frac{1}{2}\Rightarrow 2m+8=-1\Rightarrow m=-\frac{9}{2}$.

Exercitii propuse

1. Să se studieze care din funcţiile $f:R\to R$ cu graficele de mai jos sunt injective.



2. Să se studieze care din funcţiile $f:R\to R$ cu graficele de mai jos sunt surjective.



3. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^n, n\in\mathbb{N}^*$. Ştiind că $f(4)=64$ să se calculeze:

a) $A=f(1)+f(2)+f(3)-f(1)\cdot f(2)\cdot f(3)$;

b) $B=f(1)+f(2)+f(2^2)+f(2^3)+.....+f(2^8)$;

4. Să se determine funcția putere $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^n, n\in\mathbb{N}^*$ știind că $f(3)+f(9)=10$.

5. Să se determine care dintre funcţiile de mai jos sunt injective :

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-2x+6$;

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=3x-5$;

c) $f:[0;+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2$;

d) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-4x+4$;

6. Să se determine care dintre funcţiile de mai jos sunt surjective :

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=4x+2$;

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-3x+4$;

c) $f:[0;+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=3x^2$;

d) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-2x+1$;

7. Să se determine care dintre funcţiile de mai jos sunt surjective :

a) $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z},\ f(x)=2x+5$;

b) $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q},\ f(x)=4x+2$;

c) $f:[0;+\infty)\to[4;+\infty),\ f(x)=x^2+4$;

d) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x+1$;

8. Fie $f:D\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt[3]{2x-8}$; Se cere:

a) Domeniul de definiţie D;

b) Să se arate că f este bijectivă pe D;

c) Să se determine inversa funcţiei f;

d) Să se facă graficul funcţiei f;

9. Fie $f:D\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{3x-9}$; Se cere:

a) Domeniul de definiţie D;

b) Să se arate că f este bijectivă pe D;

c) Să se determine inversa funcţiei f;

d) Să se facă graficul funcţiei f;

10. Fie $f:D\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt[3]{3x-6}$; Se cere:

a) Domeniul de definiţie D;

b) Să se arate că f este bijectivă pe D;

c) Să se determine inversa funcţiei f;

d) Să se facă graficul funcţiei f;

Test de autoevaluare

Următoarele probleme sunt la alegere:	**ENUNŢURI**	**NOTA**
VARIANTA 1	**VARIANTA 2**	
1. Fie $f:D\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{2x-6}$; Se cere: a) Domeniul de definiţie D; b) Să se arate că f este bijectivă pe D; c) Să se determine inversa funcţiei f; d) Să se facă graficul funcţiei f;	**1**.Fie $f:D\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{5x-8}$; Se cere: a) Domeniul de definiţie D; b) Să se arate că f este bijectivă pe D; c) Să se determine inversa funcţiei f; d) Să se facă graficul funcţiei f;	**7**
2. Fie $f:D\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{4x+6}$; Se cere: a) Domeniul de definiţie D; b) Să se arate că f este bijectivă pe D; c) Să se determine inversa funcţiei f; d) Să se facă graficul funcţiei f;	**2**. Fie $f:D\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{5x-15}$; Se cere: a) Domeniul de definiţie D; b) Să se arate că f este bijectivă pe D; c) Să se determine inversa funcţiei f; d) Să se facă graficul funcţiei f;	**7**
3. Fie $f:D\to(2;\infty)$, $f(x)=\dfrac{2x+4}{x-3}$; Se cere: a) Domeniul de definiţie D; b) Să se arate că f este bijectivă pe $(3;\infty)$; c) Să se determine inversa funcţiei f; d) Să se determine punctele de intersecţie ale graficului cu axele de coordonate.	**3**. Fie $f:D\to(1;4)$, $f(x)=\dfrac{4x-2}{x+4}$; Se cere: a) Domeniul de definiţie D; b) Să se arate că f este bijectivă pe $(2;\infty)$; c) Să se determine inversa funcţiei f; d) Să se determine punctele de intersecţie ale graficului cu axele de coordonate.	**8**
4. Fie $f:D\to\mathbb{R}_+$, $f(x)=\sqrt{\dfrac{2x-4}{x+3}}$; Se cere: a) Domeniul de definiţie D; b) Să se arate că f este bijectivă pe $(-\infty;-3)$; c) Să se determine inversa funcţiei f; d) Să se determine punctele de intersecţie ale graficului cu axele de coordonate.	**4**. Fie $f:D\to\mathbb{R}_+$, $f(x)=\sqrt{\dfrac{3x-3}{x+2}}$; Se cere: a) Domeniul de definiţie D; b) Să se arate că f este bijectivă pe $(-\infty;-2)$; c) Să se determine inversa funcţiei f; d) Să se determine punctele de intersecţie ale graficului cu axele de coordonate.	**9**
5. Fie $f:(0;\infty)\to(1;\infty)$, $f(x)=x^2+x+1$; Se cere: a) Să se arate că f este bijectivă pe $(0;\infty)$; b) Să se determine inversa funcţiei f;	**5**. Fie $f:(0;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\dfrac{1}{x}$; Se cere: a) Să se arate că f este bijectivă pe $(0;\infty)$; b) Să se determine inversa funcţiei f;	**10**

Cap. 4. FUNCȚII ȘI ECUAȚII IRAȚIONALE

4.1 Funcții iraționale

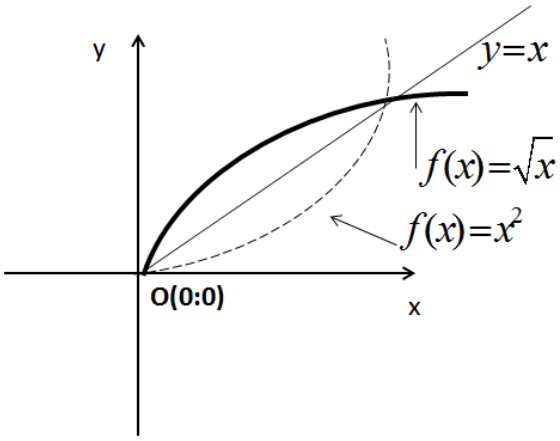
Funcţia radical de ordinul 2

Definiție:

$f:[0;\infty)\to\mathbb{R}_+$, $f(x)=\sqrt{x}$, $x\geq 0$.

Proprietăţi :

1. f este pozitivă, $\forall x\in[0;\infty)$;
2. f este concavă pe $[0;\infty)$;
3. f este strict crescătoare pe $[0;\infty)$;
4. f este funcție pară pe $[0;\infty)$;
5. funcţia sa inversă este funcţia putere $f(x)= x^2$;



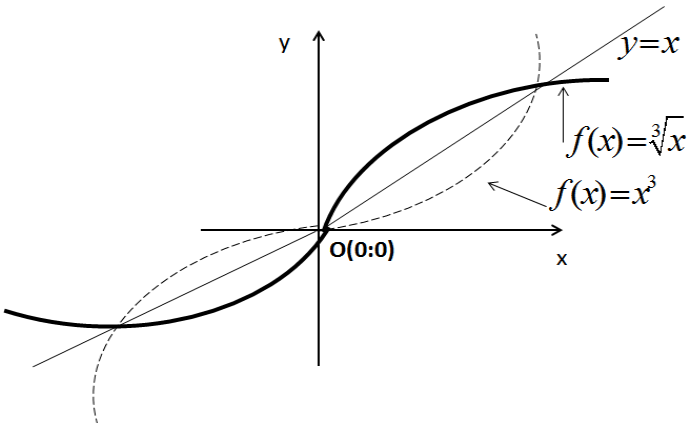
Funcţia radical de ordinul 3

Definiție:

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{x}$. $x\in\mathbb{R}$.

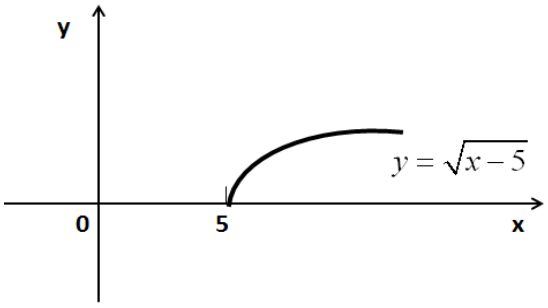
Proprietăţi :

1. f este pozitivă pe $[0;\infty)$ şi este negativă pe $(-\infty;0]$;
2. f este convexă pe $(-\infty;0]$ şi concavă pe $[0;\infty)$;
3. f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$;
4. f este funcţie impară pe $\mathbb{R}$;
5. funcţia sa inversă este funcţia putere $f(x)= x^3$;

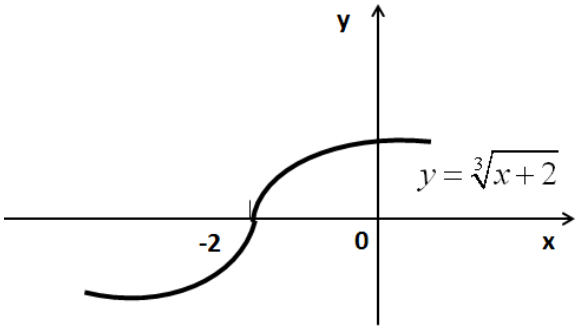


Exemplu 1. Să se reprezinte graficul funcțiilor:

a) $f:[5;\infty)\to\mathbb{R}_+$, $f(x)=\sqrt{x-5}$.



b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{x+2}$.



Rezolvare:

Exemplul 2. Să se determine domeniile de definiție ale funcțiilor :

a) $f(x)=\sqrt{4x-12}$ **;** **b)** $g(x)=\sqrt[3]{2x-6}$ **;**

c) $h(x)=\sqrt{x^2-4}$ **;** **d)** $i(x)=\sqrt{x^2-5x+4}$;

Rezolvare :

a) f este corect definită dacă $4x-12\geq 0\Leftrightarrow 4x\geq 12\Leftrightarrow x\geq 3.$ Așadar, domeniul de definiție al funcției f este $D_f=[3;\infty)$.

b) g(x) este corect definită pentru $x\in\mathbb{R}$;

c) $x^2-4\geq 0\Leftrightarrow x^2\geq 4\Leftrightarrow x\in(-\infty;-2]\cup[2;\infty)$.

d) $x^2-5x+4\geq 0\Rightarrow x\in(-\infty;1]\cup[3;\infty)$.

Activitate independentă		**Răspuns**
Să se determine domeniile de definiție ale funcțiilor: **a)** $f(x)=\sqrt{\frac{x+2}{x-2}}$; b) $g(x)=\sqrt[3]{\frac{1}{x}}$;		**a)** $D_f=(-\infty;-2]\cup(2;\infty)$ **b)** $D_g=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

Exercitii rezolvate

1. Să se determine domeniul maxim de definiţie D, al funcţiilor $f:D\to\mathbb{R}$ **:**

a) $f(x)=\sqrt{x-6}$**;** **b)** $f(x)=\sqrt{3x-9}$**;** **c)** $f(x)=\sqrt{x^2-7x+6}$**;**

d) $f(x)=\sqrt{-x^2+7x-10}$**;** **e)** $f(x)=\sqrt[3]{2x+8}$**;** **f)** $f(x)=\sqrt[3]{-x^2+4x-5}$**;**

Rezolvare: a) Se pune condiţia $x-6\geq 0\Rightarrow x\geq 6\Rightarrow D=[6;\infty)$;

b) Se pune condiţia $3x-9\geq 0\Rightarrow x\geq 3\Rightarrow D=[3;\infty)$;

c) Se pune condiţia $x^2-7x+6\geq 0\Rightarrow x\in(-\infty;1]\cup[6;\infty)\Rightarrow D=(-\infty;1]\cup[6;\infty)$;

d) Se pune condiţia $-x^2+7x+10\geq 0\Rightarrow x\in[2;5]\Rightarrow D=[2;5]$;

e) Cum $2x+8\in\mathbb{R}\Rightarrow x\in\mathbb{R}\Rightarrow D=\mathbb{R}$;

f) $-x^2+4x-5\in\mathbb{R}\Rightarrow x\in\mathbb{R}\Rightarrow D=\mathbb{R}$;

2. Să se determine domeniul maxim de definiţie pentru funcţiile:

a) $f:D\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{3x+6}$**.** **b)** $f:D\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt[3]{2x-6}$**.** **c)** $f(x)=\sqrt{x^2-2x-8}$**.**

d) $f(x)=\sqrt{\sqrt[3]{x^2-4}}$**.** **e)** $f(x)=\sqrt{\frac{x+5}{x-3}}$**.**

Rezolvare:

a)Din $3x+6\geq 0\Rightarrow x\geq -2\Rightarrow\ D=[-2;\infty)$; b) $x\in\mathbb{R}$; c) Din $x^2-2x-8\geq 0\Rightarrow$ $x\in(-\infty;-2]\cup[4;\infty).\ D=(-\infty;-2]\cup[4;\infty).$

d) Din $\sqrt[3]{x^2-4}\geq 0\Rightarrow x^2-4\geq 0\Rightarrow x\in(-\infty;-2]\cup[2;\infty).\ \ D=(-\infty;-2]\cup[2;\infty).$

e) Din $\frac{x+5}{x-3}\geq 0\Rightarrow x\in(-\infty;-5]\cup(3;\infty).\ \ D=(-\infty;-5]\cup(3;\infty).$

Exercitii propuse

1. Să se determine domeniul maxim de definiţie pentru funcţiile $f:D\to\mathbb{R}$:

a) $f(x)=\sqrt{3x+9}$; **b)** $f(x)=\sqrt{2x-6}$; **c)** $f(x)=\sqrt{\frac{2x+4}{3x-6}}$;

d) $f(x)=\sqrt{x^2-4x-12}$; **e)** $f(x)=\sqrt{-x^2-x+6}$; **f)** $f(x)=\sqrt[3]{5x+40}$;

g) $f(x)=\sqrt[3]{x^2-3x+2}$; **h)** $f(x)=\sqrt[3]{\sqrt{4x+8}}$; **i)** $f(x)=\sqrt{\sqrt[3]{2x+8}}$;

2. Să se reprezinte graficul funcţiilor $f:D\to\mathbb{R}$ unde D este domeniul maxim de definiţie al lui f:

a) $f(x)=\sqrt{x+4}$; **b)** $f(x)=\sqrt{x-2}$; **c)** $f(x)=\sqrt{2x-6}$;

d) $f(x)=\sqrt{4x+4}$; **e)** $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$; **f)** $f(x)=\sqrt[3]{x+3}$;

g) $f(x)=\sqrt[3]{2x-4}$; **h)** $f(x)=\sqrt[3]{3x+6}$;

3. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât funcţia $f(x)=\sqrt{(m^2+1)x^2-(2m+3)x+1}$ să fie corect definită, $\forall x\in\mathbb{R}$.

4.2 Ecuații iraționale

Definiţie : Se numeşte **ecuaţie iraţională,** o ecuaţie în care necunoscuta x apare sub unul sau mai mulţi radicali.

Pentru a rezolva o ecuație irațională de ordinul doi (respectiv trei) se va pune condiția de existență doar a radicalilor de ordinul doi (în general de ordin par) iar raționalizarea ecuației presupune ridicarea acesteia la puterea a doua (respectiv a treia) sau efectuarea unor notații. În final se verifică soluțiile.

Tipuri de ecuaţii :

I. Ecuaţii de forma $\sqrt{f(x)}=g(x)$;

Condiţii de existenţă : $f(x)\geq 0,\ g(x)\geq 0$;

Mod de rezolvare. Se ridică la puterea a doua ecuaţia : $\sqrt{f(x)}=g(x)\left|()^2\right.\Rightarrow f(x)=g(x)^2$;

Exemple:

1. $\sqrt{x}=5\left|()^2\right.\Rightarrow x=5^2=25.$ C.E: $x\geq 0$

2. $\sqrt{4x+1}=3\left|()^2\right.\Rightarrow 4x+1=9\Rightarrow 4x=8\Rightarrow x=2;\ S=\{2\}\quad C.E: 4x+1\geq 0\Rightarrow x\geq -\frac{1}{4}.$

3. $\sqrt{2x-6}=4\left|()^2\right.\Rightarrow 2x-6=16\Rightarrow 2x=16+6\Rightarrow 2x=22\Rightarrow x=11.$ C.E: $2x-6\geq 0\Rightarrow x\geq 3.$

4. $\sqrt{6x-8}=x\left|()^2\right.\Rightarrow 6x-8=x^2\Rightarrow x^2-6x+8=0\Rightarrow x_1=2, x_2=4.$

C.E: $6x-8\geq 0\Rightarrow x\geq \frac{8}{6}$, și $x\geq 0\Big|\ \Rightarrow x\geq \frac{4}{3}.$

5. $\sqrt{8x+9}=x+2\left|()^2\right.\Rightarrow 8x+9=x^2+4x+4\Rightarrow x^2-4x-5=0\Rightarrow x_1=-1, x_2=5.$

C.E: $8x+9\geq 0\Rightarrow x\geq -\frac{9}{4}$; și $x+2\geq 0\Rightarrow x\geq -2.\Big|\ \Rightarrow x\geq -2.$

II. Ecuaţii de forma $\sqrt[3]{f(x)}=g(x)$ **;**

Condiţii de existenţă : $f(x)\in\mathbb{R},\ g(x)\in\mathbb{R}$;

Mod de rezolvare. Se ridică la puterea a treia ecuaţia : $\sqrt[3]{f(x)}=g(x)\left|()^3\right.\Rightarrow f(x)=g(x)^3$;

Exemple:

1. $\sqrt[3]{x}=5\left|()^3\right.\Rightarrow x=5^3=125.$ Nu se pun condiții de existență

2. Să se rezolve ecuația $\sqrt[3]{5x+2}=3$;

Din $\sqrt[3]{5x+2}=3\left|()^3\right.\Rightarrow 5x+2=27\Rightarrow 5x=25\Rightarrow x=5$; $S=\{5\}.$

3. $\sqrt[3]{3x-3}=-3\left|()^3\right.\Rightarrow 3x-3=-27\Rightarrow 3x=3-27\Rightarrow 3x=-24\Rightarrow x=-8.$

4. $\sqrt[3]{x^3-6x-12}=x\left|()^3\right.\Rightarrow x^3-6x-12=x^3\Rightarrow -6x=12\Rightarrow x=-2.$

III. Ecuaţii de forma

$$\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}\left|()^2\right.\Rightarrow f(x)=g(x);\ C.E\begin{cases}f(x)\geq 0\\ g(x)\geq 0\end{cases}$$

$$\sqrt[3]{f(x)}=\sqrt[3]{g(x)}\left|()^3\right.\Rightarrow f(x)=g(x);$$

Exemple:

1. $\sqrt{2x+8}=\sqrt{x+6}\,|()^2 \Rightarrow 2x+8=x+6 \Rightarrow 2x-x=6-8 \Rightarrow x=-2$:

C.E: $2x+8\geq 0 \Rightarrow x\geq -2$, şi $x+6\geq 0 \Rightarrow x\geq -6 \Big| \Rightarrow x\geq -2$.

2. $\sqrt[3]{8x-10}=\sqrt[3]{2x-4}\,|()^2 \Rightarrow 8x-10=2x-4 \Rightarrow 8x-2x=10-4 \Rightarrow 6x=6 \Rightarrow x=1$.

IV. Ecuaţii de forma

$$\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}=N \Rightarrow \sqrt{f(x)}=N+\sqrt{g(x)}\,|()^2 \Rightarrow f(x)=\left(N+\sqrt{g(x)}\right)^2;\ C.E\begin{cases} f(x)\geq 0 \\ g(x)\geq 0 \end{cases}$$

$$\sqrt[3]{f(x)}+\sqrt[3]{g(x)}=N\,|()^3 \Rightarrow f(x)+g(x)+3\cdot\sqrt[3]{f(x)g(x)}\cdot N=N^3$$

Exemple:

1.

$\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}=1 \Rightarrow \sqrt{x-1}=1-\sqrt{x-2}\,|()^2 \Rightarrow x-1=1-2\sqrt{x-2}+x-2 \Rightarrow 2\sqrt{x-2}=0 \Rightarrow x=2$.

C.E: $x-1\geq 0 \Rightarrow x\geq 1$ şi $x-2\geq 0 \Rightarrow x\geq 2 \Big| \Rightarrow x\geq 2$.

2. $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{9-x}=2\,|()^3 \Rightarrow x-1+9-x+3\sqrt[3]{(x-1)(9-x)}\cdot 2=8 \Rightarrow 3\sqrt[3]{(x-1)(9-x)}\cdot 2=0 \Rightarrow x_1=1,\ x_2=9.$

Activitate independentă	**Răspuns**
Să se rezolve ecuaţia: $\sqrt{2x^2-6x+4}-\sqrt{x^2-4x+3}=0$.	$S=\{1\}$.

Rezolvare:

Condiţii de existenţă: $\begin{cases} 2x^2-6x+4\geq 0 \\ x^2-4x+3\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in(-\infty;1]\cup[2;\infty) \\ x\in(-\infty;1]\cup[3;\infty) \end{cases} \Rightarrow x\in(-\infty;1]\cup[3;\infty)$.

$\sqrt{2x^2-6x+4}=\sqrt{x^2-4x+3}\,|()^2 \Rightarrow x^2-2x+1=0 \Leftrightarrow (x-1)^2=0 \Rightarrow x=1.\ S=\{1\}$.

Exercitii rezolvate

1. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $\sqrt{-x+3}=-1$; b) $\sqrt{x+6}=2$; c) $\sqrt{4x+5}=3$;

d) $\sqrt{3x+1}=2$; e) $\sqrt[3]{2x+2}=3$; f) $\sqrt[3]{x+4}=-2$;

g) $\sqrt{x^2-2x+1}=2$; h) $\sqrt{2x^2-x-6}=x$; i) $\sqrt{x^2+3x+5}=x+2$;

j) $\sqrt{x^2-3x+3}=2x-3$; k) $\sqrt{2x^2+5x+6}=x$; l) $\sqrt[3]{x^3+4x+8}=x$;

m) $\sqrt[3]{x^3+x^2-9}=x$; n) $\sqrt[3]{2x^2+4x-8}=x$;

Rezolvări:

3). a) Ecuaţia nu are soluţie întrucât radicalul este negativ;

b) Se pune condiţia de existenţă a radicalului: $x+6\geq 0 \Rightarrow x\geq -6$;

$\sqrt{x+6}=2\,|()^2 \Rightarrow x+6=2^2 \Rightarrow x=-2;\ \ S=\{-2\}$;

c) $4x+5\geq 0 \Rightarrow x\geq -\frac{5}{4};\ \sqrt{4x+5}=3\,|()^2 \Rightarrow 4x+5=3^2 \Rightarrow x=1;\ S=\{1\}$;

d) $3x+1\geq 0 \Rightarrow x\geq -\frac{1}{3};\ \sqrt{3x+1}=2\,|()^2 \Rightarrow 3x+1=2^2 \Rightarrow x=1;\ S=\{1\}$;

e) $\sqrt[3]{2x+2}=3\left|()^3\right.\Rightarrow 2x+2=27\Rightarrow x=\frac{25}{2}$; $S=\left\{\frac{25}{2}\right\}$;

f) $\sqrt[3]{x+4}=-2\left|()^3\right.\Rightarrow x+4=-8\Rightarrow x=-12$; $S=\{-12\}$;

g) $\sqrt{x^2-2x+1}=2\left|()^2\right.\Rightarrow x^2-2x+1=4\Rightarrow x^2-2x-3=0\Rightarrow x\in\{-1;3\}$;

h) Condiţii de existenţă: $2x^2-x-6\geq 0,\ x\geq 0$;

$\sqrt{2x^2-x-6}=x\left|()^2\right.\Rightarrow 2x^2-x-6=x^2\Rightarrow x^2-x-6=0\Rightarrow x\in\{3\}$;

i) Condiţii de existenţă : $x^2+3x+5\geq 0,\ x+2\geq 0$;

$\sqrt{x^2+3x+5}=x+2\left|()^2\right.\Rightarrow x^2+3x+5=x^2+4x+4\Rightarrow x=1;\ S=\{1\}$;

j) Condiţii de existenţă : $x^2-3x+3\geq 0,\ 2x-3\geq 0$;

$\sqrt{x^2-3x+3}=2x-3\left|()^2\right.\Rightarrow x^2-3x+3=4x^2-12x+9\Rightarrow 3(x^2-3x+2)=0\Rightarrow x\in\{2\}$;

k) Condiţii de existenţă : $2x^2+5x+6\geq 0,\ x\geq 0$;

$\sqrt{2x^2+5x+6}=x\left|()^2\right.\Rightarrow 2x^2+5x+6=x^2\Rightarrow x^2+5x+6=0\Rightarrow S=\varnothing$;

l) $\sqrt[3]{x^3+4x+8}=x\left|()^3\right.\Rightarrow x^3+4x+8=x^3\Rightarrow x=-2$; $S=\{-2\}$;

m) $\sqrt[3]{x^3+x^2-9}=x\left|()^3\right.\Rightarrow x^3+x^2-9=x^3\Rightarrow x\in\{-3;3\}$;

n) $\sqrt[3]{2x^2+4x-8}=x\left|()^3\right.\Rightarrow 2x^2+4x-8=x^3\Rightarrow (x-2)(x^2-4)=0\Rightarrow x\in\{-2;2\}$.

2. Să se rezolve ecuaţiile :

a) $\sqrt{x^2-9}=4$ **;** **b)** $\sqrt{25-x^2}=3$ **;** **c)** $\sqrt{4x-8}=\sqrt{6x-12}$ **;**

d) $\sqrt{3x-9}-\sqrt{x+5}=0$ **;**

Rezolvare :

a) Se pune mai întâi condiţia de existenţă a radicalului :

$x^2-9\geq 0\Rightarrow x^2\geq 9\Rightarrow x\in(-\infty;-3]\cup[3;\infty)$.

S-a folosit formula $x^2\geq a\Rightarrow x\in\left(-\infty;-\sqrt{a}\right]\cup\left[\sqrt{a};\infty\right)$

$\sqrt{x^2-9}=4\left|()^2\right.\Rightarrow x^2-9=16\Rightarrow x^2=25\Rightarrow x=\pm 5$. Aşadar, $S=\{-5;5\}$.

b) a) Se pune mai întâi condiţia de existenţă a radicalului : $25-x^2\geq 0\Rightarrow x\in[-5;5]$.

S-a folosit formula $x^2\leq a\Rightarrow x\in\left[-\sqrt{a};\sqrt{a}\right]$.

$\sqrt{25-x^2}=3\left|()^2\right.\Rightarrow 25-x^2=9\Rightarrow x^2=16\Rightarrow x=\pm 4$. Aşadar, $S=\{-4;4\}$.

c) Din condiţiile de existenţă $4x-8\geq 0$ şi $6x+12\geq 0$ rezultă $x\in[2;\infty)$.

$\sqrt{4x-8}=\sqrt{6x-12}\left|()^2\right.\Rightarrow 4x-8=6x-12\Rightarrow 4x-6x=-12+8\Rightarrow -2x=-4\Rightarrow x=2$. $S=\{2\}$.

d) Din condiţiile de existenţă $3x-9\geq 0$ şi $x+5\geq 0$ rezultă $x\in[3;\infty)$.

Ecuaţia dată se mai scrie de forma $\sqrt{3x-9}=\sqrt{x+5}\left|()^2\right.\Rightarrow 3x-9=x+5\Rightarrow 2x=14\Rightarrow x=7$.

$S=\{7\}$.

3. Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiilor:

a) $\sqrt{2x-8}=-4$**;** **b)** $\sqrt{x+6}=x$**;** **c)** $\sqrt[3]{x^3+19}=-2$**;**

d) $\sqrt[3]{x^2+4x+2}=-1$; **e)** $\sqrt{x^2+144}=13$; **f)** $\sqrt{x^2-16}+\sqrt{x-4}=0$;

Rezolvare: a) Ecuaţia nu are solutii deorece radicalul trebuie să fie un număr pozitiv iar la noi membrul drept este negativ.

b) Se pun mai întâi condiţiile de existenţă: $x+6\geq 0\Rightarrow x\geq -6$, şi $x\geq 0$ rezultând $x\geq 0$.

După raţionalizarea ecuaţiei date rezultă $x+6=x^2\Rightarrow \quad x^2-x-6=0$. Soluţia bună este 3. $S=\{3\}$.

c) Din $x^3+19=-8\Rightarrow x^3+27=0\Leftrightarrow (x+3)(x^2-3x+9)=0$, cu singura soluţie reală - 3. $S=\{-3\}$.

d) Prin ridicare la puterea a treia rezultă $x^2+4x+2=-1$ cu soluţiile -3 şi -1. $S=\{-3;-1\}$

e) Evident, după raţionalizarea ecuaţiei rezultă $x^2+144=169\Rightarrow \ x^2=25\Rightarrow x=\pm 5$. Aşadar, $S=\{-5;5\}$.

f) Din condiţiile de existenţă a radicalilor se obţine $x\geq 4$. De aici , singura soluţie acceptabilă este x = 4. $S=\{4\}$.

4. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţiile:

a) $\sqrt{4x-8}=2$; **b)** $\sqrt[3]{2x-7}=-3$; **c)** $\sqrt[3]{1-x}-\sqrt[3]{3x-2}=0$;

d) $(2x-4)^2+\sqrt{x^2-4}=0$; **e)** $\sqrt{4x+2}=x$; **f)** $\sqrt[3]{x^3-x^2-6}=x-1$;

Rezolvare:

a) Se pune condiţia de existenţă a radicalului de ordinul doi: $4x-8\rangle 0\Rightarrow x\rangle 2$; Din $\sqrt{4x-8}=2\big|()^2\Rightarrow 4x-8=4\Rightarrow \ x=3.$ $S=\{3\}$. **b)** $\sqrt[3]{2x-7}=-3\big|()^3\Rightarrow 2x-7=-27\Rightarrow x=-10.$ $S=\{-10\}$

c) $\sqrt[3]{1-x}-\sqrt[3]{3x-2}=0\Rightarrow \sqrt[3]{1-x}=\sqrt[3]{3x-2}\,\big|()^2\Rightarrow \ 1-x=3x-2\Rightarrow \ x=1, S=\{1\}.$

d) Cum termenii sumei sunt două numere pozitive atunci trebuie ca fiecare să fie egal cu 0. Rezultă, $2x-4=0\Rightarrow x=2$ şi $\sqrt{x^2-4}=0\Rightarrow x^2=4\Rightarrow x=2$. $S=\{2\}$.

e) Condiţii de existenţă: $4x+2\rangle 0\Rightarrow x\rangle -\frac{1}{2}$ şi $x\rangle 0$. Din cele două rezultă $x\rangle 0$.

Din $\sqrt{4x+2}=x\big|()^2\Rightarrow 4x+2=x^2\ \Rightarrow x^2-4x-2=0\Rightarrow$ soluţia care convine este $x=2+\sqrt{6}$.

f) $\sqrt[3]{x^3-x^2-6}=x-1\big|()^3\Rightarrow \quad x^3-x^2-6=(x-1)^3\Rightarrow \quad x^3-x^2-6=x^3-3x^2+3x-1\Rightarrow$

$2x^2-3x-5=0$ cu soluţiile - 1 şi $\frac{5}{2}$. $S=\left\{-1;\frac{5}{2}\right\}$.

Exercitii propuse

1. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţiile:

a) $\sqrt{x+8}=3$; b) $\sqrt{x+6}=-2$; c) $\sqrt{4x-4}=6$;

d) $\sqrt{-2x+3}=5$; e) $\sqrt{x^2+9}=5$; f) $\sqrt{2x^2-8x+8}=0$;

g) $\sqrt{x^2-6x-7}=3$; h) $\sqrt{2x^2+32}=5\sqrt{2}$; i) $\sqrt{x^3-18}=3$;

j) $\sqrt{1+3\sqrt{4-x}}=2$.

2. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $\sqrt[3]{4x-8}=2$; b) $\sqrt[3]{x-6}=-2$; c) $\sqrt[3]{2x+5}=3$;

d) $\sqrt[3]{x^2-36}=4$; e) $\sqrt[3]{x^2-6x+13}=2$; f) $\sqrt[3]{x^3+7}=-1$;

g) $\sqrt[3]{x^2+5x+14}=2$; h) $\sqrt[3]{x^2-5x+7}-1=0$; i) $2\sqrt[3]{x^2-7x}-4=0$.

3. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $\sqrt{4x+6}=\sqrt{2x+8}$; b) $\sqrt{6x-4}=\sqrt{3x-1}$; c) $\sqrt{5x-9}-\sqrt{3x+7}=0$;

d) $\sqrt{2x^2+4}=\sqrt{x^2+13}$; e) $\sqrt{3x^2+5}=\sqrt{2x^2+6x+5}$; f) $\sqrt{x^2+9x}+\sqrt{x^2-81}=0$

g) $\sqrt{x^3+6x}=\sqrt{x^3+x^2+8}$; h) $\sqrt{x+3\sqrt{x-1}}=\sqrt{x+3}$; i) $2020\sqrt{x^2-16}+2021\sqrt{x+4}=0$.

4. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $\sqrt[3]{x+6}=\sqrt[3]{2x-3}$; b) $\sqrt[3]{2x+10}-\sqrt[3]{x+6}=0$; c) $\sqrt[3]{4x+8}+\sqrt[3]{2x+4}=0$;

d) $\sqrt[3]{x^2+9x-3}=\sqrt[3]{x^2+3x+9}$; e) $2\sqrt[3]{x^3+1}=\sqrt[3]{x^3+15}$.

5. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $\sqrt{x^2+4x+4}=x$; b) $\sqrt{2x^2+3x}=x$; c) $\sqrt{4x^2-12}=x$;

d) $\sqrt{x^4-12}=x$.

6. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $\sqrt[3]{x^3+2x+4}=x$; b) $\sqrt[3]{2x^3-8}=x$; c) $\sqrt[3]{x^3+x^2-3x-4}=x$;

d) $\sqrt[3]{x^3+x^2+5x}=x$;

7. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $\sqrt{x^2+3x-2}=x+1$; b) $\sqrt{x^2+5x-6}=x-1$; c) $\sqrt{x^2+x+7}=x+2$;

d) $\sqrt{2x^2+2x+13}=x+3$; e) $\sqrt{x^2+x-1}+x=2$; f) $\sqrt{x^2-4x}=x-4$;

g) $x+\sqrt{2x-3}=3$.

8. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $\sqrt[3]{x^3+x^2-2}=x-1$; b) $\sqrt[3]{x^3+4x^2+3}=x+1$; c) $\sqrt[3]{x^3+6x^2+2x-2}=x+2$;

d) $\sqrt[3]{x^3-5x^2+3}=x-2$;

9. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $\sqrt{x+4}=-2$; b) $\sqrt{3x+2}=3$; c) $\sqrt{4x-2}=2$;

d) $\sqrt{6x-1}=\sqrt{2x-9}$; e) $\sqrt{2x+3}=x$; f) $\sqrt{5-x}=x+1$;

g) $\sqrt{-x^2+5x+3}=x$; h) $\sqrt{8-x}+\sqrt{x-4}=2$;

10. Să se rezolve ecuațiile punând condițiile de existență:

a). $\sqrt{x-5}=2$; b). $\sqrt{2x+8}=-3$; c). $\sqrt{3x+9}=0$; d). $\sqrt{x^2+7}=4$;

e). $\sqrt{x+3}=x+1$; f). $\sqrt{x^2-9}=4$; g). $\sqrt{3x+7}=x+1$; h). $\sqrt{2x-1}=2-x$;

i). $\sqrt{x^2-4}=3-x$; j). $\sqrt{x+2}=4-x$; k). $\sqrt{7+x}=5-x$; l). $\sqrt{3-x}=3x+1$;

m). $\sqrt{7x+1}-x=1$; n). $x+\sqrt{5x+10}=8$; o). $\sqrt{x^2-4}+\sqrt{x-2}=0$;

p). $\sqrt{x-3}+\sqrt{4-x}=1$; q). $\sqrt{x-1}+\sqrt{2-x}=1$; r). $\sqrt{x+3}+\sqrt{2x-1}=3$;

s). $\sqrt{x+1}+\sqrt{3x+1}=8$; t). $\sqrt{x+8}-\sqrt{x}=2$;

11. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $\sqrt[3]{3x-1}=3$; b) $\sqrt[3]{x+2}=2$; c). $\sqrt[3]{x^2-2x-11}=-2$; d). $\sqrt[3]{7x+1}-x=1$;

e). $\sqrt[3]{x^3+x^2-3x+2}=x$; f). $\sqrt[3]{x+2}=2\sqrt[3]{x-1}$; g). $\sqrt[3]{1-x}-\sqrt[3]{3x-2}=0$;

h). $\sqrt[3]{x^3-x^2-3}=x-1$;

12. Să se determine numărul real x știind că numerele $\sqrt{x+3}$; 4; $x+5$ sunt termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice.

13. Să se rezolve ecuațiile:

a). $\sqrt{7x+8}=x$; b). $\sqrt{x^2-5x+20}=x$; c). $\sqrt{6x-3}=x+1$;

d). $\sqrt{5-x}=x+1$; e). $\sqrt{2x+3}=x$; f). $\sqrt{2+x}=4-x$;

g). $\sqrt{4x+5}-x=2$; h). $\sqrt[3]{7x+1}-x=1$; i). $\sqrt[3]{x^3-8x-4}=x$;

j). $\sqrt[3]{x^3-x^2-3}=x-1$; k). $\sqrt[3]{x^3+5x^2+8x+13}=x+2$. l). $\sqrt{4x+2}=\sqrt{3x+8}$;

m). $\sqrt{2x^2+3}=\sqrt{x^2+12}$; n). $\sqrt[3]{x^3-3x^2+4x}=\sqrt[3]{x^2}$; o) $\sqrt[3]{3x+6}-\sqrt[3]{x-2}=0$;

14*. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\sqrt{x^2+2x+13}-\sqrt{x^2+2x+6}=1$; b) $\sqrt{x^2-3x+3}-\sqrt{x^2-3x+6}=3$;

c) $\sqrt{5x-5}-\sqrt{2x-3}=\sqrt{3x-2}$; d) $\sqrt{2x-1}-\sqrt{x-2}=\sqrt{4x+2}$;

e) $\sqrt[3]{2x+1}+\sqrt[3]{x+1}=2$; f) $\sqrt[3]{2x+5}-\sqrt[3]{2x-8}=1$;

g). $\sqrt[3]{8x+4}-\sqrt[3]{8x-4}=2$; h). $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{1-x}=1$.

i) $x^2-3x+\sqrt{x^2-3x+5}=7$; j) $x^2-x-\sqrt{x^2-x}=2$;

k) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=1$; l) $\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+2\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}=\frac{5}{2}$.

4.3 Teste de autoevaluare

Testul 1. Funcţii iraţionale

1. Să se determine domeniul maxim de definiţie şi să se reprezinte graficul funcţiei $f:D\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{3x+6}$.
2. Să se determine domeniul maxim de definiţie şi să se reprezinte graficul funcţiei $f:D\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt[3]{2x-6}$.
3. Să se determine domeniul maxim de definiţie al funcţiei $f(x)=\sqrt{x^2-2x-8}$.
4. Să se determine domeniul maxim de definiţie al funcţiei $f(x)=\sqrt{\sqrt[3]{x^2-4}}$.
5. Să se determine domeniul maxim de definiţie al funcţiei $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+5}{x-3}}$.

Testul 2. Ecuaţii iraţionale

1. Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei $\sqrt{2x-8}=-4$.
2. Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei $\sqrt{x+6}=x$.
3. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt[3]{x^3+19}=-2$.
4. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt[3]{x^2+4x+2}=-1$.
5. Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei $\sqrt{x^2-16}+\sqrt{x-4}=0$.
6. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\sqrt{x^2+144}=13$.

Testul 3. Ecuaţii iraţionale

1. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţiile: a) $\sqrt{4x-8}=2$; b) $\sqrt[3]{2x-7}=-3$.
2. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia: $\sqrt[3]{1-x}-\sqrt[3]{3x-2}=0$.
3. Să se rezolve ecuatia $(2x-4)^2+\sqrt{x^2-4}=0$.
4. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia: $\sqrt{4x+2}=x$.
5. Să se determine numărul real x știind că numerele $\sqrt{x+3}$; 4; $x+5$ sunt termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice.
6. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia: $\sqrt[3]{x^3-x^2-6}=x-1$.

Cap.5. FUNCŢII ŞI ECUAŢII EXPONENŢIALE

5.1 Funcţii exponenţiale

Definiţie: Se numeşte **funcţie exponenţială de bază a şi exponent x**, o funcţie de forma $f:\mathbb{R}\to(0;\infty)$, $f(x)=a^x, a\rangle 0, a\neq 1$

Proprietăţi:

1. $f(x)=a^x\rangle 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$;

2. Dacă $a\rangle 1\Rightarrow$ f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$

$x_1\langle x_2\Rightarrow a^{x_1}\langle a^{x_2}$

Dacă $a\in(0,1)\Rightarrow$ f este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$

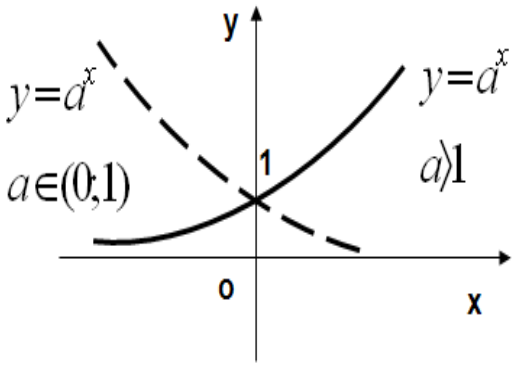
$x_1\langle x_2\Rightarrow a^{x_1}\rangle a^{x_2}$

3. f este convexă pe $\mathbb{R}$;

4. f este bijectivă pe $\mathbb{R}$;

5. f este inversabilă, inversa sa fiind funcţia logaritmică ;

Pentru $a\langle 0$ **nu se defineşte funcţia** $f(x)=a^x$



Proprietăţi ale puterilor cu exponent real:

Fie a,b $\in(0,\infty), a,b\neq 1, x,y\in\mathbb{R}\Rightarrow$

$1)a^x\cdot a^y=a^{x+y}\quad 2)(a\cdot b)^x=a^x\cdot a^y\quad 3)(a^x)^y=a^{x\cdot y}\quad 4)\dfrac{a^x}{a^y}=a^{x-y}, a\neq 0$

$5)\left(\dfrac{a}{b}\right)^x=\dfrac{a^x}{b^x}, b\neq 0\quad 6)a^0=1\quad 7)a^{-x}=\dfrac{1}{a^x}, a\neq 0$

Poziţia lui f(x)= a^x în raport cu 1

	$a\rangle 1$	$a\in(0;1)$
$x\rangle 0$	$f(x)\rangle 1$	$f(x)\in(0;1)$
$x\langle 0$	$f(x)\in(0;1)$	$f(x)\rangle 1$

Dacă x = 0 atunci, f(x)=1

Exercitii rezolvate

1. Să se determine domeniul maxim de definiţie pentru funcţiile:

a) $f(x)=4^{x+2}$; **b)** $f(x)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x-4}$; **c)** $f(x)=3^{\sqrt{x+2}}$;

d) $f(x)=6^{\sqrt{x^2-9}}$; **e)** $f(x)=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{x-4}{x-3}}$;

Rezolvare:

a) Cum funcțiile exponențiale sunt definite pe $\mathbb{R}$, atunci domeniul de definiție este $\mathbb{R}$;

b) Domeniul de definiție este $\mathbb{R}$;

c) Se pune condiția de existență a radicalului $\sqrt{x+2}$ și anume $x+2\geq 0\Rightarrow x\geq -2$.

d) Din condiția de existență a radicalului rezultă $x^2-9\geq 0\Rightarrow x\in(-\infty;-3]\cup[3;\infty)$.

e) Trebuie ca numitorul fracției $\frac{x-4}{x-3}$ să fie diferir de zero deci $x-3\neq 0\Rightarrow x\in\mathbb{R}-\{3\}$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2^x+\left(\frac{1}{2}\right)^x$. Să se calculeze

$f(-2)+f(-1)+f(0)+f(1)+f(2)$.

Rezolvare:

$$f(-2)+f(-1)+f(0)+f(1)+f(2)=2^{-2}+2^{-1}+2^0+2+2^2+2^2+2^1+\left(\frac{1}{2}\right)^0+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+1+2+4+4+2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=15+\frac{1}{2}=\frac{31}{2}.$$

3. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât funcția f(x), $f:\mathbb{R}\to(0;\infty)$ să fie strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

a) $f(x)=(m+6)^x$; **b)** $f(x)=(m^2-3)^x$; **c)** $f(x)=(17-m^2)^{x+1}$; **d)** $f(x)=\left(\frac{m-1}{m+1}\right)^{x+2}$

Rezolvare:

a) Ca f(x) să fie crescătoare trebuie ca baza funcției să fie mai mare decât 1. Rezultă $m+6\rangle 1\Rightarrow m\rangle -5$, așadar $m\in(-5;\infty)$.

b) Din $m^2-3\rangle 1\Rightarrow m^2\rangle 4\Rightarrow m\in(-\infty;2)\cup(2;\infty)$;

c) Din $17-m^2\rangle 1\Rightarrow -m^2\rangle -16\Rightarrow m^2\langle 16\Rightarrow m\in(-4;4)$.

d) Din $\frac{m-1}{m+1}\rangle 1\Rightarrow\frac{m-1}{m+1}-1\rangle 0\Rightarrow\frac{-2}{m+1}\rangle 0\Rightarrow m+1\langle 0\Rightarrow m\langle -1,\ m\in(-\infty;-1)$.

4. Să se determine semnul funcțiilor:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=4^x$; **b)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=4^x-1$;

c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=4^{x-1}-1$; **d)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^x-1$;

Rezolvare:

a) Conform graficului lui f(x) ca funcție exponențială, se observă că f(x) este pozitivă pentru orice x real;

b) pentru x egal cu 0 funcția se anulează și cum este crescătoare se observă că f(x) este negativă pe $(-\infty;0)$ și este pozitivă pe $(0;\infty)$.

c) Pentru x egal cu 2 se anulează funcția si cum este și crescătoare, atunci f(x) este pozitivă pe $(-\infty;1)$ și pozitivă pe $(1;\infty)$.

d) Funcția se anulează pentru x=0 dar funcția este descrescătoare deci f(x) este pozitivă pe $(-\infty;0)$și negativă pe $(0;\infty)$.

Exercitii propuse

1. Să se determine domeniul maxim de definiţie pentru funcţiile:

a) $f(x)=3^{x+1}$**;** **b)** $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{3x+5}$**;** **c)** $f(x)=4^{\sqrt{x}}$**;**

d) $f(x)=5^{\sqrt{3x-6}}$; **e)** $f(x)=2^{\frac{x+5}{x}}$; **f)** $f(x)=x^{2x-4}$;

g) $f(x)=3^{\sqrt{x^2-6x+5}}$;

2. Să se compare perechile de numere:

a) $(3,7)^3$ și $(3,7)^{\sqrt{10}}$; b) $(1,5)^{\sqrt{5}}$ și $(1,5)^2$; c) $\left(\frac{2}{5}\right)^6$ și $\left(\frac{2}{5}\right)^8$; d) c) $\left(\frac{1}{4}\right)^{10}$ și $\left(\frac{1}{4}\right)^9$;

3. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=3^x+4^x$**. Să se calculeze** $f(-2)+f(-1)+f(0)$**.**

4. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ **astfel încât funcția f(x),** $f:\mathbb{R}\to(0;\infty)$ **să fie strict descrescătoare pe** $\mathbb{R}$**.**

a) $f(x)=(2m-8)^x$; b) $f(x)=(2m^2-17)^x$; c) $f(x)=(24-m^2)^{x+1}$; d) $f(x)=\left(\frac{m+2}{m-3}\right)^{x+2}$

5. Să se determine semnul funcţiilor:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=10^x$**;** **b)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=10^x-1$**;**

c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=10^{x-1}-1$**;** **d)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\left(\frac{1}{10}\right)^x-1$**;**

6. Să se reprezinte graficul funcţiilor $f:D\to\mathbb{R}$ **unde D este domeniul maxim de definiţie al funcţiei f:**

a) $f(x)=2^{x-1}$; b) $f(x)=2^{3x+6}$; c) $f(x)=3^{x+1}$;

d) $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2}$; e) $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}$; f) $f(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^{3x-9}$;

5.2 Ecuaţii exponenţiale

Definiţie: Se numeşte **ecuaţie exponenţială** o ecuaţie în care necunoscuta x apare la exponenţi.

Tipuri de ecuaţii:

I. a $^{f(x)}=b, a\rangle 0, a\neq 1, b\rangle 0 \Rightarrow f(x)=\log_a b$; **Exemplu**: $3^x=81\Rightarrow x=\log_3 81=\log_3 3^4=4$;

II. a $^{f(x)}=a^{g(x)}, a\rangle 0 \Rightarrow f(x)=g(x)$; **Exemplu**: $5^x=125\Leftrightarrow 5^x=5^3\Rightarrow x=3$;

III. Ecuaţii exponenţiale reductibile la ecuaţii algebrice printr-o substituţie;

Exemplu: $9^x-10\cdot 3^x+9=0$. Se face substituţia $3^x=t,\ t\rangle 0$ rezultând ecuaţia de gradul al doilea

$t^2-10t+9=0$ cu soluţiile 1 şi 9. Aşadar, din $3^x=1\Rightarrow x=0$ şi din $3^x=9\Rightarrow x=2$; $S=\{0;2\}$.

IV. a $^{f(x)}=b^{g(x)}, a,b\rangle 0 \Rightarrow f(x)=g(x)\cdot\log_a b$; Se logaritmează ecuaţia într-o bază convenabilă;

Exemplu: $2^x=3^{x+2}\Rightarrow \log_2 2^x=\log_2 3^{x+2}\Rightarrow x=(x+2)\log_2 3\Rightarrow x=\dfrac{2\log_2 3}{1-\log_2 3}$;

V. Ecuaţii ce se rezolvă utilizând monotonia funcţiei exponenţiale.

Exemple: Să se rezolve ecuaţiile în $\mathbb{R}$: **a)** $3^x+4^x=5^x$;

b) $3^x+4^x=5^x+x-2$;

Rezolvare: **a)** $3^x+4^x=5^x \,|:5^x \Rightarrow \left(\dfrac{3}{5}\right)^x+\left(\dfrac{4}{5}\right)^x=1$. Funcţia din partea stângă este

descrescătoare deoarece este suma a două funcţii descrescătoare, prin urmare este injectivă şi deci admite soluţie unică. Se observă că x = 2 ;

b) $3^x+4^x=5^x+x-2\,|:5^x \Rightarrow \left(\dfrac{3}{5}\right)^x+\left(\dfrac{4}{5}\right)^x=1+\dfrac{x-2}{5^x}$. Cum funcţia $f(x)=\left(\dfrac{3}{5}\right)^x+\left(\dfrac{4}{5}\right)^x$ este strict

descrescătoare pe $\mathbb{R}$ (*), rezultă că f este injectivă (**).

Dacă $x\langle 2 \overset{(*)}{\Rightarrow} f(x)\rangle f(2)=1\rangle 1+\dfrac{x-2}{5^x}$

Dacă $x\rangle 2 \overset{(*)}{\Rightarrow} f(x)\langle f(2)=1\langle 1+\dfrac{x-2}{5^x}$. Rezultă $f(x)=f(2)\overset{(**)}{\Leftrightarrow} x=2.$

Inecuaţii exponenţiale

$\boxed{a\rangle 1\ :\ a^{f(x)}\leq a^{g(x)}\Rightarrow f(x)\leq g(x)}$ $\qquad$ $\boxed{a\in(0;1)\ :\ a^{f(x)}\leq a^{g(x)}\Rightarrow f(x)\geq g(x)}$

Exemple:

a) $6^{2x-8}\leq 6^{x+4}\Rightarrow 2x-8\leq x+4\Rightarrow 2x-x\leq 4+8\Rightarrow x\leq 12$;

b) $\left(\dfrac{3}{5}\right)^{3x+8}\leq\left(\dfrac{3}{5}\right)^{x-6}\Rightarrow 3x+8\geq x-6\Rightarrow 3x-x\geq -6-8\Rightarrow 2x\geq -14\Rightarrow x\geq -7$.

Exercitii rezolvate

1. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) . $3^{x+1}=\sqrt[3]{9}$; **b).** $3^{x^2-x+1}=27$; **c).** $125^x=\frac{1}{5}$;

Rezolvare:

a). $3^{x+1}=3^{\frac{2}{3}}\Rightarrow x+1=\frac{2}{3}\Rightarrow x=-\frac{1}{3}.\quad S=\left\{-\frac{1}{3}\right\}$;

b) $x^2-x+1=3\Rightarrow x^2-x-2=0\Rightarrow S=\{-1;2\}$;

c) $5^{3x}=5^{-1}\Rightarrow 3x=-1\Rightarrow x=-\frac{1}{3}.\ S=\left\{\frac{-1}{3}\right\}$;

2. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a). $3^{x+1}+3^x=108$; **b).** $3^{x-2}+3^{x+1}+3^x=37$; **c).** $2^{x+5}-2^{x+2}=56$;

Rezolvare:

a) $3^x\cdot 3+3^x=108\Rightarrow 3^x\cdot 4=108\Rightarrow 3^x=27\Rightarrow x=3,\ S=\{3\}$;

b) $3^{x-2}+3^{x+1}+3^x=37\Rightarrow\frac{3^x}{3^2}+3^x\cdot 3+3^x=37\Rightarrow 3^x\cdot\left(\frac{1}{9}+3+1\right)=37\Rightarrow 3^x\cdot\frac{37}{9}=37\Rightarrow 3^x=9\Rightarrow x=2.$

c) $2^x\cdot 2^5-2^x\cdot 2^2=56\Rightarrow 2^x\left(32-4\right)=56\Rightarrow 2^x=2\Rightarrow x=1.\quad S=\{1\}$;

3. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) . $3\cdot 9^x+2\cdot 3^x=1$; **b).** $2^{2x}-5\cdot 2^x+4=0$; **c).** $3^{x+1}+3^{1-x}=10$;

Rezolvare:

a) $3^x\overset{notam}{=}t\rangle\ 0\Rightarrow 3t^2+2t-1=0\Rightarrow t\in\left\{-1;\frac{1}{3}\right\}\qquad S=\{-1\}$;

b) $2^x\overset{notam}{=}t\rangle\ 0\Rightarrow t^2-5t+4=0\Rightarrow t\in\{1;4\},\quad S=\{0;2\}$;

c). $3^x\cdot 3+\frac{3}{3^x}=10\Rightarrow 3\cdot(3^x)^2-10\cdot 3^x+3=0\Rightarrow\ 3t^2-10t+3=0\Rightarrow\ S=\{-1\}$;

4. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $\sqrt{3^x}+\sqrt{3^{-x}}=2$; **b)** $\sqrt{5^x}+\sqrt{5^{-x}}=4$; **c)**

$2^{x+4}+2^{x+1}-6\cdot 2^x=3^{x+3}+3^{x+1}-3\cdot 3^x$;

d) $5^{x+2}+2\cdot 5^{x+1}+5^x=4\cdot 6^{x+1}+6^x$; **e)** $3\cdot 2^{2x}-5\cdot 6^x+2\cdot 3^{2x}=0$;

Rezolvare:

a) $\sqrt{3^x}+\sqrt{3^{-x}}=2\quad\Rightarrow\sqrt{3^x}+\frac{1}{\sqrt{3^x}}=2$; Notăm $\sqrt{3^x}=t\rangle 0$ de unde rezultă

$t+\frac{1}{t}\overset{t)}{=}2\Rightarrow t^2-2t+1=0,\quad \triangle=b^2-4ac,\quad \triangle=(-2)^2-4\cdot 1\cdot 1,\quad \triangle=0$

Din $(t-1)^2=0$ rezultă $t=1\Rightarrow x=0;\ S=\{0\}$;

b) $\sqrt{5^x}+\sqrt{5^{-x}}=4\quad\Rightarrow\quad\sqrt{5^x}+\frac{1}{\sqrt{5^x}}=4$ Notăm $\sqrt{5^x}=t\rangle 0$ de unde rezultă

$t+\frac{1}{t}\overset{t)}{=}4,\quad t^2-4t+1=0,\quad ,\triangle=b^2-4ac\quad\triangle=(-4)^2-4\cdot 1,\quad\triangle=16-4=12$

$t_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{4\pm2\sqrt{3}}{2}=2\pm\sqrt{3}\ \Rightarrow\ x=\log_{\sqrt{5}}(2\pm\sqrt{3})$;

c) $2^{x+4}+2^{x+1}-6\cdot2^x=3^{x+3}+3^{x+1}-3\cdot3^x\Leftrightarrow\ 2^x\cdot2^4+2^x\cdot2-6\cdot2^x=3^x\cdot3^3+3^x\cdot3-3\cdot3^x\Leftrightarrow$

$2^x\cdot2^4+2^x\cdot2-6\cdot2^x=3^x\cdot3^3+3^x\cdot3-3\cdot3^x\Leftrightarrow\quad 2^x(2^4+1\cdot2-6\cdot1)=3^x(3^3+3-3)\Rightarrow$

$2^x(16-4)=3^x(27)\Rightarrow\left(\frac{2}{3}\right)^x=\frac{27}{12}=\frac{9}{4}=\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\Rightarrow x=-2;\ S=\{-2\}$

d) $5^{x+2}+2\cdot5^{x+1}+5^x=4\cdot6^{x+1}+6^x\Leftrightarrow\quad 5^x\cdot5^2+2\cdot5^x\cdot5+5^x=4\cdot6^x\cdot6+6^x\Leftrightarrow$

$5^x(5^2+2\cdot1\cdot5+1)=6^x(4\cdot6+1)\Leftrightarrow\quad 5^x(25+11)=6^x(25)\Leftrightarrow\quad 5^x(36)=6^x(25)\Leftrightarrow$

$\Rightarrow\frac{5^x}{6^x}=\frac{25}{3}\Leftrightarrow\left(\frac{5}{6}\right)^x=\left(\frac{5}{6}\right)^2\Rightarrow x=2;\quad S=\{2\}$

e) $3\cdot2^{2x}-5\cdot6^x+2\cdot3^{2x}=0\,|:6^x\Rightarrow\quad 3\cdot\frac{2^x\cdot2^x}{2^x\cdot3^x}-5+2\cdot\frac{3^x}{2^x}=0$, Notăm $\left(\frac{2}{3}\right)^x=t\rangle0\Rightarrow$

$3t-5+\frac{2}{t}=0\Leftrightarrow3t^2-5t+2=0,\quad t_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{5\pm\sqrt{1}}{6},$

$t_1=\frac{5+1}{6}=\frac{6}{6}=1,\left(\frac{2}{3}\right)^x=1\Rightarrow x=0,\quad t_2=\frac{5-1}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3},\left(\frac{2}{3}\right)^x=\frac{2}{3}\Rightarrow x=1,\quad S=\{0;1\};$

5. Dacă $4^x+4^{-x}=10$, **să se calculeze** $A=2^x+2^{-x}$.

Rezolvare:

$A^2=\left(2^x+2^{-x}\right)^2=4^x+4^{-x}+2=12\Rightarrow A=\sqrt{10}$ întrucât A este pozitiv fiind suma a două funcţii exponenţiale.

6*. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ **ecuațiile:**

a) $2^{x-2}\cdot4^{x-2}\cdot8^{x-3}\cdot16^{x+1}=128$; **b)** $2013^{x-3}+2013^{\frac{9}{x}-3}=2$.

c) $\frac{7^x}{x}+x\cdot7^{\frac{1}{x}}=14$; **d)** $2^{\frac{5x+4}{x+2}}+2^{\frac{4x+2}{x+2}}=96.\quad\forall x\in\mathbb{R}-\{2\}$.

e) $\frac{5^x}{x^5}+5x^2+5^{\frac{1}{x}}\cdot x^3=15$; **f)** $7+9^{\frac{x}{4}}=2^x,(\forall)x\in\mathbb{R}^*$.

Rezolvare:

a) $2^{x-2}\cdot2^{2x-4}\cdot2^{3x-9}\cdot2^{4x+4}=2^7$ de unde rezultă $x-2+2x-4+3x-9+4x+4=7$

adică $10x=18\Rightarrow x=18:10$

b) $2013^{x-3}+2013^{\frac{9}{x}-3}=2\,\big|\cdot2013^3\Rightarrow2013^x+2013^{\frac{9}{x}}=2\cdot2013^3$.

Pentru $x\langle0$ ecuaţia nu are soluţii deoarece $2013^x+2013^{\frac{9}{x}}\langle2$.

Pentru $x\rangle0\Rightarrow\ 2013^x+2013^{\frac{9}{x}}\geq2\sqrt{2013^x\cdot2013^{\frac{9}{x}}}=2\sqrt{2013^{x+\frac{9}{x}}}\geq2\sqrt{2013^6}=2\cdot2013^3$ deoarece $x+\frac{9}{x}\geq6,\forall x\in\mathbb{R}_+$. Există egalitate când x = 3. Aşadar, $S=\{3\}$.

c) $14=\frac{7^x}{x}+x\cdot7^{\frac{1}{x}}\geq2\cdot\sqrt{\frac{7^x}{x}\cdot x\cdot7^x}=2\cdot\sqrt{7^{x+\frac{1}{x}}}\geq2\cdot\sqrt{7^2}=2\cdot7=14\Rightarrow$

$\sqrt{7^{x+\frac{1}{x}}}=7\Rightarrow x+\frac{1}{x}=2\Rightarrow x=1$

d) $2^{5-\frac{6}{x+2}}+2^{4-\frac{6}{x+2}}=96$. Notăm $2^{\frac{6}{x+2}}=t\Rightarrow \frac{2^5}{t}+\frac{2^4}{t}=96\Rightarrow 32+16=96t\Rightarrow t=\frac{1}{2}$.

$2^{\frac{6}{x+2}}=2^{-1}\Rightarrow \frac{6}{x+2}=-1\Rightarrow x=-8.$

e) $15=\frac{5^x}{x^5}+5x^2+5^{\frac{1}{x}}\cdot x^3\geq 3\sqrt[3]{\frac{5^x}{x^5}\cdot 5x^2\cdot 5^{\frac{1}{x}}\cdot x^3}=3\cdot\sqrt[3]{5^{x+1+\frac{1}{x}}}\geq 3\cdot\sqrt[3]{5^3}=3\cdot 5=15\Rightarrow$

$3\cdot\sqrt[3]{5^{x+1+\frac{1}{x}}}=15\Rightarrow x+1+\frac{1}{x}=3\Rightarrow x=1$.

f) Notăm pe $\frac{x}{4}=t\Rightarrow x=4t\Rightarrow 7+9^t=2^{4t}\Leftrightarrow 16^t-9^t-7=0$.

Fie $f(t)=16^t-9^t-7$. Pentru $t\langle 0\Rightarrow 7+9^t\rangle 7$ în timp ce $2^{4t}\langle 1$.

Fie $t\rangle 0\Rightarrow$ f este strict crescătoare. Din f(t)= f(1) si f injectivă, rezultă t =1 de unde **x=4**.

7*. a) Să se arate că $a^3+b^3+c^3-3abc=\frac{1}{2}(a+b+c)\left((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right)$

b) Să se rezolve ecuația în numere reale: $8^{x^2-3x}+27^{x^2-3x}+125^{x^2-3x}=3\cdot 30^{x^2-3x}$.

Rezolvare:

a) Se desfac parantezele în membrul drept; $\frac{1}{2}(a+b+c)\left(2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)\right)$

b) Se utilizează punctul a) pentru $a=2^{x^2-3x};b=3^{x^2-3x};c=5^{x^2-3x}$.

8*. Să se rezolve inecuația $\left(\frac{3}{5}\right)^{\log_{0,5}\frac{3x-1}{3x+2}}\langle 1$.

Rezolvare:

$\left(\frac{3}{5}\right)^{\log_{0,5}\frac{3x-1}{3x+2}}\langle\left(\frac{3}{5}\right)^0$, rezultă $\log_{0,5}\frac{3x-1}{3x+2}\rangle 0\Leftrightarrow\log_{0,5}\frac{3x-1}{3x+2}\rangle\log_{0,5}1\Rightarrow\frac{3x-1}{3x+2}\langle 1\Leftrightarrow$

$\frac{3x-1}{3x+2}-1\langle 0$ sau $\frac{-2}{3x+1}\langle 0\Rightarrow x\rangle-\frac{1}{3}$.

Exercitii propuse

1. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $2^x=256$; **b)** $2^{-x}=32$; **c)** $2^{x+6}=\frac{1}{8}$;

d) $\left(\frac{1}{2}\right)^x=1$; **e)** $\left(\frac{2}{5}\right)^x=\frac{125}{8}$; **f)** $10^x=\sqrt[3]{100}$;

g) $3^x=\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$; **h)** $4^{x-5}=\frac{1}{64}$; **i)** $5^{x-2}=\left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{x}}$;

j) $6^{\sqrt{3x-1}}=36^{\frac{x}{2}}$; **k)** $3^{2x^2-5x}=\frac{1}{27}$; **l)** $\frac{2^x}{3^x}=\frac{9}{4}$;

m) $\left(\frac{3}{5}\right)^{5x+4}=\left(\frac{5}{3}\right)^{2x+3}$; **n)** $x^{x^2-7x+10}=1$; **o)** $\left(x^2+x+1\right)^{x^2-9}=1$;

p) $(x+4)^{x^2+4x}=(x+4)^{12}$;

2. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $5^{3x}=625$; **b)** $3^x=729$; **c)** $2^x=512$;

d) $2^{-x}=16$; **e)** $16^x=\frac{1}{4}$; **f)** $125^x=\frac{1}{5}$;

g) $5^{3x-2}=\frac{1}{25}$; **h)** $0,25^{4-x}=\frac{128}{2^{x+3}}$; **i)** $3^{x-2}=\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x}}$;

j) $6^{\sqrt{4x-1}}=36$; **k)** $3^{\sqrt{3x+2}}=27$; **l)** $5^{\sqrt{3x+1}}=125$;

m) $x^{x^2-5x+6}=1$; **n)** $2^{x^2-6x+4,5}=16\sqrt{2}$; **o)** $x^{x^2-7x+12}=1$;

p) $7^{2x^2-5x}=\frac{1}{49}$;

3. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $4^{5x-1}=4^{2x+11}$; **b)** $2^{4x-3}=2^{6x+7}$; **c)** $\left(\frac{2}{13}\right)^{3x-10}=\left(\frac{13}{2}\right)^{7x-10}$;

d) $2^{x^2-x}=2^{3x-3}$; **e)** $5^{\sqrt{2x-1}}=25^{\frac{x}{2}}$; **f)** $\frac{2^x}{3^x}=\frac{3}{2}$;

g) $\frac{1}{2^x}=\frac{4^x}{8}$; **h)** $\left(\frac{3}{7}\right)^{4x-7}=\left(\frac{7}{3}\right)^{7x-3}$;

4. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $2^{x+3}+2^x=36$; **b)** $3^{x+2}+2\cdot3^{x+1}+3^x=16$; **c)** $5^{x+2}-2\cdot5^{x+1}-5^x=5\cdot5^{x-1}$;

d) $4^{3x+2}+3\cdot4^{3x+1}-12\cdot4^{3x}=256$; **e)** $4^x-3\cdot2^x+2=0$; **f)** $3^{2x}+8\cdot3^x-9=0$;

g) $9^x-10\cdot3^x+9=0$; **h)** $2\cdot2^{2x}-3\cdot2^x+1=0$; **i)** $25^x+5^x-30=0$;

j) $25^{\sqrt{x-4}}-20\cdot5^{\sqrt{x-4}}-125=0$;

5. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $3^{x+1}+3^x=108$; **b)** $2^{x+3}-2^x=28$; **c)** $3^x+2\cdot3^{x+1}=7$;

d) $2^{x+3}+2^{x+2}+2^{x+1}+2^x=30$; **e)** $5^{x+1}+5^x+5^{x-1}=155$; **f)** $2^{x-2}+2^{x-3}+2^{x-4}=448$;

g) $2^{x+3}+2^{x+2}-2^{x+1}+2^x-2=42$; **h)** $5^{x-1}+5^{x-2}+5^{x-3}=775$;

i) $3^{x+3}+3^{x+2}+3^{x+1}+3^x+3=123$ **j)** $2^x+2^{x+1}+2^{x+2}=6^x+6^{x+1}$;

k) $3^{x+1}+5^{x+2}=3^{x+5}-3\cdot5^{x+3}$;

6. Să se rezolve ecuațiile:

a. $25^x+4\cdot5^x-5=0$; **b.** $16^x+3\cdot4^x=4$; **c.** $3^x+9^x=2$;

d. $9^x-2\cdot3^x-3=0$; **e.** $2^{2x}-3\cdot2^{x+1}+8=0$; **f.** $2\cdot3^x+3^{1-x}=7$;

g. $2^x+4\cdot2^{-x}-5=0$; **h.** $2^x+4^x=20$; **i.** $(2+\sqrt{3})^x+(2-\sqrt{3})^x=14$;

7. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $3^{x+1}=\sqrt[3]{9}$; **b)** $3\cdot9^x+2\cdot3^x=1$; **c)** $3^{x^2-x+1}=27$;

d) $2^{2x}-5\cdot2^x+4=0$; **e)** $25^x+4\cdot5^x-5=0$; **f)** $3^{x+1}+3^{1-x}=10$;

g) $2\cdot3^x+3^{1-x}=7$; **h)** $16^x+3\cdot4^x=4$; **i)** $3^x+9^x=2$;

j) $2^{2x}-3\cdot 2^{x+1}+8=0$; **k)** $3^{2x+1}-10\cdot 3^{x=1}+27=0$; **l)** $2^{2x+1}+2^{x=2}=160$;

m) $2^{x}+4\cdot 2^{-x}-5=0$; **n)** $2^{x+5}-2^{x+2}=56$; **o)** $9^{x}-2\cdot 3^{x}-3=0$;

p) $2^{x}+4^{x}=20$; **q)** $3^{x-2}+3^{x+1}+3^{x}=39$; **r)** $(2+\sqrt{3})^{x}+(2-\sqrt{3})^{x}=4$.

8. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $3^{2x}+2\cdot 3^{x}-3=0$; **b)** $4^{x}-3\cdot 2^{x}+2=0$; **c)** $2^{x}-14\cdot 2^{-x}=-5$;

d) $2\cdot 2^{2x}-3\cdot 2^{x}+1=0$; **e)** $16^{x}-4^{x}-56=0$; **f)** $25^{x}+5^{x}-30=0$;

g) $7^{6x}-5\cdot 7^{3x}+6=0$; **h)** $3^{4x}-4\cdot 3^{2x}+3=0$; **i)** $49^{x}-8\cdot 7^{x}+7=0$;

j) $9^{x}-10\cdot 3^{x}+9=0$; **k)** $5^{2x}-5^{x}-600=0$; **l)** $4^{x}+2^{x+1}=80$;

9. Să se rezolve inecuaţiile:

a) $5^{x-2}\geq 125$; **b)** $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1}\langle\frac{1}{9}$; **c)** $3^{x+1}+3^{x+2}+3^{x+3}-1053\langle 0$;

d) $\left(\frac{3}{2}\right)^{2x+8}\leq\frac{9}{4}$; **e)** $\left(\frac{4}{5}\right)^{3x^{2}-1}\geq\left(\frac{16}{25}\right)^{x^{2}+4}$; **f)** $2\cdot 4^{x}\leq 12\cdot 2^{x}-16$.

10*. Să se rezolve ecuația: $64^{x}+6\cdot 4^{x}+\frac{8}{64^{x}}+\frac{12}{4^{x}}=27$.

11*. Să se rezolve ecuația: $3^{x}+4^{x}=5^{x}+x-2$.

5.3 Teste de autoevaluare

Testul 1. Funcţii exponenţiale

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2^{x}-2^{-x}$. Să se calculeze
$f(-5)+f(-4)+.....+f(0)+.....+f(4)+f(5)$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\left(\frac{1}{5}\right)^{x}$. Să se calculeze

$f(0)+f(1)+f(2)+.....+f(9)+f(10)$.

3. Să se reprezinte graficul funcţiilor $f(x)=5^{x+2}$; si $g(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-4}$;

4. Fie $a,b,c\in\mathbb{Z}$ astfel încât $3^{a}+3^{b}+3^{c}=1$. Să se determine valoarea maximă a lui $a+b+c$.

5. Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât $a^{x^{2}-2x+3}\rangle\frac{1}{a}$ pentru orice x real.

6. Fie $f:[1,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=2^{x}+2^{\frac{1}{x}}$. Să se arate că $f(x)\geq 4,\forall x\in[1,\infty)$.

Testul 2. Ecuaţii exponenţiale

1. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $6^{2x-4}=6^{8+5x}$.
2. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $8^{x-3}=2^{x^{2}-3x}$.
3. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $4^{x-2}+4^{x+2}=257$.

4. Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei $4^x - 9 \cdot 2^x + 8 = 0$.

5. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\left(\frac{2}{3}\right)^{x+4} \cdot \frac{9}{4} = \frac{16}{81}$.

6. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $5^{2-x} = \left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{x}}$.

Testul 3. Ecuaţii exponenţiale

1. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $16^{x-1} = 0,25$.
2. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $9^{\sqrt{x+2}} = 27$.
3. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $3^{x-2} + 3^{x-1} + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 336$.
4. Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei $49^x - 8 \cdot 7^x + 7 = 0$.
5. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\left(\frac{25}{16}\right)^{x^2-10} - (0,8)^2 = 0$.
6. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\left(\sqrt{5}+2\right)^x + \left(\sqrt{5}-2\right)^x = 1$.

Testul 4. Inecuaţii exponenţiale

1. Să se rezolve inecuaţia $5^{x-2} \geq 125$.
2. Să se rezolve inecuaţia $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1} < \frac{1}{9}$.
3. Să se rezolve inecuaţia $3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} - 1053 < 0$.
4. Să se rezolve inecuaţia $\left(\frac{3}{2}\right)^{2x+8} \leq \frac{9}{4}$.
5. Să se rezolve inecuaţia $\left(\frac{4}{5}\right)^{3x^2-1} \geq \left(\frac{16}{25}\right)^{x^2+4}$.
6. Să se rezolve inecuaţia $2 \cdot 4^x \leq 12 \cdot 2^x - 16$.

Cap. 6. FUNCȚII LOGARITMICE. ECUAȚII LOGARITMICE

6.1 Funcţii logaritmice

Definiţie. Se numeşte **funcţie logaritmică în baza a**, o funcţie de forma $f:(0;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\log_a x, a\rangle 0, a\neq 1$, x>0.

Proprietăţi:

1. Dacă $a\rangle 1\Rightarrow$ f este strict crescătoare

$x_1\langle x_2\Rightarrow \log_a x_1\langle \log_a x_2$

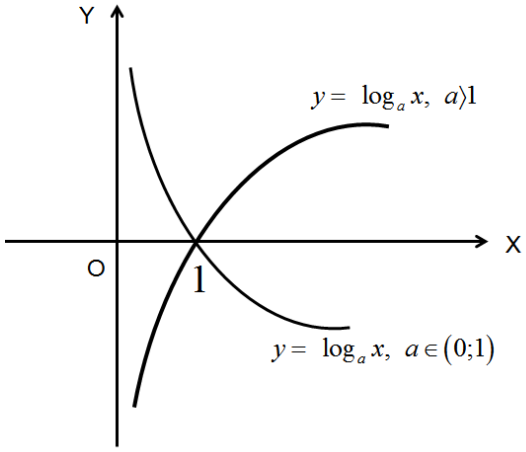
Dacă $a\in(0,1)\Rightarrow$ f este strict descrescătoare

$x_1\langle x_2\Rightarrow \log_a x_1\rangle \log_a x_2$;

2. f este concavă pentru $a\rangle 1$şi convexă pentru $a\in(0;1)$;

3. f este bijectivă pe $\mathbb{R}$;

4. f este inversabilă, inversa sa fiind funcţia exponenţială ;



Proprietăţi ale logaritmilor:

Fie $a,b,c\in(0,\infty), a,b,c\neq 1, x,y\in(0,\infty), m\in\mathbb{R}\Rightarrow$

$1)\ a^y=x\rangle 0\Rightarrow y=\log_a x$ $2)\ \log_a x\cdot y=\log_a x+\log_a y$ $3)\ \log_a\frac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$

$4)\ \log_a a^m=m,$ $5)\ \log_a b^m=m\log_a b$ $6)\ \log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a},$ $\frac{1}{\log_a b}=\log_b a$

$7)\ a^{\log_b c}=c^{\log_b a},$ $8)\ x=a^{\log_a x}$ $9)\ \log_a 1=0,$ $10)\ \log_a a=1.$

Poziţia lui $f(x)=\log_a x$ în raport cu 0

	$a\rangle 1$	$a\in(0;1)$
$x\rangle 1$	$f(x)\rangle 0$	$f(x)\langle 0$
$x\in(0;1)$	$f(x)\langle 0$	$f(x)\rangle 0$

Dacă x = 1, rezultă f(x) = 0.

Exercitii rezolvate

1. Să se determine domeniile maxime de definiţie ale funcţiilor:

a) $f(x)=\log_4(3x-12)$; **b)** $f(x)=\log_3(x^2-25)$; **c)** $f(x)=\log_3(x^2+8x)$;

d) $f(x)=\log_2(2x^2+5x-3)$**;** **e)** $f(x)=\log_{6-x}(2x+8)$**.**

Rezolvare:

a) Se pun condițiile de existență a radicalilor:

$3x-12\rangle 0\Rightarrow x\rangle 4\Rightarrow D_f=(4;\infty)$**;**

b) Din $x^2-25\rangle 0\Rightarrow x^2\rangle 25\Rightarrow x\in(-\infty;-5)\cup(5;\infty)=D_f$;

c) Din $x^2+8x\rangle 0\Rightarrow x(x+8)\rangle 0\Rightarrow x\in(-\infty;-8)\cup(0;\infty)=D_f$;

d) Din $2x^2+5x-3\rangle 0\Rightarrow x\in(-\infty;-3)\cup\left(\frac{1}{2};\infty\right)$**;**

e) Din $\begin{cases}2x+8\rangle 0\\6-x\rangle 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\rangle -4\\x\langle 6\end{cases}\Rightarrow x\in(-4;6)$.

2. Se consideră funcția $f:(0;\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\log_4 x$**. Să se calculeze.**

a) $f(1)+f(4)+f(\frac{1}{4})$**;** **b)** $f(2)+f(\frac{1}{2})$**;** **c)** $f(\frac{1}{16})\cdot f(\frac{1}{4})\cdot f(1)\cdot f(4)\cdot f(16)$**;**

Rezolvare:

a) $f(1)+f(4)+f(\frac{1}{4})=\log_4 1+\log_4 4+\log_4\frac{1}{4}=0+1+(-1)=0$; Altfel,

$\log_4 1+\log_4 4+\log_4\frac{1}{4}=\log_4 1\cdot 4\cdot\frac{1}{4}=\log_4 1=0$

b) $f(2)+f(\frac{1}{2})=\log_4 2+\log_4 2^{-1}=\frac{\log_2 2}{\log_2 2^2}+\frac{\log_2 2^{-1}}{\log_2 2^2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$**;** Altfel,

$\log_4 2+\log_4 2^{-1}=\log_4 2\cdot 2^{-1}=\log_4 1=0$**.**

c) Deoarece $f(1)=\log_4 1=0$ atunci produsul este egal cu 0.

3. Să se determine valorile reale ale lui x astfel încât funcția $f:D\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$**,** $f(x)=\log_{4x-1}8x^2$ **să fie corect definită.**

Rezolvare: Funcția $f(x)=\log_{4x-1}8x^2$ este corect definită

$$\Leftrightarrow\begin{cases}8x^2\rangle 0,\ \forall x\in\mathbb{R}\\4x-1\rangle 0\Rightarrow x\rangle\frac{1}{4}\\4x-1\neq 1\Rightarrow x\neq\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow x\in\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2};\infty\right).$$

Exercitii propuse

1. Se consideră funcția $f:(5;\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\log_{\frac{1}{5}}(x-5)$. Să se calculeze $f(7)+f(\frac{15}{2})$;

2. Se consideră funcția $f:(0;\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\log_3 x+\log_{\frac{1}{3}} x^2$. Să se calculeze

$f(1)+f(\frac{1}{3})+f(3)+f(\sqrt{3})$;

3. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât punctul $A(m;1)$ să aparțină graficului funcției f(x);

4. Să se demonstreze că punctul $O(0;0)$ aparține graficului funcției

$f:D\to\mathbb{R},\ f(x)=\log_2(2x^2+3x+1)$.

5. Fie $f:(0;\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\log_3 x$. Să se arate că $f(2\sqrt{3}-3)+f(2\sqrt{3}+3)\ \rangle\ f(\sqrt{3})$.

6. Să se studieze monotonia funcțiilor:

a) $f(x)=\log_3 x+\log_9 x$; b) $f(x)=\log_{\frac{1}{2}} x+\log_{\frac{1}{4}} x$;

c) $f(x)=x+4+\log_2 x$; d) $f(x)=-2x+1+\log_{\frac{1}{3}}(x+2)$.

7. Să se determine semnul funcțiilor $f:D\to\mathbb{R}$:

a) $f(x)=\log_5 x+1$; b) $f(x)=\log_3(x+2)$; c) $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x-4)$.

8. Fie $f:\left(\frac{1}{2};\infty\right)\to\mathbb{R},\ f(x)=\log_3(4x-2)$. Să se arate că f(x) este inversabilă si să se determine inversa lui f(x).

9. Să se reprezinte graficul funcţiilor $f:D\to\mathbb{R}$ unde D este domeniul maxim de definiţie al funcţiei f:

a) $f(x)=\log_2(x+3)$; b) $f(x)=\log_3(2x-4)$; c) $f(x)=\log_2(x+2)$;

d) $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x+1)$; e) $f(x)=\log_{\frac{1}{3}}(2x+4)$; f) $f(x)=\log_{\frac{1}{4}}(x-3)$;

10. Să se determine domeniul maxim de definiţie pentru funcţiile:

a) $\ln(x-6)$; b) $\ln(x^2-7x+10)$; c) $\log_3\frac{1}{x-2}$;

d) $\ln\frac{x+2}{x-1}$; e) $\log_2\sqrt{3x-9}$;

11. Să se determine domeniul maxim de definiţie pentru funcţiile:

a) $\log_3(x+4)$; b) $\log_2(x^2-9)$; c) $\log_2(4-x^2)$; d) $\lg(x^2-5x+4)$;

e) $\log_x(x^2-2x-3)$; f) $\log_{3+x}(x^2-1)$; g) $\log_2(\log_2 x)$; h) $\log_x\sqrt{x+2}$;

i) $\ln\frac{3-x}{x+5}$; j) $\log_{\frac{1}{3}}(-x^2+5x-4)$; k) $\log_3\frac{1}{x+6}$; l) $\ln(x^2-8x+12)$;

12. Fie $f:D\to\mathbb{R},\ f(x)=\log_3\frac{x+1}{x+2}$. Să se determine domeniul maxim de definiție și să se calculeze $f(1)+f(2)+....+f(484)$.

13. Fie $f:(1,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{\log_x a}$. Să se determine $a\in\mathbb{R}_+-\{0,1\}$ astfel încât

$f(2)+f(3)+....+f(10)=2$.

6.2 Ecuaţii logaritmice

Definiţie : Se numeşte **ecuaţie logaritmică** o ecuaţie în care necunoscuta x apare ca argument sau ca bază la logaritmi.

Observaţie: La rezolvarea unei ecuaţii logaritmice este necesară punerea condiţiilor de existenţă a logaritmilor care apar în ecuaţie.

Tipuri de ecuaţii:

1. $\log_{f(x)} g(x) = b, f, g \rangle 0, f \neq 1 \Rightarrow g(x) = f(x)^b$;

Exemplu: $\log_2 x = 5 \Rightarrow x = 2^5 \Rightarrow x = 32$**;**

2. $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Rightarrow f(x) = g(x)$;

Exemplu: $\log_3 x = \log_3 7 \Rightarrow x = 7$**;**

3. $\log_a f(x) = \log_b g(x) \Rightarrow f(x) = a^{\log_b g(x)}$;

Exemplu: $\log_2 x = \log_3 6 \Rightarrow x = 2^{\log_3 6}$**;**

4. Ecuaţii logaritmice reductibile la ecuaţii algebrice printr-o substituţie;

Exemplu: $(\log_3 x)^2 - 4\log_3 x + 3 = 0$. Notăm $\log_3 x = t \Rightarrow t^2 - 4t + 3 = 0$ cu soluţiile 1 şi 3.

Atunci, din $\log_3 x = 1 \Rightarrow x = 3$ şi din $\log_3 x = 3 \Rightarrow x = 27$; $S = \{3; 27\}$;

5. Ecuaţii ce se rezolvă utilizând monotonia funcţiei logaritmice;

Exemplu: Să se rezolve ecuaţia în $\mathbb{R}_+^*$: $\log_3 x = \frac{3}{x}$;

Rezolvare: Cum funcţia $\log_3 x$ este strict crescătoare pe $\mathbb{R}_+^*$ iar funcţia $\frac{3}{x}$ este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}_+^*$ rezultă că ecuaţia admite o singură soluţie, şi anume, x = 3.

Inecuaţii logaritmice

$a \rangle 1, \log_a f(x) \leq \log_a g(x) \Rightarrow f(x) \leq g(x)$;

Exemplu: $\log_3(6x+2) \leq \log_3(4x+6)$.

Rezolvare: : Cum baza logaritmului este 3, rezultă $6x+2 \leq 4x+6 \Rightarrow 2x \leq 4 \Rightarrow x \leq 2$.

$a \in (0,1), \log_a f(x) \leq \log_a g(x) \Rightarrow f(x) \geq g(x)$.

Exemplu: $\log_{\frac{1}{2}} 5x \leq \log_{\frac{1}{2}}(3x+2)$;

Rezolvare: Cum baza logaritmului este $\frac{1}{2}$, rezultă $5x \geq 3x+2 \Rightarrow 2x \geq 2 \Rightarrow x \geq 1$.

Exercitii rezolvate

1. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $\log_2(x+5)=3$; **b)** $\lg(x^2-3x)=1$; **c)** $\log_{\frac{1}{2}}(x-4)=-2$;

Rezolvare:

a). $\log_2(x+5)=3\Rightarrow x+5=2^3\Rightarrow x=8-5\Rightarrow x=3$, care verifică condiția de existență a logaritmului $x+5\rangle 0\Rightarrow x\rangle -5$.

b). $\lg(x^2-3x)=1\Rightarrow x^2-3x=10\Rightarrow x^2-3x-10=0\Rightarrow x\in\{-2;5\}$. Din condițiile de existență a ecuației rezultă $x^2-3x\rangle 0\Rightarrow x\in(-\infty,0)\cup(3;\infty)$, atunci $S=\{-2;5\}$.

c) $\log_{\frac{1}{2}}(x-4)=-2\Rightarrow x-4=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\Rightarrow x-4=4\Rightarrow x=8$. Din condiția de existență $x-4\ \rangle\ 0\Rightarrow S=\{8\}$.

2. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $\log_2(x^2-2x+1)=\log_2(x-1)$; **b)** $\log_3\left(x^2-7x+8\right)-\log_3\left(x-7\right)=0$;

c) $\log_2(2x+4)-\log_2(3x+1)=0$.

Rezolvare:

a). $\log_2(x^2-2x+1)=\log_2(x-1)\Rightarrow\ x^2-2x+1=x-1\Rightarrow\ x^2-3x+2=0\Rightarrow x\in\{1;2\}$. Din condițiile de existență a logaritmilor $\begin{cases}x^2-2x+1\rangle 0\\ x-1\rangle 0\end{cases}\Rightarrow x\rangle 1$, se obține $S=\{2\}$.

b) $\log_3\left(x^2-7x+8\right)=\log_3\left(x-7\right)\Rightarrow\ x^2-7x+8=x-7\Rightarrow x^2-8x+15=0\ \ x\in\{3;5\}$.

Din condițiile de existență obținem $\begin{cases}x^2-7x+8\rangle 0\\ x-7\rangle 0\end{cases}\Rightarrow x\rangle 7$, așadar, $S=\{\varnothing\}$.

c) $\log_2(2x+4)=\log_2(3x+1)\Rightarrow 2x+4=3x+1\Rightarrow 2x-3x=1-4\Rightarrow x=3$.

Din condițiile de existență a ecuației $\begin{cases}2x+4\rangle 0\\ 3x+1\rangle 0\end{cases}\Rightarrow x\rangle -\frac{1}{3}$, atunci $S=\{3\}$.

3. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $\log_2\left(x+2\right)+\log_2 x=3$; **b)** $\lg^2 x-4\lg x+3=0$; **c)** $\left(\log_2 x\right)^2-5\cdot\log_2 x+4=0$;

Rezolvare:

a) $\log_2\left(x+2\right)+\log_2 x=3\Rightarrow\log_2(x+2)\cdot x=3\Rightarrow x^2+2x=2^3\Rightarrow x^2+2x-8=0\Rightarrow x\in\{-4;2\}$.

Din condițiile de existență a ecuației $\begin{cases}x+2\rangle 0\\ x\rangle 0\end{cases}\Rightarrow x\rangle 0$ obținem $S=\{2\}$. S-au folosit formulele $\log_a x+\log_a y=\log_a x\cdot y$ și $\log_a x=N\Rightarrow x=a^N$.

b) $\lg^2 x-4\lg x+3=0$. Se notează $\lg x=t\Rightarrow t^2-4t+3=0\Rightarrow t\in\{1;3\}\Rightarrow\ \lg x=1\Rightarrow x=10$ și $\lg x=3\Rightarrow x=1000$.

c) C. E: $x\rangle 0$; Se face notaţia $\log_2 x = t \Rightarrow t^2 - 5t + 4 = 0 \Rightarrow t_1 = 1$ *sau* $t_2 = 4$;
Pentru $t = 1 \Rightarrow \log_2 x = 1 \Rightarrow x = 2$; Pentru $t = 4 \Rightarrow \log_2 x = 4 \Rightarrow x = 2^4 = 16$; $S = \{2;16\}$;

4*. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $\log_5 x + \log_{\sqrt[3]{5}} x + \log_{\frac{1}{5}} x = 2$**;** **b)** $\lg(10^{2x+1} + 7 \cdot 10^{x+1}) - \lg(10^{x+2} - 20) = 0$ **;**

c) $(\lg 5)^x + 10 \cdot (\log_5 10)^x = 11$ **;** **d)** $5^{\log_2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)} + \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 9;$

e) $\log_3(\log_2 x - 5) = 1 + \log_3(2 - 3 \cdot \log_x 4)$; **f)** $8 + \log_3 \frac{4x-8}{(x+1)^2} = x + \frac{2}{\sqrt{x-4}}$, $\forall x \in (4;\infty)$.

g) $\lg(x^2 + 8x) = \log_2 x + \lg 2$**;** **h)** $\frac{4^x}{\log_2(x+1)} + \frac{25^x}{\log_5(x+1)} = \frac{10^x}{\lg(x+1)}$**.**

Rezolvare:

a) $\log_5 x + \frac{\log_5 x}{\log_5 \sqrt[3]{5}} + \frac{\log_5 x}{\log_5 5^{-1}} = 2$ $\log_5 x \cdot (1 + 3 - 1) = 2 \Rightarrow$ $\log_5 x = 1 \Rightarrow x = 5.$

b) $\lg(10^{2x+1} + 7 \cdot 10^{x+1}) = \lg(10^{x+2} - 20)$ $10^{2x+1} + 7 \cdot 10^{x+1} = 10^{x+2} - 20$

$(10^x)^2 \cdot 10 + 7 \cdot 10^x \cdot 10 = 10^x \cdot 100 - 20$ Notăm pe $10^x = t \Rightarrow t^2 - 3t + 2 = 0 \Rightarrow$

$t_1 = 1 \Rightarrow 10^x = 1 \Rightarrow x = 0$ $t_2 = 2 \Rightarrow 10^x = 2 \Rightarrow x = \lg 2$.

c) Rezolvare: Cum $\lg 5 \cdot \lg 10 = 1$, cu notaţia $\lg 5 = t \Rightarrow \log_5 10 = \frac{1}{t}$.

Ecuaţia dată devine: $t + \frac{10}{t} = 11 \Leftrightarrow$ $t^2 - 11t + 10 = 0 \Rightarrow t_1 = 1, t_2 = 10$

Se obţin soluţiile $x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{\lg \lg 5}$.

d) Notăm $x^2 + \frac{1}{x^2} = t\rangle 0$. Atunci, ecuaţia data devine: $5^{\log_2 t} + t = 7$. Cum funcţia $f : (0;\infty) \to \mathbb{R}$, $f(t) = 5^{\log_2 t} + t$ este strict crescătoare pe $(0;\infty)$, rezultă că ecuaţia $f(t) = 7$ are soluţie unică şi anume t = 2 adică $x^2 + \frac{1}{x^2} = 2$ de unde se obţin soluţiile: x=1, x= -1;

$S = \{-1;1\}$.

e) Din $\log_3(\log_2 x - 5) = \log_3[3 \cdot (2 - 3\log_x 4)] \Rightarrow \log_2 x - 5 = 6 - 9 \cdot \frac{\log_2 4}{\log_2 x} \Rightarrow$

$t^2 - 11t + 18 = 0$, unde $t = \log_2 x$. Se obţine $t \in \{2;9\} \Rightarrow x \in \{4;512\}$.

f) Ecuaţia este echivalentă cu $4 + \log_3 \frac{4x-8}{(x+1)^2} = x - 4 + \frac{2}{\sqrt{x-4}}$. (

$x - 4 + \frac{2}{\sqrt{x-4}} = x - 4 + \frac{1}{\sqrt{x-4}} + \frac{1}{\sqrt{x-4}} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{(x-4) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x-4}}\right)^2} = 3$.

$4 + \log_3 \frac{4x-8}{(x+1)^2} \leq 3 \Rightarrow \log_3 \frac{4x-8}{(x+1)^2} \leq -1 \Rightarrow \frac{4x-8}{(x+1)^2} \leq \frac{1}{3} \Rightarrow (x-5)^2 \geq 0$. Adevărat;

Avem egalitate când x=5. Soluţia unică este x=5.

g) Condiţii de existenţă: $\begin{cases} x^2+8x\rangle 0 \\ x\rangle 0 \end{cases} \Rightarrow x\rangle 0$;

$x^2+8x=10^{\log_2 x+\lg 2} \Rightarrow x^2+8x=10^{\log_2 x}\cdot 10^{\lg 2} \Rightarrow x^2+8x=10^{\log_2 x+\lg 2} \Rightarrow x^2+8x=10^{\log_2 x}\cdot 2$.

Se face notaţia $\log_2 x=t \Rightarrow x=2^t$ de unde rezultă

$$\left(2^t\right)^2+8\cdot 2^t=2\cdot 10^t \,\big|:10^t \Rightarrow \left(\frac{4}{10}\right)^t+8\cdot\left(\frac{2}{10}\right)^t=2.$$

Cum funcţia din stânga este crescătoare iar în dreapta este funcţia constantă 2 rezultă că ecuaţia are o soluţie unică, aceasta fiind t = 1 de unde rezultă $\log_2 x=1\Rightarrow x=2$.

h) Ecuația dată este echivalentă cu $4^x\lg 2+25^x\lg 5=10^x \,\big|: 25^x \Rightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^{2x}\lg 2-\left(\frac{2}{5}\right)^x+\lg 5=0.$

Notăm cu $\left(\frac{2}{5}\right)^x=t\rangle 0$, rezultă ecuația $\lg 2\cdot t^2-t+\lg 5=0$ cu soluțiile $t_1=1\Rightarrow x_1=0;$

și $t_2=\frac{\lg 5}{\lg 2}\Rightarrow x_2=\log_{\frac{2}{5}}\left(\frac{\lg 5}{\lg 2}\right)$.

Exercitii propuse

1. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $\log_2 x=1$; **b)** $\log_{\frac{1}{2}} x=2$; **c)** $\log_3 x=-1$;

d) $\log_4 x=0$; **e)** $\log_x \frac{1}{9}=2$; **f)** $\log_{\frac{1}{5}} x=-2$;

g) $\log_3(2x-6)=2$; **h)** $\log_2(3x+1)=4$; **i)** $\lg(x+3)=2$;

j) $\log_2(x^2-8x-1)=3$; **k)** $\log_3(x^2-4x-3)=2$; **l)** $\log_4(x-5)=\frac{1}{2}$;

m) $\log_8(2x-3)=\frac{1}{3}$; **n)** $\log_2(\log_3 x)=1$; **o)** $\log_2(\log_{\frac{1}{2}}(\log_4 x))=0$;

p) $\log_3(2x-8)=3$; **q)** $\log_2(3x+6)=6$; **r)** $\log_{\sqrt{2}}(x+3)=4$;

s) $\log_{\sqrt{3}}(x-5)=6$; **t)** $\log_{\frac{1}{2}}(x-8)=-2$;

2. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $\log_3(x^2-7x+8)-\log_3(x-7)=0$; **b)** $\log_2(x+2)+\log_2 x=3$;

c) $\lg(x+3)+\lg(x+4)=\lg(3-3x)$; **d)** $\log_3 x+\log_9 x+\log_{27} x=\frac{11}{12}$;

e) $\lg^2(x-3)-\lg(x-3)=0$; **f)** $\lg^2 x-11\cdot\lg x+10=0$;

3. Să se rezolve ecuaţiile.

a) $\log_5(3x+4)=2$ **b)** $\log_2(5x-4)=4$ **c)** $\lg(x+5)=2$

d) $\log_2(x^2+3x-10)=3$ **e)** $\log_3(x^2-4x+4)=2$ **f)** $\log_5(x^2+2x-3)=1$

g) $\log_2(x^2-x-2)=2$ **h)** $\log_2(x^2-3x+4)=2$ **i)** $\log_{\sqrt{x-1}}(2x^2+2x+5)=4$

j) $\log_{x-1}(x^2-5x+7)=1$ **k)** $\log_{x-2}(x^2+x-16)=2$ **l)** $\log_{3-x}(3x^2-4x-3)=2$

m) $\log_9(\log_3 x)=1$**;** **n)** $\log_{(x-2)^2}(x^2-9x+19)=\frac{1}{2}$ **o)** $\log_{x+1}(x^2+10)=2;$

p) $\log_{x-1}(x^2+9)=2;$ **q)** $\log_{x+2}(x^2+8)=2;$ **r)** $\log_{x-2}(x^2+12)=2;$

s) $\log_4\left[\log_2(x^2-9)\right]=1;$ **t)** $\log_2\left[\log_3(x^2+19)\right]=2;$ **u)** $\log_3\left[\log_4(x^2-17)\right]=1;$

v) $\log_3\left[\log_2(x^2-8)\right]=1;$

4. Să se rezolve ecuaţiile.

a) $\lg(x^2-6x+7)=\lg(x-3)$ **b)** $\log_3(x^2-2x)=\log_3(2x-3)$

c) $\log_2(x-1)=\log_2(x^2-x-16)$ **d)** $\log_{x-1}(x+5)=\log_{x-1}(2x+6)$

e) $\lg(x^2-6x+6)=\lg(x-4)$ **f)** $\log_2(x+2)+\log_2 x=3$

g) $\log_2(x+2)-\log_2(x-5)=3$ **h)** $\log_3(x^2-2x)=\log_3(2x-3)$

i) $\lg(x+4)+\lg(2x+3)=\lg(1-2x)$ **j)** $\log_3(x^2-9)-\log_3(x-3)=2$

k) $\log_2(x-3)+\log_2(x-4)=1$ **l)** $\lg(2x+1)-\lg(x-2)=\lg 3$

m) $\lg(2x-\frac{9}{4})-\lg x=\lg(x-3)$ **n)** $\log_{3x-1}2+2\log_{3x-1}x=\log_{3x-1}(4x-2)$

o) $\log_{2x+1}(3x+2)+\log_{3x+2}(2x+1)=2$ **p)** $\frac{\lg x}{\lg(x+1)}=-1$ **;**

q) $\log_2(2x+4)=\log_2(3x+1)$**;** **r)** $\log_2(x-2)=\log_2(x^2-5x+3)$**;**

s) $\log_2(x^2-4x+2)=\log_2(x-2)$**;** **t)** $\log_3(2x^2-2x-2)=\log_3(x+3)$**;**

u) $\log_5(x^2-4x-2)=\log_5(x+4)$**;** **v)** $\log_3(2x^2-x-7)=\log_3(x+5)$**;**

5. Să se rezolve ecuaţiile.

a) $\lg^2 x-3\lg x+2=0$ **b)** $\lg^2 x-4\lg x+3=0$

c) $\lg^2(x+1)-7\lg(x+1)+10=0$ **d)** $x^{\lg x}=100x$

e) $3+\log_{\frac{1}{2}}\frac{32}{x+4}=\log_{\frac{1}{2}}(1-x)$ **f)** $2+\log_3(2^x-2)=\log_3 2+\log_3(4^{x-1}-1)$

g) $\log_2 x+\log_{\sqrt{2}}x+\log_{\frac{1}{2}}x=2$ **h)** $\log_3 x+\log_{\sqrt{3}}x+\log_{\frac{1}{3}}x=3$

i) $\log_2 x+\log_4(x-1)+\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{x}=\frac{1}{2}$ **j)** $\log_5 x+\log_x 25=3$

k) $\log_2(x^3+27)-\frac{1}{2}\cdot\log_2(x^2+6x+9)=3\log_2\sqrt[3]{7}$ **;**

l) $\left(\log_2 x\right)^2-7\log_2 x+6=0$**;** **m)** $\left(\log_3 x\right)^2-6\log_3 x+5=0$**;**

n) $\left(\log_2 x\right)^2-6\log_2 x+8=0$**;** **o)** $\left(\log_3 x\right)^2-5\log_3 x+4=0$**;**

p) $\log_{x+1}(x^3+x^2+6)=3;$ **q)** $\log_{x-1}(x^3+x-6)=3;$

r) $\log_{x+2}(x^3+x^2+10x+11)=3;$ **s)** $\log_{x-2}(x^3-3x^2-3x+10)=3;$

6. Fie funcția $f:(-6;\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\log_3(x+6)$**. Să se determine** $x\in\mathbb{R}$ **astfel încât** $f(x)\rangle 0$**.**

7. Să se rezolve inecuaţiile:

a) $\lg(3x+10)\geq 2$**;** **b)** $\log_{\frac{1}{3}}(x^2-4)\leq\log_{\frac{1}{3}}(2x-4)$**;**

c) $\log_{x+1}(x^2-3x+2)\rangle 2$; **d)** $\log_5(x^2-10x+25)\langle 2$; **e)** $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_{\frac{1}{4}} x\right)\rangle 1$;

f) $\log_3(9^x-10\cdot 3^x+36)\langle 3$

8. Să se afle numărul real x astfel încât următoarele numere $\lg(x-2),\ \lg x,\ \lg(x+4)$ să fie termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice.

9. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},$ o funcție cu proprietatea $f\left(\log_2 x-3\right)=\frac{x}{4},\ \forall x\in\left(0;\infty\right)$. Să se calculeze suma $S=f(0)+f(1)+f(2)+...f(100)$

10. Să se rezolve ecuația: $\log_2 3\cdot\log_3 4\cdot\log_4 5\cdot.....\cdot\log_x(x+1)=2021$.

6.3 Teste de autoevaluare

Testul 1. Funcţii logaritmice

1. Să se reprezinte grafic funcţiile $f:D\to\mathbb{R},\ f(x)=\log_4(x+2)$ şi $g:D\to\mathbb{R},\ g(x)=\log_{\frac{1}{2}}(2x-5)$ unde D este domeniul maxim de definiţie al funcţiilor.

2. Să se determine domeniul maxim de definiţie al funcţiei $f:D\to\mathbb{R},\ f(x)=\log_3\frac{1}{x+6}$

3. Să se determine domeniul maxim de definiţie al funcţiei $f:D\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln(x^2-8x+12)$

4. Fie funcţia $f:(-6;\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\log_3(x+6)$. Să se determine $x\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(x)\rangle 0$.

5. Fie $f:D\to\mathbb{R},\ f(x)=\log_3\frac{x+1}{x+2}$. Să se determine domeniul maxim de definiţie şi să se calculeze $f(1)+f(2)+....+f(484)$.

6. Fie $f:(1,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{\log_x a}$. Să se determine $a\in\mathbb{R}_+-\{0,1\}$ astfel încât $f(2)+f(3)+....+f(10)=2$.

Testul 2. Ecuaţii logaritmice

1. Să se rezolve ecuaţia $\log_4(2x-4)=2$.

2. Să se rezolve ecuaţia $\log_3(2x+1)+\log_3(x+2)=2$.

3. Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei $\log_2(x+3)-\log_2(x+6)=-2$.

4. Să se rezolve ecuaţia $\log_5(x^2-4)-\log_5(2x+4)=0$.

5. Să se rezolve ecuaţia $\log_2(4x+8)=1+\log_2(3x+2)$.

6. Să se rezolve ecuaţia $\left(\log_3 x^2\right)^2-\log_{\frac{1}{3}} x=5$.

Testul 3. Ecuaţii logaritmice

1. Să se rezolve ecuaţia $\log_5(2x+6)=3$.

2. Să se rezolve ecuaţia $\log_4(x^2-x-6)=\log_4(x+2)$.

3. Să se rezolve ecuaţia $\log_{x-3}(x^2+3)=2$.

4. Să se rezolve ecuaţia $\lg^2 x-9\lg x-10=0$.

5. Să se rezolve ecuaţia $\log_{x+3}(x^3+8x^2+29x+30)=3$.

6. Să se rezolve ecuaţia $\log_2(2x^2+4)-2\log_2(x+4)=-2$.

Testul 4. Inecuaţii logaritmice

1. Să se rezolve inecuaţia $\lg(3x+10)\geq 2$.

2. Să se rezolve inecuaţia $\log_{\frac{1}{3}}(x^2-4)\leq\log_{\frac{1}{3}}(2x-4)$.

3. Să se rezolve inecuaţia $\log_{x+1}(x^2-3x+2)\rangle 2$.

4. Să se rezolve inecuaţia $\log_5(x^2-10x+25)\langle 2$.

5. Să se rezolve inecuaţia $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_{\frac{1}{4}}x\right)\rangle 1$.

6. Să se rezolve inecuaţia $\log_3(9^x-10\cdot 3^x+36)\langle 3$.

Cap. 7. FUNCȚIi ȘI ECUAȚII TRIGONOMETRICE

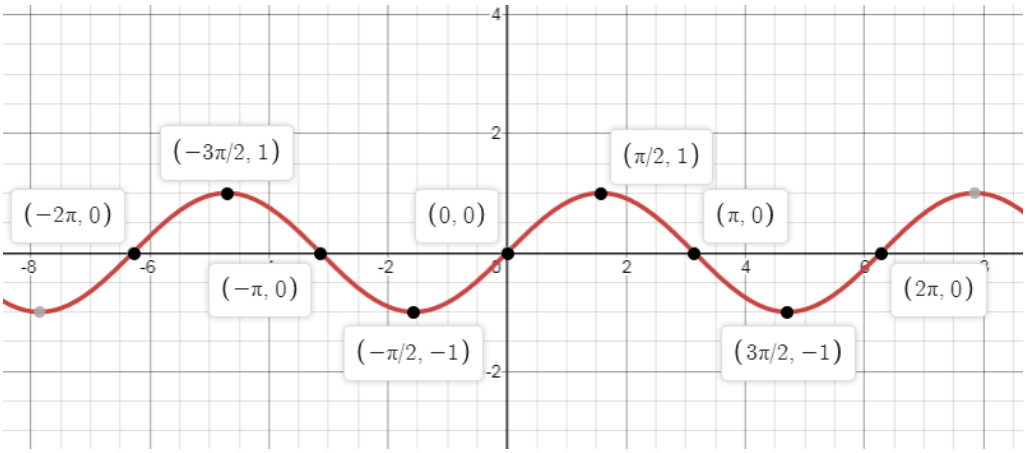
7.1 Funcţii trigonometrice directe şi indirecte

Definiţie: O funcţie $f:D\to\mathbb{R}$ se numeşte periodică $\Leftrightarrow \exists\, T\in\mathbb{R}$ astfel încât $\forall x\in D\Rightarrow f(x+T)=f(x)$. T se numeşte perioada funcţiei;

Definiţie: Fie $f:D\to\mathbb{R}$.
Dacă $f(-x)=f(x),\forall x\in D$, f se numeşte funcţie pară;
Dacă $f(-x)=-f(x),\forall x\in D$, f se numeşte funcţie impară;

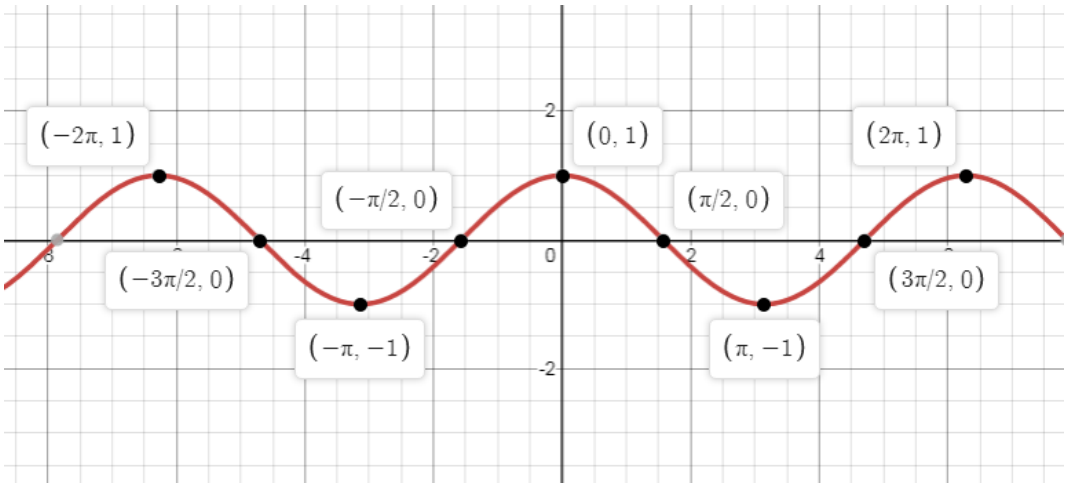
Funcţiile trigonometrice directe studiate sunt:

Funcția	**sinus**			
Domeniul de definiție	$\sin:\mathbb{R}\to[-1;1]$			
Domeniul pe care funcția este bijectivă	$\sin:\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\to[-1;1]$			
Mărginirea	$-1\le\sin x\le 1$			
Periodicitatea	sin x este periodică cu perioada principală $T=2\pi$. $\sin(x+2\pi)=\sin x,\ \forall x\in\mathbb{R}$			
Paritatea	sin x este impară; $\sin(-x)=-\sin x,\ \forall x\in\mathbb{R}$.			
Semnul funcției	Cadranul I	Cadranul II	Cadranul III	Cadranul IV
	+	+	---	---
Funcția inversă	$\arcsin:[-1;1]\to\mathbb{R}$, $\arcsin(-x)=-\arcsin x;\ \sin(\arcsin x)=x,\forall x\in[-1;1]$			



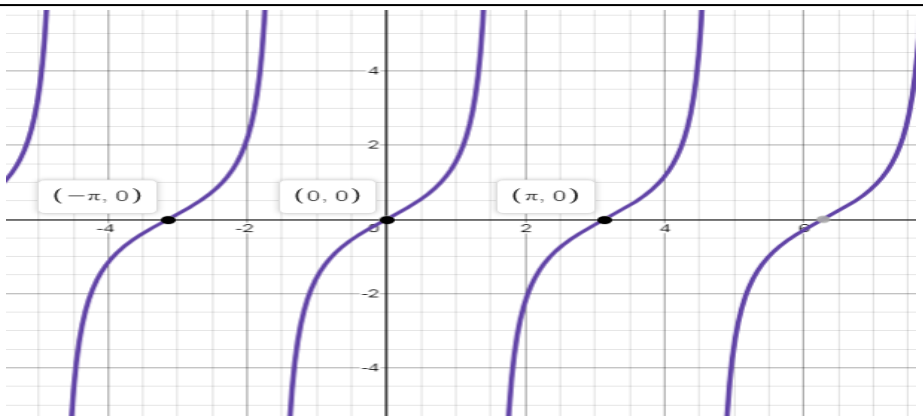
Graficul funcției sin x

Funcția	cosinus			
Domeniul de definiție	$\cos:\mathbb{R}\to[-1;1]$			
Domeniul pe care funcția este bijectivă	$\cos:[0;\pi]\to[-1;1]$			
Mărginirea	$-1\le\cos x\le 1$			
Periodicitatea	cos x este periodică cu perioada principală $T=2\pi$. $\cos(x+2\pi)=\cos x,\ \forall x\in\mathbb{R}$			
Paritatea	cos x este pară; $\cos(-x)=\cos x,\ \forall x\in\mathbb{R}$.			
Semnul funcției	Cadranul I	Cadranul II	Cadranul III	Cadranul IV
	+	----	---	+
Funcția inversă	$\arccos:[-1;1]\to\mathbb{R}$, $\arccos(-x)=\pi-\arccos x$, $\cos(\arccos x)=x\ \forall x\in[-1;1]$			



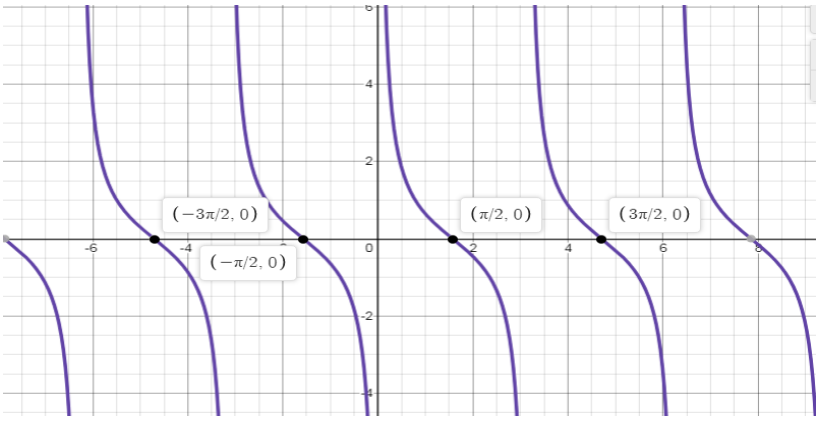
Graficul funcției cos x

Funcția	tangentă			
Domeniul de definiție	$tg:\mathbb{R}-\left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\middle\vert k\in\mathbb{Z}\right\}\to\mathbb{R}$			
Domeniul pe care funcția este bijectivă	$tg:\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$			
Mărginirea	tg x e nemărginită			
Periodicitatea	tg x este periodică cu perioada principală $T=\pi$. $tg(x+\pi)=tg\ x,\ \forall x\in\mathbb{R}-\left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\right\}$			
Paritatea	tg x este impară; $tg(-x)=-tg\ x,\ \forall x\in\mathbb{R}-(2k+1)\frac{\pi}{2}$.			
Semnul funcției	Cadranul I	Cadranul II	Cadranul III	Cadranul IV
	+	----	+	----
Funcția inversă	$arctg:\mathbb{R}\to\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ $arctg(-x)=-arctgx,\ tg(arctgx)=x\ \forall x\in\mathbb{R}$			



Graficul funcției tangentă

Funcția	**cotangentă**			
Domeniul de definiție	$ctg:\mathbb{R}-\{k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}\to\mathbb{R}$			
Domeniul pe care funcția este bijectivă	$ctg:(0;\pi)\to\mathbb{R}$			
Mărginirea	ctg x e nemărginită			
Periodicitatea	ctg x este periodică cu perioada principală $T=\pi$. $ctg(x+\pi)=ctg\ x,\ \forall x\in\mathbb{R}-\{k\pi\}$			
Paritatea	ctg x este impară; $ctg(-x)=-ctgx,\ \forall x\in\mathbb{R}-\{k\pi\}$.			
Semnul funcției	Cadranul I	Cadranul II	Cadranul III	Cadranul IV
	+	----	+	----
Funcția inversă	$ctg:\mathbb{R}\to(0;\pi)$, $arcctg(-x)=\pi-arcctgx,\ ctg(arcctgx)=x\ \forall x\in\mathbb{R}$			



Graficul funcției cotangentă

Valorile funcţiilor trigonometrice pentru unghiuri fundamentale

n^0	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0	150^0	180^0	270^0	360^0
x rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin x	**0**	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	**1**	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	**0**	**-1**	**0**
cos x	**1**	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	**0**	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	**-1**	**0**	**1**
tg x	**0**	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	**1**	$\sqrt{3}$	/	$-\sqrt{3}$	**-1**	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	**0**	/	**0**

Valori fundamentale ale funcţiilor inverse:

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
arcsin x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
arccos x	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

x	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
arctg x	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
arcctg x	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

7.2 Ecuații trigonometrice

Tipuri de ecuații

I. $\sin x = a,\ |a| \le 1 \Rightarrow x = (-1)^k \arcsin a + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ unde arcsin a este acel unghi al cărui sinus este egal cu a; $\arcsin a \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

$\cos x = a,\ |a| \le 1 \Rightarrow x = \pm ar\cos a + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z},\ \arccos a \in [0; \pi]$

$tg\ x = a \Rightarrow x = arctga + k\pi,\ k \in \mathbb{Z},\ arctg\ a \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Exemple:

1. $\sin x = 0 \Rightarrow x = (-1)^k \arcsin 0 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = k\pi$;

2. $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = (-1)^k \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = (-1)^k \frac{\pi}{3} + k\pi$;

3. $\sin x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = (-1)^k \arcsin \frac{-1}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + k\pi$;

4. $\sin\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 5x + \frac{\pi}{4} = (-1)^k \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + k\pi = (-1)^k \frac{\pi}{3} + k\pi \Rightarrow x = -\frac{\pi}{20} + (-1)^k \cdot \frac{\pi}{15} + \frac{k\pi}{5}$

5. $\cos x = 0 \Rightarrow x = \pm \arccos 0 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} = \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

6. $\cos x = 1 \Rightarrow x = \pm \arccos 1 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = 2k\pi$

7. $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \pm \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$

8. $tg\ x = 0 \Rightarrow x = arctg\ 0 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z},\ \Rightarrow x = k\pi$

9. $tg\ x = \sqrt{3} \Rightarrow x = arctg\ \sqrt{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z},\ \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi$

10. $tg\ x = -1 \Rightarrow x = arctg\ (-1) + k\pi,\ k \in \mathbb{Z},\ \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$

II. $\arcsin(\sin x) = a \Rightarrow x = (-1)^k \cdot a + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

$\arccos(\cos x) = a \Rightarrow x = \pm a + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

$arctg(tgx) = a \Rightarrow x = a + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Exemple:

1. $\arcsin(\sin x) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

2. $\arccos(\cos x) = \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

3. $arctg(tgx) = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

III. $\sin f(x)=\sin g(x)\Rightarrow x=(-1)^k g(x)+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.
$\cos f(x)=\cos g(x)\Rightarrow f(x)=\pm g(x)+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.
$tg\ f(x)=tg\ g(x)\Rightarrow f(x)=g(x)+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Exemple:

1. $\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\Rightarrow 3x+\frac{\pi}{4}=(-1)^k(2x-\frac{\pi}{3})+k\pi$. Dacă k este par, adică

$k=2\pi\Rightarrow x=-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ iar dacă k este impar, adică

$k=2k+1\Rightarrow 3x+\frac{\pi}{4}+2x-\frac{\pi}{3}=(2k+1)\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Rightarrow\ x\in\left\{-\frac{7\pi}{12}+2k\pi\right\}\cup\left\{\frac{\pi}{12\cdot 5}+\frac{(2k+1)\pi}{5}\right\}$

2. $\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow x+\frac{\pi}{6}=\pm(2x+\frac{\pi}{2})+2k\pi\Rightarrow$

Când se ia cu plus se obține $x=\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2}-2k\pi=-\frac{\pi}{3}-2k\pi,\ k\in\mathbb{Z};$ iar când se ia cu minus se

obține $x=-\frac{2\pi}{9}+2k\frac{\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z};$

3. $tg\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=tg\left(x+\frac{\pi}{5}\right)\Rightarrow 2x-\frac{\pi}{3}=x+\frac{\pi}{5}+k\pi\Rightarrow x=\frac{8\pi}{15}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

IV. Ecuații trigonometrice reductibile la ecuații care conțin aceeași funcție a aceluiași unghi:

Se utilizează formulele**:** $\cos 2x=2\cos^2-1$**;** $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$**;** $\sin^2 x+\cos^2 x=1$.

Exemple:

1. $\cos 4x=\sin^2 x\Rightarrow 2\cos^2 x-1=\frac{1-\cos 2x}{2}\Leftrightarrow 4\cos^2 2x+2\cos 2x-3=0\Rightarrow$

Se face notația $\cos 2x=t$ iar ecuația dată devine $4t^2+t-3=0$ cu soluțiile

$t_1=-1\Rightarrow\cos 2x=-1\Rightarrow x=(2k+1)\frac{\pi}{2}$ și $t_2=\frac{3}{4}\Rightarrow\cos 2x=\frac{3}{4}\Rightarrow x=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{4}+k\pi$.

2. $\cos 2x=2\sin x+1\Rightarrow 1-2\sin^2 x=2\sin x+1\Leftrightarrow 2\sin^2 x+2\sin x=0\Leftrightarrow 2\sin x(\sin x+1)=0\Rightarrow$
$\sin x=0\Rightarrow x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ și
$\sin x=-1\Rightarrow x=(-1)^k\frac{3\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

3. $\cos 2x-3\sin^2 x=1\Rightarrow 1-2\sin^2 x-3\sin^2 x=1\Leftrightarrow 5\sin^2 x=0\Rightarrow\sin x=0\Rightarrow x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

V. Ecuații omogene în sinx, cos x

$a\sin x+b\cos x=0\Big|:\cos x\Rightarrow tgx=-\frac{b}{a}\Rightarrow x=arctg\left(-\frac{b}{a}\right)+k\pi$**;**

$a\sin^2 x+b\sin x\cos x+c\cos^2 x=0\Big|:\cos^2 x\Rightarrow a\ tg^2 x+btg\ x+c=0$**.**

Exemple:

1. $\sqrt{3}\sin x+\cos x=0\left|:\cos x\Rightarrow tgx=-\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow x=-\frac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right.$;

2. $\cos^2 x+4\sin x\cos x-2\sin^2 x-2=0\Rightarrow$

$\cos^2 x+4\sin x\cos x-2\sin^2 x-2(\sin^2 x+\cos^2 x)=0\left|:\cos^2 x\right.$

$4tg^2x+4tgx+1=0\Rightarrow(2tgx+1)^2=0\Rightarrow tgx=-\frac{1}{2}\Rightarrow x=arctg\left(-\frac{1}{2}\right)+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

3. $2\sin^2 x+2\sin^2 2x-4\cos^2 x=1\Rightarrow 2\sin^2 x+2\sin^2 2x-4\cos^2 x=\sin^2 x+\cos^2 x\Rightarrow$

$\sin^2 x+2\sin x\cos x-5\cos^2 x=0\left|:\cos^2 x\Rightarrow tg^2x+2tgx-5=0\right.\Rightarrow$ notăm pe tg x cu t și

$x\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}$ și se obține ecuația $t^2+2t-5=0$ cu soluțiile $t_{1,2}=1\pm2\sqrt{6}$. Rezultă

$x_{1,2}=arctg(1+2\sqrt{6})+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

VI. Ecuații simetrice în sin x și cos x.

Se folosesc formulele $\sin x+\cos x=t,\ \sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2},\ |t|\le\sqrt{2}$.

Exemple:

1. $\sin x+\cos x+\sin x\cos x=1$. Se vor face notațiile: $\sin x+\cos x=t,\ \sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2},\ |t|\le\sqrt{2}$ de unde rezultă ecuația $t+\frac{t^2-1}{2}=1\Leftrightarrow t^2+2t-3=0$ cu soluțiile $t_1=-3$ care nu verifică condiția pentru t și $t_2=1$ adică $\sin x+\cos x=1\Rightarrow\sin(x+\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow x=-\frac{\pi}{4}+(-1)^k\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

2. $\frac{\sin^3 x+\cos^3 x+2}{\sin x+\cos x}=3(1-\sin x\cos x)$.

Cum

$\sin^3 x+\cos^3 x=(\sin x+\cos x)(\sin^2 x-\sin x\cos x+\cos^2 x)=(\sin x+\cos x)(1-\sin x\cos x)$ atunci ecuația dată este echivalentă cu $1-\sin x\cos x+\frac{2}{\sin x+\cos x}=3(1-\sin x\cos x)\Rightarrow$

$\frac{1}{\sin x+\cos x}=1-\sin x\cos x$. Se vor face notațiile $\sin x+\cos x=t,\ \sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2},\ |t|\le\sqrt{2}$ de unde rezultă ecuația $\frac{1}{t}=1-\frac{t^2-1}{2}\Leftrightarrow t^3-3t+2=0$ cu soluțiile $t\in\{-2;1\}$. Doar pentru t=1 obținem soluția $x=2k\pi$

VII.
Metoda unghiului auxiliar

$a\sin x+b\cos x=c\left|:a\Rightarrow\sin x+tg\ \varphi\cdot\cos x=\frac{c}{a}\right.$ **unde**

$tg\ \varphi=\frac{b}{a}\Rightarrow\sin(x+\varphi)=\frac{c}{a}\cdot\cos\ \varphi\Rightarrow x+\varphi=(-1)^k\arcsin(\frac{c}{a}\cdot\cos\varphi)+k\pi$

Exemple:

1. $\sqrt{3}\sin x+\cos x=1\Big|:\sqrt{3}\Rightarrow \sin x+\frac{1}{\sqrt{3}}\cos x=\frac{1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow \sin x+tg\frac{\pi}{6}\cos x=\frac{1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow$

$\sin(x+\frac{\pi}{6})=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow x+\frac{\pi}{6}=(-1)^k\frac{\pi}{6}+k\pi\Rightarrow x=-\frac{\pi}{6}+(-1)^k\frac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

2. $\sin x+\cos x=1\Rightarrow \sin x+tg\frac{\pi}{4}\cos x=1\Leftrightarrow \sin(x+\frac{\pi}{4})=1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow x+\frac{\pi}{4}=(-1)^k\frac{\pi}{4}+k\pi$

$\Rightarrow x=-\frac{\pi}{4}+(-1)^k\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

VIII.

Ecuații care se rezolvă cu ajutorul descompunerilor în factori

Exemple:

1. $\sin x\cdot\cos x-\sin^2 x-\cos x+\sin x=0$.

Se utilizează factorul comun astfel: $\sin x\cdot(\cos x-\sin x)-(\cos x-\sin x)=0\Rightarrow$

$(\sin x-1)\cdot(\cos x-\sin x)=0\Rightarrow \sin x=1$ cu $x=(-1)^k\arcsin 1+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ sau

$\sin x=\cos x\Big|:\cos x\Rightarrow tgx=1\Rightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

2. $\cos x-\sin x+2=2\cos^2+\sin 2x$

Ecuația dată este echivalentă cu $\cos x-\sin x+2\sin^2 x+2\cos^2 x=2\cos^2 x+2\sin x\cos x\Leftrightarrow$

$(\cos x-\sin x)(1-2\sin x)=0\Rightarrow$ s xi= n x cu soluția $x=\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ sau

$\sin x=\frac{1}{2}\Rightarrow x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Cap. 8. COMBINATORICĂ

8.1 Probleme de numărare

Problemele de numărare presupun numărarea elementelor unei mulțimi finite, ordonarea acestora sau împărțirea lor în submulțimi prin diverse procedee elementare sau principii care utilizează diverse formule sau reguli iar aplicații ale acestora le putem întâlni în multe domenii ale științei.

Definiție: O mulțime A se numește finită dacă fie este mulțimea vidă fie există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $f:\mathbb{N}^* \to A$ să fie o funcție bijectivă. Numărul n reprezintă numărul de elemente ale mulțimii A și se notează cu $card(A)$(cardinal din A).

Principiul includerii și al excluderii

Fie A și B două mulțimi care nu sunt disjuncte ($A \cap B \neq \varnothing$) atunci $A \cup B = A + B - A \cap B$ iar $card(A \cup B) = cardA + cardB - card(A \cap B)$.

Dacă A și B sunt disjuncte adică $A \cap B = \varnothing$ atunci $A \cup B = A + B$ iar $card(A \cup B) = cardA + cardB$.

Exemplu:

1. Într-o clasă elevii joacă fotbal sau handbal. Astfel, 24 joacă fotbal, 20 joacă handbal iar 12 joacă ambele jocuri. Să se stabilească câți elevi sunt în clasă?

Răspuns:

Folosind principiul includerii și excluderii, fie F mulțimea elevilor care joacă fotbal $card(F) = 24$ și H, mulțimea elevilor care joacă handbal $card(H) = 20$, iar $F \cap H$, mulțimea elevilor care joacă ambele jocuri, $card(F \cap H) = 12$. Atunci, pentru a determina numărul de elevi din clasă, calculăm $card(F \cup H) = card(F) + card(H) - card(F \cap H)$. Așadar, $card(F \cup H) = 24 + 20 - 12 = 32$ elevi.

Principiul sumei.

Dacă un anumit obiect A poate fi ales în m moduri, iar un alt obiect poate fi ales în n moduri, astfel încât nicio alegere a lui A să nu coincidă cu nicio alegere a lui B, atunci există m + n moduri de alegere " a lui A sau B";

Exemple:

1. Pe un raft sunt 6 cărţi de literatură şi 4 cărţi de istorie. În câte moduri se poate alege o carte?

Răspuns: Se poate alege o carte în 6 + 4 = 10 moduri;

2. Avem un dulap cu opt sertare încuiate iar cheile nu sunt numerotate ca să ştim cărui sertar îi corespunde fiecare cheie. Câte încercări trebuie să facem pentru a deschide toate sertarele?

Raspuns: 36 încercări

Sunt 8 +7+6+5+4+3+2+1 = 36 de încercări.

Principiul multiplicităţii.

Dacă un obiect A se poate alege în **m** moduri şi dacă după fiecare astfel de alegere, un obiect se poate alege în **n** moduri, atunci alegerea perechii (A;B) în această ordine se face în m·n moduri.

Mai general,

Fie A_1, A_2,....., A_k un număr de k operații succesive, fiecare putând fi realizată în n_1, n_2, ..., n_k moduri corespunzătoare. Atunci, realizarea succesivă a acestor k operații se poate efectua în $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ moduri.

Ca justificare, se poate considera A_1, A_2,....., A_k mulțimi de elemente având drept cardinale numerele n_1, n_2, ..., n_k și atunci, fiecărei modalități de efectuare a succesiunii celor k operații îi putem asocia un element al produsului cartezian $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k$ și reciproc.

Exemple:

1. De la orașul A se poate ajunge la orașul B prin două drumuri diferite, iar de la B la orașul C se poate ajunge prin trei drumuri diferite. Prin câte drumuri diferite se poate ajunge de la orașul A la orașul C ?

Răspuns:



Prin $2 \bullet 3 = 6$ drumuri diferite.

2. Aranjează cele patru fructe în toate modurile posibile. Câte astfel de moduri există ?



Răspuns:

Sunt 4·3·2·1=24 moduri. Sunt patru moduri în care punem un fruct pe primul loc. La fiecare din acestea mai rămân trei moduri de punere a celorlalte fructe pe locul doi. Mai departe, rămân două fructe care pot ocupa locul al treilea şi la sfârşit rămâne un singur fruct pentru ultimul loc.

3. Un tren este format din 7 vagoane din care unul este restaurant şi unul de poştă. În câte moduri poate fi format trenul astfel încât vagonul restaurant să fie lângă locomotivă şi cel de poştă să fie ultimul.

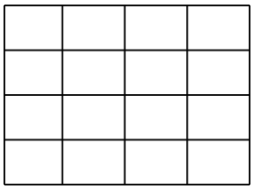
Răspuns: Mai rămân 5 vagoane care pot fi aranjate în 5x4x3= 60 moduri.

Numărul funcțiilor între două mulțimi finite

Fie A și B două mulțimi finite și $n = card(A)$ și $m = card(B)$. Atunci numărul funcțiilor $f : A \to B$ este egal cu $card(B)^{card(A)} = m^n$.

Exemple:

1. Într-un pătrat de forma 4x4, un copil așează piese albe sau negre până când se completează pătratul. Să se găsească numărul total de configurații prin care se completează pătratul cu piese albe sau negre.



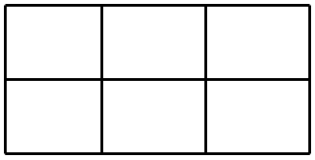
Răspuns:

Fiecare pătrat va avea o piesă albă sau neagră . Cum există 16 pătrățele, atunci numărul de configurații finale este egal cu 2^{16} , adică, cu numărul funcțiilor $f:A\to B$, unde A este mulțimea pătrățelelor, card (A)=16, B este mulțimea pieselor , card (B)= 2.

2. Un copil colorează cu un număr de culori o rețea de pătrate ca în desen. Să se determine câte culori a folosit copilul, știind că în final se obțin 729 de configurații.

Răspuns:

Numărul de configurații e dat de numărul de funcții $f:A\to B$, unde A este mulțimea pătrățelelor, card (A)=6, B este mulțimea pieselor , card (B)= n. Așadar, $n^6=729\Rightarrow n=3$culori.



Exercitii rezolvate

1. Într-o debara, pe un raft sunt 8 borcane de gem, 6 borcane de compot și 4 borcane de dulceață. Andrei vrea să scoată un borcan de gem dar atât în cameră cât și în debara este întuneric și nu poate vedea din care este fiecare borcan. Câte borcane ar trebui să scoată o singură dată afară ca să fie sigur că a luat un borcan de gem?

Observație: Toate borcanele sunt la fel și nu se pot deosebi decât după etichetă.

Rezolvare:

Se vor alege 6 borcane(cele de compot) + 4 borcane(cele de dulceață) + 1 borcan(cel de gem) , în total 11 borcane din care sigur va exista astfel un borcan de gem.

2. În câte moduri se pot confecționa steaguri tricolore cu cele șapte culori fundamentale?

Răspuns:

Evident, Prima culoare de pe steag poate fi oricare din cele șapte culori, a doua culoare care va fi pusă pe steag va fi oricare din celelalte 6 culori rămase, iar pentru ultima culoare se va alege din celelalte 5 culori rămase. Conform principiului multiplicității, avem astfel un număr de $7\cdot 6\cdot 5=210$ moduri de a confecționa steaguri cu trei culori.

3 . Pentru vopsirea unei porțiuni de gard cu 16 șipci, avem la dispoziție vopsea de trei culori. În câte moduri diferite se poate vopsi acea porțiune de gard astfel încât orice două șipci alăturate să aibă culori diferite.

Răspuns: $3\cdot 2^{15}$

Șipca 1 se poate vopsi în oricare din cele 3 culori. Șipca 2 se poate vopsi doar în două culori, (fără culoarea de la șipca1). Șipca 3, la fel se poate vopsi doar în două culori, (fără culoarea de la șipca 2) etc.

Aşadar, numărul de colorări diferite este egal cu $3\cdot 2^{15}$.

4. Un test grilă cu 5 întrebări are la fiecare întrebare patru răspunsuri posibile. În câte moduri se poate formula rezultatul testului ?

Răspuns:

Pentru fiecare întrebare există patru posibilităţi de răspuns. Cum sunt cinci întrebări, rezultă un număr de $4\cdot 4\cdot 4\cdot 4\cdot 4 = 4^5 = 1024$ moduri de a răspunde.

5. Câte numere de 6 cifre încep şi se termină cu cifra 6?

Răspuns.

Cele 10 cifre pot fi aranjate pe celelelalte 4 poziţii ale numerelor de 6 cifre, rezultând conform principiului multiplicităţii $10\cdot 10\cdot 10\cdot 10 = 10^4 = 10000$ numere.

6. Un elev are de făcut pentru vacanţa mare un număr de 210 probleme de matematică. Astfel, în prima zi el rezolvă o problemă, a doua zi rezolvă două probleme, în a treia zi rezolvă trei probleme şi aşa mai departe, în a n-a zi el rezolvă n probleme până când le termină pe toate. Să se afle în câte zile a terminat tema?

Răspuns: 20 zile.

Suma celor 210 de probleme făcute în cele n zile este dată de formula $1+2+3+....+n=210 \Leftrightarrow \frac{n(n+1)}{2}=210 \Rightarrow n(n+1)=420 \Rightarrow n=20$ zile.

7. La un stadion cu capacitatea de 3600 de locuri vin spectatorii. În primul minut vine 1 spectator, în al doilea minut vin 3 spectatori, în al treilea minut vin 5 spectatori , etc. După câte minute stadionul se va umple ?

Răspuns:

Numărul spectatorilor veniţi în primele n minute va fi $\underbrace{1+3+5+...+2n-1}_{n..\text{minute}} = \frac{(1+2n-1)\cdot n}{2} = n^2$, ca sumă a unei progresii aritmetice.

Cum $n^2 = 3600 \Rightarrow n = 60.$ După 60 de minute se va umple stadionul.

Exercitii propuse

1. Un deţinut a găsit lanţul cu chei de la uşile temniţei. Pentru a evada trebuie să deschidă cele 7 uşi care-l pot scoate afară dar nu se ştie cărei uşi îi corespunde fiecare din cele 7 chei.

Câte încercări de a deschide uşile ar trebui să facă ca să fie sigur că iese afară?

2. În ghiozdan am 4 caiete de matematică, 3 caiete de fizică şi 6 de română, toate identice. Fără să vedem, deoarece este întuneric trebuie să scoatem un caiet de matematică.

Câte caiete trebuie să scoatem fără să vedem dar să fim siguri că am scos şi un caiet de matematică?

3. Într-o clasă sunt 14 băieţi şi 12 fete. Câte perechi de dans se pot forma?

4. Acasă am 6 pixuri, 4 stilouri şi 3 creioane. În câte moduri pot alege un set format dintr-un pix, un stilou şi un creion?

5. Într-o grădină zoologică sunt 6 lupi, 4 urși, 3 vulpi. În câte moduri putem alege un lup, un urs și o vulpe?

6. O trupă de teatru formată din 6 bărbați, 4 femei și 2 copii trebuie să joace o scenetă în care apar un bărbat, o femeie și un copil. În câte moduri se poate face distribuția pentru acea scenetă?

7. În câte moduri putem aranja 6 cărți pe un raft?

8. Câte numere de trei cifre putem forma cu cifrele 1, 2, 3, 4,5 ?

8.2 Mulţimi ordonate. Permutări

Definiţie: **Combinatorica** este ştiinţa care se ocupă cu studiul problemelor de numărare, de împărţire a unei mulţimi finite în submulţimi sau cu aranjarea elementelor unei mulţimi într-un anume fel. **Combinatorica** are aplicaţii directe în teoria probabilităţilor, în logica matematica, în teoria numerelor, etc.

Definiţie: Se numeşte **mulţime ordonată**, o mulţime ale cărei elemente au o ordine bine determinată de dispunere a lor, ceea ce înseamnă că dacă **A** este o mulţime finită cu n elemente, atunci, A se numeşte ordonată dacă fiecărui element al său i se asociază un număr de la **1** la **n**, numit rangul elementului, astfel încât la elemente diferite corespund numere diferite.

Orice mulţime finită este ordonată.
O mulţime ordonată este caracterizată prin elementele din care este formată şi prin ordinea în care sunt considerate acestea.
Două mulţimi ordonate sunt diferite dacă ele se deosebesc fie prin elementele din care sunt formate fie prin ordinea lor.

Permutări

Definiţie : Fie **A** o mulţime finită cu **n** elemente. Se numesc **permutări de n elemente** ale lui **A** şi se notează cu $\mathbf{P_n}$, numărul tuturor mulţimilor ordonate formate cu cele **n** elemente ale mulţimii **A**.

Teoremă. $P_n = n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot .....(n-1)\cdot n$, $\forall n \geq 1,\ n \in \mathbb{N}$. . Convenţie: $0! = 1$;

Exemplu: În câte moduri se pot aranja 5 maşini în parcare?
Răspuns. $P_5 = 5! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120$;

Formula de recurenţă pentru factoriale: $\forall n \geq 1,\ n \in \mathbb{N} \Rightarrow n! = n\cdot (n-1)!$.

Exercitii rezolvate

1. Să se calculeze:

a) $5!\cdot 2! - 3!(4! - 0!)$; **b)** $\frac{8! - 6!}{7! + 5!}$; **c)** $\frac{(n+3)! - (n+1)!}{n!}$; **d)** $\frac{(n-1)!}{(n+1)!} - \frac{(n-2)!}{(n-1)!}$;

Rezolvare: a) $5!\cdot 2! - 3!(4! - 0!) = 120\cdot 2 - 6(24-1) = 240 - 138 = 102$;

b) $\frac{8! - 6!}{7! + 5!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6! - 6!}{7\cdot 6\cdot 5! + 5!} = \frac{6!(56-1)}{5!(42+1)} = \frac{6\cdot \cancel{5!}\cdot 55}{\cancel{5!}\cdot 43} = \frac{330}{43}$;

c) $\frac{(n+3)! - (n+1)!}{n!} = \frac{(n+3)(n+2)(n+1)n! - (n+1)n!}{n!} = n^3 + 6n^2 + 10n + 5$;

d) $\frac{(n-1)!}{(n+1)!} - \frac{(n-2)!}{(n-1)!} = \frac{1}{(n+1)n} - \frac{1}{n-1} = \frac{n-1-n^2-n}{(n-1)m(n+1)} = -\frac{(n^2+1)}{n(n^2-1)}$;

2. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $\frac{(x+5)!}{(x+3)!}=42$**;** **b)** $\frac{x!}{(x-1)!}+\frac{(x+2)!}{x!}=\frac{(x+1)!}{(x-1)!}+14$**;**

Rezolvare:

a) Se pun mai întâi condiţiile de existenţă a factorialilor: Este suficient pentru $x+3\geq 0\Rightarrow x\geq -3$;

$x\in\mathbb{Z}$, $\frac{(x+5)!}{(x+3)!}=42\Leftrightarrow (x+5)(x+4)=42\Leftrightarrow x^2+9x-22=0\Rightarrow x_1=2$ *si* $x_2=-11\notin\mathbb{N}\Rightarrow x=2$;

b) Din condiţiile de existenţă a factorialilor rezultă $x\geq 1;\ x\in\mathbb{N}$

$\frac{x!}{(x-1)!}+\frac{(x+2)!}{x!}=\frac{(x+1)!}{(x-1)!}+14\Leftrightarrow x+x^2+3x+2=x^2+x+14\Rightarrow 3x=12\Rightarrow x=4$;

Exercitii propuse

1. Să se calculeze:

a) $5!\cdot 2!-3!(4!-0!)$; b) $\frac{8!-6!}{7!+5!}$; c) $\frac{3!-4!+2!\cdot 3!}{2!}$; d) $5!-4!+3!$;

e) $6!-3!\cdot 2!$; f) $\frac{7!+5!}{5!}$; g) $\frac{6!+5!+4!}{3!}$; h) $\frac{(n+3)!-(n+1)!}{n!}$;

i) $\frac{(n-1)!}{(n+1)!}-\frac{(n-2)!}{(n-1)!}$; j) $\frac{(n+2)!}{n!}$; k) $\frac{(n-3)!}{(n-1)!}$; l) $\frac{(n+2)!-(n+1)}{n!}$;

m) $\frac{(n+2)!}{n!}+\frac{(n-2)!}{(n-1)!}$

2. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $\frac{(x+5)!}{(x+3)!}=42$; b) $\frac{x!}{(x-1)!}+\frac{(x+2)!}{x!}=\frac{(x+1)!}{(x-1)!}+14$; c) $12(x-4)!=(x-2)!$;

d) $\frac{(x-1)!}{(x-3)!}=90$; e) $\frac{(x+2)!-x!}{(x+1)!}=6$; f) $\frac{(x+1)!-x!}{x!-(x+1)!}=\frac{11}{2}$; g) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}=30$.

h) $\frac{(n-1)!}{(n-3)!}=42$; i) $\frac{(n+1)!}{2(n-1)!}=10$; j) $\frac{(n+3)!}{(n+1)!}=72$;

3. Câte cuvinte de câte cinci litere care nu se repetă se pot forma cu literele $\{a,e,i,r,m\}$?

4. Fie mulţimea $A=\{0,1,2,3,4,5\}$. Câte numere de şase cifre distincte se pot forma cu elementele mulţimii A ?

5. În câte moduri pot fi ordonaţi opt elevi în şir indian?

6. În câte moduri pot fi aşezate cinci cărţi pe un raft?

7. În câte moduri pot fi parcate 6 maşini pe şase locuri? Dar 5 maşini pe 6 locuri?

8. Câte numere de 5 cifre distincte se pot forma cu cifrele 0, 1, 2, 3, 4 ? Dar dacă cifrele nu se repetă?

8.3 Aranjamente . Combinări

Aranjamente

Definiţie: Fie A o mulţime finită cu n elemente şi k un număr natural astfel încât $n \geq k \geq 0$. Se numesc aranjamente de n elemente luate câte k şi se notează A_n^k , numărul tuturor submulţimilor ordonate ale lui A, având fiecare câte k elemente.

Teoremă $A_n^k = n(n-1)(n-2).....(n-k+1)$ sau $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$, $\forall n \geq k \geq 0$.

Observaţie: $A_n^k \in \mathbb{N}*$.

Exemplu: Câte numere de 2 cifre distincte se pot forma cu elementele mulţimii $\{1;2;3;4;5;6\}$?

Răspuns: $A_6^2 = \frac{6!}{(6-2)!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!}} = 30$.

Formula de recurenţă pentru aranjamente: $\forall n \geq k \geq 1,\ n,k \in \mathbb{N} \Rightarrow A_n^k = (n-k+1)A_n^{k-1}$.

Definiţie: Două aranjamente de n elemente luate câte k obiecte se deosebesc prin natura elementelor sau prin ordinea lor.

Combinări

Definiţie: Fie A o mulţime finită cu n elemente şi k un număr natural astfel încât $n \geq k \geq 0$. Se numesc combinări de n elemente luate câte k şi se notează C_n^k , numărul tuturor submulţimilor de câte k elemente luate din mulţimea A.

Observaţii:

1. Numărul tuturor submulţimilor unei mulţimi cu n elemente este egal cu 2^n.
2. Două combinări de n elemente luate câte k se deosebesc prin natura elementelor nu şi prin ordinea lor.

Teoremă. Fie $k,n \in \mathbb{N},\ 0 \leq k \leq n$. Atunci, $C_n^{\ k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ sau $C_n^k = \frac{A_n^k}{k!}$;

Exemplu: Câte drepte pot fi trasate prin 6 puncte oricare trei necoliniare ?

Răspuns: $C_6^{\ 2} = \frac{6!}{(6-2)! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!} \cdot 2} = 15$;

Observaţii:

$C_n^k \in \mathbb{N}*$. $C_n^p = C_n^q \Leftrightarrow p = q$ *sau* $n - p = q$.

Formula combinărilor complementare: $C_n^{\ k} = C_n^{\ n-k}, 0 \leq k \leq n$.

Cazuri particulare: $C_n^0 = C_n^n = 1;\quad C_n^1 = C_n^{n-1} = n;\quad C_n^2 = C_n^{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}$; etc.

Formula de descompunere a combinărilor: $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1},\ \forall k,n \in \mathbb{N},\ n \rangle k \geq 1$.

Exercitii rezolvate

1. Să se calculeze: a) $\frac{A_6^3+A_6^4}{A_6^2}$; **b)** $\frac{A_n^{n-1}+A_n^{n-2}}{A_n^{n-3}}$; **c)** $C_4^3+C_4^2\cdot C_4^1-C_4^0\cdot C_4^2$; **d)** $\frac{C_7^6-C_7^4}{C_7^5}$;

Rezolvare:

a) $\frac{A_6^3+A_6^4}{A_6^2}=\frac{\frac{6!}{3!}+\frac{6!}{2!}}{\frac{6!}{4!}}=\frac{6\cdot5\cdot4+6\cdot5\cdot4\cdot3}{6\cdot5}=16$;

b) $\frac{A_n^{n-1}+A_n^{n-2}}{A_n^{n-3}}=\frac{\frac{n!}{1!}+\frac{n!}{2!}}{\frac{n!}{3!}}=\frac{1+\frac{1}{2}}{\frac{1}{6}}=\frac{3}{2}\cdot\frac{6}{1}=9$;

c) $C_4^3+C_4^2\cdot C_4^1-C_4^0\cdot C_4^2=4+24-6=22$;

d) $\frac{C_7^6-C_7^4}{C_7^5}=\frac{\frac{7!}{6!\cdot1!}-\frac{7!}{4!\cdot3!}}{\frac{7!}{5!\cdot2!}}=\frac{\frac{1}{6!}-\frac{1}{4!\cdot3!}}{\frac{1}{5!\cdot2!}}=\frac{4!\cdot3!-6!}{6!\cdot4!\cdot3!}\cdot\frac{5!\cdot2!}{1}=\frac{-24\cdot2}{6\cdot6}=-\frac{4}{3}$;

2. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $C_{x+3}^2=x^2+12$; **b)** $C_x^3-C_{x+1}^2=x$;

Rezolvare:

a) Condiţii de existenţă: $x+3\geq2\Rightarrow x\geq-1$; $x+3\in\mathbb{N}$

$C_{x+3}^2=x^2+6\Leftrightarrow\frac{(x+3)!}{2!\cdot(x+1)!}=x^2+6\Rightarrow\frac{(x+3)(x+2)}{2}=x^2+6\Rightarrow x^2+5x+6=2x^2+12\Rightarrow$

$x^2-5x+6=0\Rightarrow x\in\{2;3\}$.

b) Condiţii de existenţă: $x\geq3$, $x+1\geq2\Rightarrow x\geq3$; $x\in\mathbb{N}$ şi $S=\{7\}$.

3. Câte drepte distincte se pot trasa prin opt puncte, oricare trei necoliniare?

Rezolvare:

Întrucât nu contează ordinea punctelor prin care trec dreptele rezultă că există un număr de

$C_8^2=\frac{8!}{2!\cdot6!}=\frac{8\cdot7\cdot\cancel{6!}}{\cancel{6!}\cdot2\cdot1}=28$ drepte;

4. La jocul 6 din 49, câte bilete ar trebui completate de un jucător pentru a fi sigur că va câştiga?

Rezolvare: $C_{49}^6=\frac{49!}{6!\cdot43!}=13983816$;

5. a) Un student are de dat 4 examene în 14 zile.În câte moduri pot fi programate aceste examene? b) Dar dacă primul examen se dă în prima zi ?

Rezolvare:

a) $A_{14}^4=\frac{14!}{(14-4)!}=\frac{14\cdot13\cdot12\cdot11\cdot\cancel{10!}}{\cancel{10!}}=24024$; b) În prima zi se poate da oricare din cele 4 examene deci există patru moduri, prin urmare pentru celelalte 3 examene au mai rămas

13 zile. Aşadar, există un număr de $4\cdot A_{13}^3 = 4\cdot\frac{13!}{10!} = 4\cdot\frac{13\cdot 12\cdot 11\cdot \cancel{10}}{\cancel{10!}} = 6864$ moduri de aranjare a examenelor;

6. Într-o clasă sunt 12 fete şi 10 băieţi. În câte moduri se poate forma un grup din 4 fete şi 4 băieţi?

Rezolvare: $C_{12}^4\cdot C_{10}^4 = \frac{12!}{4!\cdot 8!}\cdot\frac{10!}{6!\cdot 4!} = \frac{\cancel{12}\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot \cancel{8!}}{\cancel{4}\cdot 3\cdot 2\cdot \cancel{8!}}\cdot\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot \cancel{6!}}{\cancel{6!}\cdot 4\cdot 3\cdot 2} = 210\cdot 45\cdot 11 = 103950;$

7. Câte meciuri se dispută într-un campionat de fotbal dacă participă 16 echipe şi se joacă în sistem tur- retur?

Rezolvare:

Fiecare echipă joacă cu celelalte 15 echipe prin urmare sunt în total un număr de $16\cdot 15 = 240$ de meciuri. Altfel spus, un număr de $A_{16}^2 = \frac{16!}{14!} = 16\cdot 15 = 240$.

8. În câte moduri se pot împărţi 9 elevi în 3 grupe a câte 3 elevi fiecare?

Rezolvare: Pentru prima grupă de trei elevi există un număr de C_9^3 moduri de grupare;

Pentru a doua grupă există un număr de C_6^3 moduri de grupare iar pentru ultima grupă C_3^3.

În total există un număr de $C_9^3\cdot C_6^3\cdot C_3^3 = \frac{9!}{3!\cdot \cancel{6!}}\cdot\frac{\cancel{6!}}{3!\cdot 3!}\cdot 1 = \frac{9!}{(3!)^3} = 1680$ moduri de grupare.

9. La un concurs sportiv sunt şase probe. Un sportiv trebuie să participe în trei probe. Câte posibilităţi de alegere a probelor are?

Rezolvare: $C_6^3 = \frac{6!}{3!\cdot 3!} = 20$**;**

10. Din 11 persoane dintre care 6 bărbaţi şi 5 femei se doreşte să se formeze o delegaţie compusă din 5 persoane din care să facă parte cel puţin un bărbat şi 2 femei. În câte moduri se poate forma această delegaţie?

Rezolvare:

Aceasta înseamnă că se pot forma delegaţii cu 2 cu 3 sau 4 femei : $C_6^3\cdot C_5^2 + C_6^2\cdot C_5^3 + C_6^1\cdot C_5^4 = \frac{6!}{3!\cdot 3!}\cdot\frac{5!}{2!\cdot 3!} + \frac{6!}{4!\cdot 2!}\cdot\frac{5!}{2!\cdot 3!} + \frac{6!}{1!\cdot 5!}\cdot\frac{5!}{4!\cdot 1!} = 20\cdot 10 + 15\cdot 10 + 6\cdot 5 = 380;$

11. Să se rezolve ecuaţiile:

a). $C_n^2 = 6$**.**

Rezolvare: Condiţii de existenţă: $n\geq 2,\ n\in\mathbb{N}$.

$C_n^2 = 6 \Rightarrow \frac{n!}{(n-2)!\cdot 2!} = 6 \Rightarrow \frac{n(n-1)\cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}\cdot 2} = 6 \Rightarrow n(n-1) = 12 \Rightarrow n = 4$ este singurul număr care verifică ecuaţia.

b). $C_n^1 + C_n^2 = 45;$

Rezolvare: C.E: $n\geq 2,\ n\in\mathbb{N}$.

$C_n^1 + C_n^2 = 45 \Rightarrow \frac{n!}{(n-1)!\cdot 1!} + \frac{n!}{(n-2)!\cdot 2!} = 45 \Rightarrow \frac{n\cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}\cdot 1} + \frac{n(n-1)\cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}\cdot 2} = 45 \Rightarrow$

$^{2)}n+\frac{n(n-1)}{2}=^{2)}45\Rightarrow 2n+n^2-n=90\Rightarrow \quad n^2+n=90\Rightarrow n(n+1)=90\Rightarrow 9\cdot 10=90\Rightarrow n=9.$

c). $C_n^1+A_n^2=4$**;**

Rezolvare: : C.E: $n\geq 2,\ n\in\mathbb{N}.$

$C_n^1+A_n^2=4\Rightarrow \frac{n!}{(n-1)!\cdot 1!}+\frac{n!}{(n-2)!}=4\Rightarrow \frac{n\cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}\cdot 1}+\frac{n(n-1)\cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}}=4\Rightarrow\ n+n(n-1)=4\Rightarrow$

$n\ +n^2-n=4\Rightarrow n^{^2}=4\Rightarrow n=2.$ Soluția - 2 nu convine.

d). $C_n^4=\frac{5n(n-3)}{6}$**.**

Rezolvare: Condiții de existență: $n\geq 4,\ n\in\mathbb{N}.$

$C_n^4=\frac{5n(n-3)}{6}\Rightarrow \frac{n!}{(n-4)!\cdot 4!}=\frac{5n(n-3)}{6}\Rightarrow \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\cancel{(n-4)!}}{\cancel{(n-4)!}\cdot 24}=\frac{5n(n-3)}{6}\Rightarrow$

Cum n nu poate fi nici 0 nici 3 se poate împărți ecuația de mai sus cu n(n-3) rezultând:

$\frac{(n-1)(n-2)}{24}=\frac{5}{6}\Rightarrow (n-1)(n-2)=20\Rightarrow n=6$ deoarece $5\cdot 4=20$ singura soluție fiind n = 6.

e). $C_n^1+3n+5=C_n^2$**;**

Rezolvare: Condiții de existență: $n\geq 2,\ n\in\mathbb{N}.$

$C_n^1+3n+5=C_n^2\Rightarrow \frac{n!}{(n-1)!\cdot 1!}+3n+5=\frac{n!}{(n-2)!\cdot 2!}\Rightarrow\ ^{2)}n+\ ^{2)}3n+\ ^{2)}5=\frac{n(n-1)}{2}\Rightarrow$

$2n+6+10=n^2-n\Rightarrow n^2-9n-10=0$. Singura soluție care convine este n=10.

f). $C_x^3-C_{x+1}^2=x$;

Rezolvare: : C.E: $x\geq 3,\ x+1\geq 2\Rightarrow x\geq 3,\ x\in\mathbb{N}.$

$C_x^3-C_{x+1}^2=x\Rightarrow \frac{x!}{(x-3)!\cdot 3!}-\frac{(x+1)!}{(x+1-2)!\cdot 2!}=x\Rightarrow \frac{x(x-1)(x-2)\cancel{(x-3)!}}{\cancel{(x-3)!}\cdot 6}-\frac{(x+1)x\cancel{(x-1)!}}{\cancel{(x-1)!}\cdot 2}=x\Rightarrow$

$\frac{x(x-1)(x-2)}{6}-\frac{^{3)}(x+1)x}{2}=\ ^{6)}x\Rightarrow\ x\cdot\left(x^2-2x-x+2-3x-3\right)=6x\,\big|:x$, împărțim cu x deoarece 0 nu poate fi soluție a ecuației. Rezultă ecuația $x^2-6x-7=0$ cu singura soluție care convine x=7.

g). $A_{x+1}^3+C_{x+1}^{x-1}=14(x+1)$;

Rezolvare: : C.E: $x+1\geq 3,\ x+1\geq x-1\geq 0\Rightarrow x\geq 2,\ x\in\mathbb{N}.$

$A_{x+1}^3+C_{x+1}^{x-1}=14(x+1)\Rightarrow \frac{(x+1)!}{(x+1-3)!\cdot 3!}+\frac{(x+1)!}{(x+1-x+1)!\cdot(x-1)!}=14(x+1)\Rightarrow$

$\frac{(x+1)x(x-1)\cancel{(x-2)!}}{\cancel{(x-2)!}}-\frac{(x+1)x\cancel{(x-1)!}}{2!\cdot\cancel{(x-1)!}}=14(x+1)\Rightarrow\quad (x+1)x(x-1)+\frac{(x+1)x}{2}=14(x+1)\Rightarrow$

$(x+1)(2x^2-x-28)=0$. Convine doar soluția x=4.

Exercitii propuse

1. Să se calculeze:

a) $\frac{A_6^3+A_6^4}{A_6^2}$; b) $\frac{A_9^6-A_9^5}{A_8^5-A_8^4}$; c) $\frac{A_8^6-A_8^5}{A_9^6-A_9^5}$; d) $\frac{A_n^{n-1}+A_n^{n-2}}{A_n^{n-3}}$;

2. a) Un student are de dat 4 examene în 14 zile.În câte moduri pot fi programate aceste examene? b) Dar dacă primul examen se dă în prima zi ?

3. Câte meciuri se dispută într-un campionat de fotbal dacă participă 16 echipe şi se joacă în sistem tur- retur?

4. La o clasă se programează a se da 4 teze în 10 zile astfel încât în prima zi se programează obligatoriu o teză . Știind că nu se dau două teze în aceeași zi, să se determine câte variante de programare a tezelor se pot face .

5. Zece elevi au de prezentat fiecare cîte un referat în două zile. În câte moduri diferite pot fi programate cele zece referate ştiind că în fiecare zi sunt prezentate 5 referate?.

6. Să se determine câte numere de şapte cifre distincte care nu încep cu zero se pot forma.

7. Câte numere de telefon de 6 cifre diferite se pot forma cu cifrele 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

8. La o întrunire, 18 persoane au schimbat fotografii între ele. Câte fotografii au fost necesare?

9. Câte numere de două cifre distincte se pot forma cu elementele mulţimii $\{2;4;6;8\}$?

10. Determinaţi numărul submulţimilor ordonate cu trei elemente ale mulţimii $\{1;2;3;4;5\}$;

11. Câte numere de patru cifre distincte se pot forma cu elementele mulţimii $\{1;2;3;4;5;6;7;8\}$?

12. Câte submulţimi nevide formate din numere pare are mulţimea $\{1;2;3;4;5;6\}$?

13. Să se determine câte numere naturale de trei cifre distincte se pot forma cu elementele mulţimii $\{0;1;2;3;4\}$;

14. Să se determine numărul submulţimilor cu trei elemente ale unei mulţimi cu 10 elemente.

15. Să se determine câte numere de şase cifre distincte se pot forma cu cifrele de la 1 la 9 ?

16. Câte cuvinte cu cinci litere în care nicio literă nu se repetă se pot forma cu 12 litere diferite?

17. O clasă de elevi trebuie să programeze trei teze în opt zile. În câte moduri se poate face aceasta?

18. Să se rezolve ecuațiile:

a) $A_n^2=12$; b) $A_n^2=6$; c) $A_n^2+3n-3=12$; d) $A_{2n+3}^2=110$; e) $2A_{n+1}^2-A_{n+2}^2=10$;

f) $4A_{n+1}^2+70=5A_{n+2}^2$;

19. Să se rezolve ecuaţia $A_n^4-n\cdot A_n^2+3(n-1)A_n^1=0$.

20. Pentru ce numere naturale n este definită expresia $E(n)=A_{5n+4}^{n^2+3n-4}$?

21. Să se calculeze:

a) $C_4^3+C_4^2\cdot C_4^1-C_4^0\cdot C_4^2$; b) $\frac{C_7^6-C_7^4}{C_7^5}$; c) $C_{10}^3-3!$; d) $C_4^1+C_4^2+C_4^3+C_4^4$;

e) $C_5^1+C_5^2+C_5^3+C_5^4+C_5^5$; f) $C_6^0+C_6^1+C_6^2+C_6^3+C_6^4+C_6^5+C_6^6$;

g) $C_{2012}^0+C_{2012}^1+C_{2012}^2+.....+C_{2012}^{2012}$; h) $C_7^5-C_6^5-C_6^4$; i) $\frac{2C_7^3-A_5^4}{P_3}$;

j) $\frac{A_7^5-A_7^4}{C_5^3}$; k) $C_{20}^1+C_{20}^2+.....+C_{20}^{20}$; l) $\frac{P_6+A_6^3}{C_7^3}$;

m) $\frac{P_5+A_5^3}{C_5^2}$; n) $\frac{C_9^6-C_9^5}{A_9^5}$; o) $\frac{C_{10}^2+C_{10}^3}{C_8^4}$; p) $C_{2014}^2-C_{2014}^{2012}$.

22. Câte drepte distincte se pot trasa prin opt puncte, oricare trei necoliniare?
23. La jocul 6 din 49, câte bilete ar trebui completate de un jucător pentru a fi sigur că va câştiga?
24. Într-o clasă sunt 12 fete şi 10 băieţi. În câte moduri se poate forma un grup din 4 fete şi 4 băieţi?
25. În câte moduri se pot împărţi 9 elevi în 3 grupe a câte 3 elevi fiecare?
26. La un concurs sportiv sunt şase probe. Un sportiv trebuie să participe în trei probe. Câte posibilităţi de alegere a probelor are?
27. La o petrecere sunt șase băieți și patru fete. În câte moduri se pot forma trei perechi de dansatori?
28. Din 11 persoane dintre care 6 bărbaţi şi 5 femei se doreşte să se formeze o delegaţie compusă din 5 persoane din care să facă parte cel puţin un bărbat şi 2 femei. În câte moduri se poate forma această delegaţie?
29. În câte moduri se pot alege şase elevi din cincisprezece?
30. Câte triunghiuri se pot construi având în plan 10 puncte astfel încât oricare trei din ele să nu fie coliniare?
31. În câte moduri se poate forma o echipă de doi doctori şi patru asistente dacă sunt 4 doctori şi 6 asistente? În câte moduri se pot forma echipe de şase persoane dacă trebuie să fie cel puţin 5 asistente ?
32. În câte moduri se poate forma o echipă de un doctor şi două asistente dacă sunt patru doctori şi şase asistente ?
33. Într-o clasă sunt 14 băieţi şi 8 fete. În câte moduri se pot selecta 10 copii astfel încât să fie şapte băieţi şi trei fete? b) În câte moduri se pot selecta 12 copii astfel încât să fie cel puţin 11 băieţi?
34. Într-o clasă sunt 10 fete şi 12 băieţi. În câte moduri se poate forma un grup din patru fete şi şase băieţi ? În câte moduri se pot forma grupuri de câte şase elevi în care să fie cel puţin cinci băieţi ?
35. Un lot de jucători de baschet are 5 fundaşi, 6 atacanţi şi 2 centrali. Câte echipe de câte 5 jucători, diferite se pot alege astfel încât să avem exact doi fundaşi , doi atacanţi şi un central.
36. Într-o clasă în care sunt 15 băieţi, doi dintre ei vor să joace pe postul de portar, ceilalţi putând evolua pe orice post. În câte moduri se poate forma o echipă de fotbal?
37. În câte moduri se pot forma echipe de câte 5 elevi şi 2 profesori dacă sunt 18 elevi şi 4 profesori?
38. În câte moduri se pot aşeza pe un rând 9 băieţi şi 6 fete dacă pe primul loc e ocupat de un băiat şi ultimul de o fată ?

39. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $C_n^2 = 12;$ b) $C_n^1 + C_n^2 = 45;$ c) $C_{x+3}^2 = x^2 + 12;$ d) $C_x^3 - C_{x+1}^2 = x;$

e) $C_n^{n-2} + n = 10;$ f) $C_{n+3}^{n+1} = 6n;$ g) $C_n^1 + 3n + 5 = C_n^2;$ h) $C_n^1 + C_n^2 = 45;$

i) $C_n^4 = \frac{5n(n-3)}{6};$ j) $C_n^2 = 10;$ k) $C_n^2 = 28;$ l) $C_{n+2}^{n+1} = 2;$

m) $C_{n+1}^1 = n^2 - 1;$ n) $C_{2n+1}^2 + 3A_n^2 = 16;$ o) $C_n^1 + A_n^2 = 4;$ p) $C_n^1 + 3n + 5 = C_n^2;$

q) $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + ... + C_n^n = 256;$ r) $C_{n-2}^2 + C_{n-3}^2 + C_{n-4}^2 = 19;$ s) $A_{x+1}^3 + C_{x+1}^{x-1} = 14(x+1);$

t) $C_{x+1}^x = 4;$ u) $C_x^2 + A_x^2 = 30;$ v) $C_x^{x-2} + 2x = 9;$ x) $C_x^4 = \frac{5x(x-3)}{6};$

y) $C_x^3 + C_x^4 = x(x-2);$ x) $C_{x-1}^2 + C_x^3 = 16;$ w) $A_x^2 = 28x - 12C_x^3;$

40. Să se rezolve ecuaţia $A_{x+1}^3 + C_{x+1}^{x-1} = 3(x+1).$

41. Să se rezolve $C_x^{x-3} + A_{x+1}^2 = 2 \cdot C_x^1.$

8.4 Binomul lui Newton

În 1664 Isaac Newton (1643- 1727) a găsit următoarea formulă pentru dezvoltarea binomului $(a+b)^n$. Deși formula era cunoscută din antichitate de către matematicianul arab Omar Khayyam (1040-1123), Newton a extins-o și pentru coeficineții raționali.

Teoremă: Pentru orice număr natural n şi a şi b numere reale există relaţia:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}\cdot b + C_n^2 a^{n-2}\cdot b^2 + \ldots\ldots\ldots + C_n^k a^{n-k}\cdot b^k + \ldots\ldots + C_n^n b^n$$

Exemplu: $(x+3)^5 = C_5^0 x^5 + C_5^1 x^4\cdot 3 + C_5^2 x^3\cdot 3^2 + C_5^3 x^2\cdot 3^3 + C_5^4 x\cdot 3^4 + C_5^5 3^5 =$

$= x^5 + 15x^4 + 90x^3 + 270x^2 + 405x + 243$;

Numerele $C_n^0, C_n^1, \ldots, C_n^n$ se numesc coeficienţii binomiali ai dezvoltării;

Este necesar să se facă distincţie între coeficientul unui termen al dezvoltării şi coeficientul binomial al acelui termen. Exemplu: $(a+2b)^4 = a^4 + 4a^3\cdot 2b + \ldots..$

Coeficientul celui de-al doilea termen este 8 iar coeficientul binomial este $C_4^1 = 4$;

Pentru $(a-b)^n$ avem următoarea formă a binomului lui Newton:

$$(a-b)^n = C_n^0 a^n - C_n^1 a^{n-1}\cdot b + C_n^2 a^{n-2}\cdot b^2 - \ldots\ldots\ldots + (-1)^k C_n^k a^{n-k}\cdot b^k + \ldots\ldots + (-1)^n C_n^n b^n$$

Triunghiul lui Pascal reprezintă triunghiul în care pe fiecare rând se află coeficienții binomiali din dezvoltarea binomului $(a+b)^n$, unde n = 0, 1, 2, 3, ……. și în care fiecare termen cu excepți aprimului și a ultimului se formează prin adunarea celor doi aflați deasupra sa.

$(a+b)^0 = 1$ 1

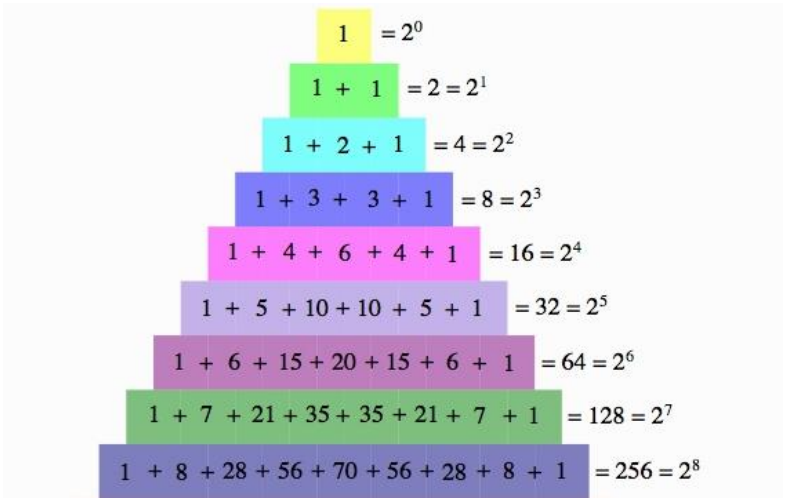
$(a+b)^1 = a + b$ 1 1

$(a+b)^2 = a^2 + \mathbf{2}ab + b^2$ 1 2 1

$(a+b)^3 = a^3 + \mathbf{3}a^2b + \mathbf{3}ab^2 + b^3$ 1 3 3 1

$(a+b)^4 = a^4 + \mathbf{4}a^3b + \mathbf{6}a^2b^2 + \mathbf{4}ab^3 + b^4$ 1 4 6 4 1

$(a+b)^5 =$ …….…. ……..



Proprietăţi:

1. Pentru a=b=1 se obţine

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots\ldots\ldots + C_n^n = (1+1)^n \qquad (*)$$

ceea ce înseamnă că **numărul tuturor submulţimilor unei mulţimi cu n elemente este 2^n**

Exemplu: Să se calculeze suma $C_{2020}^0 + C_{2020}^1 + C_{2020}^2 + \ldots + C_{2020}^{2020}$;

Răspuns. Conform formulei (*) , n= 2020, rezultă că suma este egală cu 2^{2020} ;

2. Coeficienţii binomiali din dezvoltare, egal depărtaţi de termenii extremi ai dezvoltării sunt egali între ei.

$$C_n^k = C_n^{n-k}$$

3. Termenul de rang k+1 al dezvoltării (sau termenul general al dezvoltării) este

$$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} \cdot b^k, \quad k = 0,1,2,\ldots,n$$

$\Rightarrow$ Formula binomului lui Newton scrisă restrâns are forma:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k .$$

4. Relaţia de recurenţă între termenii succesivi ai dezvoltării este următoarea:

$$\frac{T_{k+2}}{T_{k+1}} = \frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{b}{a}$$

5. Numărul termenilor dezvoltării binomului $(a+b)^n$ este n+1;

Dacă n=2k $\Rightarrow$ coeficientul binomial al termenului din mijloc al dezvoltării este C_n^k şi este cel mai mare.

Dacă n=2k+1 $\Rightarrow$ C_n^k şi C_n^{k+1} sunt egali şi sunt cei mai mari;

$C_n^0 < C_n^1 < \ldots\ldots < C_n^k > C_n^{k+1} > \ldots.. > C_n^n$ daca n este par, n=2k

$C_n^0 < C_n^1 < \ldots\ldots < C_n^k = C_n^{k+1} > \ldots.. > C_n^n$ daca n este impar, n=2k+1.

Activitate independentă		**Răspuns**
Să se rezolve ecuația $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 256$		**n=8**

Exercitii rezolvate

1. Câte submulțimi are o mulțime cu 5 elemente?

Rezolvare:

Cum numărul submulțimilor unei mulțimi cu n elemente este egal cu 2^n atunci, în cazul unei mulțimi cu 5 elemente este 2^5= 32.

2. Să se determine $n\in\mathbb{N}^*$ pentru care mulțimea $\{1;2;3;....;n\}$ are exact 512 elemente.

Rezolvare. Cum numărul de submulțimi ale mulțimii $\{1;2;3;....;n\}$ este egal cu 2^n iar 512= 2^9 rezultă că $2^n=2^9\Rightarrow n=9$.

3. Să se dezvolte după binomul lui Newton.

a) $(x+3)^4$**; b)** $(x+2)^5$**;**

Rezolvare:

a) $(x+3)^4=C_4^0x^4+C_4^1x^3\cdot 3+C_4^2x^2\cdot 3^2+C_4^3x\cdot 3^3+C_4^4\cdot 3^4=x^4+4\cdot x^3\cdot 3+6\cdot x^2\cdot 9+4\cdot x\cdot 27+81=$

$=x^4+12x^3+54x^2+108x+81.$

b) $(x+2)^5=C_5^0x^5+C_5^1x^4\cdot 2+C_5^2x^3\cdot 2^2+C_5^3x^2\cdot 2^3+C_5^4\cdot x\cdot 2^4+C_5^5\cdot 2^5=$

$=x^5+5x^4\cdot 2+10x^3\cdot 4+10x^2\cdot 8+5\cdot x\cdot 16+32=x^5+10x^4+40x^3+80x^2+80\cdot x+32$

4. Fie dezvoltarea $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^{15}$, $x\in\mathbb{R}^*$. Se cere:

a) Să se calculeze al zece-lea termen al dezvoltării;

b) Să se determine termenii din mijloc ai dezvoltării;

c) Să se determine termenul ce-l conține pe x^{21}**.**

Rezolvare:

a) Aplicăm formula termenului general, $T_{k+1}=C_n^ka^kb^{n-k}$.

În cazul nostru $T_{10}=T_{9+1}=C_{15}^9(x^2)^9\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^{15-9}=C_{15}^9x^{18}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^6=C_{15}^9x^{18}\cdot x^{-6}=C_{15}^9x^{12}.$

b) Cum dezvoltarea are 16 termeni atunci termenii din mijloc sunt T_8 și T_9.

$T_8=T_{7+1}=C_{15}^7(x^2)^7\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^{15-7}=C_{15}^7x^{14}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^8=C_{15}^7x^{14}\cdot x^{-8}=C_{15}^7x^6$

$T_9=T_{8+1}=C_{15}^8(x^2)^8\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^{15-8}=C_{15}^8x^{16}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^7=C_{15}^8x^{16}\cdot x^{-7}=C_{15}^8x^9$ ș

c) $T_{k+1}=C_{15}^k(x^2)^{15-k}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^k=C_{15}^kx^{30-2k-k}=C_{15}^kx^{30-3k}$. Cum dezvoltarea îl conține pe x^{21} adică unul din termeni îl conține pe x^{21} atunci $C_{15}^kx^{30-3k}=C_{15}^kx^{21}\Rightarrow 30-3k=21\Rightarrow k=3$. Așadar, al patrulea termen $T_{3+1}=T_4$ îl conține pe x^{21}.

5. Să se calculeze sumele:

a) $S=C_n^0+2C_n^1+3C_n^2+....+(n+1)C_n^n$**;** **b)** $S=C_n^0+3C_n^1+5C_n^2+....+(2n-1)C_n^{n-1}+(2n+1)C_n^n$

Rezolvare:

a) Cum $C_n^k=C_n^{n-k},\forall n\geq k\geq 0\Rightarrow S=C_n^n+2C_n^{n-1}+3C_n^{n-2}+....+nC_n^1+(n+1)C_n^0$;

Rezultă $2S=(n+2)(C_n^0+C_n^1+C_n^2+....+C_n^n)\Rightarrow S=\frac{(n+2)2^n}{2}=(n+2)2^{n-1}$;

b) Cum $C_n^k=C_n^{n-k},\forall n\geq k\geq 0\Rightarrow S=C_n^n+3C_n^{n-1}+5C_n^{n-2}+....+(2n-1)C_n^1+(2n+1)C_n^0$;

Rezultă $2S=(2n+2)(C_n^0+C_n^1+C_n^2+....+C_n^1+C_n^0)\Rightarrow S=(n+1)2^n$;

6*. a) Să se calculeze: $A=\sqrt{C_{2014}^0\cdot C_{2014}^{2014}}+\sqrt{C_{2014}^1\cdot C_{2014}^{2013}}+\sqrt{C_{2014}^2\cdot C_{2014}^{2012}}+...+\sqrt{C_{2014}^{2014}\cdot C_{2014}^0}$**;**

b) Să se arate că $\sqrt{C_{2014}^0\cdot C_{2014}^1}+\sqrt{C_{2014}^1\cdot C_{2014}^2}+\sqrt{C_{2014}^2\cdot C_{2014}^3}+...+\sqrt{C_{2014}^{2013}\cdot C_{2014}^{2014}}<2^{2014}-1$**.**

Rezolvare:

a) Se folosește formula $C_n^k=C_n^{n-k}$**,**

$A=\sqrt{\left(C_{2014}^0\right)^2}+\sqrt{\left(C_{2014}^1\right)^2}+\sqrt{\left(C_{2014}^2\right)^2}+...+\sqrt{\left(C_{2014}^{2014}\right)^2}=$

$=C_{2014}^0+C_{2014}^1+C_{2014}^2+....+C_{2014}^{2014}=2^{2104}$.

b) Se folosește inegalitatea mediilor $\sqrt{a\cdot b}\le\frac{a+b}{2},\forall a,b\in\mathbb{R}_+$. cu egalitate când a = b.

$\sqrt{C_{2014}^0\cdot C_{2014}^1}+\sqrt{C_{2014}^1\cdot C_{2014}^2}+\sqrt{C_{2014}^2\cdot C_{2014}^3}+...+\sqrt{C_{2014}^{2013}\cdot C_{2014}^{2014}}<$

$<\frac{C_{2014}^0+C_{2014}^1}{2}+\frac{C_{2014}^1+C_{2014}^2}{2}+...+\frac{C_{2014}^{2013}+C_{2014}^{2014}}{2}=$

$=C_{2014}^0+C_{2014}^1+.....+C_{2014}^{2013}\ \Big|+C_{2014}^{2014}\ -C_{2014}^{2014}\quad=\left(C_{2014}^0+C_{2014}^1+.....+C_{2014}^{2013}\ +C_{2014}^{2014}\right)-1=$

$=2^{2014}-1$.

Am folosit faptul că $C_{2014}^{2014}=C_{2014}^0$ și $C_{2014}^{2014}=1$.

7*. Fie binomul $(a+b)^n$ **unde** $a=\sqrt{3^{\lg(19-3^x)}}$ **și** $b=\sqrt[5]{3^{(x-2)\lg 3}}$**. Să se determine x știind că în dezvoltarea binomului, termenul care îl conține pe** b^5 **este egal cu 63, iar coeficienții binomiali ai celui de-al doilea, al treilea și al patrulea termen sunt în progresie aritmetică.**

Rezolvare:

Cum $T_{k+1}=C_n^k a^{n-k}\cdot b^k=21\Rightarrow C_n^k a^{n-k}\cdot b^5=21\Rightarrow k=5$.

Din faptul că $C_n^1=n,\ C_n^2=\frac{n(n-1)}{2},\ C_n^3=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ sunt în progresie aritmetică conform enunțului, rezultă $C_n^2=\frac{C_n^1+C_n^3}{2}\Rightarrow n(-n^2+9n-14)=0\Rightarrow n=7$.

Atunci, $T_6=C_7^5a^{7-5}\cdot b^5=63\Rightarrow\frac{7!}{5!\cdot 2!}\cdot\sqrt{3^{\lg(19-3^x)}}^2\cdot\sqrt[5]{3^{(x-2)\lg 3}}^5=63\Big|:21\Rightarrow$

$3^{\lg(19-3^x)}\cdot 3^{(x-2)\lg 3}=3^1\Rightarrow\lg(19-3^x)+(x-2)\lg 3=1\Rightarrow\ \lg(19-3^x)\cdot 3^{x-2}=1\Rightarrow(19-3^x)\cdot 3^{x-2}=10\Rightarrow$

$t^2-19t+90=0$, unde $t=3^x$. Se obține $t\in\{9;10\}\Rightarrow x\in\{2;\log_3 10\}$.

8*. $C_{x+5}^{x^2-3x+8}+C_{4x}^{x^2-x+4}=67$

Rezolvare:

C.E $x+5\ge x^2-3x+8\ge 0\Rightarrow x^2-4x+3\le 0\Rightarrow x\in[1;3]$.

$4x\ge x^2-x+4\ge 0\Rightarrow x^2-5x+4\le 0\Rightarrow x\in[1;4]$.

Rezultă $x\in\{1;2;3\}$. Se verifică fiecare valoare a lui x. x=3.

9*. Se consideră dezvoltarea $\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{y}\right)^{56}$**. Să se determine termenul care-l conține pe x și y la aceeași putere.**

Rezolvare: $T_{k+1}=C_{56}^{k}\cdot\sqrt[3]{x^2}^{56-k}\cdot\sqrt{y}^{k}$. x și y au aceeași putere: $x^{\frac{2(56-k)}{3}};y^{\frac{k}{2}}$ rezultă $\frac{2(56-k)}{3}=\frac{k}{2}\Rightarrow k=32$. Așadar, termenul T_{33} este cel căutat.

10*.Să se arate că dezvoltarea $(\sqrt{3}+\sqrt[3]{5})^{2021}$ nu are niciun termen rațional.

Rezolvare:

$T_{k+1}=C_{2021}^{k}\cdot\sqrt{3}^{2021-k}\cdot\sqrt[3]{5}^{k}=C_{2021}^{k}\cdot 3^{\frac{2021-k}{2}}\cdot 5^{\frac{k}{3}}\in\mathbb{Q}\Leftrightarrow k\in M_3=\{0;3;6;9;12;...,2019\}$ (1).

și $\frac{2021-k}{2}\in\mathbb{N}\Rightarrow 2021-k\in M_2=\{0;2;4;6;....,2020\}$. (2).

Din (2) rezultă $k\in\{2021;2019;2017;2015;2013,....,3;1\}$.

Exercitii propuse

1. Câte submulţimi are o mulţime cu 8 elemente ?

2. O mulţime are 2013 elemente. Determinaţi câte submulţimi nevide cu cel mult 2011 elemente are mulţimea A.

3. Să se dezvolte după binomul lui Newton: a) $(2x+3)^4$**; b)** $(3x+1)^5$

4. Să se dezvolte după binomul lui Newton:

a) $(x+2)^6$**;** **b)** $(\sqrt{2}+3)^4$**;** **c)** $(x+1)^6$**;** **d)** $(2x+1)^5$**;** **e)** $(2x-2)^4$**;**

f) $(2x+\sqrt{2})^5$**;** **g)** $(\sqrt{3}+2)^5$**;** **h)** $(2\sqrt{2}-1)^4$**;** **i)** $(\sqrt{3}+2)^5$**;**

5. Să se calculeze sumele:

a) $S=C_n^0+2C_n^1+3C_n^2+....+(n+1)C_n^n$**;** **b)** $S=C_n^0+3C_n^1+5C_n^2+....+(2n-1)C_n^{n-1}+(2n+1)C_n^n$**;**

c) $C_{2013}^1+C_{2013}^2+C_{2013}^3+.....+C_{2103}^{2103}$**;** **d)** $S=C_{2n}^0+C_{2n}^2+C_{2n}^4+.....+C_{2n}^{2n}$

6. Să se determine termenul din dezvoltarea $(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt{x}})^{10}$ care nu-l conţine pe x.

7. Fie dezvoltarea $\left(x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{20}$, $x\in\mathbb{R}^*$. Se cere:

a) Să se calculeze al 15-lea termen al dezvoltării;

b) Să se determine termenul din mijloc al dezvoltării;

c) Să se determine termenul ce-l conține pe x^{17}.

8. Să se rezolve inecuația $C_{4n+5}^{n^2}\rangle 10$.

9. Să se determine numărul real pozitiv a, știind că termenul din mijloc al dezvoltării $\left(\sqrt[3]{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^{12}$ este egal cu 3696.

8.5 Teste de autoevaluare

Testul 1. Permutări

1. Să se calculeze $\frac{3!-4!+2!\cdot 3!}{2!}$.

2. Câte cuvinte de câte cinci litere care nu se repetă se pot forma cu literele $\{a,e,i,r,m\}$?

3. Fie mulţimea $A=\{0,1,2,3,4,5\}$. Câte numere de şase cifre distincte se pot forma cu elementele mulţimii A ?

4. Să se rezolve ecuaţia $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}=30$.

5. Să se calculeze $\frac{(n+2)!}{n!}+\frac{(n-2)!}{(n-1)!}$.

6. Să se calculeze suma $\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}$.

Testul 2. Aranjamente

1. Să se calculeze $\frac{A_8^6-A_8^5}{A_9^6-A_9^5}$.

2. Câte numere de telefon de câte şase cifre distincte se pot forma cu cifrele 0, 1, 2, 3, 4, 5 , 6, 7, 8, 9 ?

3. La o clasă se programează a se da 4 teze în 10 zile astfel încât în prima zi se programează obligatoriu o teză . Știind că nu se dau două teze în aceeași zi, să se determine câte variante de programare a tezelor se pot face .

4. Zece elevi au de prezentat fiecare cîte un referat în două zile. În câte moduri diferite pot fi programate cele zece referate ştiind că în fiecare zi sunt prezentate 5 referate?

5. Pentru ce numere naturale n este definită expresia $E(n)=A_{5n+4}^{n^2+3n-4}$?

6. Să se rezolve ecuaţia $A_n^4-n\cdot A_n^2+3(n-1)A_n^1=0$.

Testul 3. Combinări

1. Să se calculeze $C_6^4-P_3\cdot A_5^2$.

2. Să se calculeze $C_{2014}^2-C_{2014}^{2012}$.

3. La o petrecere sunt șase băieți și patru fete. În câte moduri se pot forma trei perechi de dansatori?

4. Să se rezolve ecuaţia $C_{n+3}^{n+1}=6n$.

5. Să se rezolve ecuaţia $C_n^{n-2}+n=10$.

6. Să se rezolve ecuaţia $A_{x+1}^3+C_{x+1}^{x-1}=3(x+1)$.

Testul 4. Binomul lui Newton

1. Să se dezvolte după binomul lui Newton, $(2x+3)^4$.

2. Să se dezvolte după binomul lui Newton, $(3x+1)^5$.

3. Să se calculeze $C_{2013}^1+C_{2013}^2+C_{2013}^3+.....+C_{2103}^{2103}$.

4. O mulţime are 2013 elemente. Determinaţi câte submulţimi nevide cu cel mult 2011 elemente are mulţimea A.

5. Să se determine termenul din dezvoltarea $(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt{x}})^{10}$ care nu-l conţine pe x.

6. Să se calculeze suma $S=C_{2n}^0+C_{2n}^2+C_{2n}^4+.....+C_{2n}^{2n}$.

Cap. 9 MATEMATICI FINANCIARE

9.1 Procente

Definiţie: Se numeşte raport procentual un raport de forma $\frac{p}{100}$, $p \geq 0$ unde numărul p se numeşte procent şi îl scriem de forma $p\%$;

1. A afla $p\%$ dintr-un număr N înseamnă a calcula $\frac{p}{100} \cdot N$;

Exemplu: 15% din 2840 este egal cu $\frac{15}{10\not{0}} \cdot 284\not{0} = \frac{426\not{0}}{\not{10}} = 426$;

2. Determinarea unui număr când se cunoaşte un procent din el

Pentru a afla un număr x pentru care ştim cât reprezintă un procent din el procedăm astfel:

$\frac{p}{100} \cdot x = N$ **unde p şi N sunt cunoscuţi. Rezultă** $x = \frac{N \cdot 100}{p}$ **;**

Exemplu: Dacă 12% dintr-un număr este egal cu 6, să se afle numărul respectiv.

$\frac{12}{100} \cdot x = 6 \Rightarrow x = \frac{6 \cdot 100}{12} = \frac{600}{12} = 50$. Aşadar, numărul respectiv este 50.

3. Pentru determinarea unui procent când se cunoaşte cât reprezintă un număr din altul se aplică aceeaşi formulă din care se scoate necunoscuta p.

$\frac{p}{100} \cdot x = N \Rightarrow p = \frac{N \cdot 100}{x}$ **;**

Exemplu: Să se determine cât la sută reprezintă numărul 8 din 32 ?

$\frac{p}{100} \cdot 32 = 8 \Rightarrow p = \frac{8 \cdot 100}{32} = 25$. Aşadar, 8 din 32 înseamnă 25%.

Exercitii rezolvate

1. Să se calculeze: a) 5% **din 480** $= \frac{5}{100} \cdot 480 = \frac{5 \cdot 48\not{0}}{10\not{0}} = \frac{240}{10} = 24;$

b) 12% din 350 $= \frac{12}{100} \cdot 350 = \frac{12 \cdot 35\not{0}}{10\not{0}} = \frac{420}{10} = 42;$

c) 7,5% din 180 $= \frac{7,5}{100} \cdot 180 = \frac{75 \cdot 18\not{0}}{10 \cdot 10\not{0}} = \frac{1350}{100} = 13,5;$

2. Cât la sută din 25 înseamnă 5?

Rezolvare: $\frac{x}{100} \cdot 25 = 5 \Rightarrow x = \frac{5 \cdot 100}{25} = \frac{500}{25} = 20;$ Răspuns 20%.

3. Cât la sută din 180 înseamnă 15?

Rezolvare: $\frac{x}{100}\cdot 180=15\Rightarrow x=\frac{15\cdot 100}{180}=8,3$; Răspuns 8,3%.

4. Să se afle un număr ştiind că 20 % din el este egal cu 800.

Rezolvare: $\frac{20}{100}\cdot x=800\Rightarrow x=\frac{800\cdot 100}{20}=800\cdot 5=4000;$

5. Care număr este mai mare:
a) a=8% din 3400 sau b=12% din 2500?
b) a=15% din 2500 sau b=25% din 15000?
Rezolvare:

a) $a=\frac{8}{100}\cdot 3400=272$, $b=\frac{12}{100}\cdot 2500=300$, deci b este mai mare.

b) $a=\frac{15}{100}\cdot 2500=3750$, $b=\frac{25}{100}\cdot 1500=3750$, deci a şi b sunt egale.

6. O fermă agricolă are de arat 400 ha. Într-o primă etapă s-au arat 60 ha. Câte procente din întreaga suprafaţă au fost arate?
Rezolvare:

$\frac{x}{100}\cdot 400=60\Rightarrow x=\frac{60\cdot 100}{400}=15$. Răspunsul este 15%.

7. La un magazin s-au adus 3000 de ouă dar s-a observat că 150 din ele erau sparte. Câte procente din întreaga cantitate reprezintă ouălele sparte?
Rezolvare:

$\frac{x}{100}\cdot 3000=150\Rightarrow x=\frac{150\cdot 100}{3000}=5$**.** Răspunsul este 5%.

8. După ce a cheltuit 30% din suma avută şi încă120 lei, lui Andrei i-au rămas 40% din suma iniţială. Care a fost suma iniţială?
Rezolvare:

Fie x suma iniţială. Atunci, $x-\frac{30}{100}\cdot x-120=\frac{40}{100}\cdot x\Rightarrow {}^{x)}x-\frac{3}{10}\cdot x-{}^{x)}120=\frac{4}{10}\cdot x\Rightarrow$

$7x=1200+4x\Rightarrow 3x=1200\Rightarrow x=400$ lei.

9. La sfârşitul unui an şcolar 15% din numărul de elevi ai unei şcoli nu au promovat. Câţi elevi a avut şcoala dacă au absolvit anul un număr de 578 de elevi?
Rezolvare:

Dacă 15 % nu au promovat înseamnă că 85 % din elevi au absolvit adică $\frac{85}{100}\cdot x=578$

unde x este numărul de elevi iniţial. Rezultă $x=\frac{578\cdot 100}{85}=680$.

10. Media de admitere se calculează după formula $M=25\%MG+75\%EN$ **unde MG este media eneralã a celor patru ani V-VIII iar EN este media de la Evaluarea naţională. Un candidat are MG=9. Ce medie trebuie să obţină candidatul pentru a fi admis la un liceu unde media minimă de admitere a fost 8,50?**
Rezolvare:
Fie x media de la Evaluarea Naţională pe care trebuie să o ia cel puţin.

$^{100)} 8,50 = \frac{25}{100}\cdot 9 + \frac{75}{100}\cdot x \Rightarrow 850 = 25\cdot 9 + 75x \Rightarrow 75x = 625 \Rightarrow x = 8,33$.

11. O cursă ciclistă este formată din trei etape. În prima etapă sunt parcurşi 45% din întregul traseu, în a doua etapă se parcurg 65% din rest iar în ultima etapă mai rămân de parcurşi 42 km. Să se afle lungimea totală a drumului.

Rezolvare:

Fie T lungimea totală a traseului şi x lungimea drumului ramas după prima etapă.

Atunci, dacă în a doua etapă se parcurg 65 % din x înseamnă că în a treia etapă rămân restul de 35% din x adică $\frac{35}{100}\cdot x = 42 \Rightarrow x = \frac{42\cdot 100}{35} = 120km$. Prin urmare 120 km reprezintă $\frac{65}{100}\cdot 120 + 42 = 120$. Dacă în prima etapă s-a parcurs 45 % din T atunci restul drumului reprezintă 55% din T, adică $\frac{55}{100}\cdot T = 120 \Rightarrow T = \frac{12000}{55} = 218,18km$ reprezintă lungimea totală a traseului.

Exercitii propuse

1. Să se calculeze:

a) 12% din 400; b) 5% din 60; c) 25% din 1200; d) 18% din 216; e) $\frac{15}{8}\%$ din $\frac{200}{105}$;

f) $\frac{9}{16}\%$ din $\frac{48}{27}$; g) $12,45\%$ din 650; h) $0,5\%$ din 20; i) $40,58\%$ din $60,5$;

2. Să se determine un număr x ştiind că:

a) 15% din el reprezintă 240; b) 28% din el reprezintă 450; c) 60% din el reprezintă 300;

d) $42,5\%$ din el reprezintă 26; e) $10,5\%$ din el reprezintă 72; f) $15,25\%$ din el reprezintă 40;

3. Să se determine cât la sută reprezintă numărul N din x dacă:

a) $N = 24$ şi $x = 144$; b) $N = 18$ şi $x = 90$; c) $N = 128$ şi $x = 32$; d) $N = 14,8$ şi $x = 118,4$;

4. După două reduceri succesive cu 15%, respectiv 20%, preţul unui produs este de 340 lei. Să se determine preţul initial al produsului;

5. După două reduceri succesive cu 10%, preţul unui produs este de 1377 lei. Să se determine preţul initial al produsului;

6. La o bancă un deponent pune suma de 200000 lei cu un procent al dobânzii de 15%. Care este dobânda obţinută după un an ? Dar după trei ani ?

7. După o reducere cu 10% un produs costă 99 lei. Să se determine preţul produsului înainte de reducere.

8. După o reducere cu 5% un produs costă 150 lei. Să se determine preţul produsului înainte de reducere.

9. Să se determine preţul iniţial al unui produs, care după două scumpiri succesive de 20% respectiv 30% este de 780 lei.

10. Să se determine preţul iniţial al unui produs, care după două scumpiri succesive de 10% respectiv 5% este de 300 lei.

11. Un televizor costă 120 de euro. Cu ocazia sărbătorilor de Crăciun se acordă o reducere de 20 %. Cât costă un televizor după reducere ?

12. Un tricou costă 80 de lei. Se face o scumpire de 15 % din prețul lui. Cât costă tricoul după scumpire?

13. Un elev a citit 120 de pagini dintr-o carte, ceea ce reprezintă 80% din numărul total de pagini ale cărţii. Câte pagini are cartea ?

14. Să se determine prețul inițial al unui produs, care după două scumpiri succesive de 10% respectiv 5% este de 300 lei.

15. Prețul unui costum este de 500 lei. Prețul acestuia se micșorează prima dată cu 15 % și apoi se micșorează din nou cu 12%. Să se afle care este prețul final după cele două ieftiniri succesive ale costumului? Cu ce procent din prețul produsului inițial s-a micșorat costumul în urma celor două reduceri?

16. În Buzău la Clubul sportiv municipal 75 % din elevi joacă fotbal iar 60 % handbal. Ce procent din membrii clubului practică ambele sporturi?

17. Dintr-un butoi s-a scos jumătate din cantitatea de lichid plus încă 5 litri, rămânând 46% din cantitatea inițială. Ce capacitate are butoiul?

18. La un magazin de electrocasnice patronul oferă angajaților la plata salariilor în plus un comision de 3% din totalul vânzărilor pe luna respectivă. Să se afle câți bani va primi un angajat dacă în luna respectivă a realizat vânzări în sumă de 4085 lei.

19. Dacă prețul unui obiect se majorează cu 20%, cu cât trebuie micșorat noul preț pentru a reveni la prețul inițial?

20. O soluție de sare cu apă are masa de 1 kg și concentrația de 10%. Să se afle masa de sare dizolvată în soluție și dacă adăugăm încă 200 g sare să se afle ce concentrație are noua soluție.

21. Mircea și Ștefan au depus la bancă împreună suma de 720 lei. Suma depusă de Ștefan este 60% din suma depusă de Mircea. Ce sumă a depus fiecare din ei la bancă.

22. Din cei 120 de elevi înscriși în clasa a XII-a în școala noastră 115 au absolvit clasa iar 108 elevi s-au înscris la examenul de bacalaureat. Știind că 64 de elevi au luat bacalaureatul să se spună care este procentul de promovabilitate a examenului raportat la numărul de elevi înscriși; dar la cel al absolvenților?

23. În laboratorul de chimie există două soluții de acid clorhidric cu concentrație de 80% și respectiv 60%.

Ce cantități din cele două soluții trebuie să amestecăm pentru a obține 600 g de soluție acid clorhidric având concentrația de 70% ?

24. În ultimele două secole populația globului a crescut conform tabelului de mai jos. Să se determine în procente cu cât a crescut populația în 2000 față de 1900 . Dar cea din 2020 martie față de cea din 2000.

Anul	Numărul locuitorilor planetei
1800	890 000 000
1900	1 606 000 000
2000	6 010 000 000
2020-martie	7 773 291 000

25. În general, volumul de sânge reprezintă 8% din greutatea unui om, plasma reprezentând 55% din volumul sângelui iar apa 90% din plasmă. Dacă se consideră greutatea unui om ca având 80 de kilograme, se cere să se determine cantitatea de apă din plasmă;

9.2 Dobânzi

Definiţie: Se numeşte dobândă simplă pentru o sumă depusă pentru o anumită perioadă numărul $D=\frac{S\cdot p\cdot n}{100}$ unde S este suma depusă, n este numărul de ani pe care s-a depus suma, iar p este procentul dobânzii sau rata dobânzii anuale.

Pentru depunerea unei sume S pentru un număr m de luni formula este : $D=\frac{S\cdot p\cdot m}{100\cdot 12}$;

Exemplu: 1. La o bancă o persoană depune suma de 800 lei cu o rată a dobânzii anuale de 6%. Care este dobânda obţinută după un an ? Dar după patru luni?

Răspuns: Dobânda după un an este $D=\frac{800\cdot 6}{100}=48\ lei$;

Dobânda după patru luni este $D=\frac{8\cancel{00}\cdot 6\cdot \cancel{4}}{\cancel{100}\cdot \cancel{12}_{3}}=\frac{48}{3}=16\ lei$;

2. Cineva împrumută de la bancă suma de 500 lei cu o rată a dobânzii simple de 7,25% pe o perioadă de 2 ani. Ce sumă trebuie să restituie băncii la sfârşitul perioadei ?

Răspuns: Fie S_0 suma împrumutată de la bancă. Atunci,

$D=p\%\ din\ S_0\cdot 2=\frac{7,25}{100}\cdot 500\cdot 2=72,5$. Rezultă, $S=S_0+D=500+72,5=572,5$.

Determinarea valorii unui capital depus cu dobândă compusă(prin recapitalizare) pentru o perioadă de n ani

Definiţie: Fie C_0 valoarea unui capital iniţial depus într-o bancă cu dobânda compusă de d % (prin recapitalizare). Valoarea capitalului final obţinut după o perioadă de n ani este $C_n=C_o(1+d)^n$;

Dobânda compusă obţinută după cei n ani este egală cu C_n-C_0;

Exemplu: Să se determine capitalul obţinut după patru ani prin depunerea într-o bancă a sumei de 10000 de lei cu o dobândă compusă de 10 %. Să se determine şi valoarea dobânzii compuse obţinută după cei patru ani.

Răspuns: Capitalul obţinut după patru ani este

$C_4=10000\cdot(1+0,1)^4=10000\cdot 1,4641=14641$ lei iar valoarea dobânzii compuse obţinută după cei patru ani este $C_4-C_o=14641-10000=4641$ lei.

Exercitii rezolvate

1. Mihai împrumută de la bancă suma de 500 lei cu o rată anuală a dobânzii simple de
7% . Ce sumă trebuie să restituie băncii după o perioadă de 2 ani ?
Rezolvare:

Dobânda pe doi ani este $\frac{7}{10\not{0}}\cdot 50\not{0}\cdot 2=70\Rightarrow$ Suma restituită după 2 ani este

$70+500=570 lei$.

2. Pentru un împrumut de la bancă s-au plătit 800 lei dobândă după un an. Ce sumă s-a împrumutat ştiind că dobânda simplă percepută este de 12% ?
Rezolvare:

$12\%\ din\ S=800\Rightarrow \frac{12}{100}\cdot S=800\Rightarrow S=\frac{800\cdot 100}{12}=\frac{20000}{3}=6667$;

3. O persoană a depus la bancă suma de 3000 RON. Care este rata dobânzii dacă, după un an, în cont erau 3240 RON.
Rezolvare:

27). Dobânda obținută de la bancă după un an este D= 3240-3000=240 Ron;

$D=\frac{p}{100}3000=240\Rightarrow p=8$, rata dobânzii este de 8%;

4. O persoană împrumută suam de 8000 lei cu rata dobânzii simple de 6% pe an.
a) Ce dobândă trebuie să restituie băncii pentru un an?
b) Dar pentru 8 luni?
c) Dar pentru 90 de zile?
Rezolvare:

a) **Dobânda anuală calculată pe un an din suma N este egală cu** $D=p\%\ din\ N$**.**

$D=6\%\ din\ 8000=\frac{6}{100}\cdot 8000=480$ lei pe an.

b) **Dobânda anuală calculată pe n luni din suma N este egală cu** $D=p\%\ din\ N\cdot\frac{n}{12}$**.**

$D=6\%\ din\ 8000\cdot\frac{8}{12}=\frac{6}{100}\cdot 8000\cdot\frac{2}{3}=320$ lei pe 8 luni.

c) **Dobânda anuală calculată pe n zile din suma N este egală cu** $D=p\%\ din\ N\cdot\frac{n}{12\cdot 30}$**.**

$D=6\%\ din\ 8000\cdot\frac{90}{12\cdot 30}=\frac{6}{100}\cdot 8000\cdot\frac{90}{360}=120$ lei pe 90 de zile.

5. Suma de 5000 de lei se depune la o bancă în regim de dobândă compusă cu procentul de dobândă de 10%. Ce sumă se va obţine după doi ani ?

Rezolvare: $C_f=C_i(1+d)^n=5000(1+\frac{10}{100})^2=5000\cdot(1,1)^2=5000\cdot 1,21=6050$ lei.

6. După câți ani se dublează o depunere de 500 de lei depusă în regim de dobândă compusă cu un procent de 5% .

Rezolvare.

Capitalul inițail depus este $C_i = 500\,\text{lei}$ iar capitalul final după n ani devine $C_f = 1000\,\text{lei}$.

Atunci $C_f = C_i(1+d)^n \Rightarrow 1000 = 500(1+\frac{5}{100})^n \Rightarrow 1000 = 500(1+0,05)^n \Rightarrow 2 = 1,05^n$. Rezultă prin logaritmarea egalității în baza 10 că

$\lg 2 = \lg 1,05^n \Rightarrow \lg 2 = n\lg 1,05 \Rightarrow n = \frac{\lg 2}{\lg 1,05} = \frac{0,30}{0,02} = \frac{30}{2} = 15$. Se obțin așadar 15 ani în care suma depusă se poate dubla.

7. Două bănci acordă la depunerea banilor următoarele dobânzi anuale de 5% și 4%. O persoană depune la aceste bănci suma totală de 9000 lei și după un an obține 9400 lei. Ce sumă de bani a depus la fiecare bancă?

Rezolvare:

Fie S_1 suma depusă la prima bancă cu dobânda de 5% iar S_2 suma depusă la banca a doua cu dobânda de 4% . Atunci, $\begin{cases} S_1 + S_2 = 9000 \\ \left(S_1 + \frac{5}{100}\cdot S_1\right) + \left(S_2 + \frac{4}{100}\cdot S_2\right) = 9400 \end{cases}$. Scăzând cele două ecuații ale sistemului se obține: $\frac{5}{100}S_1 + \frac{4}{100}S_2 = 9400 - 9000 = 400 \Rightarrow 5S_1 + 4S_2 = 40000$.

Obținem sistemul: $\begin{cases} S_1 + S_2 = 9000 \,|\cdot(-4) \\ 5S_1 + 4S_2 = 40000 \end{cases} \Rightarrow S_1 = 4000 \Rightarrow S_2 = 5000$. Așadar, la prima bancă a depus suma de 4000 lei iar la a doua bancă a depus suma de 5000 lei.

8. Andrei vrea să depună la o bancă o sumă de bani astfel încât peste 4 ani să obțină suma de 7500 lei. Știind că banca oferă o dobândă în regim de dobândă compusă de 3% să se afle ce sumă trebuie să depună Andrei astfel încât să obțină suma respectivă?

Rezolvare:

Din $C_f = C_i(1+d)^n \Rightarrow 7500 = N\cdot(1,03)^4 \Rightarrow 7500 = N\cdot 1,125 \Rightarrow N = \frac{7500}{1,125} = 6666$ lei.

9. Florin depune la o bancă o sumă de 6000 lei în regim de dobândă compusă cu o rată a dobânzii de 10% pe an. Să se calculeze dobânda rezultată după 4 ani.

Rezolvare:

$C_f = C_i\cdot(1+d)^n$ unde C_f este capitalul final, iar C_i este capitalul inițial. Dobânda este egală cu $D = C_f - C_i = C_i\left[(1+d)^n - 1\right]$.

Suma obținută după patru ani este $C_f = 6000\cdot(1+\frac{10}{100})^4 = 6000\cdot 1,1^4 = 6000\cdot 1,4641 = 8784,6$ lei

Dobânda rezultată după patru ani este $8784,6 - 6000 = 2784,6\,\text{lei}$.

10. Care este rata dobânzii pentru o sumă plasată în regim de dobândă compusă ca aceasta să crească cu 20% în doi ani?

Rezolvare:

Fie S_i suma inițială și S_f suma finală. Atunci $S_f = S_i + \frac{20}{100}\cdot S_i = \frac{120S_i}{100} = \frac{12}{10}\cdot S_i$ (1)

Cum $S_f = S_i(1+d)^2$ (2), din (1) și (2) rezultă $\frac{12}{10}\cdot S_i = S_i(1+d)^2 \,|:S_i \Rightarrow \frac{12}{10} = (1+d)^2 \Rightarrow$

$d = \sqrt{1,2} - 1 = 1,09 - 1 = 0,09 = \frac{9}{100}$. Așadar, dobânda este 9%.

11. Un capital de 160000 lei a fost plasat în regim de dobândă compusă cu rata dobânzii de 12%. Să se determine pe ce perioadă de timp trebuie plasat astfel încât acesta să aducă o sumă finală de 200704 lei.

Rezolvare:

Știm că $C_f = C_i\cdot(1+d)^n \Rightarrow\ 200704 = 160000\cdot\left(1+\frac{12}{100}\right)^n \Rightarrow$

$\frac{200704}{160000} = \left(\frac{112}{100}\right)^n \Rightarrow \frac{12544}{10000} = \left(\frac{112}{100}\right)^n \Rightarrow \left(\frac{112}{100}\right)^2 = \left(\frac{112}{100}\right)^n \Rightarrow n = 2$ ani.

Exercitii propuse

1. Cineva împrumută de la bancă suma de 500 lei cu o rată a dobânzii simple de 7,25% pe o perioadă de 2 ani. Ce sumă trebuie să restituie băncii la sfârşitul perioadei ?

2. Un capital de 60000 lei este plasat în regim de dobândă simplă pe o perioadă de 2 ani cu rata dobânzii de 10%. Ce dobândă generează acest capitol pe perioada plasamentului?

3. La o bancă un deponent pune suma de 5000 lei cu un procent al dobânzii de 8%. Care este dobânda obţinută după un an ? Dar după trei ani ?

4. O persoană a depus la bancă suma de 3000 RON. Care este rata dobânzii dacă, după un an, în cont erau 3240 RON.

5. Pentru un împrumut de la bancă s-au plătit 800 lei dobândă după un an. Ce sumă s-a împrumutat ştiind că dobânda simplă percepută este de 12% ?

6. Să se calculeze suma finală obţinută de un capital de 1000 euro depus în regim de dobândă compusă timp de 2 ani, ştiind că dobânda anuală este de 5%.

7. Un capital de 60000 lei este plasat în regim de dobândă simplă pe o perioadă de 2 ani cu rata dobânzii de 10%. Ce dobândă generează acest capitol pe perioada plasamentului?

8. La o bancă un deponent pune suma de 5000 lei cu un procent al dobânzii de 8%. Care este dobânda obţinută după un an ? Dar după trei ani ?

9. Pentru un împrumut de la bancă s-au plătit 800 lei dobândă după un an. Ce sumă s-a împrumutat ştiind că dobânda simplă percepută este de 12% ?

10. La o bancă un deponent pune suma de 200000 lei cu un procent al dobânzii de 15%. Care este dobânda obţinută după un an ? Dar după trei ani ?

11. O persoană a depus la bancă suma de 3000 RON. Care este rata dobânzii dacă, după un an, în cont erau 3240 RON.

12. Să se calculeze suma finală obţinută de un capital de 1000 euro depus în regim de dobândă compusă timp de 2 ani, ştiind că dobânda anuală este de 5 %.

13. Suma de 5000 de lei se depune la o bancă în regim de dobândă compusă cu procentul de dobândă de 10 %. Ce sumă se va obţine după doi ani ?

14. Să se calculeze suma finală obţinută de un capital de 2000 euro depus în regim de dobândă compusă timp de 2 ani, ştiind că dobânda anuală este de 2 %. Care este valoarea dobânzii obținută după cei 2 ani.

15. Să se calculeze suma finală obţinută de un capital de 4000 lei depus în regim de dobândă compusă timp de 3 ani, ştiind că dobânda anuală este de 10 %. Care este valoarea dobânzii obținută după cei 3 ani.

16. Suma de 10000 de lei se depune la o bancă în regim de dobândă compusă cu procentul de dobândă de 8 %. Ce sumă se va obţine după doi ani ? Care este valoarea dobânzii obținută după cei 2 ani.

9.3 Probabilităţi



Un pionier al teoriei probabilităților a fost matematicianul **Jacob Bernoulli(1654-1705)** care prin opera sa „Ars conjectandi" publicată de nepotul său N. Bernoulli în 1713, a stipulat faptul că această teorie este fundamentală pentru studiul fenomenelor de masă, dând în acest sens celebra sa „teoremă a numerelor mari" în care definește relația matematică dintre frecvență și probabilitate, după efectuarea unui număr mare de experiențe pentru calculul probabilității unui eveniment.

Rezultatele sale au constituit fundamentul aplicării probabilităților în studiul teoriei cinetice a gazelor, a teoriei informației, a teoriei fiabilității, în programarea matematică, în teoria deciziei, în economie, sociologie, astronomie, dar și în celelalte domenii științifice.

Definiţie: Se numeşte **probabilitate** o funcţie **P: P(E)** $\to$ **[0;1]** cu proprietăţile:
$P(A) \geq 0,\ \forall A \in$ **P(E)**;
P(E)=1, unde E este evenimentul sigur;
$P(A \cup B) = P(A) + P(B),\ \forall A, B \in$ **P(E)**, $A \cap B = \varnothing$;

Tripletul **(E; P(E); P)** se numeşte **câmp de probabilitate** asociat unei experienţe aleatoare.

Evenimente echiprobabile

Definiţie: Două sau mai multe evenimente se numesc **evenimente echiprobabile** dacă au aceeaşi probabilitate.

Teoremă: Fie E un domeniu de probabilităţi finit şi A_i, $i = \overline{1,n}$ evenimente echiprobabile.

Atunci, $p(A_i) = \frac{1}{n}, \forall i = \overline{1,n}.$

În principiu, **determinarea probabilităţii unui eveniment** se face după formula:

$$P = \frac{Numarul\ cazurilor\ favorabile\ realizarii\ evenimentului}{Numarul\ cazurilor\ egal\ posibile\ realizarii\ evenimentului};$$

Exemple:

1) Care este probabilitatea ca la aruncarea unui zar să iasă faţa 6 ?

Răspuns: Există un singur caz favorabil – faţa 6 din cele şase posibile , feţele de la 1 la 6;

$\Rightarrow P = \frac{1}{6}$;

2) Care este probabilitatea ca la aruncarea a două zaruri să iasă feţele 6 – 6?

Răspuns: Există un singur caz favorabil – perechea 6 -6 din cele 36 posibile , feţele de la 1-1 ,

1-2; până la 6-6; $\Rightarrow P = \frac{1}{36}$;

3) Care este probabilitatea ca la aruncarea a două zaruri să iasă feţele 2 – 5?

Răspuns: Există două cazuri favorabile, perechile (2;5) respectiv (5;2) din cele 36 egal posibile. $\Rightarrow P = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$;

Proprietăţi:

1. Dacă $A, B, C \in P(E)$ disjuncte două câte două atunci :

a) $p(\varnothing) = 0$;

b) $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$;

c) $P(A \cup B \cup C) = p(A) + p(B) + p(C)$.

2. Dacă $A, B \in P(E)$ şi $A \subseteq B$ atunci $p(A) \leq p(B)$.

3. Dacă $A, B \in P(E)$ sunt două evenimente oarecare, atunci

$P(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.

Exemplu: O urnă conţine 4 bile albe şi 6 bile negre. Se scot simultan două bile. Se cere să se determine probabilitatea extragerii a două bile: a) de aceeaşi culoare;
b) de culori diferite.
Rezolvare:
a) Se pot extrage două bile albe **sau** două bile negre.
Notăm cu A evenimentul de a se extrage două bile albe şi cu B evenimentul de a se extrage două bile negre.

Atunci, $P(A \cup B) = p(A) + p(B) = \frac{C_4^2}{C_{10}^2} + \frac{C_6^2}{C_{10}^2} = \frac{2}{15} + \frac{1}{3} = \frac{7}{15}$.

b) Pentru a determina probabilitatea evenimentului ce constă în extragerea a două bile de culori diferite(eveniment pe care-l notăm cu C), vom calcula mai întâi probabilitatea evenimentului contrar ($\overline{C}$) care în cazul nostru este tocmai probabilitatea evenimentului de a se extrage două bile de aceeaşi culoare, adică probabilitatea de la punctul a).

Aşadar, $p(C) = 1 - p(\overline{C}) = 1 - \frac{7}{15} = \frac{8}{15}$.

Probabilităţi condiţionate. Evenimente independente

Definiţie: Fie E un domeniu de probabilităţi pe care este definită o probabilitate p. Fie A şi B două evenimente, $p(A) \neq 0$. Se numeşte **probabilitatea lui B condiţionată de A**, numărul $p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$.

Exemplu: În două urne se află un număr de bile după cum urmează: În prima urnă se găsesc 4 bile albe şi 5 negre iar în a două urnă se găsesc 6 bile albe şi 8 negre. Din una din urne, fără să ştim din care, se extrage o bilă. Care este probabilitatea ca bila extrasă să fie albă.
Rezolvare: Notăm cu A evenimentul ca bila extrasă să fie albă, notăm cu B evenimentul ce constă în extragerea unei bile albe din prima urnă şi notăm cu C evenimentul ce constă în extragerea unei bile albe din urna a doua. Atunci, $p_B(A) = \frac{4}{9}$ iar $p_C(A) = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}$.

Definiţie: Două **evenimente** A şi B se numesc **independente** dacă $P(A\cap B)=p(A)\cdot p(B)$.

Exemplu: Doi trăgători ochesc o ţintă , primul cu probabilitatea $\frac{2}{5}$ iar al doilea cu probabilitatea $\frac{1}{3}$. Care este probabilitatea ca ţinta să fie atinsă de două ori?

Rezolvare:
Notăm cu A evenimentul ca ţinta să fie atinsă de primul trăgător şi notăm cu B evenimentul ca ţinta să fie atinsă de al doilea trăgător, evenimente independente unul de altul.
Atunci, probabilitatea ca ţinta să fie atinsă de două ori este
$P(A\cap B)=p(A)\cdot p(B)=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{15}$.

Scheme clasice de probabilităţi

1. Formula probabilităţii totale

Definiţie: Fie E un domeniu de probabilităţi şi $A_1,A_2,A_3,....,A_n\in$ P(E) evenimente. Acestea formează un sistem complet de evenimente dacă:
$a)A_1\cup A_2\cup A_3\cup....\cup A_n=E;\quad b)A_i\cap A_j=\varnothing,\forall i\neq j;\quad c)p(A_i)\neq 0,\ i=\overline{1,n}.$

Teorema. Dacă $A_1,A_2,A_3,....,A_n$ formează un sistem complet de evenimente, atunci pentru orice eveniment A există formula: $p(A)=p(A\cap A_1)+p(A\cap A_2)+...+p(A\cap A_n)$ şi din definiţia probabilităţilor condiţionate rezultă:
$p(A)=p(A_1)\cdot p_{A_1}(A)+p(A_2)\cdot p_{A_2}(A)+...+p(A_n)\cdot p_{A_n}(A)$.

Exemplu: O urnă conţine 10 bile albe şi 6 bile negre. Se extrag 3 bile una după alta (fără a le introduce la loc). Care este probabilitatea ca prima bilă să fie albă, iar celelalte să fie negre.
Rezolvare: Considerăm evenimentele
A: prima bilă extrasă este albă;
B: a doua bilă extrasă este neagră;
C: a treia bilă extrasă este neagră.
Atunci, $p(A\cap B\cap C)=p(A)\cdot p_A(B)\cdot p_{A\cap B}(C)=\frac{10}{16}\cdot\frac{6}{15}\cdot\frac{5}{14}=\frac{5}{56}$.

2. Schema bilei neîntoarse

Teoremă. Într-o urnă sunt a bile albe şi b bile negre. Dacă din această urnă se extrag succesiv n bile fără întoarcerea lor în urnă (sau se scot n bile deodată), atunci probabilitatea ca dintre cele n bile, p să fie albe şi q să fie negre este dat de numărul $p=\frac{C_a^p\cdot C_b^q}{C_{a+b}^n}$.

Exemplu: Dintr-un lot de 50 de mingi de fotbal , 6 mingi au defecte remediabile. Din acest lot au fost luate la întâmplare 8 mingi . Care este probabilitatea ca din acestea, 7 să fie bune iar una să aibă un defect ?
Rezolvare:

$p=\frac{C_{44}^{7}\cdot C_{6}^{1}}{C_{50}^{8}}$.

Exemplu: Într-o urnă sunt 6 bile albe şi 8 negre. Se scot două bile succesiv fără întorcerea bilelor în urnă. Care este probabilitatea:
a) pentru a obţine două bile albe ?
b) pentru a obţine 2 bile negre ?
c) pentru a obţine o bilă alba şi una neagră ?
Rezolvare.

a) $p=\frac{C_{6}^{2}\cdot C_{8}^{0}}{C_{14}^{2}}=\frac{15}{91}$; b) $p=\frac{C_{6}^{0}\cdot C_{8}^{2}}{C_{14}^{2}}=\frac{4}{13}$; c) $p=\frac{C_{6}^{1}\cdot C_{8}^{1}}{C_{14}^{2}}=\frac{12}{91}$.

3. Schema lui Poisson (sau schema bilei întoarse)

Teoremă. Dacă pentru n evenimente independente $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ se cunosc probabilităţile $p_1, p_2, p_3, ..., p_n$, atunci, probabilitatea ca să se realizeze k evenimente din ele şi să nu se realizeze n-k din ele este dată de coeficientul lui x^k din polinomul $p(X)=(p_1X+q_1)(p_2X+q_2)\cdot ....\cdot (p_nX+q_n)$ unde $q_i=1-p_i$, $\forall i=\overline{1,n}$.

Exemplu: Trei vânători trag asupra unei ţinte având înregistrate următoarele probabilităţi de atingere a ţintei după cum urmează:
Primul atinge ţinta cu probabilitatea $p_1=\frac{1}{2}$,al doilea cu probabilitatea $p_2=\frac{1}{3}$, respectiv, al treilea cu probabilitatea $p_3=\frac{3}{5}$.
a) Care este probabilitatea ca ţinta să fie atinsă de trei ori ?
b) Care este probabilitatea ca ţinta să fie atinsă de două ori ?
c) Care este probabilitatea ca ţinta să fie atinsă cel puţin o dată ?
Rezolvare:
Se determină mai întâi $q_1=1-p_1=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, $q_2=1-p_2=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$, $q_3=1-p_3=1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$.
a) probabilitatea este egală cu coeficientul lui x^3 din polinomul
$p(X)=(p_1X+q_1)(p_2X+q_2)(p_3X+q_3)$ şi anume, $p=p_1\cdot p_2\cdot p_3=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}=\frac{1}{10}$;
b) probabilitatea este egală cu coeficientul lui x^2 din polinomul
$p(X)=(p_1X+q_1)(p_2X+q_2)(p_3X+q_3)$ şi anume, $p=p_1\cdot p_2\cdot q_3+p_1q_2q_3+q_1p_2p_3=$
$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}=\frac{1}{15}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}=\frac{11}{30}$;
c) Determinăm probabilitatea evenimentului contrar care este egală cu coeficientul lui x^0 şi anume, probabilitatea ca ţinta să nu fie atinsă deloc este
$p(\overline{A})=q_1\cdot q_2\cdot q_3=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}=\frac{2}{15}$. Atunci, probabilitatea ca ţinta să fie atinsă cel puţin o dată este $p(A)=1-p(\overline{A})=1-\frac{2}{15}=\frac{13}{15}$.

Exemplu: O urnă conţine 8 bile albe şi 6 bile negre. Se extrage o bilă, după care se introduce în urnă şi apoi se mai extrage o bilă. Determinaţi probabilitatea următoarelor evenimente:

A: extragerea a două bile albe;
B: extragerea a două bile negre;
C: extragerea unei bile albe şi a unei bile negre.
Rezolvare:

$p(A) = p_1 \cdot p_2 = \frac{8}{14} \cdot \frac{8}{14}.$ $p(B) = q_1 \cdot q_2 = \frac{6}{14} \cdot \frac{6}{14}.$ $p(C) = p_1 \cdot q_2 = \frac{8}{14} \cdot \frac{6}{14}.$

4. Schema binomială (sau schema lui Bernoulli)

Teoremă. Considerăm o experienţă si un eveniment legat de aceasta, având probabilitatea cunoscută p. În această situaţie, probabilitatea ca evenimentul să se realizeze de k ori când se efectuează experienţa de n ori este dată de numărul $C_n^k p^k \cdot q^{n-k}$ unde $q = 1 - p$.

Exemple:

a) Se aruncă 5 monede. Care este probabilitatea ca să apară de 3 ori stema şi de 2 ori faţa ?
Rezolvare: A aruna 5 monede este echivalent cu a arunca de 5 ori o monedă. Probabilitatea de a apare stema la o aruncare este egală cu probabilitatea de a apare faţa, în acest caz avem $p = q = \frac{1}{2}$, k=3 iar probabilitatea cerută este egală cu $C_5^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$.

b) Un vânător atinge o ţintă dintr-un foc cu probabilitatea de 0,4. Dacă trage 8 focuri asupra ţintei, care este probabilitatea să o atingă de 3 ori ?

Rezolvare: k = 3, n= 8, $p = 0,4 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \Rightarrow q = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$. Atunci, probabilitatea cerută este

$P = C_8^3 \left(\frac{2}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{8-3}$.

Exercitii rezolvate

1. Într-o urnă sunt 18 bile din care 12 albe şi 6 negre. Cineva extrage o bilă fără să vadă conţinutul urnei. Care este probabilitatea ca să extragă o bilă albă ?
Răspuns:

$P = \frac{Numarul\ cazurilor\ favorabile\ realizarii\ evenimentului}{Numarul\ cazurilor\ egal\ posibile} =$

Sunt 12 cazuri favorabile de a extrage o bilă alba, atunci $P = \frac{12^{(6}}{18} = \frac{2}{3}$

2. Să se calculeze care este probabilitatea ca la aruncarea unei monezi să apară stema? Dar dacă aruncăm patru monezi, care este probabilitatea să apară de patru ori stema?
Răspuns:

$P = \frac{Numarul\ cazurilor\ favorabile\ realizarii\ evenimentului}{Numarul\ cazurilor\ egal\ posibile} =$ $P = \frac{1}{2};\ P = \frac{1}{16};$

3. Într-o urnă sunt 10 bile albe şi 6 bile negre. Care este probabilitatea ca la o extragere să iasă o bilă neagră?

Răspuns:

$$P=\frac{Numarul\ cazurilor\ favorabile\ realizarii\ evenimentului}{Numarul\ cazurilor\ egal\ posibile}=\qquad P=\frac{3}{8};$$

4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să verifice inegalitatea $n(n-10)(n-11)\le 0$.

Rezolvare:

Cum n este natural deci pozitiv rezultă

$n(n-10)(n-11)\le 0\Leftrightarrow (n-10)(n-11)\le 0\Rightarrow n\in[10;11]\cap\mathbb{N}=\{10;11\}$. Deci 2 cazuri favorabile

S-a folosit semnul funcției de gradul al doilea $f(n)=(n-10)(n-11)=n^2-21n+110$.

Număr cazuri egal posibile: 90 de numere de două cifre.

$$P=\frac{Număr\ cazuri\ favorabile}{Numar\ cazuri\ egal\ posibile}=\frac{2}{90}=\frac{1}{45}.$$

5. Din cei 28 de elevi ai unei clase 12 sunt înscriși la echipa de fotbal iar 10 la echipa de handbal. Știind că 11 elevi nu sunt înscriși la nicio echipă de sport și că sunt elevi care sunt inscriși la ambele echipe să se determine probabilitatea ca alegând un elev la întâmplare acesta să fie la ambele echipe de sport ?

Rezolvare:

Fie A mulțimea elevilor înscriși la fotbal și B mulțimea elevilor înscriși la handbal. Atunci, $A\cap B$ reprezintă mulțimea elevilor care sunt în ambele echipe

Din cei 28 de elevi ai clasei îi scădem pe cei care nu sunt la nicio echipă de sport adică 28-11= 17 elevi.

Atunci, $card(A\cup B)=card\ A+Card\ B-card(A\cap B)\Rightarrow 17=12+10-card(A\cap B)\Rightarrow$

$card(A\cap B)=22-17=5$ adică există 5 elevi înscriși în ambele echipe. Probabilitatea este egală cu $P=\frac{Număr\ cazuri\ favorabile}{Numar\ cazuri\ egal\ posibile}=\frac{5}{28}$.

6*. Un împărat a dorit să-l pună la încercare pe înțeleptul curții supunându-l la o probă de încercare. Astfel, împăratul a cerut să i se aducă două urne în care, în una erau cincizeci de bile albe iar în cealaltă erau cinczeci de bile negre. Înțeleptului curții i s-a cerut să aranjeze cum vrea el bilele în cele două urne astfel, atunci când va extrage o bilă fără să vadă bilele și cele două urne de unde extrage, dacă va ieși o bilă albă va primi un dar prețios dar dacă va scoate o bilă neagră va trebui să părăsească curtea.

Cum a procedat înțeleptul ca să-și maximizeze șansa de a extrage o bilă albă și astfel de a rămâne la curte?

Rezolvare:

Înțeleptul curții a procedat astfel: În prima urnă a lăsat o singură bilă albă iar în a doua urnă, pe lângă cele 50 de bile negre le-a adăugat și pe celelalte 49 de bile albe.

Astfel, în prima urnă există o bil albă iar în a doua urnă sunt 99 bile din care 49 albe iar 50 negre.

Problema revine la calculul unei probabilități totale adică, dacă considerăm următoarele evenimente:

A- reprezintă evenimentul ca bila extrasă să fie albă;
A1- reprezintă evenimentul ca extragerea să fie făcută din prima urnă;
A2- reprezintă evenimentul ca extragerea să fie făcută din a doua urnă.
Atunci, probabilitatea ca bila extrasă să fie albă este dată de

$$P(A)=P(A_1)\cdot P_{A_1}(A)+P(A_2)\cdot P_{A_2}(A)=\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{49}{99}=0,5+0,5\cdot 0,49=0,5+0,245=0,745.$$

7*. Într-un magazin există 3 cutii cu câte 24 de becuri fiecare. Prezintă defecte de fabricaţie 6 din prima cutie, 4 din a doua cutie şi 3 din a treia cutie. Un client cumpără un bec din fiecare cutie. Care este probabilitatea ca din cele trei becuri pe care le-a cumpărat, unul singur să fie defect?

Rezolvare: Folosim schema lui Poison

Notăm cu p_i probabilitatea ca un bec luat din din cutia i să fie defect şi cu q_i probabilitatea ca becul luat din cutia i să nu fie defect.

Cutia	Număr becuri	Defecte	Fără defecte	Probabilitatea
1	24	6	18	$p_1=\frac{6}{24}=\frac{1}{4}\Rightarrow q_1=1-p_1$ sau $q_1=\frac{18}{24}=\frac{3}{4}$
2	24	4	20	$p_2=\frac{4}{24}=\frac{1}{6}\Rightarrow q_2=1-p_2$ sau $q_2=\frac{20}{24}=\frac{5}{6}$
3	24	3	21	$p_3=\frac{3}{24}=\frac{1}{8}\Rightarrow q_3=1-p_3$ sau $q_3=\frac{21}{24}=\frac{7}{8}$

Probabilitatea ca din cele trei becuri unul singur să fie defect este dat de coeficientul lui t^1 din polinomul $Q(t)=(p_1t+q_1)\cdot(p_2t+q_2)\cdot(p_3t+q_3)$ adică

$$P=p_1\cdot q_2\cdot q_3+q_1\cdot p_2\cdot q_3+q_1\cdot q_2\cdot p_3=$$

$$P=\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{7}{8}+\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{8}=\frac{71}{192}.$$

8*. Se cunoaşte că în medie, 80% dintre absolvenţii clasei a XII-a de la un liceu din Buzău, care susţin examenul de bacalaureat reuşeşc. Care este probabilitatea următoarelor evenimente ca dintr-un grup de 20 de absolvenţi de la acelaşi liceu:
a) toţi să reuşească;
b) să nu reuşească niciunul ;
c) cel puţin 2 să reuşească.

Rezolvare: Folosim schema binomială sau schema lui Bernoulli

Fie A evenimentul prin care un candidat reuşeşte la examenul de bacalaureat, atunci, $P(A)=\frac{80}{100}=0,8.$ Evident, ca să nu reuşească, evenimentul contrar are probabilitatea $q=1-p=0,2.$

a) Connform schemei binomiale, ca din cei 20 de candidaţi toţi să reuşească acest eveniment va ave a probabilitatea egală cu $P=C_{20}^{20}p^{20}\cdot q^0=0,8^{20}$;

b) Pentru ca niciunul să reuşească, probabilitatea este $C_{20}^0p^0\cdot q^{20}=0,2^{20}$.

c) Evenimentul ce constă în reuşita a cel puţin doi (B) este echivalent cu probabilitatea evenimentului contrar ca cel mult unul să reuşească. $P(B)=1-P(\overline{B})$ unde, probabilitatea ca cel mult un absolvent să reuşească este $P(\overline{B})=C_{20}^0 0,8^0\cdot 0,2^{20}+C_{20}^1 0,8^1\cdot 0,2^{19}$.

9*. O fată primește 12 scrisori fără a avea numele expeditorilor scrise pe ele de la colegii de clasă, astfel, 5 provin de la Andrei, 3 de la Florin și 4 de la Marius.
Care este probabilitatea ca din patru scrisori pe care le ia la întâmplare să le citească:
a) trei să provină de la Andrei și una de la Florin;
b) una singură să provină de la Marius.
Rezolvare: Folosim schema bilei neîntoarse
a) Din cele 5 scrisori de la Andrei există un număr de C_5^3 alegeri de câte 3 scrisori din acestea și din cele 3 scrisori de la Florin, pentru a alege o singură scrisoare există un număr de 3 alegeri care se pot face, adică $C_3^1 = 3$. Numărul de cazuri egal posibile este egal cu C_{12}^4 adică numărul de moduri în care putem alege 4 scrisori din cele 12.

Atunci, $p = \dfrac{C_5^3 \cdot C_3^1}{C_{12}^4} = \dfrac{\dfrac{5!}{3!\cdot 2!}\cdot 3}{\dfrac{12!}{8!\cdot 4!}} = \dfrac{30}{55\cdot 9} = \dfrac{2}{33}$.

b) Cum există 4 posibilități de alegere a unei scrisori de la Marius, adică C_4^1 și un număr de C_8^3 de alegeri a celorlalte 3 scrisori din restul de 8 scrisori, avem

$p = \dfrac{C_8^3 \cdot C_4^1}{C_{12}^4} = \dfrac{\dfrac{8!}{5!\cdot 3!}\cdot 4}{\dfrac{12!}{8!\cdot 4!}} = \dfrac{224}{495}$.

Exercitii propuse

1. Să se calculeze probabilitatea ca alegând un element din mulţimea $A = \left\{\sqrt{2}; \sqrt{3}; \sqrt{4}; .....; \sqrt{15}\right\}$, acesta să fie raţional.

2. Care este probabilitatea ca alegând un număr din mulţimea $A = \{1;2;3;4;5\}$, acesta să verifice inegalitatea $2^n \geq n^2$.

3. Să se determine probabilitatea ca alegând un număr din mulţimea $A = \{0;1;2;3;4,5\}$ acesta să verifice inegalitatea $n! \langle 50$.

4. Să se determine probabilitatea ca alegând unul din numerele $P_3; A_3^1; C_4^3$ acesta să fie divizibil cu 3.

5. Într-o urnă sunt 18 bile din care 12 albe şi 6 negre. Cineva extrage o bilă fără să vadă conţinutul urnei. Care este probabilitatea ca să extragă o bilă albă ? Dar o bilă neagră ?

6. Într-o clasă de 32 de elevi, 20 practică un sport, 16 cântă la un instrument. Dacă se alege la întâmplare un elev, care este probabilitatea ca el să practice şi un sport, şi să cânte la un instrument ?

7. Se aruncă simultan două zaruri. Să se calculeze probabilitatea ca suma numerelor obţinute pe cele două zaruri să fie pară.

8. Într-o urnă sunt 100 de bile numerotate de la 1 la 100. Să se determine probabilitatea ca extrăgând o bilă din urnă, numărul bilei să fie divizibil cu 5.

9. Se consideră toate numerele naturale de patru cifre scrise cu cifrele 0; 1; 2; 3. Să se determine probabilitatea ca alegând un astfel de număr, acesta să fie divizibil cu 2.

10. Să se calculeze probabilitatea ca alegând o submulţime nevidă a mulţimii $A=\{1;2;3;4;5\}$ aceasta să aibă toate elementele impare.

11. Să se determine probabilitatea ca alegând un număr din mulţimea $\{P_4;A_5^3;C_5^2\}$, aceasta să fie divizibil cu 4.

12. Într-o clasă de 32 de elevi, 20 practică un sport, 16 cântă la un instrument. Dacă se alege la întâmplare un elev, care este probabilitatea ca el să practice şi un sport, şi să cânte la un instrument ?

13. Într-o urnă sunt 18 bile din care 12 albe şi 6 negre. Cineva extrage o bilă fără să vadă conţinutul urnei. Care este probabilitatea ca să extragă o bilă albă ? Dar o bilă neagră ?

14. Să se calculeze probabilitatea ca alegând un element din mulţimea $A=\{1;2;3;4.....40\}$ acesta să fie pătrat perfect.

15. Să se calculeze probabilitatea ca alegând un element din mulţimea $A=\{\sqrt{2};\sqrt{3};\sqrt{4};.....;\sqrt{15}\}$, acesta să fie raţional.

16. Care este probabilitatea ca alegând un număr din mulţimea $A=\{1;2;3;4;5\}$, acesta să verifice inegalitatea $2^n \geq n^2$.

17. Să se calculeze probabilitatea ca alegând un număr natural de două cifre, acesta să fie pătrat perfect.

18. Să se determine probabilitatea ca alegând un număr din mulţimea $A=\{0;1;2;3;4,.....,50\}$, acesta să fie divizibil cu 4;

19. Să se determine probabilitatea ca alegând un număr din mulţimea $A=\{0;1;2;3;4,5\}$ acesta să verifice inegalitatea $n!\langle 50$.

20. Să se determine probabilitatea ca alegând unul din numerele $P_3;A_3^1;C_4^3$ acesta să fie divizibil cu 3.

21. Să se calculeze care este probabilitatea ca la aruncarea unei monezi să apară stema? Dar dacă aruncăm patru monezi, care este probabilitatea să apară de patru ori stema?

22. Într-o urnă sunt 10 bile albe şi 6 bile negre. Care este probabilitatea ca la o extragere să iasă o bilă albă? Dar o bilă neagră?

23. Într-o urnă sunt 100 de bile numerotate de la 1 la 100. Să se determine probabilitatea ca extrăgând o bilă din urnă, numărul bilei să fie pătrat perfect?. Dar ca numărul bilei să fie par?

24. Calculați probabilitatea ca alegând un număr de două cifre din mulțimea numerelor naturale, acesta să aibă cifrele egale.

25. Calculați probabilitatea ca alegând un număr de două cifre din mulțimea numerelor naturale, acesta să fie format doar din cifre pare.

26. Calculați probabilitatea ca alegând un număr de două cifre din mulțimea numerelor naturale, acesta să fie divizbil cu 10.

9.4 Statistica matematică

Statistica se ocupă cu gruparea, analiza și interpretarea datelor referitoare la anumite fenomene precum și cu unele previziuni privind producerea lor ulterioară.
Se numește **populație statistică**, orice mulțime care formează obiectul unei analize statistice.

O trăsătură comună tuturor unităților unei populații statistice se numește **caracteristică.**
Exemplu: În cazul repartiției elevilor dintr-o clasă după notele obținute la matematică avem:
- mulțimea tuturor elevilor este populația statistică;
- fiecare elev este o unitate statistică;
- nota obținută la matematică constituie caracteristica studiată.

Fie o populație statistică cu o caracteristică X care ia valorile $x_1, x_2, x_3, ..., x_p$ și n_i *cu* $1 \le i \le p$ numărul de indivizi pentru care caracteristica X ia valorile x_i.

Perechea $(x_i, n_i)_i$ se numește serie statistică iar n_i frecvențele cu care apar valorile x_i.

În cele ce urmează prezentăm o serie de proprietăți ale unei serii statistice raportate la evaluarea rezultatelor unei clase de elevi la un test.

Utilizarea statisticii în evaluarea rezultatelor la un test

O clasă de elevi a dat un test în urma căruia s-au înregistrat următoarele rezultate:

Caracteristica X de studiat: **nota** ;
Valoarea caracteristicii: note de la 1 la 10;
Frecvenţa absolută: numărul de note corespunzător valorii caracteristicii;

Note -Valoarea caracteristicii	x_i	X_1 **1**	X_2 **2**	X_3 **3**	X_4 **4**	X_5 **5**	X_6 **6**	X_7 **7**	X_8 **8**	X_9 **9**	X_{10} **10**	**Total elevi n**
Număr elevi -Frecvenţa absolută	n_i	**0**	**0**	**4**	**7**	**8**	**7**	**6**	**2**	**1**	**0**	**35**
Procentaj %		**0**	**0**	**12 %**	**20 %**	**22 %**	**20 %**	**17 %**	**6%**	**3%**	**0**	**100 %**

(x_i, n_i), $i = \overline{1,10}$ se numeşte **serie statistică** şi ilustrează **frecvenţa rezultatelor în urma unui test.**

$\sum_{i=1}^{10} n_i = n$ **indică efectivul total de elevi;**

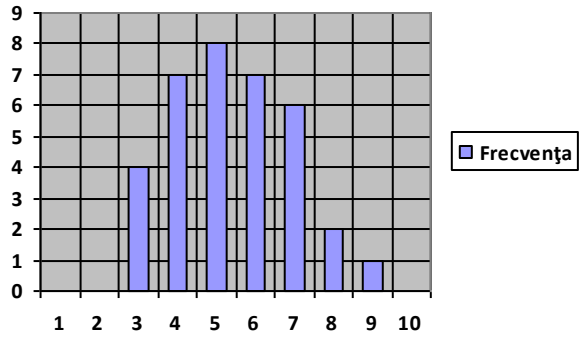
Frecvenţa relativă a valorii x_i este numărul $f_i = \frac{n_i}{n}$, **unde „ n” este efectivul total de elevi.**

Frecvenţa absolută cumulată crescătoare a valorii x_i indică câţi elevi au obţinut note sub x_i (inclusiv x_i); $N_i = n_1 + n_2 + ... + n_i$.

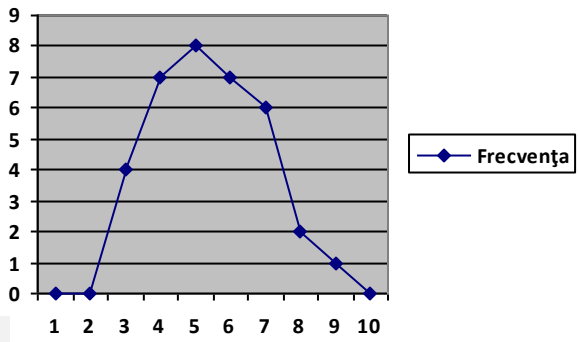
Frecvenţa absolută cumulată descrescătoare a valorii x_i indică câţi elevi au obţinut note peste x_i (inclusiv x_i); $N_i' = n_i + n_{i+1} + ... + n_k$.

Note -Valoarea caracteristicii	x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecvenţa relativă	f_i	0	0	0,11	0,2	0,22	0,2	0,17	0,05	0,02	0
Frecvenţa absolută cumulată crescătoare a valorii x_i	N_i	0	0	4	11	19	26	32	34	35	0
Frecvenţa absolută cumulată descrescătoare a valorii x_i	N_i’	0	0	35	31	24	16	9	3	1	0

Graficul seriei: Diagrama barelor.



Poligonul frecvenţelor:



Dominanta x_i a seriei (x_i, n_i), $i = \overline{1,10}$ este valoarea caracteristicii cu frecvenţa maximă.

x_5 = 5 este dominanta seriei întrucât are frecvenţa cea mai mare, **n_5 = 8**;

Mediana „M" a seriei (x_i, n_i), $i=\overline{1,10}$ indică valoarea din mijlocul şirului valorilor aranjate crescător: $\underbrace{x_1 \ldots x_1}_{n_1 \text{ de } x_1}\ \underbrace{x_2 \ldots x_2}_{n_2 \text{ de } x_2}\ \underbrace{x_3 \ldots x_3}_{n_3 \text{ de } x_3} \ldots\ldots \underbrace{x_{10} \ldots x_{10}}_{n_{10} \text{ de } x_{10}}$.

3,3,3,3,4,4,4,4,4,4,4,5,5,5,5,5,5,5,5,6,6,6,6,6,6,6,7,7,7,7,7,7,8,8,9.

Pentru n note, n impar, mediana „M „ este a $\frac{n+1}{2}$**-a valoare din şir;**

Pentru n par, mediana „M" este media dintre a $\frac{n}{2}$**-a şi** $\frac{n}{2}+1$ **- a valoare din şir;**

Pentru n= 35 rezultă n impar, atunci mediana **M** este a $\frac{35+1}{2}=\frac{36}{2}=18$- a valoare din şir, adică
valoarea 5 şi corespunde celui de-al optsprezecelea elev. **M=5**;

Media sau valoarea medie a unei serii (x_i, n_i), $i=\overline{1,10}$ **este numărul** $m=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{10} x_i \cdot n_i$**.**

n=35, $m=\frac{1\cdot 0+2\cdot 0+3\cdot 4+4\cdot 7+5\cdot 8+6\cdot 7+7\cdot 6+8\cdot 2+9\cdot 1+10\cdot 0}{35}=\frac{189}{35}=5,40$

Amplitudinea descrie împrăştierea caracteristicii X şi este dată de diferenţa dintre cea mai mare şi cea mai mică valoare a caracteristicii: $A=X_{\max}-X_{\min}$;

Amplitudinea notelor: A = 9 – 3 = 6;
Amplitudinea seriei : A = 8 – 1 = 7;

Abaterea absolută, $|x_i-m|$, reprezintă diferenţa dintre fiecare valoare $\mathbf{x_i}$ şi valoarea medie **„m"** a seriei statistice luată în modul.
Abaterea medie liniară a unei serii statistice (x_i, n_i), $i=\overline{1,10}$ reprezintă media aritmetică a abaterilor tuturor valorilor caracteristicii de la valoarea medie (m), luată în modul. Ea indică cu cât se abate nota fiecărui elev de la media clasei.

$d=\frac{\sum_{i=1}^{10}|x_i-m|\cdot n_i}{n}$;

Note - Valoarea caracteristicii	$\mathbf{x_i}$	$\mathbf{X_1}$ **1**	$\mathbf{X_2}$ **2**	$\mathbf{X_3}$ **3**	$\mathbf{X_4}$ **4**	$\mathbf{X_5}$ **5**	$\mathbf{X_6}$ **6**	$\mathbf{X_7}$ **7**	$\mathbf{X_8}$ **8**	$\mathbf{X_9}$ **9**	$\mathbf{X_{10}}$ **10**	**Total Elevi**
Număr note	$\mathbf{n_i}$	**0**	**0**	**4**	**7**	**8**	**7**	**6**	**2**	**1**	**0**	**35**

- Frecvenţa absolută												
Abateri	**X_i -m**	**0**	**0**	**-2,4**	**-1,4**	**-0,4**	**0,6**	**1,6**	**2,6**	**3,6**	**0**	
Abateri absolute	$\lvert x_i - m\rvert$	**0**	**0**	**2,4**	**1,4**	**0,4**	**0,6**	**1,6**	**2,6**	**3,6**	**0**	
$\lvert x_i - m\rvert \cdot n_i$		**0**	**0**	**9,6**	**9,8**	**3,2**	**4,2**	**9,6**	**5,2**	**3,6**	**0**	

$$d = \frac{\lvert x_3 - m\rvert \cdot n_3 + ... + \lvert x_9 - m\rvert \cdot n_9}{n} = \frac{9,6+9,8+3,2+4,2+9,6+5,2+3,6}{35} = 1,29;$$

Nota fiecărui elev se abate de la media clasei, în medie cu 1,29.

Dispersia valorilor $x_1, x_2, x_3, ..., x_{10}$ este dată de formula $s = \frac{\sum_{i=1}^{10}(x_i - m)^2 \cdot n_i}{n}$.

$$s = \frac{2,4^2 \cdot 4 + 1,4^2 \cdot 7 + 0,4^2 \cdot 8 + 0,6^2 \cdot 7 + 1,6^2 \cdot 6 + 2,6^2 \cdot 2 + 3,6^2 \cdot 1}{35} =$$

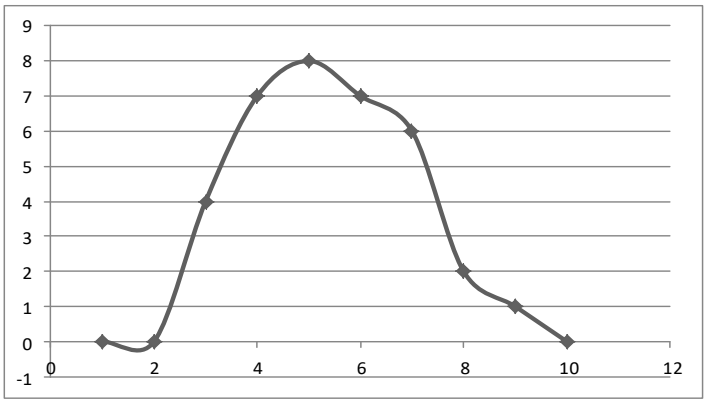
$$= \frac{23,04+13,72+1,28+2,52+15,36+13,52+12,96}{35} = \frac{82,4}{35} = 2,35.$$

Abaterea medie pătratică sau abaterea standard a valorilor $x_1, x_2, x_3, ..., x_{10}$ **este numărul** $\sigma = \sqrt{s}$.

$\sigma = \sqrt{2,35} = 1,53.$

Curba lui Gauss semnifică reprezentarea grafică a probabilităţii repartizării unor valori în funcţie de o medie standard.
Notele obţinute respectă **curba lui Gauss** (repartiţia normală) dacă suma valorilor $\mathbf{n_i}$ cuprinse între $m-\sigma$ şi $m+\sigma$ trebuie să reprezinte 68% din efectivul total, n.

$\sigma = 1,53$ rezultă că în intervalul $[5,4-1,53;\ 5,4+1,53] = [3,87; 6,93]$ se găsesc un număr de 7+8+7=22 elevi ceea ce reprezintă 63% din totalul de elevi.



Comentariu:

Cu cât numărul valorilor caracteristicii X, este mai mare, adică să fie scrise toate notele fără a fi rotunjite, cu atât valoarea procentului este mai apropiată de 68% iar curba lui Gauss este mult mai bine reprezentată având forma unui clopot.

9.5 Teste de autoevaluare

Testul 1. Calcul financiar

1. Să se calculeze 24% din 450.
2. Dacă 12% dintr-un număr este egal cu 6, să se afle numărul respectiv.
3. Să se determine cât la sută reprezintă numărul 8 din 32 ?
4. La o bancă un deponent pune suma de 5000 lei cu un procent al dobânzii de 8%. Ce dobândă obţine după un an ? Dar după trei ani?
5. Suma de 5000 de lei se depune la o bancă în regim de dobândă compusă cu procentul de dobândă de 10%. Ce sumă se va obţine după doi ani ?
6. Să se determine preţul iniţial al unui produs, care după două scumpiri succesive de 10% respectiv 5% este de 300 lei.

Testul 2. Probabilităţi

1. Să se calculeze probabilitatea ca alegând un element din mulţimea $A=\left\{\sqrt{2};\sqrt{3};\sqrt{4};.....;\sqrt{15}\right\}$, acesta să fie raţional.

2. Care este probabilitatea ca alegând un număr din mulţimea $A=\{1;2;3;4;5\}$, acesta să verifice inegalitatea $2^n \geq n^2$.

3. Să se determine probabilitatea ca alegând un număr din mulţimea $A=\{0;1;2;3;4,5\}$ acesta să verifice inegalitatea $n!\langle 50$.

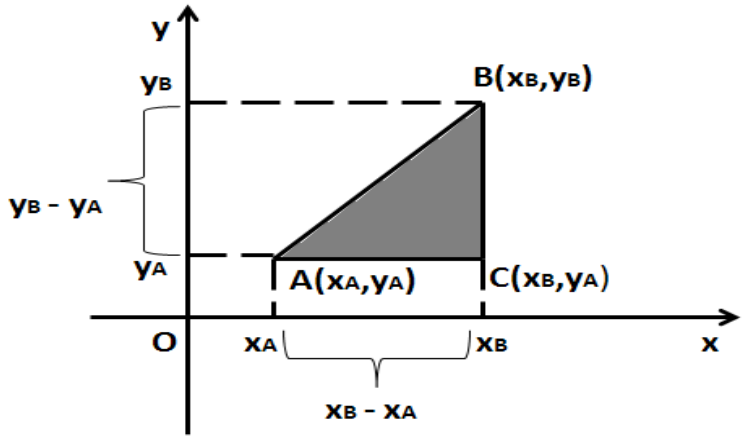
4. Să se determine probabilitatea ca alegând unul din numerele $P_3; A_3^1; C_4^3$ acesta să fie divizibil cu 3.

5. Într-o urnă sunt 18 bile din care 12 albe şi 6 negre. Cineva extrage o bilă fără să vadă conţinutul urnei. Care este probabilitatea ca să extragă o bilă albă ? Dar o bilă neagră ?

6. Într-o clasă de 32 de elevi, 20 practică un sport, 16 cântă la un instrument. Dacă se alege la întâmplare un elev, care este probabilitatea ca el să practice şi un sport, şi să cânte la un instrument ?

Cap. 10. ECUAȚIILE DREPTEI ÎN PLAN

10.1 Reper cartezian în plan. Distanța dintre două puncte din plan



1. Distanţa dintre două puncte $A(x_A, y_A),\ B(x_B, y_B)$ **din plan este dată de formula**

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Exemplu: Să se calculeze lungimea segmentului determinat de punctele $A(-2;2),\ B(-3;3)$.

$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(-3+2)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$.

2. Mijlocul unui segment [AB] unde $A(x_A, y_A),\ B(x_B, y_B)$ **este dat de formula**

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right).$$

Exemplu: Să se determine mijlocul segmentului determinat de punctele $A(-2;2),\ B(-3;3)$.

$$M\left(\frac{-2+(-3)}{2}, \frac{2+3}{2}\right) = M\left(\frac{-5}{2}; \frac{5}{2}\right).$$

3. Centrul de greutate al unui triunghi ABC unde

$A(x_A, y_A),\ B(x_B, y_B),\ C(x_C, y_C)$ **este dat de formula** $G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{2}, \frac{y_A + y_B + y_C}{2}\right)$.

Exemplu:

Să se determine centrul de greutate determinat de punctele $A(1,3),\ B(-2,-4),\ C(4,7)$

$$G\left(\frac{1+(-2)+4}{2}, \frac{3+(-4)+7}{2}\right) = G(1;3).$$

Exercitii rezolvate

1. În plan se consideră punctele $B(2;-2)$, $C(3;2)$. Să se determine mijlocul segmentului BC.

Rezolvare: Mijlocul segmentului $[BC]$: $M\left(\frac{x_B+x_C}{2},\frac{y_B+y_C}{2}\right)=M\left(\frac{5}{2};0\right)$.

2. Să se calculeze lungimea segmentului determinat de punctele $A(-2;2)$, $B(-3;3)$.

Rezolvare: $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{(-3+2)^2+(3-2)^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$.

3. Fie ABC un triunghi oarecare unde A(-1;2), B(4;-2) şi C(0;3). Să se determine perimetrul triunghiului.

Rezolvare: $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{(4-(-1))^2+(-2-2)^2}=\sqrt{25+16}=\sqrt{41}$.

$BC=\sqrt{16+25}=\sqrt{41}$, $CA=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$. Atunci, $P_{ABC}=AB+AC+BC=2\sqrt{41}+\sqrt{2}$.

4. În plan se consideră punctele $A(1;6)$, $B(-3;2)$, $C(5;-2)$. Să se calculeze lungimea medianei duse din vârful A în triunghiul ABC.

Rezolvare: M este mijlocul segmentului $[BC]$: $M\left(\frac{x_B+x_C}{2},\frac{y_B+y_C}{2}\right)=M(1;0)$ Atunci, lungimea segmentului $[AM]$ *este* $AM=\sqrt{(x_M-x_A)^2+(y_M-y_A)^2}=\sqrt{6^2}=6.$

5. Să se calculeze perimetrul triunghiului echilateral de latură $[AB]$ unde $A(-2;1)$ şi $B(1;4)$;

Rezolvare: Triunghiul ABC este echilateral, atunci $P_{ABC}=3AB$. Cum $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}==\sqrt{(1-(-2))^2+(4-1)^2}=\sqrt{3^2+3^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$ rezultă $P_{ABC}=3AB=3\cdot3\sqrt{2}=9\sqrt{2}$.

6. Să se determine simetricul punctului $A(2;-8)$ faţă de punctul $B(0;4)$.

Rezolvare: Fie $C(x;y)$ simetricul lu A faţă de B, adică B este mijlocul lui AC. Atunci, $0=\frac{2+x}{2}\Rightarrow x=-2$ şi $4=\frac{-8+y}{2}\Rightarrow y=16$. Rezultă $C(-2;16)$.

Exercitii propuse

1. Să se calculeze distanţa de la punctul A(- 4; 8) la originea reperului cartezian XOY.

2. Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC unde $A(2;0)$, $B(3;-1)$, $C(0;4)$.

3. Să se calculeze aria pătratului ABCD ştiind coordonatele punctelor A(2; 3), B(5; 1).

4. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-4;-1)$ şi $B(2;5)$. Să se determine coordonatele punctului M, unde M este mijlocul segmentului [AB].

5. În plan se consideră punctele $A(1;6)$, $B(-3;2)$, $C(5;-2)$. Să se calculeze lungimea medianei duse din vârful A în triunghiul ABC.

6. Se consideră pe o dreaptă punctele A(4), B(6) . Să se determine M(x) astfel încât $AM^2 + BM^2 = 2$;

7. Să se calculeze distanţa de la punctul A la punctul de intersecţie al dreptelor d şi g în cazurile:

a) $A(-3;2)$, $\begin{cases} d: \ 3x+2y+1=0 \\ g: \ x+3y-2=0 \end{cases}$; b) $A(1;4)$, $\begin{cases} d: \ x+2y-1=0 \\ g: \ 3x+y+7=0 \end{cases}$;

8. Să se calculeze lungimea segmentului AB în următoarele situaţii:

a) $A(-3;1)$, $B(1;4)$; b) $A(0;2)$, $B(3;5)$; c) $A(-8;2)$, $B(4;7)$;

9. Să se calculeze perimetrul tringhiului ABC în următoarele situaţii:

a) $A(1;2)$, $B(5;2)$, $C(3;-1)$; b) $A(1;-3)$, $B(2;4)$, $C(-4;1)$**;** c) $A(-3;0)$, $B(0;3)$, $C(4;-4)$**;**

10. Să se calculeze distanţa de la simetricul punctului A(-1; 1) faţă de axa OX la simetricul punctului B (2; 4) faţă de axa OY.

11. Să se calculeze distanţa de la punctul B(- 2; 1) la punctul de intersecţie al dreptelor

$(d_1): \ 3x-2y+1=0$

$(d_2): \ x+3y-7=0$;

12. Să se determine mijlocul segmentului AB unde :

a) A(-8;-4), B(4;6); b) $A(2;4)$, $B(-1;3)$; c) $A(0;1)$, $B(2;3)$; d) $A(-3;3)$, $B(1;2)$;

13. Se consideră punctele A(-4;-2), B(1;3), C(6;4). Să se determine coordonatele punctului D astfel încât patrulaterul ABCD să fie paralelogram.

10.2 Ecuaţii ale dreptei în plan

1. Ecuaţia carteziană generală a dreptei:

ax+by+c=0 (d)

Punctul $\boxed{M(x_0;y_0)\in d \Leftrightarrow a\cdot x_0+b\cdot y_0+c=0}$

Exemplu: Punctul $M(2;3)$ aparţine dreptei $4x-3y+1=0$ întrucât $4\cdot 2-3\cdot 3+1=0$

2. Ecuaţia dreptei determinată de punctele $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$:

$\boxed{\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}}$ **sau** $\begin{vmatrix} x & y & 1\\ x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow x\ y_1+x_1y_2+x_2y-x_2y_1-x_1y-x\ y_2=0$.

(clasa a XI-a)

Exemplu: Ecuaţia dreptei care trece prin punctele $A(0;3)$, $B(2;1)$ este $\frac{y-3}{1-3}=\frac{x-0}{2-0}$

$\Rightarrow x+y-3=0$;

3. Ecuaţia dreptei determinată de un punct $M(x_0,y_0)$ şi o direcţie dată(are panta m)

$\boxed{y-y_0=m(x-x_0)}$

Exemplu: Ecuaţia dreptei care trece prin punctul $M(2;3)$ şi are panta m=2 este

$y-3=2(x-2)$

$\Leftrightarrow 2x-y-1=0$;

4. Ecuaţia explicită a dreptei (ecuaţia normală):

$\boxed{y=mx+n,\ unde\ m=tg\phi=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}$ **m este panta dreptei şi n este ordonata la origine.**

Exemplu: Ecuaţia dreptei care trece prin punctul $M(1;3)$ şi face un unghi de 60^0 cu axa OX este

$y-3=tg60^0(x-1)\Rightarrow y-3=\sqrt{3}(x-1)\Rightarrow \sqrt{3}x-y+3-\sqrt{3}=0$;

5. Ecuaţia dreptei prin tăieturi: $\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,\ \ a,b\neq 0.}$

6. Condiţia ca trei puncte $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$, $C(x_3;y_3)$ să fie coliniare este ca cel de-al treilea punct să verifice ecuaţia dreptei formată din primele două puncte adică $C(x_3;y_3)$ să aparţină dreptei formată din cele două puncte:

(AB): $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ $C(x_3;y_3)\in AB\Rightarrow \frac{x_3-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y_3-y_1}{y_2-y_1}$.

Altfel, determinantul format cu coordonatele celor trei puncte să fie egal cu 0.

$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_3y_2 - x_2y_1 - x_1y_3 = 0$. (clasa a XI-a)

Exercitii rezolvate

1. Să se scrie ecuaţia dreptei care trece prin punctul $A(-1;3)$ şi face un unghi de 30^0 cu sensul pozitiv al axei OX.

Rezolvare: $y - y_0 = m_d(x - x_0)$ unde m este panta dreptei adică $m_d = tg\alpha = tg30^0 = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow$

$y - 3 = \frac{\sqrt{3}}{3}(x+1) \Rightarrow 3y - 9 = \sqrt{3}x + \sqrt{3} \Rightarrow -\sqrt{3}x + 3y - 9 - \sqrt{3} = 0$.

2. În plan se consideră punctele $A(-3;1)$, $B(2;-2)$, $C(3;2)$. Să se scrie ecuaţia medianei din vârful A al triunghiului ABC.

Rezolvare: Se determină mai întâi mijlocul M al segmentului [BC] după formula $M(\frac{x_1+x_2}{2};\frac{y_1+y_2}{2})$. $\Rightarrow M(\frac{5}{2};0)$. Atunci, ecuaţia dreptei AM este $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ şi anume

$\frac{x+3}{\frac{5}{2}+3} = \frac{y-1}{-1} \Rightarrow -2x - 11y + 5 = 0$.

3. Să se determine ecuaţia dreptei care trece prin punctul $A(1;-2)$ şi are panta egală cu 2.

Rezolvare: . $y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y + 2 = 2x - 2 \Rightarrow y - 2x + 4 = 0$.

4. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-3;1)$ şi $B(a;-2)$. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât punctul $P(-2;2)$ să aparţină dreptei AB.

Rezolvare: Ecuația dreptei AB este $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ adică $\frac{x+3}{a+3} = \frac{y-1}{-2-1} \Rightarrow$

$-3(x+3) = (a+3)(y-1) \Rightarrow$

$-3x - (a+3)y - 9 + a + 3 = 0$. Cum $P(-2;2) \in AB \Rightarrow -3\cdot(-2) - (a+3)\cdot 2 - 9 + a + 3 = 0 \Rightarrow$

$6 - 2a - 6 - 9 + a + 3 = 0 \Rightarrow -a = 6 \Rightarrow a = -6.$

Exercitii propuse

1. Se consideră punctul A(2; -3). Să se determine numărul real „ a” pentru care punctul A se află pe dreapta de ecuaţie: 4x – 5y +a = 0;

2. În plan se consideră punctele $A(-3;1)$, $B(2;-2)$, $C(3;2)$. Să se scrie ecuaţia medianei din vârful A a triunghiului ABC.

3. Să se determine ecuaţia dreptei care trece prin punctele $A(-3;1)$, $B(2;4)$;

4. Să se scrie ecuaţia dreptei ce conţine punctul A(-1; 3) şi are panta egală cu $tg\frac{\pi}{4}$.

5. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât punctele $A(-1;1),\ B(1;3),\ C(4;m)$ să fie coliniare.

6. Se consideră în plan punctele $A(-1;3),\ B(-4;-1),\ C(7;-3)$. Să se scrie ecuaţia bisectoarei [AE a unghiului A unde $E\in[BC]$.

7. Să se verifice dacă punctul A aparţine dreptei d în cazurile:

a) $A(1;1)$ şi (d): $3x-y+4=0$; b) $A(-2;1)$ şi (d): $2x+3y+1=0$;

c) $A(2;-3)$ şi (d): $2x+4y+8=0$; d) $A(-1;3)$ şi (d): $3x-2y+5=0$;

8. Să se scrie ecuaţia dreptei care trece prin punctele A şi B unde:

a) $A(3;2),\ B(-2;3)$; b) $A(1;2),\ B(-1;4)$;

c) $A(0;1),\ B(2;3)$; d) $A(-3;3),\ B(1;2)$

9. Să se scrie ecuaţia dreptei care trece prin punctul A şi are panta m în cazurile:

a) $A(-2;1),\ m=-2$; b) $A(3;2),\ m=-1$; c) $A(2;-1),\ m=3$;

10. Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât ecuaţiile de mai jos să reprezinte aceeaşi dreaptă:

a) $ax+6y-8=0$ şi $5x+by+20=0$; b) $3x+ay+6=0$ şi $bx+8y-10=0$;

11. Să se determine numărul real m astfel încât punctele $A(-3;1),\ B(2;3),\ C(m;6)$ să fie coliniare:

12. Să se arate că punctele $A(1;-2),\ B(-3;0),\ C(2m+1;-m-2)$, sunt coliniare pentru orice număr real m;

13. Să se scrie ecuaţia dreptei care trece prin punctele:

a) $A(-2;3),\ B(3;5)$; b) $A(-3;1),\ B(2;3)$; c) $A(2;6),\ B(1;5)$; d) $A(1;4),\ B(3;6)$;

14. Să se scrie ecuaţia dreptei care trece prin punctul A şi are panta m unde:

a) $A(1;3),\ m=2$; b) $A(-2;4),\ m=\frac{1}{2}$; c) $A(-3;2),\ m=\frac{1}{4}$;

15. Să se scrie ecuaţia dreptei care trece prin punctul A şi formează un unghi de măsură α cu axa OX în următoarele situaţii:

a) $A(-1;3),\ \alpha=30^0$; b) $A(2;4),\ \alpha=45^0$; c) $A(-3;2),\ \alpha=60^0$;

16. Să se determine panta dreptei ce trece prin punctele:

a) $A(-1;3),\ B(2;5)$; b) $A(-2;5),\ B(3;6)$; c) $A(3;2),\ B(1;8)$;

17. Să se determine panta dreptei (d) în următoarele situaţii:

a) $(d):\ 3x-6y+2=0$; **b)** $(d):\ x+4y+3=0$; **c)** $(d):\ 2x-3y+8=0$;

18. Să se scrie ecuaţia dreptei ce conţine punctul A(1; 2) şi are panta egală cu $tg\frac{\pi}{6}$.

19. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât punctele $A(-2;2),\ B(2;3),\ C(3m-1;m+1)$ să fie coliniare.

20. Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât punctele $A(-1;1),\ B(1;-3),\ C(a;5)$ să fie coliniare.

21. Să se determine ecuaţia dreptei care trece prin punctele A(1;4) şi B(3;5).

22. Să se determine ecuaţia dreptei ce conţine punctul A(1;2) şi are panta egală cu $tg\frac{\pi}{3}$.

10.3 Condiţii de paralelism si perpendicularitate

1. Fie (d): y=mx+n şi (d'): y=m'x+n'

Dreptele d şi d' sunt paralele $\Leftrightarrow$ **m=m'şi n** $\neq$ **n'.**

Dreptele d şi d' coincid $\Leftrightarrow$ **m=m'şi n=n'.**

Dreptele d şi d' sunt perpendiculare $\Leftrightarrow$ **mm'= -1.**

Tangenta unghiului φ **a celor două drepte este** $\boxed{tg\varphi = \left|\frac{m-m'}{1+m\cdot m'}\right|}$

Exemple:

a) Dreptele $(d):\ y=3x+2$ şi $(d'):\ y=3x-5$ sunt paralele deoarece au aceeaşi pantă m= 3 şi $2\neq 4$;

b) Dreptele $(d):\ y=3x+2$ şi $(d'):\ y=-\frac{1}{3}x+5$ sunt perpendiculare deoarece produsul pantelor este egal cu – 1, şi anume , $3\cdot\left(\frac{-1}{3}\right)=-1$;

2. Fie d: ax+by+c=0 şi d': a'x+b'y+c'=0 cu a',b',c' $\neq 0.$ **şi** $\theta = m(\langle d, d'\rangle)$

$\boxed{\textbf{Dreptele d şi d' sunt paralele} \quad \Leftrightarrow \frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}}$

$\boxed{\textbf{Dreptele d şi d' coincid} \quad \Leftrightarrow \frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}}$

$\boxed{\textbf{Dreptele d şi d' sunt concurente } \Leftrightarrow \frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'} \Leftrightarrow \textbf{ ab'-ba'} \neq 0.}$

$\boxed{\cos\theta = \frac{\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{v'}}{\left|\overrightarrow{v}\right|\cdot\left|\overrightarrow{v'}\right|} = \frac{a\cdot a'+b\cdot b'}{\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{a'^2+b'^2}}}$ **unde** $\overrightarrow{v}(-b\ ,a\ ), \overrightarrow{v'}(-b'\ ,a'\ )$ **sunt vectorii directori ai dreptelor d şi d'.**

$\boxed{\textbf{Dreptele d şi d' sunt perpendiculare, } d\perp d' \Leftrightarrow a\cdot a'+b\cdot b'=0}$

Exemple:

a) Dreptele $(d):\ 2x+3y+5=0$ şi $(d'):\ 4x+6y+2=0$ sunt paralele deoarece $\frac{2}{4}=\frac{3}{6}\neq\frac{5}{2}$;

b) Dreptele $(d):\ 3x-5y+2=0$ şi $(d'):\ 4x+3y+1=0$ sunt concurente deoarece $\frac{3}{4}\neq\frac{-5}{3}$;

c) Dreptele $3x-2y+4=0,\ 4x+6y-5=0$ sunt perpendiculare întrucât $3\cdot 4+(-2)\cdot 6=0$**;**

d) Să se determine valoarea parametrului real „ **a**" pentru care dreptele de ecuaţii $(d_1):\ (a+1)x+5y-3=0$, $(d_2):\ 6x+ay-2=0$ să fie paralele.

Rezolvare: Dreptele d_1 şi d_2 sunt paralele $d_1 \| d_2$, dacă $\frac{a+1}{6}=\frac{5}{a}$ de unde rezultă $a^2+a-30=0. \Rightarrow a_1=-6,\ a_2=5.$

Exercitii rezolvate

1. Să se determine valoarea parametrului real „ a" pentru care dreptele de ecuaţii (d_1): $(a-2)x+y+3=0$, (d_2): $x+3y-2=0$ să fie paralele.

Rezolvare. $d_1 \| d_2 \Rightarrow \frac{a-2}{1}=\frac{1}{3} \Rightarrow 3a-6=1 \Rightarrow 3a=7 \Rightarrow a=\frac{7}{3}.$

2. Se consideră punctele $A(2;-3),\ B(a-1;a)$. Să se determine „ a" astfel încât dreapta AB să fie paralelă cu dreapta de ecuaţie (d): 3x – 4y - 2= 0.

Rezolvare:.

$A(x_A,y_A), B(x_B,y_B) \Rightarrow$panta dreptei AB este $m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{a-(-3)}{a-1-2}.$

Dreapta (d): ax+by+c =0 are panta egală cu $m_d=-\frac{a}{b}$. În cazu nostru, (d):

$3x-4y-2=0 \Rightarrow -4y=-3x+2 \Rightarrow y=\frac{3}{4}x-\frac{2}{4} \Rightarrow$ panta dreptei (d) este $m_d=\frac{3}{4}$.

Cum dreapta d este paralelă cu dreapta AB, rezultă că au pantele egale, adică $m_d=m_{AB} \Rightarrow$ $\frac{3}{4}=\frac{a+4}{a-3}$ adică $4a+16=3a-9 \Rightarrow a=-25.$

3.Să se scrie ecuaţia dreptei ce trece prin punctul A(-4;2) şi este perpendiculară pe dreapta de ecuaţie 2x – y + 2 = 0;

Rezolvare:

. Ecuația dreptei **d** care trece prin punctul $A(x_0,y_0)$ și are panta m este $y-y_0=m_d(x-x_0)$.

Se găsește mai întâi panta dreptei (g): $2x-y+2=0 \Leftrightarrow y=2x+2 \Rightarrow m_g=2$. Cum cele două drepte sunt perpendiculare, $d \perp g \Rightarrow m_d \cdot m_g=-1 \Rightarrow\ m_d \cdot 2=-1 \Rightarrow m_d=-\frac{1}{2}$. Așadar, ecuația dreptei d este $y-2=-\frac{1}{2}(x+4) \Rightarrow x+2y=0.$

4. Să se scrie ecuaţia dreptei ce trece prin punctul M(-2;1) şi este paralelă cu dreapta de ecuaţie -2x + 4y -1 = 0;

Rezolvare:

Ecuația dreptei **d** care trece prin punctul $A(x_0,y_0)$ și are panta m este $y-y_0=m_d(x-x_0)$.

Se găsește mai întâi panta dreptei (g): $-2x+4y-1=0 \Leftrightarrow y=\frac{2}{4}x+\frac{1}{4} \Rightarrow m_g=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$. Cum cele două drepte sunt paralele, $d \| g \Rightarrow m_d=m_g \Rightarrow\ m_d=\frac{1}{2}$. Așadar, ecuația dreptei d este $y-1=\frac{1}{2}(x+2) \Rightarrow -x+2y-4=0.$

5. Să se scrie ecuaţia dreptei care trece prin punctul $A(-1;3)$ şi face un unghi de 30^0 cu sensul pozitiv al axei OX.

Rezolvare). $y-y_0=m_d(x-x_0)$ unde m este panta dreptei adică $m_d=tg\alpha=tg30^0=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow$

$y-3=\frac{\sqrt{3}}{3}(x+1)\Rightarrow\ 3y-9=\sqrt{3}x+\sqrt{3}\Rightarrow\ -\sqrt{3}x+3y-9-\sqrt{3}=0$.

6. Să se scrie ecuaţia dreptei care trece prin punctul $A(-3;1)$ şi este paralelă cu dreapta $2x-6y+8=0$.

Rezolvare: (d): $y-y_0=m_d(x-x_0)$; $(g):\ 2x-6y+8=0\Rightarrow 6y=2x+8\Rightarrow y=\frac{1}{3}x+\frac{8}{6}\Rightarrow$

$m_g=\frac{1}{3}$. Cum $d\parallel g\Rightarrow m_d=m_g=\frac{1}{3}\Rightarrow\ y-1=\frac{1}{3}(x+3)\Rightarrow -x+3y-6=0$.

Exercitii propuse

1. Să se verifice dacă dreptele AB şi CD sunt paralele unde
$A(3;-2),\ B(5;-1),\ C(2;1),\ D(4;2)$

2. Se consideră punctele $A(2;-3),\ B(a-1;a)$. Să se determine „ a” astfel încât dreapta AB să fie paralelă cu dreapta de ecuaţie (d): 3x – 4y - 2= 0.

3. Să se scrie ecuaţia dreptei care trece prin punctul A (-1; 2) şi este paralelă cu dreapta de ecuaţie x – 3y + 2 = 0.

4. Să se scrie ecuaţia dreptei care trece prin punctul A (-3; 1) şi este paralelă cu dreapta de ecuaţie 4x – 2y - 3 = 0.

5. Să se determine valoarea parametrului real „ a” pentru care dreptele de ecuaţii
$(d_1):\ (a-2)x+y+3=0$, $(d_2):\ x+3y-2=0$ să fie paralele.

6. Se consideră punctele $A(-1;3)$, $B(1;7)$. Să se determine ecuaţia mediatoarei segmentului [AB].

7. Să se scrie ecuaţia dreptei care trece prin punctul $A(-1;2)$ şi este perpendiculară pe dreapta de ecuaţie 3x – y + 2 = 0.

8. Să se scrie ecuaţia dreptei care trece prin punctul A şi este paralelă cu dreapta d în cazurile:

a) $A(2;1),\ (d):\ 2x-y+1=0$;
b) $A(3;-1),\ (d):\ x+2y-3=0$;
c) $A(-1;3),\ (d):\ 3x-y+5=0$;
d) $A(-2;2),\ (d):\ x+y+2=0$;

9. Se consideră punctele A şi B. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât dreapta AB să fie paralelă cu dreapta **d** a cărei ecuaţie este dată mai jos:

a) $A(1;3),\ B(m;m-1)$, $2x+4y+8=0$;
b) $A(2;1),\ B(2m;m+2)$, $2x-y+3=0$;

10. În plan se consideră punctele A, B, C. Să se scrie ecuaţia dreptei care trece prin A şi este paralelă cu dreapta BC: a) $A(2;4),\ B(-1;3),\ C(1;5)$; b) $A(1;-3),\ B(2;4),\ C(-3;1)$;

11. Să se verifice dacă dreptele AB şi CD sunt paralele, unde A(2;1), B(3;5), C(-2;3), D(-4;-5).

12. Să se scrie ecuaţia dreptei care trece prin punctul A(1;-2) şi este paralelă cu dreapta de ecuaţie -3x+y-2=0.

13. Se consideră punctele A(1;3) şi B(m;m+2). Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât dreapta AB să fie paralelă cu axa Ox.

14. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât punctele A(-4;2), B(-1;3), C(m; m+3) să fie coliniare.

10.4 Calcule de distanţe şi arii

Distanţa de la un punct $M(x_0,y_0)$ la o dreaptă h de ecuaţie (h): ax+by+c=0 este dată de:

$$\boxed{d(M,h)=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}.$$

Exemplu: Distanţa de la punctul $M(2;5)$ la dreapta de ecuaţie $3x+2y+3=0$ este

$$d(M,h)=\frac{|3\cdot 2+2\cdot 5+3|}{\sqrt{3^2+2^2}}=\frac{19}{\sqrt{13}}$$

Aria triunghiului ABC, unde $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$, $C(x_3;y_3)$ este egală cu:

1. $A_{ABC}=\dfrac{BC\cdot h}{2}$ sau,

2. $A_{ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot\left|\left[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\right]\right|$ sau

3. $A=\dfrac{1}{2}|\Delta|$ unde $\Delta=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}=x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1-x_3y_2-x_2y_1-x_1y_3$. (clasa a XI-a)

Exercitii rezolvate

1. Se consideră punctele $A(-1;2)$, $B(0;1)$, $C(4;3)$. Să se calculeze distanţa de la punctul C la dreapta AB.

Rezolvare**.** Se scrie mai întâi ecuaţia dreptei (AB), după formula $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$. Rezultă,

$\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-2}{1-2}\Rightarrow x+y-1=0$**.**

Distanţa de la punctul $C(4;3)$ la dreapta AB este dată de formula $d(C,AB)=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

şi este egală cu $\dfrac{|4+3-1|}{\sqrt{1+1}}=3\sqrt{2}$.

2. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât distanţa de la punctul $A(m;m-1)$ la dreapta de ecuaţie $4x+3y-2=0$ să fie egală cu 4.

Rezolvare: Aplicând formula distanței de la un punct la o dreaptă obținem

$$d=\frac{|4\cdot m+3(m-1)-5|}{\sqrt{4^2+3^2}}=4\Rightarrow\frac{|7m-8|}{\sqrt{25}}=4\Rightarrow|7m-8|=20\Rightarrow 7m-8=\pm 20\Rightarrow m\in\left\{-\frac{12}{7};4\right\}$$

3. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât distanța de la punctul $A(2;4)$ la dreapta de ecuație $(m-2)x+(m+2)y-4m-4=0$ să fie egală cu 1.

Rezolvare:

Se aplică formula distanței de la punctul A la dreapta dată:

$$d=\frac{|(m-2)\cdot 2+(m+2)\cdot 4-4m-4|}{\sqrt{(m-2)^2+(m+2)^2}}=1\Rightarrow\frac{|2m|}{\sqrt{2m^2+8}}=1\Rightarrow|2m|=\sqrt{2m^2+8}\Rightarrow 4m^2=2m^2+8\Rightarrow$$

$m^2=4\Rightarrow m\in\{-2;2\}$.

4. Să se determine distanța dintre dreptele paralele având ecuațiile

$(d_1)\colon\ x-3y+2=0,$ **și** $(d_2)\colon\ 2x-6y+1=0$

Rezolvare:

Distanța dintre două drepte paralele este egală cu distanța de la un punct arbitrar al uneia la cealaltă.

Fie $A\in d_1$. Pentru x=1 se obține y=1 și rezultă $A(1;1)$.

Atunci, $d(A;d_2)=\frac{|2\cdot 1-6\cdot 1+1|}{\sqrt{2^2+6^2}}=\frac{3}{\sqrt{40}}=\frac{3}{2\sqrt{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{20}$.

5. Se consideră în plan punctele $A(2;8)$, $B(-2;-2)$, $C(6;4)$. Să se calculeze aria triunghiului ABC.

Rezolvare:

Se calculează mai întâi lungimea segmentului $[BC]$,

$BC=\sqrt{(6+2)^2+(4+2)^2}=\sqrt{64+36}=\sqrt{100}=10$.

Pentru a calcula distanța de la A la latura BC trebuie determinată ecuația dreptei BC:

$\frac{x+2}{6+2}=\frac{y+2}{4+2}\Rightarrow 6(x+2)=8(y+2)\Rightarrow 6x-8y-4=0\Rightarrow 3x-4y-2=0$.

Atunci, înălțimea din A corespunzătoare laturii BC este

$d(A;BC)=\frac{|3\cdot 2-4\cdot 8-2|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|-28|}{\sqrt{25}}=\frac{28}{5}$ iar aria triunghiului ABC este

$$A_{ABC}=\frac{BC\cdot h_A}{2}=\frac{10\cdot\frac{28}{5}}{2}=28.$$

6. Se consideră în plan punctele $A(1;4)$, $B(-3;1)$, $C(2;-2)$, $D(3;3)$. Să se calculeze aria patrulaterului ABCD.

Rezolvare. Evident, $A_{ABCD}=A_{ABD}+A_{CBD}$.

$BD=\sqrt{(3+3)^2+(3-1)^2}=\sqrt{36+4}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$,

$(BD)\colon\ \frac{x-3}{-3-3}=\frac{y-3}{1-3}\Rightarrow -2(x-3)=-6(y-3)\Rightarrow -x+3y-6=0$.

$d(A;BD)=\frac{|-1\cdot 1+3\cdot 3-6|}{\sqrt{(-1)^2+3^3}}=\frac{5}{\sqrt{10}}$, $d(C;BD)=\frac{|-1\cdot 2+3\cdot(-2)-6|}{\sqrt{(-1)^2+3^3}}=\frac{14}{\sqrt{10}}$. Atunci,

$$A_{ABCD}=A_{ABD}+A_{CBD}=\frac{BD\cdot h_A}{2}+\frac{BD\cdot h_C}{2}=\frac{2\sqrt{10}\cdot\frac{5}{\sqrt{10}}}{2}+\frac{2\sqrt{10}\cdot\frac{14}{\sqrt{10}}}{2}=5+14=19.$$

7. Se dau punctele A (2, 6), B(- 4, 3), C(6, - 2). Se cere:
a) perimetrul triunghiului ABC şi natura sa ;
b) coordonatele centrului de greutate;
c) ecuaţia dreptei BC;
d) ecuaţia medianei AM şi lungimea sa;
e) ecuaţia înălţimii din A pe BC şi lungimea sa ;
f) ecuaţia dreptei care trece prin A şi face un unghi de 30^0 cu axa OX;
g) ecuaţia dreptei care trece prin A şi este paralelă cu BC;
h) ecuaţia bisectoarei din A şi lungimea ei
i) aria triunghiului ABC.

Rezolvare). a) Aplicând formula distanţei pentru cele trei laturi ale triunghiului $AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ obţinem:
AB = $3\sqrt{5}$, BC = $5\sqrt{5}$,AC = $4\sqrt{5}$ $\Rightarrow P=12\sqrt{5}$;
Se verifică cu reciproca teoremei lui Pitagora că triunghiul este dreptunghic cu unghiul de 90^0 în vârful A.

b) Coordonatele centrului de greutate sunt : $G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$ $\Rightarrow$ $G\left(\frac{4}{3},\frac{7}{3}\right)$;

c) Ecuaţia dreptei BC se scrie folosind formula: $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$ $\Rightarrow$

$\frac{y-3}{-5}=\frac{x+4}{10}$ $\Rightarrow$ 5x+10y-10=0 x+2y-2=0.

(forma generală a dreptei)sau $y=-\frac{1}{2}x+1$ (forma normală);

d) Coordonatele mijlocului segmentului BC sunt : $M(1,\frac{1}{2})$ $\Rightarrow$ ecuaţia medianei este:

$\frac{x-2}{1-2}=\frac{y-6}{\frac{1}{2}-6}\Rightarrow$ 11x-2y-10 =0; Pentru calculul lungimii medianei AM se poate folosi faptul că într-un triunghi dreptunghic mediana corespunzătoare ipotenuzei este jumătate din ipotenuză:

$\Rightarrow$ AM = $\frac{BC}{2}=\frac{5\sqrt{5}}{2}$, altfel se poate aplica formula distanţei.

e) Fie AD înălţimea din A $\Rightarrow$ AD şi BC sunt perpendiculare ceea ce înseamnă că produsul pantelor este egal cu -1. Cum panta dreptei BC este $-\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ panta lui AD este 2. Rămâne să scriem ecuaţia dreptei care trece prin A şi are panta 2 :
y-6=2(x-2) $\Rightarrow$ 2x-y+2=0 este ecuaţia înălţimii din A;

Pentru calculul înălţimii (într-un triunghi dreptunghic) este convenabil să aplicăm formula:

AD = $\frac{AB\cdot AC}{BC}=\frac{3\sqrt{5}\cdot 4\sqrt{5}}{5\sqrt{5}}=\frac{12\sqrt{5}}{5}$;

Altfel, trebuia rezolvat sistemul format din ecuaţiile dreptelor BC şi AD pentru a determina coordonatele lui D.

f) y-6=$\frac{\sqrt{3}}{3}$(x-2); Am aplicat formula $y-y_0=m(x-x_0)$ în condiţiile în care panta este $tg30^0$

g) y-6= $-\frac{1}{2}$(x-2) unde $-\frac{1}{2}$ este panta dreptei BC .

h) Fie AE bisectoarea unghiului A.

Din teorema bisectoarei k= $\frac{BE}{EC}=\frac{AB}{AC}\Rightarrow$k= $\frac{3}{4}$.Folosindu-ne de raportul în care un punct împarte un segment rezultă coordonatele lui E$\left(\frac{2}{7},\frac{6}{7}\right)$. Atunci ecuaţia bisectoarei este:

$\frac{x-2}{\frac{2}{7}-2}=\frac{y-6}{\frac{6}{7}-6}\Rightarrow$ 21x-7y=0. Pentru a calcula lungimea bisectoarei ne putem folosi şi de formula

$AE=\frac{2AB\cdot AC\cos\frac{A}{2}}{AB+AC}$ care este utilizată de obicei când se cunoaşte măsura unghiului a cărei bisectoare se calculează. $\Rightarrow$AE = $\frac{12\sqrt{10}}{7}$.

i) Aria triunghiului dreptunghic ABC este dată de formula A = $\frac{AB\cdot AC}{2}=30$.

Se va insista pe faptul că dacă triunghiul nu ar fi fost dreptunghic ar fi trebuit să se calculeze distanţa de la A la dreapta BC adică tocmai lungimea înălţimii iar aceasta s-ar putea face mai simplu folosind formula :

Distanţa de la un punct $M(x_0,y_0)$ la o dreaptă h de ecuaţie (h): ax+by+c=0 este dată de:

$$d(M,h)=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Exercitii propuse

1. Se dau în plan punctele A(5;6), B(3;2), C(7;- 5). Se cere:
a) Să se determine perimetrul triunghiului ABC;
b) Să se determine coordonatele centrului de greutate;
c) Să se scrie ecuaţia dreptei BC;
d) Să se scrie ecuaţia înălţimii din A pe BC;
e) Să se calculeze distanţa de la punctul A la BC şi aria triunghiului ABC;
f) Să se scrie ecuaţia dreptei care trece prin A şi e paralelă cu dreapta AB;

2. Se dau în plan punctele A(4;6), B(- 2;0), C(6;- 4). Se cere:
a) Să se determine coordonatele centrului de greutate;
b) Să se determine lungimea segmentului AB;

c) Să se scrie ecuaţia dreptei AB;
d) Să se calculeze distanţa de la punctul C la AB şi aria triunghiului ABC;
e) Să se calculeze produsul scalar $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$ şi cosinusul unghiului C;
f) Să se scrie ecuaţia dreptei care trece prin C şi e paralelă cu dreapta AB;
g) Să se scrie ecuaţia medianei CM unde $M\in AB$;
h) Să se scrie ecuaţia mediatoarei laturii AB;
i) Să se determine punctul $m\in R$ astfel încât punctele A(4;6), B(-2;0), M(m;3) să fie coliniare;
j) Să se scrie ecuaţia bisectoarei CE, unde E se află pe AB.

3. Se dau în plan punctele A(- 2;8), B(0;1), C(8;- 3). Se cere:
a) Să se determine coordonatele centrului de greutate;
b) Să se determine lungimea segmentului AC;
c) Să se scrie ecuaţia dreptei AC;
d) Să se calculeze distanţa de la punctul B la AC şi aria triunghiului ABC;
e) Să se calculeze produsul scalar $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$ şi cosinusul unghiului B;
f) Să se scrie ecuaţia dreptei care trece prin B şi e paralelă cu dreapta AC;
g) Să se scrie ecuaţia medianei BM unde $M\in AC$;
h) Să se scrie ecuaţia mediatoarei laturii AC;
i) Să se determine punctul $m\in R$ astfel încât punctele A(-2;8), B(0;1), M(m;2) să fie coliniare;
j) Să se scrie ecuaţia bisectoarei BE, unde E se află pe AC.

10.5 Teste de autoevaluare

Testul 1. Ecuațiile dreptei în plan

1. Să se verifice dacă dreptele AB şi CD sunt paralele unde $A(3;-2)$, $B(5;-1)$, $C(2;1)$, $D(4;2)$;
2.. În plan se consideră punctele $A(-3;1)$, $B(2;-2)$, $C(3;2)$. Să se scrie ecuaţia medianei din vârful A al triunghiului ABC.
3. Să se determine numărul real a, știind că lungimea segmentului determinat de punctele $A(-3;1)$ și $B(a-1\,;a+2)$ este egală cu 5.
4. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-3;1)$ și $B(a\,;-2)$. Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât punctul $P(-2;2)$ să aparțină dreptei AB.
5. Să se scrie ecuaţia dreptei care trece prin punctul A (1; -2) şi este paralelă cu dreapta „d” de ecuaţie - 3x + y - 2 = 0.
6. Să se calculeze distanţa de la punctul A la punctul de intersecţie a dreptelor d şi g în cazul:

$$A(-3;2),\ \begin{cases} d:\ 3x+2y+1=0 \\ g:\ x+3y-2=0 \end{cases};$$

Cap. 11. PROBLEME RECAPITULATIVE

1. Să se calculeze $16\cdot\frac{1}{2^5}-125\cdot\frac{1}{2\cdot 5^3}$.
2. Să se calculeze: $2^{100}:(2^{55}\cdot 2^{44})+2^{-2}$;
3. Să se demonstreze că numărul $\sqrt[3]{27}-\sqrt{12}+2\sqrt{3}$ este natural.
4. Să se calculeze: $(1+\sqrt{3})^2-\sqrt{\left(2\sqrt{3}-3\right)^2}+(\sqrt{3}-2)^{-1}$;
5. Să se calculeze $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{-3}+\frac{1}{\sqrt{3}-2}+\left|\sqrt{12}-4\right|$.
6. Să se calculeze expresia $\frac{\frac{1}{2}-3}{0,5+\sqrt[3]{8}}$;
7. Care număr este mai mare $\log_2\frac{1}{2}$; $\sqrt[3]{-64}$; $-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-2}$.
8. Să se arate că numărul $A=\sqrt{(\sqrt{5}-3)^2}+\sqrt{(2-\sqrt{5})^2}\in\mathbb{N}$.
9. Să se calculeze expresia $\sqrt[3]{125}+\frac{1}{2}-(\log_2 32+0,5)$.
10. Să se calculeze $\sqrt[3]{24}-3\sqrt[3]{192}+\sqrt[3]{-81}$
11. Să se calculeze $\sqrt[3]{40}-\sqrt[3]{625}+2\sqrt[3]{-135}$.
12. Să se calculeze $\sqrt[3]{81}+\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{375}$.
13. Să se arate că $\left(\sqrt[3]{9}\right)^{\log_3 1}+\sqrt[3]{-27}\in\mathbb{Z}$.
14. Să se calculeze: $\log_3 81\cdot\log_3 27\cdot\log_3 9\cdot\log_3 3\cdot\log_3 1$;
15. Arătaţi că $\log_6 2+\log_6 18\in\mathbb{N}$.
16. Să se calculeze $\log_5 100+2\log_5 3-\log_5 36$;
17. Să se calculeze $\frac{\log_4 18+\log_4 12-\log_4 27}{\log_4 2}$.
18. Să se calculeze $\log_3 27+\log_4 16-\sqrt[3]{125}$.
19. Să se calculeze $\log_6 24-\log_6 4$.
20. Să se determine valorile reale pozitive ale lui x ştiind că $\lg\sqrt[3]{x}$, $\frac{7}{3}$ şi $2\lg x$ sunt termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice.
21. Să se calculeze $\lg\left(tg1^0\right)\cdot\lg\left(tg2^0\right)\cdot\lg\left(tg3^0\right)\cdot.....\cdot\lg\left(tg45^0\right)$.
22. Să se calculeze $\lg(tg40^0)\cdot\lg(tg41^0)\cdot.....\cdot\lg(tg45^0)$.
23. Să se determine valorile reale ale lui x astfel încât funcția $f:D\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\log_{4x-1}8x^2$ să fie corect definită.

24. Folosind proprietăţile logaritmilor să se restrângă expresia : $\frac{1}{3}\cdot\log_2 125-3\cdot\log_2 x-4\cdot\log_2 y$.
25. Ştiind că $\log_2 3=a$ să se arate că $\log_2 288=5+2a$;
26. Să se arate că $\log_3 24=1+3a$ unde $a=\log_3 2$.
27. Determinaţi $a,b\in\mathbb{R}$ pentru care $(4-6i)\cdot a+(8+2i)\cdot b=4+2i$;
28. Determinaţi $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât să existe egalitatea $(3-2i\sqrt{2})^2=a+ib.$
29. Să se calculeze $i^{33}+i^{55}+i^{77}$;
30. Demonstraţi că $(2+i\sqrt{3})^2+(2-i\sqrt{3})^2\in\mathbb{Z}$
31. Fie $z_1=5-2i,\ z_2=4+3i$. Să se calculeze modulul numărului z unde $z=z_1\cdot z_2$;
32. Să se rezolve ecuatia $\sqrt[3]{x^2+5x+5}=-1$.
33. Să se rezolve ecuaţia: $\sqrt{x-3}-5=0$.
34. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia: $\sqrt[3]{2-x}=x$;
35. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia: $\sqrt{x^2-4x+4}=3$;
36. Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei $\sqrt{x^2-x-2}=2$.
37. Să se rezolve ecuaţia $\sqrt{3x+4}=2\sqrt{x}$.
38. Să se rezolve ecuaţia $\sqrt{x+5}=x-1$.
39. Să se rezolve ecuaţia $\sqrt{-x^2+5x+3}=x$.
40. Să se rezolve ecuaţia $\sqrt{5-x}=x+1$;
41. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt[3]{x^3+x^2-x-2}=x$.
42. Să se rezolve ecuaţia $\sqrt{4x-3}=2x-3$.
43. Să se rezolve ecuaţia în $\mathbb{R}$: $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}=2$;
44. Fie $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z},\ f(x)=2^x-2^{-x}$. Să se calculeze $f(-2)+f(-1)+f(1)+f(2)$;
45. Rezolvaţi ecuaţia $2^x+2^{x+2}=10$.
46. Să se rezolve ecuaţia $\left(\frac{1}{2}\right)^x=2^{x-2}$.
47. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^x+2\cdot 3^{x+1}=7$.
48. Să se rezolve ecuaţia $3^{2x^2-5x}=\frac{1}{27}$;
49. Rezolvaţi ecuaţia $5^{1-x}=25^x$.
50. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $2^{x^2-4x}=\frac{1}{8}$.
51. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia: $3^x+9^x+27^x=39.$
52. Să se rezolve ecuaţia $5^{1+x^2}\cdot 5^{6x}=\frac{1}{5^7}$.
53. Să se rezolve ecuaţia $3^{x-2}+3^{x+2}=\frac{82}{81}$.
54. Să se rezolve ecuaţia: $2^{x+2}+2^x-10=0$.
55. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2^{\sqrt{x-1}}=4$.
56. Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei $\log_2(x+5)=3$
57. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia: $\lg(x^2-3x)=1$;

58. Să se rezolve ecuaţia $\log_3(x^2-7x+8)-\log_3(x-7)=0$;

59. Să se rezolve ecuaţia $\log_2(x+2)+\log_2 x=3$;

60. Să se rezolve ecuaţia $\log_2(2x+4)-\log_2(3x+1)=0$.

61. Să se rezolve ecuația : $\log_2(x^2-2x+1)=\log_2(x-1)$.

62. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\lg^2 x-4\lg x+3=0$.

63. Reuniunea a două mulțimi cu câte 2015 elemente fiecare are 2500 elemente. Determinați numărul de elemente comune ale celor două mulțimi.

64. În câte moduri se pot aranja 6 mașini în parcare ?

65. Câte numere de telefon cu cinci cifre, nu neapărat distincte, se pot forma cu elementele mulţimii $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$?

66. Determinați numărul de submulțimi nevide ale mulțimii $A=\{x,y,z,t\}$.

67. Câte numere de telefon de zece cifre distincte se pot forma cu cifrele de la 0 la 9 ?

68. Câte numere de telefon cu cinci cifre distincte se pot forma cu elementele mulţimii $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$?

69. Câte numere de telefon de şase cifre distincte se pot forma cu cifrele 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ?

70. Câte numere de patru cifre distincte se pot forma cu cifrele 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ?

71. Opt alergători aleargă într-o cursă. Câte situaţii de clasament există dacă se consideră că nu ajung mai mulţi în acelaşi timp.

72. Determinaţi numărul permutărilor mulţimii $A=\{1,2,3,4,5\}$.

73. Să se calculeze $C_{10}^9-C_9^8$.

74. Să se calculeze $\dfrac{2C_7^3-A_5^4}{P_3}$

75. Să se rezolve ecuaţia $\dfrac{(n+1)!+n!}{n!}=2020$.

76. Să se calculeze $C_8^3-C_8^5$.

77. Să se calculeze $\dfrac{C_9^6-C_9^5}{A_9^5}$

78. Să se calculeze $\dfrac{A_7^5-A_7^4}{C_5^3}$;

79. Să se calculeze $\dfrac{A_{2014}^1+C_{2014}^1}{2014}$

80. Să se calculeze $\dfrac{P_6+A_6^3}{C_7^3}$;

81. Să se determine numărul real $n\geq 1$, dacă $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!}=-4n+6$.

82. Să se arate ca expresia $A_5^2+C_5^2-P_4$ este un număr par.

83. Să se calculeze $C_7^5-C_7^6-C_6^4$.

84. Calculaţi $C_{18}^2-C_{18}^{16}+C_{18}^3-C_{18}^{15}$.

85. Să se rezolve ecuaţia $C_n^0+C_n^1=8,\ n\in\mathbb{N}^*$.

86. Să se rezolve ecuația $C_n^3-2n=0$.

87. Să se rezolve ecuaţia $C_n^2 = 28, n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$

88. Să se determine $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$ pentru care avem relația $2C_n^{\ 2} - 6C_{n+1}^{\ 3} = 6n;$

89. Să se rezolve în $\mathbb{N}$ ecuaţia: $C_n^n + C_n^{n-1} + ... + C_n^1 = 1023;$

90. Să se calculeze: $C_{2020}^1 + C_{2020}^2 + C_{2020}^3 + ... + C_{2020}^{2020}.$

91. Să se calculeze probabilitatea ca alegând la întâmplare unul din numerele $\log_2 128;\ \log_2 \frac{1}{64};\ \log_5 125$, acesta să fie divizibil cu 3.

92. Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr n din mulţimea $\{1,2,3,4,5\}$, acesta să verifice inegalitatea $n! \rangle 20.$

93. Se consideră mulțimea $A = \{1,3,5,...,13\}$. Să se determine probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea A, acesta să fie prim.

94. Într-o urnă sunt 8 bile albe şi 4 bile negre. Care este probabilitatea ca scoţând două bile din urnă fără a le vedea , acestea să fie albe ?

95. Să se calculeze probabilitatea , ca alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie cubul unui număr natural.

96. Care este probabilitatea ca un număr de trei cifre să aibă produsul cifrelor egal cu 5?

97. Într-o urnă sunt 6 bile albe și 8 negre. Care este probabilitatea ca la extragerea a patru bile din urnă, fără să le introducem în urnă, acestea să fie albe.

98. Costul unui televizor este de 250 de euro. Cât reprezintă taxa TVA (18%) din prețul produsului ?

99. La clasa a X-a A din cei 24 de elevi, 6 sunt corigenţi iar la clasa a X-a B, din cei 30 de elevi, 7 sunt corigenţi. Ce clasă are procentul de promovabilitate mai mare ?

100. Să se calculeze TVA-ul pentru un produs, ştiind că preţul de vânzare al produsului este de 238 lei (procentul TVA-ului este de 19 %).

101. O sumă de 850 lei este pusă la bancă iar după un an suma finală devine 884 lei. Determinați procentul dobânzii acordate de bancă.

102. Să se determine prețul inițial al unui produs care după două ieftiniri succesive cu câte 10% are preţul de 567 lei.

103. Un produs se scumpește cu 15% ceea ce înseamnă 51 lei. Determinați prețul final al produsului.

104. Rata dobânzii pe care o acordă o bancă la depunerea unei sume de bani este de 6% pe an.Ce dobândă obţine o persoană ce depuen la bancă suam de 1800 de euro pe un an ?

105. Să se calculeze suma finală obţinută de un capital de 1000 de euro depus în regim de dobîndă simplă timp de doi ani, ştiind că dobânda anuală este de 5%.

106. O persoană a depus la o bancă 1500 de lei. Ce sumă a primit persoana după un an, ştiind că rata dobânzii a fost de 8%.

107. Să se determine cât la sută din a +b reprezintă numărul a . ştiind că este egal cu 25% din b.

108. După o reducere a prețului cu 15% un produs costă 680 lei. Să se calculeze prețul inițial al produsului.

109. Determinați numărul $a \in \mathbb{R}$ știind că punctul $A(a; a+2)$ aparține dreptei d: $4x - 2y - 6 = 0;$

110. Determinaţi $a \in \mathbb{R}$ ştiind că punctul $A(-1;1)$ aparţine dreptei de ecuaţie $2x + ay - 1 = 0.$

111. Să se calculeze perimetrul triunghiului echilateral de latură $[AB]$ unde $A(-2;1)$ şi $B(1;4)$;

112. Să se calculeze lungimea segmentului determinat de punctele $A(-2;2),\ B(-3;3)$.

113. În plan se consideră punctele $A(1;6)$, $B(-3;2)$, $C(5;-2)$. Să se calculeze lungimea medianei duse din vârful A în triunghiul ABC.

114. Fie ABC un triunghi oarecare unde A(-1;2), B(4;-2) şi C(0;3). Să se determine perimetrul triunghiului.

115. Să se determine numărul real pozitiv a astfel încât distanţa dintre punctele $A(2;-1)$ şi $B(-1;a)$ să fie egală cu 5.

116. Se consideră punctele $A(2;-3),\ B(a-1;a)$. Să se determine „ a” astfel încât dreapta AB să fie paralelă cu dreapta de ecuaţie (d): 3x – 4y - 2= 0.

117. Să se scrie ecuaţia dreptei care trece prin punctele A(-2;4) şi B(3; 5).

118.Să se scrie ecuaţia dreptei ce trece prin punctul A(-4;2) şi este perpendiculară pe dreapta de ecuaţie 2x – y + 2 = 0;

119. Să se scrie ecuaţia dreptei ce trece prin punctul M(-2;1) şi este paralelă cu dreapta de ecuaţie -2x + 4y -1 = 0;

120. Să se scrie ecuaţia dreptei care trece prin punctul $A(-1;3)$ şi face un unghi de 30^0 cu sensul pozitiv al axei OX.

121. Să se determine ecuaţia dreptei ce conţine punctul $A(2;1)$ şi are panta egală cu $tg\frac{\pi}{6}$;

122. Să se determine simetricul punctului $A(2;-8)$ faţă de punctul $B(0;4)$.

123. În plan se consideră punctele $A(-3;1)$, $B(2;-2)$, $C(3;2)$. Să se scrie ecuaţia medianei din vârful A a triunghiului ABC.

124. Să se determine valoarea parametrului real „ a” pentru care dreptele de ecuaţii (d_1): $(a-2)x+y+3=0$, (d_2): $x+3y-2=0$ să fie paralele.

125. Să se scrie ecuaţia dreptei care trece prin punctele $A(3;1),\ B(1;4)$.

126. Se consideră în plan punctele $A(-4;-1), B(2;1), C(-1;0), D(5;2)$.Să se arate că dreptele AB și CD sunt paralele.

127. Să se scrie ecuația dreptei care trece prin punctul $A(-3;1)$ și este paralelă cu dreapta $2x-6y+8=0$.

128. Să se arate că triunghiul determinat de punctele $A(0;8), B(0;0), C(6;0)$ este dreptunghic.

129. Fie triunghiul ABC oarecare în care se cunosc AB= 5,BC = 4 și $\cos B=\frac{4}{5}$. Să se calculeze perimetrul triunghiului.

130. Fie punctele A(2;3) și B(-1;-5). Să se determine coordonatele vectorului $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$.

131. Se dau dreptele de ecuatii: $d_1:\ y-(m+1)x+3=0$ și $d_2:\ y-7x-5=0$. Să se determine parametrul real m, știind că dreptele sunt paralele.

132. Fie A(1,2); B(3,4), să se scrie ecuația dreptei ce trece prin punctul C(0,1) și e paralelă cu dreapta AB.

133. Fie triunghiul oarecare ABC unde BC=8, AC=7 și $m(ABC)=60^0$. Să se determine lungimea laturii $[AB]$.

134. În plan se consideră punctele $A(-3;1)$, $B(2;-2)$, $C(4;2)$. Să se scrie ecuaţia medianei din vârful A al triunghiului ABC.

135. Să se determine numărul real x pentru care x, x+7 şi x+8 să fie lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic.

136. Determinaţi distanţa de la punctul $A(1,2)$ la punctul de intersecţie a dreptelor de ecuaţii $x=4$ şi $y=-2$.

137. Să se determine ecuaţia dreptei care trece prin punctul $A(1;-2)$ şi are panta egală cu 2.

138. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ pentru ca punctele $A(2;4), B(3;3)$ şi $C(m;5)$ sunt coliniare.

139. În plan se consideră punctele $A(-1;4)$, $B(-3;-4)$, $C(4;3)$. Fie G, centrul de greutate al triunghiului ABC. Determinați ecuația dreptei AG.

140. Se consideră dreapta d de ecuație 4x-y+1 =0. Scrieți ecuația dreptei care trece prin punctul $A(-1;2)$ și este paralelă cu dreapta d.

141. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ pentru care distanţa dintre punctele $A(2;m)$ şi $B(-m,-2)$ este egală cu $4\sqrt{2}$.

142. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ pentru care distanţa dintre punctele $A(1;m)$ şi $B(m,3)$ este egală cu $\sqrt{7}$.

143. Determinați coordonatele punctului de intersecție a dreptelor: a: $3x-4y-5=0$,
b: $x+2y+5=0$.

144. Să se arate că patrulaterul ABCD cu vârfurile $A(4;6)$, $B(0;2)$, $C(2;0)$, $D(6;4)$ este un dreptunghi.

145. Determinați $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât punctele $A(-1;2)$, $B(3;6)$ să aparțină dreptei de ecuație d: $y=ax+b$.

Teste de autoevaluare

Testul 1

1. Dintre numerele $a=\log_2 4$, $b=\frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt{2}}$, $c=\sqrt{3}$, $d=\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{4}}$ mai mare este numărul.....

a) a; b) b; c) c; d) d.

2. Probabilitatea ca alegând un element din mulțimea $A=\{\sin 30^0,\cos 30^0,tg30^0\}$ acesta să fie un număr rațional este ....

a) 1; b) $\frac{1}{2}$; c) $\frac{1}{3}$; d) 0;

3. Soluția ecuației $\sqrt{4-x}=1$ este ....

a) 0; b) 1; c) 2; d) 3.

4. Numărul submulțimilor cu două elemente ale mulțimii $A=\{1;2;3;4;5\}$ este egal cu ....

a) 5; b) 10; c) 15; d) 20

5. Modulul numărului complex $z=\frac{(1+2i)^2}{3+4i}$ este egal cu ...

a) $\sqrt{5}$; b) $\sqrt{3}$; c) $\sqrt{2}$; d) 1;

Testul 2

1. Valoarea expresiei $E(x)=(x+2)^2+x^2+4x$ pentru $x=\sqrt{3}-2$ este ...

a) 2; b) $4\sqrt{2}$; c) $6\sqrt{2}$; d) 1;

2. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x-2$. Atunci $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)$ este egal cu ....

a) 15; b) 25; c) 35; d) 40

3. Soluția reală a ecuației $\log_2 \frac{x-2}{3} = \log_2 x - \log_2 5$ este egală cu ....

a) 3; b) 5; c) 6; d) 8.

4. După o reducere cu 15 % aprețului unui produs acesta costă 850 lei. Atunci prețul inițial al produsului era...

a) 700 lei; b) 1000 lei; c) 1150 lei; d) 1200 lei.

5. Câte grupe de câte 4 băieți și două fete se pot forma dacă există 8 băieți și 6 fete?

a) 500; b) 600; c) 900; d) 1050.

6. Aria triunghiului determinat de dreptele de ecuații (d_1): $-2x-3y+12=0$, (d_2): $x-3y+3=0$ și axa OY este .....

a) 3; b) $\frac{5}{2}$ c) $\frac{9}{2}$ d) 5;

SINTEZE TEORETICE
clasa a X-a

Puteri cu exponent raţional

1. $x^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{x^m}$, $x^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{x^{\frac{m}{n}}}=\frac{1}{\sqrt[n]{x^m}}$.

2. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}}=\sqrt[m\cdot n]{x},\ m,n\in\mathbb{N}^*,x\geq 0$; $\sqrt[n]{x}=\sqrt[m\cdot n]{x^m},\ m,n\in\mathbb{N}^*,x\geq 0$;

3. Compararea puterilor cu exponent raţional:

Fie $x,y\rangle 0$ şi $m,n\in\mathbb{Q}$;

Dacă $x\rangle 1$ atunci, $x^m\rangle x^n\Leftrightarrow m\rangle n$

Dacă $x\in(0;1)$ atunci, $x^m\rangle x^n\Leftrightarrow m\langle n$

$x^n=y^n\Leftrightarrow x=y$

4. Puterea cu exponent real $x^r,\ x\rangle 0,\ r\in\mathbb{R}$;

x^r	$r\rangle 0$	$r\langle 0$
$x\rangle 1$	$x^r\rangle 1$	$x^r\in(0;1)$
$x\in(0;1)$	$x^r\in(0;1)$	$x^r\rangle 1$

5. Proprietăţile radicalilor de ordinul trei

$Fie\ a,b\in\mathbb{R}$

$\sqrt[3]{a^3}=a,\forall a\in\mathbb{R}.$ $\sqrt[3]{a\cdot b}=\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b}.$ $\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}=\sqrt[3]{\frac{a}{b}},b\neq 0$ $\sqrt[3]{a^n}=\sqrt[3]{a^n}=a^{\frac{n}{3}}$

$\sqrt[3]{a}\in\mathbb{Z}\Rightarrow a=k^3$ $a\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{a^3b}$

$\sqrt[3]{a^3b}=a\sqrt[3]{b}$ $x\sqrt[3]{b}\cdot y\sqrt[3]{b}=xy\sqrt[3]{ab}$

$x\sqrt[3]{a}\pm y\sqrt[3]{a}=(x\pm y)\sqrt[3]{a}$

$\frac{x\sqrt[3]{a}}{y\sqrt[3]{b}}=\frac{x}{y}\sqrt[3]{\frac{a}{b}},y,b\neq 0$ $\left(x\sqrt[3]{a}\right)^n=x^n\sqrt[3]{a^n}$

6. Raţionalizări ale numitorilor fracţiilor

$\frac{x}{\sqrt{a}}=\frac{x\sqrt{a}}{a}$, $\frac{x}{a\sqrt{b}}=\frac{x\sqrt{b}}{ab}$

$\frac{x}{a+\sqrt{b}}=\frac{x(a-\sqrt{b})}{a^2-b}$, $\frac{x}{a-\sqrt{b}}=\frac{x(a+\sqrt{b})}{a^2-b}$

$\boxed{\frac{1}{\sqrt[3]{a}}=\frac{\sqrt[3]{a^2}}{a};}$ $\boxed{\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}=\frac{\sqrt[3]{a}}{a};}$

$\boxed{\frac{1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}=\frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{a-b};}$

$\boxed{\frac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}=\frac{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{a+b};}$

$\boxed{\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}=\frac{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}{a-b};}$

$\boxed{\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}=\frac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}{a+b};}$

Sunt utile pentru raţionalizări următoarele formule:

$\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)=a-b$;

$\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)=a+b$;

7. Medii

Media aritmetică $m_a=\frac{x+y}{2}$ $m_a=\frac{x+y+z}{3}$

Media geometrică $m_g=\sqrt{x\cdot y}$, $\forall x,y\in\mathbb{R}_+^*$ $m_g=\sqrt[3]{xyz}$

Media ponderată $m_p=\frac{p\cdot x+q\cdot y}{p+q};\ p,q\in N^*-ponderile$ $m_p=\frac{p\cdot x+q\cdot y+r\cdot z}{p+q+r}$

Media armonică $m_h=\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=\frac{2xy}{x+y}$, $\forall x,y\in\mathbb{R}^*$ $m_h=\frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}=\frac{3xyz}{xy+yz+xz}$

8. Logaritmi.

Definiţie. Fie $a\in(0;1)\cup(1;\infty)$ şi $x\rangle 0$. Atunci, există şi este unic numărul real y = $\log_a x$ (citim logaritm în baza a din x) pentru care $x=a^y$;

$\boxed{\log_a x=y\Rightarrow x=a^y,\ x\rangle 0, a\in(0;1)\cup(1;\infty)}$

9.Proprietăţile logaritmilor:

Fie $a,b,c\in(0,\infty), a,b,c\neq 1, x,y\in(0,\infty), m\in\mathbb{R}\Rightarrow$

$\boxed{\log_a 1=0};$ $\boxed{\log_a a=1};$ $\boxed{\log_a x\cdot y=\log_a x+\log_a y};$

$\boxed{\log_a\frac{x}{y}=\log_a x-\log_a y};$ $\boxed{\log_a b^m=m\log_a b};$ $\boxed{\log_a a^m=m};$

$\boxed{\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}};$ $\boxed{\frac{1}{\log_a b}=\log_b a};$ $\boxed{a^{\log_b c}=c^{\log_b a}};$ $\boxed{x=a^{\log_a x}};$

10. Logaritmi zecimali

Notaţie: $\log_{10} x$ *notam* $\lg x$ (logaritm în baza 10 sau logaritm zecimal); $\lg 10 = 1$

11. Logaritmi naturali

Notaţie: $\log_e x$ *notam* $\ln x$ (logaritm în baza e = 2,718281… sau logaritm natural) $\ln e = 1$.

12. Numere complexe sub formă algebrică

$C = \left\{ z \middle| z = a + ib, a, b \in R, i^2 = -1 \right\}$ - mulţimea numerelor complexe. z=a+ib=Re z+Im z

a se mai numeşte partea reală a numărului complex, iar b coeficientul părţii imaginare;

13. Operaţii cu numere complexe

Fie $z_1 = a + ib, \quad z_2 = c + id$. Atunci:

$\boxed{z_1 = z_2 \Leftrightarrow a = c \quad si \quad b = d}$. (egalitatea numerelor complexe)

$\boxed{z_1 + z_2 = (a + c) + i(b + d).}$ (adunarea numerelor complexe)

$\boxed{z_1 \cdot z_2 = (a \cdot c - b \cdot d) + i(a \cdot d + b \cdot c).}$ (înmulţirea numerelor complexe)

$\boxed{\overline{z_1} = a - ib,}$ (conjugatul lui z_1)

$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{a \cdot c + b \cdot d}{c^2 + d^2} + i\frac{b \cdot c - a \cdot d}{c^2 + d^2}}$ (împărţirea numerelor complexe)

$\boxed{\frac{1}{z_1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i\frac{b}{a^2 + b^2}}$. (inversul lui z_1)

14.Puterile lui i

$i^{4k} = 1$

$i^{4k+1} = i$

$i^{4k+2} = -1$

$i^{4k+3} = -i$

$i^{-n} = \frac{1}{i^n}, i^{-1} = \frac{1}{i} = -i$

$$i^{-n} = (-i)^n = (-1)^n \cdot i^n = \begin{cases} i^n, n \quad par \\ -i^n, n \quad impar \end{cases}$$

15. Proprietăţile modulului

$\boxed{|z| = \sqrt{a^2 + b^2}}$ - modulul numerelor complexe

$|z| \geq 0, |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

$z \cdot \bar{z} = |z|^2$

$|z| = |\bar{z}|$

$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, z_2 \neq 0$

$\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

$|z^n| = |z|^n$

$z \in C; \quad z \in R \Leftrightarrow \operatorname{Im} z = 0 \Leftrightarrow z = \bar{z}$.

16. Ecuaţii :

$x^2 = a, \ a\langle 0 \Rightarrow x = \pm i\sqrt{-a}$

$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}, \ \Delta\langle 0.$

$z^2 = a + ib \Rightarrow z_{1,2} = \pm\left[\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} \pm i\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\right]$,+' dacă b pozitiv; ,-, dacă b negative

17. Numere complexe sub formă geometrică

Forma trigonometrică a numerelor complexe:

z = $\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $\varphi = arctg\frac{b}{a} + k\pi, \quad k = \begin{cases} 0, & (a,b) \in I \\ 1, & (a,b) \in II, III \\ 2, & (a,b) \in IV \end{cases}$

$\rho = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$ se numeşte raza polară a lui z

Fie $z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ şi $z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$; $z_1 = z_2$

$\rho_1 = \rho_2, si \ \ exista \ \ k \in Z \ \ a.i \ \ \varphi_1 = \varphi_2 + k\pi$

$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)$ $\qquad \overline{z_1} = \rho_1(\cos\varphi_1 - i\sin\varphi_1)$

$\frac{1}{z_1} = \frac{1}{\rho_1}[\cos(-\varphi_1) + i\sin(-\varphi_1)]$

$\frac{z_2}{z_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1}\big[\cos(\varphi_2 - \varphi_1) + i\sin(\varphi_2 - \varphi_1)\big]$

$z_1^{\ n} = \rho_1^{\ n}(\cos n\varphi_1 + i\sin n\varphi_1), n \in R$

$\sqrt[n]{z_1} = \sqrt[n]{\rho_1}(\cos\frac{\varphi_1 + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi_1 + 2k\pi}{n}), k \in \overline{0, n-1}$

18. Funcţii. Generalităţi

Definiţie: Fie $D \subseteq \mathbb{R}$ o mulţime de numere reale. Atunci, o funcţie $f : D \to \mathbb{R}$ se numeşte funcţie reală de variabilă reală sau mai simplu **funcţie reală** sau **funcţie numerică**.

Definiţie : Fie D o mulţime simetrică. O **funcţie** $f:D\to R$ **se numeşte pară** dacă $f(-x)=f(x),\ \forall x\in D$ şi se numeşte **impară** dacă $f(-x)=-f(x),\ \forall x\in D$.

Definiţie: Se numeşte **funcţie mărginită**, o funcţie $f:D\to R,\ D\subset R,\ D\neq \emptyset$ pentru care există numerele reale **a** şi **b** astfel încât $a\le f(x)\le b$.
Numerele **a** respectiv **b** se numesc **marginea inferioară** respectiv **marginea superioară** a funcţiei f şi se spune că **f este minorată** pe D respectiv **majorată** pe D.

Observaţie : Pentru a arăta că o funcţie **f este mărginită**, este suficient să se găsească un număr $M\rangle 0$ astfel încât $|f(x)|\le M,(\forall)x\in D$.

Teoremă Dacă $f:[a;b]\to R$ este o funcţie monotonă pe un interval închis, atunci f este mărginită pe acel interval şi îşi atinge marginile.

Teoremă Fie $f:[a;b]\to R$, f monotonă. Atunci f este mărginită şi $f(a)\le f(x)\le f(b)$ dacă f este monoton crescătoare sau $f(b)\le f(x)\le f(a)$ dacă f este monoton descrescătoare.

Pentru a arăta că o funcţie $f:D\to R$ este nemărginită pe D către ∞, este suficient să se arate că oricare ar fi $M\rangle 0$ există un $x\in D$ astfel încât $f(x)\rangle M$.

Definiţie: O funcţie $f:R\to R$ se numeşte **periodică** dacă există $T\rangle 0$, astfel încât $f(x+T)=f(x),(\forall)x\in R$. Numărul **T** se numeşte **perioada funcţiei**, iar dacă **T** este cel mai mic număr cu această proprietate atunci T se numeşte perioada principală a funcţiei.

Funcţii convexe. Funcţii concave.
Definiţie : O funcţie $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ se numeşte convexă pe [a ;b] dacă $\forall x_1,x_2\in[a;b]$ şi $\forall t\in[0;1]$ rezultă $f\left((1-t)x_1+tx_2\right)\le(1-t)f(x_1)+tf(x_2)$. Dacă $f\left((1-t)x_1+tx_2\right)\ge(1-t)f(x_1)+tf(x_2)$ atunci f se numeşte concavă.

Funcţii injective. Funcţii surjective. Funcţii bijective. Funcţii inversabile

Definiţie: O funcţie $f:A\to B$ se numeşte injectivă dacă la orice două elemente diferite din domeniul de definiţie corespund valori diferite în codomeniu, altfel spus, f este injectivă dacă $(\forall)x_1,x_2\in A,x_1\neq x_2\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$
Definiţia poate fi exprimată şi în modul următor:
O funcţie $f:A\to B$ se numeşte injectivă dacă ecuaţia f(x) = y are cel mult o soluţie în A.
În aplicaţii se foloseşte în general următoarea relaţie:
$f:A\to B$ este injectivă $\Leftrightarrow(\forall)x_1,x_2\in A,f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$.

Grafic putem spune că o funcţie $f:A\to B$ este injectivă dacă orice paralelă la axa 0X dusă printr-un punct al codomeniului, intersectează graficul funcţiei în cel mult un punct.

Teoremă O funcţie $f:A\to B,\ A,B\subseteq R$ este injectivă dacă următoarele afirmaţii sunt echivalente:

1) $(\forall)x_1,x_2\in A, x_1\neq x_2\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$;

2) $(\forall)x_1,x_2\in A, f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$;

3) $(\forall)y\in B,$ ecuaţia $f(x)=y$ are cel mult o soluţie $x\in A$;

4) Orice paralelă la axa OX dusă printr-un punct al codomeniului, intersectează graficul funcţiei în cel mult un punct.

Teoremă Fie $f:A\to B,\ A,B\subseteq R$ o funcţie strict monotonă. Atunci f este injectivă. Reciproca teoremei nu este valabilă.

Definiţie: O funcţie $f:A\to B$ se numeşte surjectivă dacă pentru orice element y din codomeniu există un element x din domeniul de definiţie astfel încât f(x) = y, altfel spus, f este surjectivă dacă ecuaţia $f(x)=y$ are cel puţin o soluţie în A.

$f:A\to B$ este surjectivă $\Leftrightarrow(\forall)y\in B,\ (\exists)x\in A$ astfel încât f(x) = y .

Grafic putem spune că o funcţie $f:A\to B$ este surjectivă dacă orice paralelă la axa 0x dusă printr-un punct al codomeniului, intersectează graficul funcţiei în cel puţin un punct.

Teoremă O funcţie $f:A\to B,\ A,B\subseteq R$ este surjectivă, dacă şi numai dacă imaginea funcţiei,

Im f =B.

Teoremă O funcţie $f:A\to B,\ A,B\subseteq R$ este surjectivă dacă următoarele afirmaţii sunt echivalente:

1) $(\forall)y\in B,\ (\exists)x\in A,$ astfel încât $f(x)=y$;

2) $(\forall)y\in B,$ ecuaţia $f(x)=y$ are cel puţin o soluţie $x\in A$;

3) $\text{Im}\, f=f(A)=B$;

4) Orice paralelă la axa OX dusă printr-un punct al codomeniului, intersectează graficul funcţiei în cel puţin un punct.

Definiţie: O funcţie $f:A\to B$ se numeşte bijectivă dacă este în acelaşi timp şi injectivă şi surjectivă.

Teoremă O funcţie $f:A\to B,\ A,B\subseteq R$ este bijectivă dacă următoarele afirmaţii sunt echivalente:

1) f este injectivă şi surjectivă ;

2) $(\forall)y\in B,$ ecuaţia $f(x)=y$ are o unică soluţie $x\in A$;

3) Orice paralelă la axa OX dusă printr-un punct al codomeniului, intersectează graficul funcţiei
într-un singur punct.

Definiţie : O funcţie $f:A\to B$ se numeşte inversabilă dacă există o funcţie $f^{-1}:B\to A$ astfel încât $f^{-1}\circ f=1_A$ şi $f\circ f^{-1}=1_B$. f^{-1} se numeşte inversa funcţiei f.

Teoremă O funcţie $f:A\to B$ se numeşte inversabilă dacă şi numai dacă este bijectivă.

19. Funcţii iraţionale.

Funcţia radical de ordinul 2

$f:[0;\infty)\to\mathbb{R}_+,\ \ f(x)=\sqrt{x},\ x\geq 0$.

Proprietăţi :

1. f este pozitivă, $\forall x\in[0;\infty)$;
2. f este concavă pe $[0;\infty)$;
3. f este strict crescătoare pe $[0;\infty)$;
4. funcţia sa inversă este funcţia putere f(x)= x^2 ;

Funcţia radical de ordinul 3

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ \ f(x)=\sqrt[3]{x}$.

Proprietăţi :

1. f este pozitivă pe $[0;\infty)$ şi este negativă pe $(-\infty;0]$;
2. f este convexă pe $(-\infty;0]$ şi concavă pe $[0;\infty)$;
3. f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$;
4. f este funcţie impară pe $\mathbb{R}$;
5. funcţia sa inversă este funcţia putere f(x)= x^3 ;

20. Tipuri de ecuaţii iraţionale:

Ecuaţii de forma $\sqrt{f(x)}=g(x)$;

Condiţii de existenţă : $f(x)\geq 0,\ g(x)\geq 0$;

Mod de rezolvare. Se ridică la puterea a doua ecuaţia : $\sqrt{f(x)}=g(x)\big|()^2\Rightarrow f(x)=g(x)^2$;

Ecuaţii de forma $\sqrt[3]{f(x)}=g(x)$;

Condiţii de existenţă : $f(x)\in\mathbb{R},\ g(x)\in\mathbb{R}$;

Mod de rezolvare. Se ridică la puterea a treia ecuaţia : $\sqrt[3]{f(x)}=g(x)\big|()^3\Rightarrow f(x)=g(x)^3$;

21. Funcţii exponenţiale.

Definiţie. Se numeşte funcţie exponenţială de bază a şi exponent x, o funcţie de forma

$f:\mathbb{R}\to(0;\infty),\ f(x)=a^x, a\rangle 0, a\neq 1$

Proprietăţi:

1. $f(x)=a^x\rangle 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$;
2. Dacă a $\rangle 1\Rightarrow$ f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$

   $x_1\langle x_2\Rightarrow a^{x_1}\langle a^{x_2}$

Dacă a $\in(0,1)\Rightarrow$ f este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$ $\quad x_1\langle x_2\Rightarrow a^{x_1}\rangle a^{x_2}$

3. f este convexă pe $\mathbb{R}$;
4. f este bijectivă pe $\mathbb{R}$;
5. f este inversabilă, inversa sa fiind funcţia logaritmică ;

Pentru $a\langle 0$ nu se defineşte funcţia $f(x)=a^x$

Proprietăţi ale puterilor cu exponent real:

Fie a,b $\in(0,\infty), a,b\neq 1, x,y\in\mathbb{R}\Rightarrow$

$1)a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ $2)(a \cdot b)^x = a^x \cdot a^y$ $3)(a^x)^y = a^{x \cdot y}$ $4)\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}, a \neq 0$

$5)\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}, b \neq 0$ $6)a^0 = 1$ $7)a^{-x} = \frac{1}{a^x}, a \neq 0$

Poziţia lui $f(x)= a^x$ în raport cu 1

	$a\rangle 1$	$a \in (0;1)$
$x\rangle 0$	$f(x)\rangle 1$	$f(x) \in (0;1)$
$x\langle 0$	$f(x) \in (0;1)$	$f(x)\rangle 1$

Dacă x = 0 atunci, f(x)=0

22. Ecuaţii exponenţiale

Definiţie : Se numeşte ecuaţie exponenţială o ecuaţie în care necunoscuta x apare la exponenţi.

Tipuri de ecuaţii:

1. $a^{f(x)} = b, a\rangle 0, a \neq 1, b\rangle 0 \Rightarrow f(x) = \log_a b$; Exemplu: $3^x = 81 \Rightarrow x = \log_3 81 = \log_3 3^4 = 4$;
2. $a^{f(x)} = a^{g(x)}, a\rangle 0 \Rightarrow f(x) = g(x)$; Exemplu: $5^x = 125 \Leftrightarrow 5^x = 5^3 \Rightarrow x = 3$;
3. $a^{f(x)} = b^{g(x)}, a, b\rangle 0 \Rightarrow f(x) = g(x) \cdot \log_a b$; Se logaritmează ecuaţia într-o bază convenabilă;
4. Ecuaţii exponenţiale reductibile la ecuaţii algebrice printr-o substituţie;
5. Ecuaţii ce se rezolvă utilizând monotonia funcţiei exponenţiale.

23. Inecuaţii exponenţiale

$a\rangle 1 \ : \ a^{f(x)} \leq a^{g(x)} \Rightarrow f(x) \leq g(x)$
$a \in (0;1) \ : \ a^{f(x)} \leq a^{g(x)} \Rightarrow f(x) \geq g(x)$

24. Funcţii logaritmice.

Definiţie. Se numeşte funcţie logaritmică în baza a, o funcţie de forma $f : (0;\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x, a\rangle 0, a \neq 1$, x>0.

Proprietăţi:

1. Dacă $a\rangle 1 \Rightarrow$ f este strict crescătoare

   $x_1\langle x_2 \Rightarrow \log_a x_1 \langle \log_a x_2$

   Dacă $a \in (0,1) \Rightarrow$ f este strict descrescătoare

   $x_1\langle x_2 \Rightarrow \log_a x_1 \rangle \log_a x_2$;
2. f este concavă pentru $a\rangle 1$şi convexă pentru $a \in (0;1)$;
3. f este bijectivă pe $\mathbb{R}$;
4. f este inversabilă, inversa sa fiind funcţia exponenţială ;

Poziţia lui $f(x)=\log_a x$ în raport cu 0

	$a\rangle 1$	$a\in(0;1)$
$x\rangle 1$	$f(x)\rangle 0$	$f(x)\langle 0$
$x\in(0;1)$	$f(x)\langle 0$	$f(x)\rangle 0$

25. Ecuaţii logaritmice

Definiţie : Se numeşte ecuaţie logaritmică o ecuaţie în care necunoscuta x apare ca argument sau ca bază la logaritmi.

Tipuri de ecuaţii:

1. $\log_{f(x)} g(x)=b, f,g\rangle 0, f\neq 1\Rightarrow g(x)=f(x)^b$
2. $\log_a f(x)=\log_a g(x)\Rightarrow f(x)=g(x)$;
3. $\log_a f(x)=\log_b g(x)\Rightarrow f(x)=a^{\log_b g(x)}$;
4. Ecuaţii logaritmice reductibile la ecuaţii algebrice printr-o substituţie;
5. Ecuaţii ce se rezolvă utilizând monotonia funcţiei logaritmice;

26. Inecuaţii logaritmice

$\boxed{a\rangle 1\ ,\log_a f(x)\le\log_a g(x)\Rightarrow f(x)\le g(x)}$;

$\boxed{a\in(0,1),\log_a f(x)\le\log_a g(x)\Rightarrow f(x)\ge g(x)}$.

27. Permutări, Aranjamente, Combinări

Definiţie: Se numeşte **mulţime ordonată**, o mulţime ale cărei elemente au o ordine bine determinată de dispunere a lor, ceea ce
înseamnă că dacă **A** este o mulţime finită cu n elemente, atunci, A se numeşte ordonată dacă fiecărui element al său i se asociază un număr de la **1** la **n**, numit rangul elementului, astfel încât la elemente diferite corespund numere diferite.

Definiţie : Fie **A** o mulţime finită cu **n** elemente. Se numesc **permutări de n elemente** ale lui **A** şi se notează cu $\mathbf{P_n}$, numărul tuturor mulţimilor ordonate formate cu cele **n** elemente ale mulţimii **A.**

Teoremă. $P_n=n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot.....(n-1)\cdot n\ ,\forall n\ge 1,\ n\in\mathbb{N}.$. Convenţie: $0!=1$;

Formula de recurenţă pentru factoriale: $\forall n\ge 1,\ n\in\mathbb{N}\Rightarrow n!=n\cdot(n-1)!$.

Definiţie: Fie **A** o mulţime finită cu **n** elemente şi **k** un număr natural astfel încât $n\ge k\ge 0$. Se numesc **aranjamente de n elemente luate câte k** şi se notează A_n^k , numărul tuturor submulţimilor ordonate ale lui **A**, având fiecare câte **k** elemente.

Teoremă $A_n^k=n(n-1)(n-2).....(n-k+1)$ sau $A_n^k=\dfrac{n!}{(n-k)!},\ \forall n\ge k\ge 0.$

Observaţie: $A_n^k\in\mathbb{N}^*$.

Formula de recurenţă pentru aranjamente: $\forall n\ge k\ge 1,\ n,k\in\mathbb{N}\Rightarrow A_n^k=(n-k+1)A_n^{k-1}$.

Definiţie: Două aranjamente de n elemente luate câte k obiecte se deosebesc prin natura elementelor sau prin ordinea lor.

Definiţie: Fie **A** o mulţime finită cu **n** elemente şi k un număr natural astfel încât $n \geq k \geq 0$. Se numesc **combinări de n elemente luate câte k** şi se notează C_n^k , numărul tuturor submulţimilor de câte **k** elemente luate din mulţimea **A**.

Observaţii:

1. Numărul tuturor submulţimilor unei mulţimi cu n elemente este egal cu 2^n.
2. Două combinări de n elemente luate câte k se deosebesc prin natura elementelor nu şi prin ordinea lor.

Teoremă. Fie $k, n \in \mathbb{N},\ 0 \leq k \leq n.$

Atunci, $C_n^{\ k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$;

Observaţii: $C_n^k \in \mathbb{N}^*$. $C_n^p = C_n^q \Leftrightarrow p = q \ sau \ n - p = q$.

Formula combinărilor complementare: $C_n^{\ k} = C_n^{\ n-k}, 0 \leq k \leq n$.

Cazuri particulare: $C_n^0 = C_n^n = 1;\quad C_n^1 = C_n^{n-1} = n;\quad C_n^2 = C_n^{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}$; etc.

Formula de descompunere a combinărilor: $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1},\ \forall k, n \in \mathbb{N},\ n \rangle k \geq 1.$

Teoremă: Pentru orice număr natural n şi a şi b numere reale există relaţia: $(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^0 a^{n-1} b + ... + C_n^0 a b^{n-1} + C_n^0 b^n$

Pentru a=b=1 se obţine

$$\boxed{C_n^{\ 0} + C_n^{\ 1} + C_n^{\ 2} + ... + C_n^{\ n} = (1+1)^n}$$

ceea ce înseamnă că **numărul tuturor submulţimilor unei mulţimi cu n elemente este 2^n.**

Coeficienţii binomiali din dezvoltare, egal depărtaţi de termenii extremi ai dezvoltării sunt egali între ei.

$$\boxed{C_n^{\ k} = C_n^{\ n-k}}$$

Termenul de rang k+1 al dezvoltării (sau termenul general al dezvoltării) este

$$\boxed{T_{k+1} = C_n^{\ k} a^{n-k} \cdot b^k, \quad k = 0,1,2,....,n}$$

$\Rightarrow$ Formula binomului lui Newton scrisă restrâns are forma:

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^{\ k} a^{n-k} b^k}.$$

Relaţia de recurenţă între termenii succesivi ai dezvoltării este următoarea:

$$\boxed{\frac{T_{k+2}}{T_{k+1}} = \frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{b}{a}}$$

28. Matematici financiare.

Definiţie: Se numeşte **raport procentual** un raport de forma $\frac{p}{100}$, $p \geq 0$ unde numărul p se numeşte procent şi îl scriem de forma $p\%$;

A afla $p\%$ dintr-un număr N înseamnă a calcula $\frac{p}{100} \cdot N$;

Determinarea unui număr când se cunoaşte un procent din el

Pentru a afla un număr x pentru care ştim cât reprezintă un procent din el procedăm astfel: $\frac{p}{100} \cdot x = N$ unde p şi N sunt cunoscuţi. Rezultă $x = \frac{N \cdot 100}{p}$;

Pentru determinarea unui procent când se cunoaşte cât reprezintă un număr din altul se aplică aceeaşi formulă din care se scoate necunoscuta p.

$\frac{p}{100} \cdot x = N \Rightarrow p = \frac{N \cdot 100}{x}$**;**

Dobânzi simple. Dobânzi compuse

Definiţie: Se numeşte dobândă simplă pentru o sumă depusă pentru o anumită perioadă numărul

$D = \frac{S \cdot p \cdot n}{100}$ unde S este suma depusă, n este numărul de ani pe care s-a depus suma, iar p este procentul dobânzii sau rata dobânzii anuale.

Pentru depunerea unei sume S pentru un număr m de luni formula este :

$D = \frac{S \cdot p \cdot m}{100 \cdot 12}$;

Determinarea valorii unui capital depus cu dobândă compusă(prin recapitalizare) pentru o perioadă de n ani

Definiţie: Fie C_0 valoarea unui capital iniţial depus într-o bancă cu dobânda compusă de d % (prin recapitalizare). Valoarea capitalului final obţinut după o perioadă de n ani este $C_n = C_o(1+d)^n$;

Dobânda compusă obţinută după cei n ani este egală cu $C_n - C_0$;

Probabilitatea unui eveniment $P = \frac{Numarul\ cazurilor\ favorabile\ realizarii\ evenimentului}{Numarul\ cazurilor\ egal\ posibile\ realizarii\ evenimentului}$

Definiţie: Fie E un domeniu de probabilităţi pe care este definită o probabilitate p. Fie A şi B două evenimente, $p(A) \neq 0$. Se numeşte

probabilitatea lui B condiţionată de A, numărul $p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$.

Definiţie: Două **evenimente** A şi B se numesc **independente** dacă $P(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$.

29. Ecuaţiile dreptei în plan

1. Ecuaţia carteziană generală a dreptei:

ax+by+c=0 (d)

Punctul $\boxed{M(x_0;y_0)\in d \Leftrightarrow a\cdot x_0+b\cdot y_0+c=0}$

2. Ecuaţia dreptei determinată de punctele $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$:

$$\boxed{\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}}$$

3. Ecuaţia dreptei determinată de un punct $M(x_0,y_0)$ şi o direcţie dată(are panta m)

$$\boxed{y-y_0=m(x-x_0)}$$

4. Ecuaţia explicită a dreptei (ecuaţia normală):

$\boxed{y=mx+n,\ unde\ m=tg\phi=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}$ m este panta dreptei şi n este ordonata la origine.

5. Ecuaţia dreptei prin tăieturi: $\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,\ \ a,b\neq 0.}$

6. Fie (d): y=mx+n şi (d'): y=m'x+n'

Dreptele d şi d' sunt paralele $\Leftrightarrow$ m=m'şi n$\neq$n'.

Dreptele d şi d' coincid $\Leftrightarrow$ m=m'şi n=n'.

Dreptele d şi d' sunt perpendiculare $\Leftrightarrow$ mm'= -1.

Tangenta unghiului φ a celor două drepte este $\boxed{tg\varphi=\left|\frac{m-m'}{1+m\cdot m'}\right|}$

7. Fie d: ax+by+c=0 şi d': a'x+b'y+c'=0 cu a',b',c'$\neq 0$. şi $\theta=m(\langle d,d')$

Dreptele d şi d' sunt paralele $\Leftrightarrow \boxed{\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}}$

Dreptele d şi d' coincid $\Leftrightarrow \boxed{\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}}$

Dreptele d şi d' sunt concurente $\Leftrightarrow \frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}\Leftrightarrow$ ab'-ba'$\neq 0$.

$\boxed{\cos\theta=\frac{\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{v'}}{\left|\overrightarrow{v}\right|\cdot\left|\overrightarrow{v'}\right|}=\frac{a\cdot a'+b\cdot b'}{\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{a'^2+b'^2}}}$ unde $\overrightarrow{v}(-b,a),\overrightarrow{v'}(-b',a')$ sunt vectorii directori ai dreptelor d şi d'.

Dreptele d şi d' sunt perpendiculare, $\boxed{d\perp d'\Leftrightarrow a\cdot a'+b\cdot b'=0}$

8. Fie punctele $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$, $D(x_4,y_4)$ în plan.

Dreptele AB şi CD sunt paralele, $\boxed{AB \parallel CD \Leftrightarrow (\exists)\alpha \in R^*, a.î\ \overrightarrow{AB} = \alpha \cdot \overrightarrow{CD}}$ sau $m_{AB}=m_{CD.}$

Dreptele AB şi CD sunt perpendiculare, $\boxed{AB \perp CD \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0}$

Condiţia ca punctele $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$ să fie coliniare este:

$$\boxed{\frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1}}$$

9. Distanţa dintre punctele $A(x_1,y_1)$ şi $B(x_2,y_2)$ este

$$\boxed{AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

10.Distanţa de la un punct $M(x_0,y_0)$ la o dreaptă h de ecuaţie (h): ax+by+c=0 este dată de:

$$\boxed{d(M\ ,h) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}.$$

FORMULE –VERIFICARE

1. $a^0 =$ 2. $a^m \cdot a^n =$ 3. $a^m : a^n =$

4. $(a^m)^n =$ 5. $(a \cdot b)^n =$ 6. $\left(\frac{a}{b}\right)^n =$

7. $a^{-n} =$ 8. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} =$ 9. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} =$

10. $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} =$ 11. $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} =$ 12. $k \cdot \frac{a}{b} =$

13. $\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} =$ 14. $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} =$ 15. $\sqrt{x^2} =$

16. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow$ 17. $(a+b)^2 =$

18. $(a+b+c)^2 =$ 19. $(a-b)^2 =$

20. $(a-b)(a+b) =$ 21. $(a-b)^3 =$

22. $(a+b)^3 =$ 23. $a^3 - b^3 = ...$

24. $a^3 + b^3 = ...$

25. $a \cdot x = b,\ a \neq 0 \Rightarrow x =$

26. $x^2 = a,\ a \geq 0 \Rightarrow x =$

27. $|x| = a,\ a \geq 0 \Rightarrow x =$

28. $x^2 \leq a,\ a \geq 0 \Rightarrow x \in$

29. $x^2 \geq a,\ a \geq 0 \Rightarrow x \in$

30. Raționalizarea fracției $\frac{1}{a\sqrt{b}} =$

31. Raționalizarea fracției $\frac{1}{a\sqrt{b} - c\sqrt{d}} =$

32. a_{n-1}, a_n, a_{n+1} sunt termenii unei progresii aritmetice dacă ….

33. Rația unei progresii aritmetice este egală cu $r = ...$

34. Expresia termenului general a unei progresii aritmetice este $a_n =$

35. Suma primilor n termeni ai unei progresii aritmetice este egală cu

36. Expresia termenului general a unei progresii geometrice este $b_n =$

37. Rația unei progresii geometrice este egală cu $q = ...$

38. b_{n-1}, b_n, b_{n+1} sunt termenii unei progresii geometrice dacă

39. Suma primilor n termeni ai unei progresii geometrice este egală cu

40. Dacă $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ atunci componentele vectorului $\overrightarrow{AB}$ sunt $\overrightarrow{AB}(.....;.....)$

41.Lungimea vectorului $\overrightarrow{AB}$ unde A şi B sunt cele de mai sus, este $|\overrightarrow{AB}| =$

42. Vectorii $\vec{v}_1(x_1, y_1)$ şi $\vec{v}_2(x_2, y_2)$ sunt egali dacă si numai dacă …

43. Vectorii $\vec{v}_1(x_1, y_1)$ şi $\vec{v}_2(x_2, y_2)$ sunt coliniari dacă si numai dacă ..

44.Vectorii $\vec{v}_1(x_1, y_1)$ şi $\vec{v}_2(x_2, y_2)$ sunt ortogonali dacă si numai dacă45.Ecuația dreptei care trece prin două puncte $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$;

46.Ecuația dreptei care trece printr-un punct $A(x_0, y_0)$ și are panta m;

47. $f(x) = ax + b$ este crescătoare $\Leftrightarrow$ ....

48. $f(x) = ax + b$ este descrescătoare $\Leftrightarrow$ ....

49. $f(x) = ax + b$ este constantă $\Leftrightarrow$ ....

50. Punctul de intersecție al funcției cu axa OX este ..... A(.....,.....)

51. Punctul de intersecție al funcției cu axa Oy este ..... B(....., ...)

52.. Minimul funcției de gradul al doilea este …

53. Maximul funcției de gradul doi este ….

54. $f(x) = ax^2 + bx + c \geq 0 \Leftrightarrow$ ....

55. $f(x) = ax^2 + bx + c \leq 0 \Leftrightarrow$ ....

56. Dacă $z_1 = a + ib,\ z_2 = c + id \Rightarrow z_1 = z_2 \Leftrightarrow$ ....

57. Dacă $z_1 = a + ib,\ z_2 = c + id \Rightarrow z_1 \cdot z_2 =$ ....

58. Dacă $z_1 = a + ib,\ z_2 = c + id \Rightarrow z_1 : z_2 =$ ....

59. Modulul numărului complex $z_1 = a + ib,$ este …

60. $C_n^k =$ ....

61. $A_n^k =$ ....

62. permutări de n elemente , $P_n = n! =$ .....

63. $\log_a 1 =$ ...

64. $\log_a a =$ ...

65. $\log_a x + \log_a y =$ ...

66. $\log_a x - \log_a y =$ ...

67. $\lg 1 =$ ...

68. $\ln e =$ ...

69. $\sin 30^0 =$ ....., $\sin 45^0 =$ ....., $\sin 60^0 =$ .....

70. $\cos 30^0 =$ ....., $\cos 45^0 =$ ....., $\cos 60^0 =$ .....

71. $tg30^0 =$ ....., $tg45^0 =$ ....., $tg60^0 =$ .....

72. $\sin 2a =$ ...

73. $\sin 0^0 =$ ....., $\cos 0^0 =$ ....., $\sin 90^0 =$ ..... $\cos 90^0 =$ .....

74. $\sin(a + b) =$ ...

75. $\cos(a - b) =$ ....

76 $\cos(\pi - a) =$ ....

77. $\sin(\frac{\pi}{2} - a) =$ ....

78. $\cos 2a =$ ...

79. $\sin(a - b) =$ ...

80. $\cos(a+b)=....$

81. formula fundamentală a trigonometriei

82. Teorema sinusurilor

83. Teorema cosinusului

84. $\sin(\pi-a)=....$

85. $\cos(\frac{\pi}{2}-a)=....$

86. Aria unui triunghi oarecare

87. Aria unui triunghi echilateral de latura a este ..

88. $\sqrt[n]{x^m}=.....$

89. $x^{\frac{m}{n}}=.....$

90. $a^x=N\Rightarrow x=...$

91. $\log_a x=b\Rightarrow x=....$

92. $\log_a x=\log_a y\Rightarrow....$

93. $a^x=a^y\Rightarrow....$

INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI

Cap. 1. Numere reale

1.1 Numere reale. Recapitulare

1. a) -22; b) -43; c) -23; d) $\frac{5}{2}$; e) -24; f) 1; g) 25; h) 6;

2. 13; **3**. 6062; 4. a) $-\frac{1}{18}$; b) $\frac{5}{4}$; c) $-\frac{1}{2}$; d) $\frac{1}{64}$; e) 0; f) $\frac{2}{3}$; g) $\frac{4}{9}$;

5. 0; **6.** 0; **7.** a) $\frac{3\sqrt{2}-4}{2}$; b) 2; **8**. a) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}\cdot(2-\sqrt{2})}{2}$; b) $\frac{\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)\cdot(2+\sqrt{2})}{2}$;

c) $\frac{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)\cdot\sqrt{6}}{-12}$; **9.** a) -13; b) 72; c) $-6\sqrt{10}$; d) 4; e) $40\sqrt{5}$; f) 324; g) $-16\sqrt{3}$; h) $-4\sqrt{2}$; i) $-13\sqrt{7}$; j) $-7\sqrt{3}$; k) $-7\sqrt{5}$;

10. $34\sqrt{3}-28$; **11**. a) $12-\sqrt{3}$; b) $5-\sqrt{3}$ c) $\frac{-4\sqrt{5}+13\sqrt{2}}{2}$;

12. 1; **13**. a) $29-12\sqrt{5}$; b) $31-12\sqrt{3}$; c) $\frac{4+3\sqrt{2}}{2}$; d) $\frac{3\sqrt{2}}{8}$; e) $3+\sqrt{5}$;

f) $\left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{3^2-5}}{2}}-\sqrt{\frac{3-\sqrt{3^2-5}}{2}}\right)=\sqrt{\frac{5}{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}$; g) $25+22\sqrt{2}$; h) $15\sqrt{3}-26$; i) $279\sqrt{2}+395$;

14. a) -8; b) $-2x^2-3x$; c) $-11x^2$; d) $3x^2+6x$; e) $8x^5$; f) $-12x^2$; g) $-36x^3+27x^2-45x$;
h) $-15x^3+12x^2$; i) $9x$; j) $9x^2$; k) $37x^6$; l) $-6x^5$; m) $-36x^2+24\sqrt{2}x^3$; n) $12x^4-19x^3+5x^2$
o) $3x^3-15x^2+20x-6$; p) $8x^3-4x^2-12$;
15. a) $x^2+10x+25$; b) x^2+4x+4; c) $9x^2+12x+4$; d) x^2-4x+4; e) $9x^2-12x+4$;
f) $25x^2-30x+9$; g) x^2-3; h) $4x^2-25$; i) $9x^2-4$; j) $13x^2-8x+32$; k)
$x^4+2x^3+5x^2+4x+4$; l) x^3+3x^2+3x+1; m) $x^3+6x^2+12x+8$; n) $x^3-6x^2+12x-8$; o)
$8x^3+36x^2+54x+27$; p) $27x^3-27x^2+9x-1$; **16**. 50; **17**. a=2; b= - 2; **18**. $a=-\sqrt{3}$; **19**. a= - 3;
b= 2; **20.** a) $-4x^2+18x-8$; b) 2; **21**. m= - 3; 22. a) 5; b) 5; c) -5; d) 7; e) 3; f) $\frac{21}{17}$; g) $\frac{19}{2}$;
h) 5; i) $\varnothing$; **23**. a) $\varnothing$; b) ± 9; c) $\pm 2\sqrt{3}$; d) 8; e) 5; 15; f) -8; 7; g) -2; 4; h) -8; 3;
24. a) ± 8; b) ± 12; c) $\varnothing$; d) 2; e) -9; 3; f) -1; 1; g) -7; -5; h) -5; 4; i) (-3; 8); j) (2; 2),
(-2; 2); k) (2; -3); l) $\left(\frac{1}{2};5\right)$; m) 4; n) (-5; 2); o) -3;

25. a) $S=\left\{-\frac{6}{7},4\right\}$; b) $S=\left\{\frac{2}{3},10\right\}$; c) $S=\{-5;1;5\}$; d) $S=\left\{-5;\frac{1}{3}\right\}$; e) $S=\left\{\frac{1}{2},\frac{9}{4}\right\}$; f) $S=\{-3;-1;1\}$; g) $S=\left\{\frac{7}{5};3\right\}$; h) $S=\left\{\frac{5}{4},\frac{11}{4}\right\}$;

26. a) $S=\{-5;5\}$; b) $S=\{-5;5\}$; c) $S=\left\{-\frac{17}{7}\right\}$; d) 1; e) -7; f) $S=\left\{-\frac{3}{5}\right\}$;

27. a) $x\in[1;\infty)$; b) $x\in(-\infty;7]$; c) $x\in(-3,\infty)$; d) $x\in[1;\infty)$; e) $x\in[3;\infty)$; f) $x\in(-\infty;-7]$; g) $x\in(-\infty;-26)$; h) $x\in\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right]$; i) $x\in\left[\frac{1}{2};\infty\right)$; j) $x\in\left[\frac{20}{11};\infty\right)$; k) $x\in[-4;4]$; l) $x\in[-5;5]$; m) $x\in[-6;6]$; n) $x\in[-1;13]$; o) $x\in(-\infty;-1]\cup[13;\infty)$; p) $x\in(-\infty;-3]\cup[3;\infty)$; q) $x\in(-\infty;-5]\cup[1;\infty)$; r) $x\in(-\infty;0]\cup[6;\infty)$; s) $x\in[0;10]$; t) $x\in(-\infty;-9)\cup(0;\infty)$; u) $x\in(-\infty;1]\cup[8;\infty)$; v) $x\in(-2;6)$; x) $x\in(-3;\infty)$; y) $x\in(-\infty;-4]\cup[2;\infty)$.

28. a) $x\in[-5;5]$; b) $x\in[-8;8]$; c) $x\in[-13;5]$; d) $x\in\left[-\frac{5}{2};\frac{11}{2}\right]$; e) $x\in\left(-\frac{4}{3};\frac{16}{3}\right)$; f) $x\in[1;5]$; g) $x\in[0;6]$; h) $x\in[-5;25]$; j) $x\in(-\infty;-2]\cup[2;\infty)$; k) $x\in(-\infty;-5]\cup[5;\infty)$; l) $x\in(-\infty;-7)\cup(7;\infty)$; m) $x\in(-\infty;6]\cup[12;\infty)$; n) $x\in(-\infty;-9]\cup[1;\infty)$; **29.** 2021; **30**. 0; **31**. 0; **32**. 0**; 33**. 55; **34**. 63; **35**. a) $\frac{25}{2}-\sqrt{3}$; b) $3^{21}+104$; **36.** $\frac{3^{11}+97}{2}$; **37.** $2^{12}+9$; **38**. $4^{11}+21$; **39.** $f(-1)=8\Rightarrow 8=8$, Adevărat; **40**. $f(m+1)=0\Rightarrow m\in\{-3;1\}$; **41**. $f(-2)=2\Rightarrow a=3\Rightarrow f(3)=22$; **42.** m= - 4; **43**. x= 3; **44**. $x\in\left[-\frac{1}{3},\infty\right)$; **45**. $x\in\left[\frac{2}{3};1\right]$; **46.** $x\in\left[\frac{10}{3},\infty\right)$; **47**. m=1; **48**. m=1; **49.** m=4;

1.2 Radicalul de ordinul trei

1). a) $\sqrt[3]{27\cdot 8}=\sqrt[3]{3^3\cdot 2^3}=6$**;** **b)** $\sqrt[3]{2^9\cdot 5^{-3}}=\sqrt[3]{\left(2^3\right)^3\cdot 5^{-3}}=8\cdot 5^{-1}=\frac{8}{5}$**;**

c) $\sqrt[3]{64^2\cdot 27^{-6}}=\sqrt[3]{\left(2^4\right)^3\cdot\left(3^3\right)^{-6}}=2^4\cdot 3^{-6}=\frac{16}{729}$ **; d)** $\sqrt[3]{\frac{-125}{27}}=\sqrt[3]{\left(-\frac{5}{3}\right)^3}=-\frac{5}{3}$**; e)** $\left(\sqrt[3]{2}\right)^9=2^3=8$**;**

f) $\sqrt[3]{25\sqrt{25}}=\sqrt[3]{5^3}=5$**;** **g)** $\sqrt[3]{13^2\cdot\sqrt{169}}=\sqrt[3]{13^3}=13$**;** **h)** $\sqrt[3]{(-2)^7}\cdot\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{(-2)^9}=-2^3$**;**

i) $\sqrt[3]{81}-5\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{24}=\sqrt[3]{3^3\cdot 3}-5\sqrt[3]{3}-2\sqrt[3]{3}=(3-5-2)\sqrt[3]{3}=-4\sqrt[3]{3}$**;**

j) $\sqrt[3]{2\sqrt{3}-2}\cdot\sqrt[3]{2\sqrt{3}+2}=\sqrt[3]{12-4}=\sqrt[3]{8}=2$**;** **k)** $2\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{2}=4\sqrt[3]{2}-3\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{2}=0$**;**

l) $\left(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1\right)\left(1-\sqrt[3]{3}\right)=1-\sqrt[3]{3}^3=1-3=-2;$ **m)** $(\sqrt[3]{2}+1)(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)=\left(\sqrt[3]{2}\right)^3-1=2-1=1$**;**

2). a) $\left(4\cdot\sqrt[3]{32}\right):\left(2\cdot\sqrt[3]{-8}\right)=-2\sqrt[3]{4}$; **b)** $\sqrt[3]{\frac{4}{9}}:\sqrt[3]{\frac{81}{2}}=\sqrt[3]{\frac{4}{9}}\cdot\sqrt[3]{\frac{2}{81}}=\sqrt[3]{\frac{8}{729}}=\frac{2}{9}$;

c) $\sqrt[3]{81}-\sqrt[3]{24}-\sqrt[3]{375}=\sqrt[3]{3^3\cdot 3}-\sqrt[3]{2^3\cdot 3}-\sqrt[3]{5^3\cdot 3}=3\sqrt[3]{3}-2\sqrt[3]{3}-5\sqrt[3]{3}=-4\sqrt[3]{3}$.

d) $\sqrt[3]{24}-\sqrt[3]{192}+\sqrt[3]{-81}=\sqrt[3]{2^3\cdot 3}-\sqrt[3]{2^6\cdot 3}+\sqrt[3]{-3^3\cdot 3}=2\sqrt[3]{3}-4\sqrt[3]{3}-3\sqrt[3]{3}=-5\sqrt[3]{3}$

e) $\left(\sqrt[3]{2}+3\right)^3=\left(\sqrt[3]{2}\right)^3+3\cdot\left(\sqrt[3]{2}\right)^2\cdot 3+3\cdot\left(\sqrt[3]{2}\right)\cdot 3^2+3^3=2+9\sqrt[3]{4}+27\sqrt[3]{2}+27==29+9\sqrt[3]{4}+27\sqrt[3]{2}$.

f) $\left(\sqrt[3]{3}+2\right)^3=\left(\sqrt[3]{3}\right)^3+3\cdot\left(\sqrt[3]{3}\right)^2\cdot 2+3\cdot\left(\sqrt[3]{3}\right)\cdot 2^2+2^3=3+6\sqrt[3]{9}+12\sqrt[3]{3}+8==11+6\sqrt[3]{9}+12\sqrt[3]{3}$;

g) 5) $\sqrt[3]{2\sqrt{6}-4}\cdot\sqrt[3]{2\sqrt{6}+4}=\sqrt[3]{(2\sqrt{6}-4)(2\sqrt{6}+4)}=\sqrt[3]{(2\sqrt{6})^2-4^2}=\sqrt[3]{24-16}=\sqrt[3]{8}=2$.

h) 5) $\sqrt[3]{2\sqrt{2}-3}\cdot\sqrt[3]{2\sqrt{2}+3}=\sqrt[3]{(2\sqrt{2}-3)(2\sqrt{2}+3)}=\sqrt[3]{(2\sqrt{2})^2-3^2}=\sqrt[3]{8-9}=\sqrt[3]{-1}=-1$

3. a) -57**; b) - 30; c)** $-34\sqrt[3]{3}$; d) $-7\sqrt[3]{2}$**; e)** $-4\sqrt[3]{2}$**; f)** $-2\sqrt[3]{6}-3\sqrt[3]{5}$**; g)** $\sqrt[3]{3}+2$**; h)** $-7\sqrt[3]{3}$**;**

4). $mg=\sqrt[3]{20\cdot(-48)\cdot 225}=-\sqrt[3]{2^2\cdot 5\cdot 2^4\cdot 3\cdot 15^2}=-2^2\cdot 15=-60$**; 6).** **a**) Se ridică ambele numere la puterea a treia: $32>30\Rightarrow 2\sqrt[3]{4}\ \rangle\ \sqrt[3]{30}$;

b) $128>108\Rightarrow 4\sqrt[3]{2}\ \rangle\ 3\sqrt[3]{4}$**;** **c)** $-648<-189\Rightarrow -2\sqrt[3]{81}\ \langle\ -3\sqrt[3]{7}$**;**

7. a) $\sqrt[3]{8};\left(\frac{1}{4}\right)^{-2};64$; **b)** $\sqrt{2};\sqrt[3]{3};2$; **c)** $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}};\sqrt{2}$; **d)** $8\sqrt[3]{2};2\sqrt[3]{130};6\sqrt[3]{5}$;

8. $\left(\frac{6x^3}{45y^2}\sqrt[3]{\frac{9y}{x^5}}\right):\left(\frac{2x}{5y}\sqrt[3]{\frac{x}{3y^2}}\right)=\frac{6x^3}{45y^2}:\frac{2x}{5y}\cdot\sqrt[3]{\frac{9y}{x^5}:\frac{x}{3y^2}}==\frac{6x^3}{45y^2}\cdot\frac{5y}{2x}\cdot\sqrt[3]{\frac{9y}{x^5}\cdot\frac{3y^2}{x}}=$

$=\frac{30x^3y}{90xy^2}\cdot\sqrt[3]{\frac{27y^3}{x^6}}==\frac{3x^2y}{3x^2y}=1$.

10). a) $\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}=3\left|()^3\right.\Rightarrow\ 9+4\sqrt{5}+(9-4\sqrt{5})+3\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}\cdot\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}\cdot 3=3^3$

$\Rightarrow 18+3\cdot\sqrt[3]{1}\cdot 2=3^3\Rightarrow 27=27$ Adevărat. Ceea ce înseamnă că egalitatea dată este adevărată.
S-a folosit formula $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ care se mai scrie
$(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$

b) $\underbrace{\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}}_{=a}-\underbrace{\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}}_{=b}=2\left|()^3\right.\Rightarrow\ 5\sqrt{2}+7-(5\sqrt{2}-7)-3\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}\cdot\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}\cdot 2=2^3$

$\Rightarrow 14-3\cdot\sqrt[3]{1}\cdot 2=8\Rightarrow 8=8$ Adevărat. Ceea ce înseamnă că egalitatea dată este adevărată.
S-a folosit formula $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ care se mai scrie
$(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$

11*.

Notăm $a=\sqrt[3]{4-2\sqrt{2}}$, $b=\sqrt[3]{4+2\sqrt{2}}$, atunci,

$f(a+b)=(a+b)^3-6(a+b)+8=a^3+b^3+\cancel{3ab(a+b)}-\cancel{6(a+b)}+8=16$, deoarece

$a\cdot b=\sqrt[3]{4-2\sqrt{2}}\cdot\sqrt[3]{4+2\sqrt{2}}=\sqrt[3]{8}=2$ iar $a^3+b^3=4-2\sqrt{2}+4+2\sqrt{2}=8$.

1.3 Raționalizarea numitorilor fracțiilor

2. a) $\sqrt[3]{4}$; **b)** $\frac{\sqrt[3]{2}}{12}$; c) $\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1$; **d)** $\frac{\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{5}+2}{-3}$; e) $\frac{2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}+2}{-3}$;

3). a) $\frac{3}{\sqrt[3]{9}}-\frac{1}{\sqrt[3]{3}+3}=^{\sqrt[3]{3})}\ \frac{3}{\sqrt[3]{9}}-^{\sqrt[3]{3^2}-3\sqrt[3]{3}+3^2)}\ \frac{1}{\sqrt[3]{3}+3}=\frac{3\sqrt[3]{3}}{3}-\frac{\sqrt[3]{9}-3\sqrt[3]{3}+9}{3+3^3}=\frac{-\sqrt[3]{9}+33\sqrt[3]{3}-9}{30}$.

b) $\overset{\sqrt[3]{2})}{\frac{4}{\sqrt[3]{4}}}-\overset{\sqrt[3]{4^2}+2\sqrt[3]{4}+2^2)}{\frac{1}{\sqrt[3]{4}-2}}=\frac{4\cdot\sqrt[3]{2}}{2}-\frac{\sqrt[3]{4^2}+2\sqrt[3]{4}+2^2}{4-8}=2\sqrt[3]{2}+\frac{\sqrt[3]{16}+2\sqrt[3]{4}+4}{4}$

$=\frac{10\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{4}+4}{4}$. **c)** $\frac{\sqrt[3]{4}}{6}-(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1)$; **d)** $\frac{\sqrt[3]{9}}{6}-\frac{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1}{2}=\frac{-2\sqrt[3]{9}+3\sqrt[3]{3}-3}{6}$;

4*. **Rezolvare**: a) Se desfac parantezele din partea dreaptă;

b) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{12}}=\frac{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{81}+\sqrt[3]{144}-\sqrt[3]{18}-\sqrt[3]{108}-\sqrt[3]{24}}{2+9+12-3\cdot\sqrt[3]{2\cdot9\cdot12}}=\frac{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{81}+\sqrt[3]{144}-\sqrt[3]{18}-\sqrt[3]{108}-\sqrt[3]{24}}{5}$

1.4. Puteri cu exponent raţional, real

4. a) 3^{-14}; **b)** 2^{-25}; **c)** $3^{-\frac{31}{6}}$; **d)** $2^{\frac{35}{3}}$; **e)** $3^{\frac{17}{3}}$;

5. a) 0,01; b) 9^{63}; c) $\left(\frac{1}{9}\right)^2\cdot\sqrt[3]{81}^{\frac{3}{2}}\cdot\left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}=3^{-4}\cdot\left(3^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot\left(3^{-3}\right)^{-\frac{2}{3}}=3^{-4}\cdot3^2\cdot3^2=3^0=1.$

d) $\left(\frac{1}{5}\right)^3\cdot25^{\sqrt[3]{-8}}\cdot5^{-5}:\left(\frac{1}{25}\right)^{-6}=5^{-3}\cdot5^{-4}\cdot5^{-5}:5^{12}=5^0=1.$ **e)** 3; f) $\frac{1}{5^5}$; **6.** n=1; **7.** n= - 5;

8. a) $\sqrt{27}\cdot\sqrt[3]{9}:\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}=3^{\frac{3}{2}}\cdot3^{\frac{2}{3}}:3^2=3^{\frac{3}{2}+\frac{2}{3}-2}=3^{-\frac{7}{6}}.$

b) $\sqrt[3]{81}\cdot\sqrt{3}+\left(2\cdot\sqrt[3]{2}\right)^4:\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{3}}=3^{\frac{4}{3}}\cdot3^{\frac{1}{2}}+\left(2^4\cdot2^{\frac{4}{3}}\right):\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{5}{3}}=$

$=3^{\frac{4}{3}+\frac{1}{2}}+\left(2^{4+\frac{4}{3}}\right):\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{5}{3}}=3^{\frac{11}{2}}+2^{\frac{16}{3}}:2^{\frac{5}{3}}=3^{\frac{11}{2}}+2^7=\sqrt{3^{11}}+128.$

c) $\left(\frac{1}{9}\right)^2\cdot\sqrt[3]{81}^{\frac{3}{2}}\cdot\left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}=3^{-4}\cdot\left(3^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot\left(3^{-3}\right)^{-\frac{2}{3}}=3^{-4}\cdot3^2\cdot3^2=3^0=1.$

d) $\left(\frac{1}{5}\right)^3\cdot25^{\sqrt[3]{-8}}\cdot5^{-5}:\left(\frac{1}{25}\right)^{-6}=5^{-3}\cdot5^{-4}\cdot5^{-5}:5^{12}=5^0=1.$

1. 5. Logaritmi

1). a) $\log_5 15-\log_5 3=\log_5\frac{15}{3}=\log_5 5=1;$ **b)** $\log_2 6+\log_2 4-\log_2 12=\log_2\frac{6\cdot4}{12}=\log_2 2=1;$

c) $\log_3 243-\log_4\frac{1}{4}=\log_3 3^5-\log_4 4^{-1}=6;$ **d)** $5^{\log_5 2}-\log_{\frac{1}{2}}2=2^{\log_5 5}-\frac{\log_2 2}{\log_2 2^{-1}}=3;$

e) $\log_3 12+\log_9 12=\frac{3\log_3 12}{2};$ **f)** $\lg\frac{6}{7}+\lg\frac{14}{8}+\lg\frac{40}{6}=\lg10=1;$

g) $\lg100^5-\ln e=\lg10^{10}-1=9;$ **h)** $\lg25\cdot\lg10\cdot\lg1=0;$

i) $-\log_3(\log_2\sqrt[3]{2})=-\log_3(\log_2 2^{\frac{1}{3}})=-\log_3\frac{1}{3}=-\log_3 3^{-1}=1$;

j) $\log_2(\log_4(\log_3 81))=\log_2(\log_4 4)=\log_2 1=0$;

k) $2\log_6\sqrt{2}+\log_6 3=\log_6 2+\log_6 3=\log_6 6=1$;

l) $\sqrt{4^{\frac{1}{\log_6 4}}+100^{\frac{1}{\lg 100}}}=\sqrt{4^{\log_4 6}+100^{\log_{100}10}}=\sqrt{6^{\log_4 4}+10^{\log_{100}100}}=\sqrt{6+10}=\sqrt{16}=4$;

m) $\log_5\sqrt[3]{5}=\log_5 5^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}$, $\log_8\frac{1}{16}=\frac{\log_2 2^{-4}}{\log_2 2^3}=\frac{-4}{3}$, $\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{2}=\frac{\log_2 2^{\frac{1}{2}}}{\log_2 2^{-1}}=-\frac{1}{2}$.

2). a) $\lg 80+\lg 20-\lg 16=\lg\frac{80\cdot 20}{16}=\lg 100=2$. **b) 0; c) 0; d)** $-5+8-\frac{1}{6}=\frac{17}{6}$.

e) $\log_2 24+\log_2 6-\log_2 9=\log_2\frac{24\cdot 6}{9}=\log_2 16=4$; **3). a)** $x+4\rangle 0\Rightarrow x\rangle -4\Rightarrow x\in(-4;\infty)$;

b) $\frac{x-2}{x+2}\rangle 0\Leftrightarrow\frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)^2}\rangle 0\Rightarrow(x-2)(x+2)\rangle 0\Rightarrow x\in(-\infty;-2)\cup(2;\infty)$;

c) Se pun condiţiile: $x^2-1\rangle 0\Rightarrow x\in(-\infty;-1)\cup(1;\infty)$, $3+x\rangle 0\Rightarrow x\rangle -3\Rightarrow x\in(-3;\infty)$ **şi** $3+x\neq 1\Rightarrow x\neq -2$. Intersectând mulţimea soluţiilor de la inecuaţiile de mai sus rezultă $x\in(-3;-2)\cup(-2;-1)\cup(1;\infty)$;

d) Se pun condiţiile: $x\rangle 0$ şi $\log_3 x\rangle 0\Rightarrow x\Rightarrow 1$. Făcând intersecţia mulţimilor soluţiilor inecuaţiilor de mai sus rezultă $x\in(1;\infty)$;

4). a). Condiţia de existenţă a logaritmului este $\frac{3x-9}{x+5}\rangle 0\Leftrightarrow^{x+5)}\frac{3x-9}{x+5}\rangle 0\Leftrightarrow\frac{(x+5)(3x-9)}{(x+5)^2}\rangle 0\Leftrightarrow$ $(x+5)(3x-9)\rangle 0\Rightarrow x\in(-\infty,-5)\cup(3,\infty)$. **b)** $x^2+3x-10\rangle 0\Rightarrow x\in(-\infty,-5)\cup(2,\infty)$.

6). a) 1; **b**) -2; **c**) 0; **d**) 0; **e**) 1; **f**) 1; **g**) 1; **h**) 1; **i**) -1; **j**) 6; **k**) 0; **l**) $9+\sqrt{2}$; **m**) 0; **n**) 60; **o**) -5; **p**) 5; **q**) 0. **7). a**) 2; **b**) 0; **c**) $\sqrt{2}+1$; **d**) $4-2\sqrt{2}$; **e**) $\frac{5-2\sqrt{2}}{4}$; **f**) $-\frac{47}{4}$; **g**) 4; **h**) 2; **i**) $-\frac{]}{6}$; **j**) $\frac{5}{4}$;

8. **a**) 1; **b**) 1; **c**) 1; **d**) 0; **e**) 0; **f**) -1; **g**) 1; **h**) 3; **i**) 0; **j**) 12; **k**) 1; **l**) 0; **m**) 2; **n**) 2; **o**) $3\log_3 2$;

p) 2; **q**) $-\frac{61}{6}$; **r**) 2; **s**) 27; **t**) -5; **u**) 1; **v**) 6; **x**) 6; **9)**. **a**) 0; **b**) 1; **c**) –lg2012; **d**) 0; **e**) 3; **f**) 1;

10. $4\sqrt{3}$; **13.** $\frac{1}{2}=\sqrt{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}}$; **14.** $P=\frac{2}{3}$; **15.** $P=\frac{2}{3}$;

16*. $\log_a\sqrt{x^3}+\log_{\frac{1}{a}}\sqrt[3]{x^2}-\frac{5}{3}\log_{a^2}x+a^{\log_{\sqrt{a}}2}=\frac{3}{2}\log_a x-\frac{2}{3}\log_a x-\frac{5}{6}\log_a x+\sqrt{a}^{2\log_{\sqrt{a}}2}=$

$=\log_a x\left(\frac{3}{2}-\frac{2}{3}-\frac{5}{6}\right)+\sqrt{a}^{\log_{\sqrt{a}}4}=0+4=4\in\mathbb{Z}.$

17*. $\log_a n\cdot\log_b n+\log_b n\cdot\log_c n+\log_c n\cdot\log_a n=\frac{1}{\log_n a\cdot\log_n b}+\frac{1}{\log_n b\cdot\log_n c}+\frac{1}{\log_n c\cdot\log_n a}=$

$=\frac{\log_n a+\log_n b+\log_n c}{\log_n a\cdot\log_n b\cdot\log_n c}=\frac{\log_n abc}{\log_n a\cdot\log_n b\cdot\log_n c}=\frac{\log_a n\cdot\log_b n\cdot\log_c n}{\log_{abc} n}$

18*. Fie $x=\log_{\frac{1}{2}}(1-\frac{a}{2}),\ y=\log_{\frac{1}{2}}(1-\frac{b}{2})$, și din $\sqrt{x\cdot y}\le\frac{x+y}{2}\Rightarrow$

$$1=\sqrt{xy}\le\frac{\log_{\frac{1}{2}}(1-\frac{a}{2})+\log_{\frac{1}{2}}(1-\frac{b}{2})}{2}\Rightarrow$$

$$2\le\log_{\frac{1}{2}}(1-\frac{a}{2})(1-\frac{b}{2})\Rightarrow\quad\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^2\le\log_{\frac{1}{2}}\frac{(2-a)(2-b)}{4}\Rightarrow\quad ab-2a-2b\le-3.$$

Maximul expresiei este -3.

19*. $a^2+9b^2=4ab\,\big|+6ab\Rightarrow(a+3b)^2=10ab\Rightarrow 2\lg(a+3b)=\lg 10ab\Rightarrow$ c.c.t.d.

20*. $\log_{25}12=\frac{\lg 12}{\lg 25}=\frac{2\lg 2+\lg 3}{2(\lg 10-\lg 2)}=\frac{2a+b}{2-2a}$;

21*. $\sqrt[3]{\lg(1+x)\cdot\lg(2+y)\cdot\lg(3+z)}\le\frac{\lg(x+1)+\lg(y+2)+\lg(z+3)}{3}=$

$$=\frac{\lg(x+1)\cdot(y+2)\cdot(z+3)}{3}\le\frac{\lg\left(\frac{x+1+y+2+z+3}{3}\right)^3}{3}=\frac{3\lg\frac{9}{3}}{3}=\lg 3.$$

22*. Inegalitatea dată este echivalentă cu $\log_2\left(x^2+(m-3)x+m+2\right)\ge 1\Leftrightarrow$

$x^2+(m-3)x+m+2\ge 2\Rightarrow\ x^2+(m-3)x+m\ge 0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow$ discriminantul ecuației asociate este negativ.

$(m-3)^2-4m\le 0\Rightarrow m^2-10m+9\le 0\Rightarrow m\in[1;9]$.

23*. Din $\frac{\lg x}{\lg\sqrt{10}}=\frac{\lg x}{\lg 10^{\frac{1}{2}}}=\frac{\lg x}{\frac{1}{2}}=2\lg x=\lg x^2$ și

$\lg(x+6y)+\lg y=\lg(x+6y)\cdot y=\lg\left(xy+6y^2\right)$ rezultă

$$\lg x^2=\lg(xy+6y^2)\Rightarrow x^2=xy+6y^2\Rightarrow\ x^2-xy-6y^2=0\,\big|:y^2\Rightarrow\left(\frac{x}{y}\right)^2-\frac{x}{y}-6=0\Rightarrow t^2-t-6=0$$

cu soluțiile $t\in\{-2;3\}$. Cum $t=\frac{x}{y}\rangle 0\Rightarrow t=3$. Așadar, $\frac{x}{y}=3$.

1.6. Teste de autoevaluare

Testul 1. Numere reale

1) $\left(4\cdot\sqrt[3]{32}\right):\left(2\cdot\sqrt[3]{-8}\right)=-2\sqrt[3]{4}$

2) $\left(\sqrt[3]{2}+3\right)^3=\left(\sqrt[3]{2}\right)^3+3\cdot\left(\sqrt[3]{2}\right)^2\cdot 3+3\cdot\left(\sqrt[3]{2}\right)\cdot 3^2+3^3=2+9\sqrt[3]{4}+27\sqrt[3]{2}+27==29+9\sqrt[3]{4}+27\sqrt[3]{2}$.

3) $\sqrt[3]{81}-\sqrt[3]{24}-\sqrt[3]{375}=\sqrt[3]{3^3\cdot 3}-\sqrt[3]{2^3\cdot 3}-\sqrt[3]{5^3\cdot 3}=3\sqrt[3]{3}-2\sqrt[3]{3}-5\sqrt[3]{3}=-4\sqrt[3]{3}$.

4) $\frac{3}{\sqrt[3]{9}}-\frac{1}{\sqrt[3]{3}+3}=^{\sqrt[3]{3})}\ \frac{3}{\sqrt[3]{9}}-^{\sqrt[3]{3^2}-3\sqrt[3]{3}+3^2)}\ \frac{1}{\sqrt[3]{3}+3}=\frac{3\sqrt[3]{3}}{3}-\frac{\sqrt[3]{9}-3\sqrt[3]{3}+9}{3+3^3}=\frac{-\sqrt[3]{9}+33\sqrt[3]{3}-9}{30}$.

5) $\sqrt[3]{2\sqrt{6}-4}\cdot\sqrt[3]{2\sqrt{6}+4}=\sqrt[3]{(2\sqrt{6}-4)(2\sqrt{6}+4)}=\ \sqrt[3]{(2\sqrt{6})^2-4^2}=\sqrt[3]{24-16}=\sqrt[3]{8}=2$.

6) $\underbrace{\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}}_{=a}-\underbrace{\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}}_{=b}=3|()^3\Rightarrow\ 9+4\sqrt{5}+(9-4\sqrt{5})+3\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}\cdot\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}\cdot 3=3^3$

$\Rightarrow 18+3\cdot\sqrt[3]{1}\cdot 2=3^3\Rightarrow 27=27$ Adevărat. Ceea ce înseamnă că egalitatea dată este adevărată.

S-a folosit formula $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ care se mai scrie $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$

Testul 2 Numere reale

1) $\sqrt[3]{\frac{4}{9}}:\sqrt[3]{\frac{81}{2}}=\sqrt[3]{\frac{4}{9}}\cdot\sqrt[3]{\frac{2}{81}}=\sqrt[3]{\frac{8}{729}}=\frac{2}{9};$ 2) $\left(\sqrt[3]{3}+2\right)^3=\left(\sqrt[3]{3}\right)^3+3\cdot\left(\sqrt[3]{3}\right)^2\cdot 2+3\cdot\left(\sqrt[3]{3}\right)\cdot 2^2+2^3$

$=3+6\sqrt[3]{9}+12\sqrt[3]{3}+8=\ =11+6\sqrt[3]{9}+12\sqrt[3]{3}$

3) $\sqrt[3]{24}-\sqrt[3]{192}+\sqrt[3]{-81}=\ \sqrt[3]{2^3\cdot 3}-\sqrt[3]{2^6\cdot 3}+\sqrt[3]{-3^3\cdot 3}=\ 2\sqrt[3]{3}-4\sqrt[3]{3}-3\sqrt[3]{3}=-5\sqrt[3]{3}$

4) $\frac{4}{\sqrt[3]{4}}-\overset{\sqrt[3]{2})}{\overset{\sqrt[3]{4^2}+2\sqrt[3]{4}+2^2)}{\frac{1}{\sqrt[3]{4}-2}}}=\ \frac{4\cdot\sqrt[3]{2}}{2}-\frac{\sqrt[3]{4^2}+2\sqrt[3]{4}+2^2}{4-8}=2\sqrt[3]{2}+\frac{\sqrt[3]{16}+2\sqrt[3]{4}+4}{4}$

$=\frac{10\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{4}+4}{4}.$

5) $\sqrt[3]{2\sqrt{2}-3}\cdot\sqrt[3]{2\sqrt{2}+3}=\sqrt[3]{(2\sqrt{2}-3)(2\sqrt{2}+3)}=\sqrt[3]{(2\sqrt{2})^2-3^2}\ =\sqrt[3]{8-9}=\sqrt[3]{-1}=-1$

6) $\underbrace{\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}}_{=a}-\underbrace{\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}}_{=b}=2|()^3\Rightarrow\ 5\sqrt{2}+7-(5\sqrt{2}-7)-3\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}\cdot\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}\cdot 2=2^3$

$\Rightarrow 14-3\cdot\sqrt[3]{1}\cdot 2=8\Rightarrow 8=8$ Adevărat. Ceea ce înseamnă că egalitatea dată este adevărată.

S-a folosit formula $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ care se mai scrie $(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$

Testul 3. Puteri cu exponent raţional

1) Cum $a=(0,25)^{-\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(2^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}}=2$, şi $b=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-4}=\left(2^{-\frac{1}{2}}\right)^{-4}=2^2=4$ rezultă $a\langle b$.

2) $\sqrt{27}\cdot\sqrt[3]{9}:\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}=3^{\frac{3}{2}}\cdot 3^{\frac{2}{3}}:3^2=3^{\frac{3}{2}+\frac{2}{3}-2}=3^{-\frac{7}{6}}.$

3) $\sqrt[3]{81}\cdot\sqrt{3}+\left(2\cdot\sqrt[3]{2}\right)^4:\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{3}}=3^{\frac{4}{3}}\cdot 3^{\frac{1}{2}}+\left(2^4\cdot 2^{\frac{4}{3}}\right):\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{5}{3}}=$

$=3^{\frac{4}{3}+\frac{1}{2}}+\left(2^{4+\frac{4}{3}}\right):\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{5}{3}}=3^{\frac{11}{2}}+2^{\frac{16}{3}}:2^{\frac{5}{3}}=\ 3^{\frac{11}{2}}+2^7=\sqrt{3^{11}}+128.$ 4)

$\left(\frac{1}{9}\right)^2\cdot\sqrt[3]{81}^{\frac{3}{2}}\cdot\left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}=3^{-4}\cdot\left(3^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot\left(3^{-3}\right)^{-\frac{2}{3}}=3^{-4}\cdot 3^2\cdot 3^2=3^0=1.$

5) $\left(\frac{1}{5}\right)^3\cdot 25^{\sqrt[3]{-8}}\cdot 5^{-5}:\left(\frac{1}{25}\right)^{-6}=5^{-3}\cdot 5^{-4}\cdot 5^{-5}:5^{12}=5^0=1.$

6) $\left(\frac{6x^3}{45y^2}\sqrt[3]{\frac{9y}{x^5}}\right):\left(\frac{2x}{5y}\sqrt[3]{\frac{x}{3y^2}}\right)=\frac{6x^3}{45y^2}:\frac{2x}{5y}\cdot\sqrt[3]{\frac{9y}{x^5}:\frac{x}{3y^2}}=\ =\frac{6x^3}{45y^2}\cdot\frac{5y}{2x}\cdot\sqrt[3]{\frac{9y}{x^5}\cdot\frac{3y^2}{x}}=$

$=\frac{30x^3y}{90xy^2}\cdot\sqrt[3]{\frac{27y^3}{x^6}}=\ =\frac{3x^2y}{3x^2y}=1.$

Testul 4. Logaritmi

1) $\lg 80+\lg 20-\lg 16=\lg\frac{80\cdot 20}{16}=\lg 100=2$.

2) Produsul este 0 deoarece $\log_2 1=0$

3) Cum $\log_4 64=\log_4 4^3=3$ iar $\log_3 3=1$ rezultă $\log_5\left(\log_3(\log_4 64)\right)=\log_5 1=0$.

4) $\log_2\frac{1}{32}=\log_2 2^{-5}=-5$, $\log_{\sqrt{3}}81=\frac{\log_3 3^4}{\log_3 3^{\frac{1}{2}}}=\frac{4}{\frac{1}{2}}=8$, $\log_{\frac{1}{25}}\sqrt[3]{5}=\frac{\log_5 5^{\frac{1}{3}}}{\log_5 5^{-2}}=\frac{\frac{1}{3}}{-2}=-\frac{1}{6}$.

Atunci, $\log_2\frac{1}{32}+\log_{\sqrt{3}}81-\log_{\frac{1}{25}}\sqrt[3]{5}=-5+8-\frac{1}{6}=\frac{17}{6}$.

5) $9^{\log_3\sqrt{2}}=\sqrt{2}^{\log_3 9}=\sqrt{2}^2=2$ $\quad\sqrt[3]{2}^{\log_2\frac{1}{64}}=\sqrt[3]{2}^{\log_2 2^{-6}}=\sqrt[3]{2}^{-6}=2^{-2}=\frac{1}{4}$. Aşadar, $9^{\log_3\sqrt{2}}-\sqrt[3]{2}^{\log_2\frac{1}{64}}=$

$2-\frac{1}{4}=\frac{7}{4}$.

6. Condiţia de existenţă a logaritmului este $\frac{3x-9}{x+5}\rangle 0\Leftrightarrow {}^{x+5)}\ \frac{3x-9}{x+5}\rangle 0\Leftrightarrow\frac{(x+5)(3x-9)}{(x+5)^2}\rangle 0\Leftrightarrow$

$(x+5)(3x-9)\rangle 0\Rightarrow x\in(-\infty,-5)\cup(3,\infty)$.

Testul 5. Logaritmi

1) $\log_2 24+\log_2 6-\log_2 9=\log_2\frac{24\cdot 6}{9}=\log_2 16=4$.

2) $\lg tg1^0\cdot\lg tg2^0\cdot\lg tg3^0\cdot....\cdot\lg tg88^0\cdot\lg tg89^0=0$ deoarece $\lg tg45^0=\lg 1=0$.

3) Cum $\log_5 125=\log_5 5^3=3$ iar $\log_3 3=1$ rezultă $\log_2\left(\log_3(\log_5 125)\right)=\log_2 1=0$.

4) $\log_5\sqrt[3]{5}=\log_5 5^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}$, $\log_8\frac{1}{16}=\frac{\log_2 2^{-4}}{\log_2 2^3}=\frac{-4}{3}$, $\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{2}=\frac{\log_2 2^{\frac{1}{2}}}{\log_2 2^{-1}}=-\frac{1}{2}$.

5) $\sqrt[3]{2}^{\log_3 27}+7^{\frac{1}{\log_2 49}}=\sqrt[3]{2}^3+7^{\log_{49}2}=2+2^{\log_{49}2}=2+2^{\frac{1}{2}}=2+\sqrt{2}$

6. Condiţia de existenţă a logaritmului este $x^2+3x-10\rangle 0\Rightarrow x\in(-\infty,-5)\cup(2,\infty)$.

Cap. 2. Numere complexe

2.1. Operaţii cu numere complexe

1). $z_1\cdot z_2=(3-5i)(4+5i)=12-(-25)+i(15-20)=13-5i$.

$\frac{z_1}{z_2}=\frac{3-5i}{4+5i}=\frac{12-25}{4^2+5^2}+i\frac{-20-15}{4^2+5^2}=-\frac{13}{41}-i\frac{35}{41}$.

5). a) $i^{251}+i^{10}+i^7=i^{4\cdot 62+3}+i^{4\cdot 2+2}+i^{4\cdot 1+3}=-i-1-i=-2i-1$.

b) $i^{-91}=\frac{1}{i^{91}}=\frac{1}{i^{4\cdot 22+3}}=\frac{1}{i^3}=\frac{i)}{-i}1=i$.

c) $1+i+i^2+i^3+...+i^{100}=(1+i-1-i)\cdot 25=0$;

d) $1\cdot i\cdot i^2\cdot i^3\cdot ...\cdot i^{100}=i^{1+2+3+...+100}=i^{5050}=i^{4\cdot 1262+2}=i^2=-1$.

6). a) $2x(1+i)+y(6-5i)=3xi+y-5\Leftrightarrow\ 2x+6y+i(2x-5y)=y-5+3xi\Rightarrow\ 2x+6y=y-5$ şi $2x-5y=3x$. Din cele două rezultă $x=-5$ iar $y=1$.

b) Analog, $x=-4; y=2;$

7). $|z|=\left|\frac{(2+4i)(3+i)}{6(-3+4i)^4}\right|=\frac{|2+4i|\cdot|3+i|}{6|-3+4i|^4}=\frac{\sqrt{20}\cdot\sqrt{10}}{6\cdot\sqrt{25}}=\frac{\sqrt{2}}{3}$.

9). a) $z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow \operatorname{Im} z=0$. În cazul nostru, $\frac{m\cdot 1-2\cdot(m-2)}{\sqrt{1^2+(m-2)^2}}=0\Rightarrow m-2m+4=0\Rightarrow m=4$; b) $m=3;$

2.2 Ecuații în $\mathbb{C}$

10). a) Din formula $x^2=a,\ a\langle 0\Rightarrow x=\pm i\sqrt{-a}$, rezultă $x=\pm 4i.$

b) $x^2=-9\Rightarrow x_{1,2}=\pm 3i;$

c) $x^4+16=0\Rightarrow x^2=\pm 4\Rightarrow x_{1,2}=\pm 2,\ x_{3,4}=\pm 2i.$

d) $x^3=-27\Rightarrow x^3+2^3=0\Rightarrow (x+3)(x^2-3x+9)=0\Rightarrow x_1=-3,\ x_{2,3}=\frac{3\pm 3i\sqrt{3}}{2}$.

e) $x_{1,2}=\frac{-4\pm 2\sqrt{2}i}{2}=-2\pm\sqrt{2}i$;

11). a) Notăm $x^2=t\Rightarrow t^2+5t+6=0\Rightarrow\ t_1=-2\Rightarrow x^2=-2\Rightarrow x_{1,2}=\pm i\sqrt{2}$,

$t_2=-3\Rightarrow x^2=-3\Rightarrow x_{3,4}=\pm i\sqrt{3}$.

12). a) Din formula $z^2=a+ib\Rightarrow z_{1,2}=\pm\left[\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}+i\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\right]$, deorece b este pozitiv. Atunci, $z_{1,2}=\pm\left(\frac{3}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

13). Se aplică formula $ax^2+bx+c=0\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-b\pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

$\Delta=b^2-4ac=(-i)^2-4\cdot 4\cdot 3=-1-48=-49$. Rezultă, $x_{1,2}=\frac{i\pm 7i}{8}\Rightarrow\ x_1=-\frac{3i}{4},\ x_2=i$

14). a) $\frac{3}{x-2}^{x+2)}-\frac{1}{x+2}^{x-2)}+{}^{(x-2)(x+2)}1=0\Rightarrow\ 3x+6-x+2+x^2-4=0\Rightarrow\ x^2+2x+4=0\Rightarrow$

$x_{1,2}=\frac{-2\pm i\sqrt{12}}{2}=-1\pm i\sqrt{3}$. **15).** Suma este S=0;

16). Se ia întodeauna $z=a+ib,\ \bar{z}=a-ib,\ |z|=\sqrt{a^2+b^2}$; și se înlocuiesc în relația dată.

a) $z=-2i$; b) $z=2i$ sau $z=-\frac{8}{3}+2i$; c) $z=3+2i$; d) $z=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$; e) $z=1+i$.

17). Se pune condiția ca $\Delta\langle\ 0$. a) $m\in(9;\infty)$; b) $m\in(-4;4)$; c) $m\in(-1;3)$; d) $m\in(1;\infty)$;

18). m= - 3; **19)**. m= 4; **20)**. Se folosesc relațiile lui Viete: $\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a} \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2=1 \\ x_1\cdot x_2=3 \end{cases}$.

a) $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=-5$;

b) $x_1^3+x_2^3=-8$; c) $x_1^4+x_2^4=7$; d) $x_1^5+x_2^5=3$;

21). Mai întâi se scriu relţiile lui Viete: $\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a} \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2=-2 \\ x_1\cdot x_2=3 \end{cases}$ şi se calculează

$x_1^2+x_2^2=\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1\cdot x_2=(-2)^2-2\cdot 3=-2$,

$x_1^3+x_2^3=\left(x_1+x_2\right)^3-3x_1\cdot x_2(x_1+x_2)=(-2)^3-3\cdot 3\cdot(-2)=10$,

$x_1^4+x_2^4=\left(x_1^2+x_2^2\right)^2-2x_1^2\cdot x_2^2=(-2)^2-2\cdot 3^2=-14$.

Din $x^2+2x+3=0\,\big|\cdot x^3 \Rightarrow x^5+2x^4+3x^3=0$ şi cum x_1,x_2 sunt soluţiile şi ecuaţiei de gradul cinci,

$$\Rightarrow x_1^5+2x_1^4+3x_1^3=0$$

prin urmare o verifică: $\underline{x_2^5+2x_2^4+3x_2^3=0}$.

$$x_1^5+x_2^5=-2(x_1^4+x_2^4)-3(x_1^3+x_2^3)$$

Aşadar, $x_1^5+x_2^5=-2\cdot(-14)-3\cdot 10=-2$.

22). a) $x^2-2x+4=0\,\big|\cdot(x+2)\Rightarrow x^3+8=0\Rightarrow x^3=-8$. Cum x_1,x_2 sunt rădăcinile ecuației $x^2-2x+4=0$ rezultă că x_1,x_2 verifică și ecuația $x^3+8=0\Rightarrow x_1^3=-8, x_2^3=-8$. Atunci,

$x_1^{2015}+x_2^{2015}=\left(x_1^3\right)^{671}\cdot x_1^2+\left(x_2^3\right)^{671}\cdot x_2^2=(-8)^{670}\cdot\left(x_1^2+x_2^2\right)=8^{671}\cdot(-4)=-2^{2015}$;

b) Se face notația $x-2=y\Rightarrow x=y+2\Rightarrow(y+2)^2-2(y+2)+4=0\Rightarrow y^2+2y+4=0$ cu soluțiile y_1,y_2. Se calculează mai departe $y_1^5+y_2^5$.

23). Fie $z_1=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $z_2=\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$, atunci, $z_1+z_2=-1$ și $z_1\cdot z_2=1$, drept pentru care se formează ecuația $z^2+z+1=0$ având ca soluții pe z_1,z_2. Înmulțind ecuațai obținută cu z-1 se obține că $z^3=1$ de unde rezultă că $z_1^3=1$, $z_2^3=1$ adică suma cerută este egală cu $z_1^6+z_2^6=1+1=2$.

24). Conform exercițiului precedent, rezultă că $z^3=1$. Așadar,

$z^{2016}+\dfrac{1}{z^{2016}}=\left(z^3\right)^{672}+\dfrac{1}{\left(z^3\right)^{672}}=1+1=2$.

2.3 Teste de autoevaluare

Testul 1. Operații cu numere complexe

1) $i^{251}+i^{10}+i^7=i^{4\cdot 62+3}+i^{4\cdot 2+2}+i^{4\cdot 1+3}=-i-1-i=-2i-1$.

2) $z_1\cdot z_2=(3-5i)(4+5i)=12-(-25)+i(15-20)=13-5i$.

$\frac{z_1}{z_2}=\frac{3-5i}{4+5i}=\frac{12-25}{4^2+5^2}+i\frac{-20-15}{4^2+5^2}=-\frac{13}{41}-i\frac{35}{41}$.

3. $i^{-91}=\frac{1}{i^{91}}=\frac{1}{i^{4\cdot 22+3}}=\frac{1}{i^3}=\overset{i)}{\frac{1}{-i}}=i.$

4) $2x(1+i)+y(6-5i)=3xi+y-5\Leftrightarrow\ 2x+6y+i(2x-5y)=y-5+3xi\Rightarrow\ 2x+6y=y-5$ și $2x-5y=3x$. Din cele două rezultă $x=-5$ iar $y=1$.

5) a) $1+i+i^2+i^3+...+i^{100}=(1+i-1-i)\cdot 25=0$;

b) $1\cdot i\cdot i^2\cdot i^3\cdot ...\cdot i^{100}=i^{1+2+3+...+100}=i^{5050}=i^{4\cdot 1262+2}=i^2=-1$.

6) $|z|=\left|\frac{(2+4i)(3+i)}{6(-3+4i)^4}\right|=\frac{|2+4i|\cdot|3+i|}{6|-3+4i|^4}=\frac{\sqrt{20}\cdot\sqrt{10}}{6\cdot\sqrt{25}}=\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Testul 2. Ecuații în $\mathbb{C}$

1. Din formula $x^2=a,\ a\langle 0\Rightarrow x=\pm i\sqrt{-a}$, rezultă $x=\pm 4i.$

2) Din formula $ax^2+bx+c=0\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-b\pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ rezultă $x_{1,2}=\frac{-4\pm i\sqrt{8}}{2}=-2\pm i\sqrt{2}.$

3. Din formula $z^2=a+ib\Rightarrow z_{1,2}=\pm\left[\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}+i\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\right]$, dacă b este pozitiv, rezultă atunci că $z_{1,2}=\pm\left(\frac{3}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

4. $\overset{x+2)}{\frac{3}{x-2}}-\overset{x-2)}{\frac{1}{x+2}}+\overset{(x-2)(x+2)}{1}=0\Rightarrow\ 3x+6-x+2+x^2-4=0\Rightarrow\ x^2+2x+4=0\Rightarrow$

$x_{1,2}=\frac{-2\pm i\sqrt{12}}{2}=-1\pm i\sqrt{3}$.

5) Se aplică formula $ax^2+bx+c=0\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-b\pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

$\Delta=b^2-4ac=(-i)^2-4\cdot 4\cdot 3=-1-48=-49$. Rezultă, $x_{1,2}=\frac{i\pm 7i}{8}\Rightarrow\ x_1=-\frac{3i}{4},\ x_2=i$

6).

Mai întâi se scriu relațiile lui Viete: $\begin{cases}x_1+x_2=-\frac{b}{a}\\ x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1+x_2=-2\\ x_1\cdot x_2=3\end{cases}$ și se calculează

$x_1^{\,2}+x_2^{\,2}=(x_1+x_2)^2-2x_1\cdot x_2=(-2)^2-2\cdot 3=-2$,

$x_1^{\,3}+x_2^{\,3}=(x_1+x_2)^3-3x_1\cdot x_2(x_1+x_2)=(-2)^3-3\cdot 3\cdot(-2)=10$,

$x_1^{\,4}+x_2^{\,4}=(x_1^{\,2}+x_2^{\,2})^2-2x_1^{\,2}\cdot x_2^{\,2}=(-2)^2-2\cdot 3^2=-14$.

Din $x^2+2x+3=0\big|\cdot x^3 \Rightarrow x^5+2x^4+3x^3=0$ și cum x_1, x_2 sunt soluțiile și ecuației de gradul cinci, prin urmare o verifică: $\underline{x_2^5+2x_2^4+3x_2^3=0}$.

$$\Rightarrow x_1^5+2x_1^4+3x_1^3=0$$

$$x_1^5+x_2^5=-2(x_1^4+x_2^4)-3(x_1^3+x_2^3)$$

Așadar, $x_1^5+x_2^5=-2\cdot(-14)-3\cdot 10=-2$.

Testul 3. Numere complexe

1. a) $2z_1+3z_2=17+9i$; b) $z_1\cdot z_2=22+14i$; c) $z_1:z_2=\frac{2}{34}-\frac{26}{34}i$; d) $\left|z_1^4\cdot z_2^6\right|=20^2\cdot 34^3$;

2. $2(x-3yi)-3(y+2xi)=3-24i\Rightarrow 2x-3y+(-6y-6x)i=3-24i\Rightarrow$

$\begin{cases}2x-3y=3\\-6x-6y=-24\end{cases}\Rightarrow x=3,\ y=-1$.

3. a) $x^2+5^2=0\Rightarrow x=\pm 5i$;

b) $x^2+4x+5=0\Rightarrow x_{1,2}=-2\pm i$;

c) $x^3+64=0\Rightarrow (x+4)(x^2+4x+16)=0\Rightarrow x_1=-4,\ x_{2,3}=-2\pm 2\sqrt{3}i$;

d) $x+\frac{25}{x}+8=0\Rightarrow x^2+8x+25=0\Rightarrow x_{1,2}=-4\pm 3i$.

Cap. 3. Funcții. Proprietăți generale

3.1 Funcții. Definiție.

1). Im $f=\{-1;1;3;5;7;9\}$; **3**). 3775; **4)**. $2^{31}+61$;

5). a) Cum $-\frac{1}{2},\sqrt{3}-1\langle 0\Rightarrow f(-\frac{1}{2})=-\left(-\frac{1}{2}\right)+3=\frac{1}{2}+3=\frac{7}{2}$, $f(\sqrt{3}-1)=-(\sqrt{3}-1)+3=-\sqrt{3}+4$,

iar $f(\frac{3}{2})=2\cdot\frac{3}{2}+5=8$. Aşadar, $f(-\frac{1}{2})+f(\sqrt{3}-1)+f(\frac{3}{2})=\frac{7}{2}-\sqrt{3}+4+8=\frac{31}{2}-\sqrt{3}$.

6). Din $f(m+4)=16\Rightarrow 4(m+4)+8=16\Rightarrow 4m=-8\Rightarrow m=-2$.

7) $m\in\{-2;1\}$; **8)**. m=3 ; 9). $m=14$; $n\in\{-5;5\}$ **10**). m=1; **11)**. m = - 1; 12).

$m=3;\ n\in\{-1;2\}$

3.2 Funcții. Proprietăți generale

1. a), f), g) funcţii pare; b), c), d), e) funcţii impare; **2.** $x=\frac{2}{3}$; **3**. f(x)=5x^3–x, funcţie impară. **4**. **a**) Se face graficul lui f ţinând cont de faptul că f este funcţie impară; **b**) f este funcţie pară; **5**. $a)x=2;b)x=1$ sunt axe de simetrie ; **6**. S(0 ;-8) este centru de simetrie pentru f ; **7**. f(1-x)=f(1+x) ; **8**. $0\le\frac{x}{x^2+1}\le 1$; **9. a)** $0\le f(x)\le 1$;

b) $-1\le f(x)\le 1$; **c)** $\text{Im}(f)=f(R)=[0;1)$, deci e mărginită ; **d)** $\text{Im}(f)=f(R)=Z$ care este nemărginită ; **e)** $\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right|\le 1,\ (\forall)x\in R$; **f)** $\text{Im}(f)=f(\mathbb{N})=\{1;2\},\ (\forall)n\in\mathbb{N}$, aşadar, f este mărginită.

10. a) Pentru $(\forall)M\rangle 0\Rightarrow(\exists)x\in R$ *astfel incat* $f(x)\rangle M,\ f(M)=2M+1\rangle M,\ (\forall)M\rangle 0.$ aşadar f este nemărginită. Altfel spus, f(R)= R care este nemărginită. **b)** $\text{Im}(f)=f((1;+\infty))=(2;+\infty)$; c) $f(n)=\{0;1;2;3;4\},(\forall)n\in Z$. **11.** Se arată că f(x+3)=f(x) ; **12.** Se aduce relaţia dată la forma $f(x+1)=\frac{f(x)-1}{f(x)+1}$ de unde se calculează din aproape în aproape obţinându-se :

$f(x+2)=-\frac{1}{f(x)},\ f(x+4)=-\frac{1}{f(x+2)}=f(x)$. Funcţia f este periodică, de perioadă 4.

3.3. Funcţii bijective. Funcţii inversabile

1. Funcţiile având graficele **b, c, e** sunt injective întrucât respectă definiţia . La punctele a, d, f se găsesc funcţii pentru care luând două elemente distincte din domeniul de definiţie, observăm că funcţia admite aceeaşi imagine pentru ele.

2. Funcţiile având graficele b şi c nu sunt sutjective deoarece observăm că se poate duce o paralelă la axa Ox care să nu intersecteze graficul funcţiei.
La punctul a) o paralelă dusă la OX intersectează graficul lui f în cel puţin un punct.

3. $4^n=64\Rightarrow n=3\Rightarrow A=f(1)+f(2)+f(3)-f(1)\cdot f(2)\cdot f(3)=1+8+27-1\cdot 8\cdot 27=-180$;

$B=1^3+2^3+(2^2)^3+.....+(2^8)^3=1\cdot\frac{(2^3)^9-1}{2^3-1}=\frac{8^9-1}{7}$.

4. $3^n+9^n=10$. Notăm pe $3^n=y\Rightarrow y^2+y-10=0\Rightarrow y\in\{1;9\}\Rightarrow n\in\{1,2\}$. Aşadar, $f(x)=x$ şi $f(x)=x^2$

Cap. 4. Funcții și ecuații iraționale

4.1. Funcții iraționale

3). Trebuie ca funcţia de sub radical să fie pozitivă adică $(m^2+1)x^2-(2m+3)x+1\ge 0$ ceea ce înseamnă că discriminantul ecuaţiei de gradul al doilea asociată funcţiei să fie negativ,
$\Delta=(2m+3)^2-4(m^2+1)\le 0\Leftrightarrow\ 4m^2+12m+9-4m^2-4\le 0\Rightarrow$
$12m\le -5\Rightarrow m\le\frac{-5}{12}$.

4.2. Ecuații iraționale

1. a) $S=\{1\}$; b) $S=\varnothing$; c) $S=\{8\}$; d) $S=\{-11\}$; e) $S=\{-4;4\}$; f) $S=\{2\}$; g) $S=\{-2;8\}$; h) $S=\{-3;3\}$; i) $S=\{3\}$; j) $S=\{3\}$.

2. a) $S=\{4\}$; b) $S=\{-2\}$; c) $S=\{11\}$; d) $S=\{-10,10\}$; e) $S=\{3\}$; f) $S=\{-2\}$; g) $S=\{-2;-3\}$;

h) $S=\{-1;6\}$; i) $S=\{-1;8\}$;

3. a) $S=\{1\}$; b) $S=\{1\}$; c) $S=\{8\}$; d) $S=\{-3,3\}$; e) $S=\{0;6\}$; f) $S=\{-9\}$; g) $S=\{2;4\}$; h) $S=\{2\}$; i) $S=\{-4\}$.

4. a) $S=\{9\}$; b) $S=\{-4\}$; c) $S=\{-2\}$; d) $S=\{2\}$; e) $S=\{1\}$;

5. a) $S=\{-1\}$; b) $S=\{0;-3\}$; c) $S=\{\pm 2\}$; d) $S=\{\pm 2\}$;

6. a) $S=\{-2\}$; b) $S=\{2\}$; c) $S=\{-1;4\}$; d) $S=\{-5;0\}$;

7. a) $S=\{3\}$; b) $S=\{1\}$; c) $S=\{1\}$; d) $S=\{2\}$; e) $S=\{1\}$; f) $S=\{4\}$; g) $S=\{2;6\}$.

8.. a) $S=\left\{-1;\frac{1}{4}\right\}$; b) $S=\{1;2\}$; c) $S=\{-1\}$; d) $S=\{1;11\}$;

9). a) $x\in\varnothing$; **b)** $S=\left\{\frac{7}{3}\right\}$; **c)** $S=\left\{\frac{3}{2}\right\}$; d) $x\in\varnothing$; e) $S=\{3\}$; **f)** $S=\{1\}$; **g)** $S=\{3\}$; **h)** $S=\{4\}$;

10). a). $S=\{9\}$; **b).** $S=\{\varnothing\}$; **c).** $S=\{-3\}$; **d).** $S=\{-3;3\}$; **e).** $S=\{1\}$; **f).** $S=\{-5;5\}$; **g).** $S=\{3\}$; **h).** $S=\{1\}$; **i).** $S=\left\{\frac{13}{6}\right\}$; **j).** $S=\{2\}$; **k).** $S=\{2\}$; **l).** $S=\left\{\frac{2}{9}\right\}$; **m)** $S=\{0;5\}$; **n)** $S=\{3\}$; **o).** $S=\{2\}$; **p).** $S=\{3;4\}$; **q).** $S=\{1;2\}$; **r).** $S=\{1\}$; **s).** $S=\{8\}$; **t).** $S=\{1\}$;

11). a) $S=\left\{\frac{28}{3}\right\}$; b) $S=\{6\}$; **c).** $S=\{-1;3\}$; **d).** $S=\{-1;0;1\}$; **e).** $S=\{1;2\}$; f) $S=\left\{\frac{10}{7}\right\}$; **g)** $S=\left\{\frac{3}{4}\right\}$; h) $S=\{2\}$;

12). Din formula $a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}\Rightarrow 4=\frac{\sqrt{x+3}+x+5}{2}\Rightarrow$. Din condițiile de existență, $x+3\geq 0,\ 3-x\geq 0$, se obține $x\in[-3;3]$ iar din rezolvarea ecuației se obține $(x+3)=(3-x)^2\Rightarrow$ soluția bună este $x=1$. Așadar, numărul căutat este 1.

Teste de autoevaluare

Testul 1. Funcţii iraţionale

1)Din $3x+6\geq 0\Rightarrow x\geq -2\Rightarrow\ D=[-2;\infty)$; 2) $x\in\mathbb{R}$;

3) Din $x^2-2x-8\geq 0\Rightarrow x\in(-\infty;-2]\cup[4;\infty)$. $D=(-\infty;-2]\cup[4;\infty)$.

4) Din $\sqrt[3]{x^2-4}\geq 0\Rightarrow x^2-4\geq 0\Rightarrow x\in(-\infty;-2]\cup[2;\infty)$. $D=(-\infty;-2]\cup[2;\infty)$.

5) Din $\frac{x+5}{x-3}\geq 0\Rightarrow x\in(-\infty;-5]\cup(3;\infty)$. $D=(-\infty;-5]\cup(3;\infty)$.

6) Trebuie ca funcţia de sub radical să fie pozitivă adică $(m^2+1)x^2-(2m+3)x+1\geq 0$ ceea ce înseamnă că discriminantul ecuaţiei de gradul al doilea asociată funcţiei să fie negativ, $\Delta=(2m+3)^2-4(m^2+1)\leq 0\Leftrightarrow\ 4m^2+12m+9-4m^2-4\leq 0\Rightarrow\ 12m\leq -5\Rightarrow m\leq\frac{-5}{12}$.

Testul 2. Ecuaţii iraţionale

1). Ecuaţia nu are solutii deorece radicalul trebuie să fie un număr pozitiv iar la noi membrul drept este negativ.

2). Se pun mai întâi condiţiile de existenţă: $x+6\geq 0\Rightarrow x\geq -6$, şi $x\geq 0$ rezultând $x\geq 0$.

După raţionalizarea ecuaţiei date rezultă $x+6=x^2\Rightarrow \quad x^2-x-6=0$. Soluţia bună este 3. $S=\{3\}$.

3). Din $x^3+19=-8\Rightarrow x^3+27=0\Leftrightarrow (x+3)(x^2-3x+9)=0$ cu singura soluţie reală - 3. $S=\{-3\}$.

4). Prin ridicare la puterea a treia rezultă $x^2+4x+2=-1$.

Rezolvând ecuaţia de gradul doi se obţin soluţiile -3 şi -1. $S=\{-3;-1\}$

5). Din condiţiile de existenţă a radicalilor se obţine $x\geq 4$. De aici , singura soluţie acceptabilă este x = 4. $S=\{4\}$ 6). Evident, după raţionalizarea ecuaţiei rezultă $x^2+144=169\Rightarrow\ x^2=25\Rightarrow x=\pm 5$. Aşadar, $S=\{-5;5\}$.

Testul 3. Ecuaţii iraţionale

1) a) Se pune condiţia de existenţă a radicalului de ordinul doi: $4x-8\rangle 0\Rightarrow x\rangle 2$; Din $\sqrt{4x-8}=2\left|()^2\right.\Rightarrow 4x-8=4\Rightarrow \quad x=3.\ S=\{3\}$. b) $\sqrt[3]{2x-7}=-3\left|()^3\right.\Rightarrow 2x-7=-27\Rightarrow x=-10.$ $S=\{-10\}$

2) $\sqrt[3]{1-x}-\sqrt[3]{3x-2}=0\Rightarrow \sqrt[3]{1-x}=\sqrt[3]{3x-2}\left|()^2\right.\Rightarrow\ 1-x=3x-2\Rightarrow\ x=1, S=\{1\}.$

3) Cum termenii sumei sunt două numere pozitive atunci trebuie ca fiecare să fie egal cu 0. Rezultă, $2x-4=0\Rightarrow x=2$ şi $\sqrt{x^2-4}=0\Rightarrow x^2=4\Rightarrow x=2$. $S=\{2\}$.

4) Condiţii de existenţă: $4x+2\rangle 0\Rightarrow x\rangle -\frac{1}{2}$ şi $x\rangle 0$. Din cele două rezultă $x\rangle 0$.

Din $\sqrt{4x+2}=x\left|()^2\right.\Rightarrow 4x+2=x^2\ \Rightarrow x^2-4x-2=0\Rightarrow$ soluţia care convine este $x=2+\sqrt{6}$.

5) Din formula $a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}\Rightarrow 4=\frac{\sqrt{x+3}+x+5}{2}\Rightarrow$. Din condițiile de existență, $x+3\geq 0,\ 3-x\geq 0$, se obține $x\in[-3;3]$ iar din rezolvarea ecuației se obține $(x+3)=(3-x)^2\Rightarrow$ soluția bună este $x=1$. Așadar, numărul căutat este 1.

6) $\sqrt[3]{x^3-x^2-6}=x-1\left|()^3\right.\Rightarrow \quad x^3-x^2-6=(x-1)^3\Rightarrow \quad x^3-x^2-6=x^3-3x^2+3x-1\Rightarrow$ $2x^2-3x-5=0$ cu soluţiile - 1 şi $\frac{5}{2}$. $S=\left\{-1;\frac{5}{2}\right\}$.

Cap. 5. Funcţii şi ecuaţii exponenţiale

5.1 Funcții exponențiale

1. a) $\mathbb{R}$; **b)** $\mathbb{R}$; **c)** $(0;\infty)$; **d)** $(2;\infty)$; **e)** $\mathbb{R}\setminus\{0\}$; **f)** $(0;\infty)$; **g)** $(-\infty;1)\cup(5;\infty)$;

2. a) $(3,7)^3\ \langle\ (3,7)^{\sqrt{10}}$; b) $(1,5)^{\sqrt{5}}\rangle\ (1,5)^2$; c) $\left(\frac{2}{5}\right)^6\rangle\ \left(\frac{2}{5}\right)^8$; d) $\left(\frac{1}{4}\right)^{10}\langle\ \left(\frac{1}{4}\right)^9$;

5.2 Ecuații exponențiale

1. a) $2^x = 256 \Rightarrow x = 8$; **b)** $2^{-x} = 32 \Rightarrow -x = 5 \Rightarrow x = -5$; **c)** $2^{x+6} = \frac{1}{8} \Rightarrow 2^{x+6} = 2^{-3} \Rightarrow$

$x+6 = -3$, $x = -3-6$; $x = -9$. **d)** $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 1 \Rightarrow x = 0$; **e)** $\left(\frac{2}{5}\right)^x = \frac{125}{8} \Rightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^3 = \left(\frac{2}{5}\right)^{-3}$

; Din $\left(\frac{2}{5}\right)^x = \left(\frac{2}{5}\right)^{-3} \Rightarrow x = -3$; **f)** $10^x = \sqrt[3]{100} = 10^{\frac{2}{3}} \Rightarrow x = \frac{2}{3}$; **g)** $3^x = \frac{1}{\sqrt[3]{9}} = \sqrt[3]{9}^{-1} = 3^{\frac{-2}{3}}$

$\Rightarrow 3^x = 3^{\frac{-2}{3}} \Rightarrow x = \frac{-2}{3}$; **h)** $4^{x-5} = \frac{1}{64} \Rightarrow 4^{x-5} = 4^{-3}$, $x-5 = -3$; $x = -3+5$; $x = 2$.

i) $5^{x-2} = \left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{x}} = 5^{-\sqrt{x}} \Rightarrow x-2 = -\sqrt{x} \,|\, (\,)^2 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = x \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$;

$\Rightarrow x = 1$ *sau* $x = 4 \Rightarrow S = \{1\}$

j) $6^{\sqrt{3x-1}} = 36^{\frac{x}{2}} \Rightarrow 36^{\frac{x}{2}} = 6^x$ sau $6^{\sqrt{3x-1}} = 6^x \Rightarrow \sqrt{3x-1} = x \,|\, (\,)^2 \Rightarrow 3x-1 = x^2 \Rightarrow 3x-1-x^2 = 0$

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$; $x_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}; x_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

k) $3^{2x^2-5x} = \frac{1}{27}$; $3^{2x^2-5x} = 3^{-3} \Rightarrow 2x^2 - 5x = -3 \Rightarrow 2x^2 - 5x + 3 = 0$;

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{4} = \frac{5 \pm 1}{4}$; $x_1 = \frac{5+1}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$; $x_2 = \frac{5-1}{4} = \frac{4}{4} = 1$;

l) $\frac{2^x}{3^x} = \frac{9}{4} \Rightarrow \frac{9}{4} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \Rightarrow x = -2$;

m) $\left(\frac{3}{5}\right)^{5x+4} = \left(\frac{5}{3}\right)^{2x+3}$; Cum $\left(\frac{5}{3}\right)^{2x+3} = \left(\frac{3}{5}\right)^{-2x-3}$ rezultă $\left(\frac{3}{5}\right)^{5x+4} = \left(\frac{3}{5}\right)^{-2x-3}$ sau

$5x+4 = -2x-3$; $5x+2x = -3-4$; $7x = -7 \Rightarrow x = \frac{-7}{7} \Rightarrow x = -1$;

n) $x^{x^2-7x+10} = 1 \Leftrightarrow x^{x^2-7x+10} = x^0 \Rightarrow x^2 - 7x + 10 = 0 \Rightarrow x \in \{2;5\}$;

o) $\left(x^2+x+1\right)^{x^2-9} = 1 \Leftrightarrow \left(x^2+x+1\right)^{x^2-9} = \left(x^2+x+1\right)^0 \Rightarrow x^2 - 9 = 0$; $x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$

p) $(x+4)^{x^2+4x} = (x+4)^{12} \Rightarrow x^2 + 4x = 12 \Rightarrow x \in \{-2;6\}$;

2. a) $S = \left\{\frac{3}{4}\right\}$; **b)** $S = \{6\}$; **c)** $S = \{9\}$; **d)** $S = \{-4\}$; **e)** $S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$; **f)** $S = \left\{-\frac{1}{3}\right\}$; **g)** $S = \{0\}$;

h) $S = \{4\}$; **i)** $S = \{1;4\}$; **j)** $S = \left\{\frac{5}{4}\right\}$; **k)** $S = \left\{\frac{7}{3}\right\}$; **l)** $S = \left\{\frac{8}{3}\right\}$; **m)** $S = \{2;3\}$; **n)** $S = \{0;6\}$;

o) $S = \{3;4\}$; **p)** $S = \left\{2;\frac{1}{2}\right\}$;

3. a) $S = \{4\}$; b) $S = \{-5\}$; c) $S = \{2\}$; d) $S = \{1;3\}$; e) $S = \{1\}$; f) $S = \{-1\}$; g) $S = \{1\}$; h)

$S = \left\{\frac{10}{11}\right\}$; **6. a)** $2^{x+3} + 2^x = 36 \Leftrightarrow 2^x(2^3+1) = 36 \Rightarrow 2^x = \frac{36}{9} \Rightarrow 2^x = 4 \Rightarrow x = 2$;

b) $3^{x+2}+2\cdot 3^{x+1}+3^x=16 \Leftrightarrow\ 3^x\cdot 3^2+2\cdot 3^x\cdot 3+3^x=16 \ \Leftrightarrow\ 3^x(3^2+2\cdot 3+1)=16 \ \Leftrightarrow\ 3^x(16)=16$

$\Rightarrow\ 3^x=\frac{16}{16}=>3^x=1=>x=0$;

c) $5^{x+2}-2\cdot 5^{x+1}-5^x=5\cdot 5^{x-1} \Leftrightarrow\ 5^x\cdot 5^2-2\cdot 5^x\cdot 5-5^x=5\cdot 5^{x-1} \Leftrightarrow\ 5^x\cdot 5^2-2\cdot 5^x\cdot 5-5^x-5\cdot 5^{x-1}=0$

$\Leftrightarrow\ 5^x\left(5^2-2\cdot 5-1-5\cdot\frac{1}{5}\right)=0 \Leftrightarrow\ 5^x\left(25-10-1-1\right)=0\Rightarrow\ 5^x\left(13\right)=0=>x\in\varnothing$;

d) $4^{3x+2}+3\cdot 4^{3x+1}-12\cdot 4^{3x}=256 \Leftrightarrow\ 4^{3x}\cdot 4^2+3\cdot 4^{3x}\cdot 4-12\cdot 4^{3x}=256$

$\Leftrightarrow\ 4^{3x}(4^2+3\cdot 1\cdot 4-12\cdot 1)=256 \Leftrightarrow\ 4^{3x}(16+12-12)=256 \Leftrightarrow\ 4^{3x}(16)=256\Rightarrow$

$4^{3x}=\frac{256}{16}=>4^{3x}=16\ =>4^{3x}=4^2\ =>3x=2\ =>x=\frac{2}{3}$;

e) $4^x-3\cdot 2^x+2=0$ *notam* $2^x=t\rangle 0\ =>t^2-3t+2=0\ =>t_1=1=>2^x=1=>x=0$

$=>t_2=2=>2^x=2=>x=1\quad S=\{0;1\}$;

f) $3^{2x}+8\cdot 3^x-9=0$ notăm $3^x=t\rangle 0\quad t^2+8t-9=0$

$\Delta=b^2-4ac\quad \triangle=64-4\cdot(-9)\quad \triangle=100\quad t_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\triangle}}{2a}=\frac{-8\pm\sqrt{100}}{2}$

$t_1=\frac{-8-10}{2}=\frac{-18}{2}=-9\quad t_2=\frac{-8+10}{2}=\frac{2}{2}=1$

Din $3^x=-9=>x\in\varnothing$ şi din $3^x=1=>x=0$; $S=\{0\}$;

g) $9^x-10\cdot 3^x+9=0 \ \Leftrightarrow\ 3^{2x}-10\cdot 3^x+9=0$. Notăm $3^x=t\rangle 0$ de unde rezultă:

$t^2-10t+9=0\quad \triangle=b^2-4ac\quad \triangle=(-10)^2-4\cdot 1\cdot 9\quad \triangle=100-36\quad \triangle=64$

$t_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\triangle}}{2a}=\frac{10\pm\sqrt{64}}{2}$, $t_1=\frac{10+8}{2}=\frac{18}{2}=9=>3^x=9=>x=2$

$t_2=\frac{10-8}{2}=\frac{2}{2}=1=>3^x=1=>x=0$; $S=\{0;2\}$

h) $2\cdot 2^{2x}-3\cdot 2^x+1=0$. Notăm $2^x=t\rangle 0$ de unde rezultă $2\cdot t^2-3\cdot t+1=0$

$\triangle=b^2-4ac\quad \triangle=(-3)^2-4\cdot 2\cdot 1\quad \triangle=9-8$

$t_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\triangle}}{2a}=\frac{3\pm\sqrt{1}}{4}$, $t_1=\frac{3+1}{4}=\frac{4}{4}=1=>2^x=1=>x=0$,

$t_2=\frac{3-1}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}=>2^x=\frac{1}{2}=>x=-1$ Rezultă, $S=\{-1;0\}$;

i) $25^x+5^x-30=0$ **sau** $5^{2x}+5^x-30=0$; Notam $5^x=t\rangle 0$ de unde rezultă $t^2-t-30=0$

cu $\triangle=b^2-4ac$, $\triangle=1-4\cdot 1\cdot(-30)$, $\triangle=1+120$, $\triangle=121$

$t_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\triangle}}{2a}=\frac{-1\pm\sqrt{121}}{2}\quad t_1=\frac{-1+11}{2}=\frac{10}{2}=5\Rightarrow 5^x=5\Rightarrow x=1$ şi

$t_2=\frac{-1-11}{2}=-\frac{12}{2}=-6=>x\in\varnothing$; $S=\{1\}$;

j) $25^{\sqrt{x-4}}-20\cdot 5^{\sqrt{x-4}}-125=0 \Leftrightarrow\ 5^{2\sqrt{x-4}}-20\cdot 5^{\sqrt{x-4}}-125=0$; Notăm $5^{\sqrt{x-4}}=t\rangle 0\ \Rightarrow$

$t^2-20t-125=0\quad \triangle=b^2-4ac\quad \triangle=(-20)^2-4\cdot 1\cdot(-125)\quad \triangle=400+500\quad \triangle=900$

$t_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\triangle}}{2a}=\frac{20\pm 30}{2}\quad t_1=\frac{20+30}{2}=\frac{50}{2}=25\ \Rightarrow 5^{\sqrt{x-4}}=25\Rightarrow\sqrt{x-4}=2\Rightarrow x=8$

$t_2=\frac{20-30}{2}=\frac{-10}{2}=-5\Rightarrow x\in\varnothing$; $S=\{8\}$;

5. a) $S=\{3\}$; b) $S=\{2\}$; c) $S=\{0\}$; d) $S=\{1\}$; e) $S=\{2\}$; f) $S=\{10\}$; g) $S=\{2\}$; h) $S=\{5\}$; i) $S=\{1\}$; j) $S=\{0\}$; k) $S=\{-1\}$;

6. a) $S=\{0\}$; **b)** $S=\{0\}$; **c)** $S=\{0\}$; **d)** $S=\{1\}$; **e)** $S=\{1;2\}$; **f)** $S=\{1;-\log_3 2\}$; **g)** $S=\{0;2\}$; **h)** $S=\{2\}$; **i)** $S=\{-2;2\}$.

7. a). $S=\left\{-\frac{1}{3}\right\}$; **b).** $S=\{-1\}$; **c).** $S=\{-1;2\}$; **d).** $S=\{0;2\}$; **e).** $S=\{0\}$; **f).** $S=\{-1\}$; **g)** $S=\{1;-\log_3 2\}$; **h).** $S=\{0\}$; **i).** $S=\{0\}$; **j)** $S=\{1;2\}$; **k).** $S=\{0;2\}$; **l).** $S=\{3\}$; **m).** $S=\{0;2\}$; **n).** $S=\{1\}$; **o).** $S=\{1\}$; **p).** $S=\{2\}$; **q).** $S=\{3\}$; **r).** $S=\{-2;2\}$;

8. a) $S=\{0\}$; **b)** $S=\{0;1\}$; **c)** $S=\{1\}$; **d)** $S=\{-1;0\}$; **e)** $S=\left\{\frac{3}{2}\right\}$; **f)** $S=\{1\}$; **g)** $S=\left\{\frac{1}{3}\log_7 2;\frac{1}{3}\log_7 3\right\}$; **h)** $S=\left\{0;\frac{1}{2}\right\}$; **i)** $S=\{0;1\}$; **j)** $S=\{0;2\}$; **k)** $S=\{2\}$; **l)** $S=\{3\}$; **9). a)** $5^{x-2}\geq 125\Leftrightarrow 5^{x-2}\geq 5^3\Rightarrow x-2\geq 3\Rightarrow x\geq 5.\quad x\in[5;\infty)$.

b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1}\langle\frac{1}{9}\Leftrightarrow\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1}\langle\left(\frac{1}{3}\right)^2\Rightarrow 2x+1\rangle 2\Rightarrow x\rangle\frac{1}{2}.\quad x\in\left(\frac{1}{2},\infty\right)$

c) $3^{x+1}+3^{x+2}+3^{x+3}-1053\langle 0\Leftrightarrow 3^x\left(3+3^2+3^3\right)\langle 1053\Rightarrow 3^x\cdot 39\langle 3^3\cdot 39\big|:39\Rightarrow 3^x\langle 3^3\Rightarrow x\langle 3.$

$x\in(-\infty,3)$. **d)** $\left(\frac{3}{2}\right)^{2x+8}\leq\left(\frac{3}{2}\right)^2\Rightarrow 2x+8\leq 2\Rightarrow x\leq -3$.

e) $\left(\frac{4}{5}\right)^{3x^2-1}\geq\left(\frac{16}{25}\right)^{x^2+4}\Leftrightarrow\left(\frac{4}{5}\right)^{3x^2-1}\geq\left(\frac{4}{5}\right)^{2x^2+8}\Rightarrow 3x^2-1\leq 2x^2+8\Rightarrow x^2\leq 9\Rightarrow x\in[-3;3]$.

f) Notăm $2^x=t$ şi ecuaţia dată este echivalentă cu $2t^2-12t+16\leq 0$. Rezolvăm mai întîi ecuaţia de gradul doi asociată asociată $2t^2-12t+16=0\big|:2\Rightarrow t^2-6t+8=0\Rightarrow t_1=2,t_2=4$ atunci soluţia inecuaţiei în t este $t\in[2;4]$. Rezultă $2\leq 2^x\leq 4\Rightarrow x\in[1;2]$.

10. Se face notația

$4^x+\frac{2}{4^x}=y\rangle 0$ și prin ridicare la puterea a treia rezultă $64^x+6\cdot 4^x+\frac{12}{4^x}+\frac{8}{64^x}=y^3$ adică $y^3=27\Rightarrow y=3\Rightarrow 4^x+\frac{2}{4^x}=3\Rightarrow t^2-3t+2=0$ unde cu t s-a notat funcția exponențială $2^x=t\rangle 0\Rightarrow t\in\{1;2\}\Rightarrow x\in\left\{0;\frac{1}{2}\right\}$.

11. $3^x+4^x=5^x+x-2\big|:5^x\Rightarrow\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x=1+\frac{x-2}{5^x}$. Rezultă că funcția $f(x)=\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x$ estye strict descrescătoare pe domeniul de definiție deci injectivă, așadar are soluție unică ecuația dată și anume x=2. Se verifică că pentru $x\langle 2$ și $x\rangle 2$ ecuația nu are soluție.

5.3 Teste de autoevaluare

Testul 1. Funcţii exponenţiale

1) Cum $f(-x)+f(x)=0, \forall x\in\mathbb{R}$ şi $f(0)=0$, rezultă că suma cerută este egală cu 0.

2) $f(0)+f(1)+f(2)+.....+f(9)+f(10)=$

$$1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+.....+\frac{1}{5^{10}}=\frac{\left(\frac{1}{5}\right)^{11}-1}{\frac{1}{5}-1}=\frac{1-5^{11}}{5^{11}}\cdot\frac{5}{-4}=\frac{5^{11}-1}{4\cdot 5^{10}}.$$

4) Pentru $a=b=c=-1\Rightarrow a+b+c=-3.$

5) Pentru $a\rangle 1$ din $a^{x^2-2x+3}\rangle a^{-1}\Rightarrow\ x^2-2x+3\rangle -1\Rightarrow\ x^2-2x+4\rangle 0$ pentru orice x real deoarece discriminantul ecuaţiei $x^2-2x+4=0$ este $\Delta=-12\langle 0$.

Pentru $0\langle a\langle 1$ din $a^{x^2-2x+3}\rangle a^{-1}\Rightarrow x^2-2x+3\langle -1\Rightarrow x^2-2x+4\langle 0\Rightarrow x\in\varnothing$.

Aşadar, pentru $a\rangle 1$ are loc relaţia dată.

6) $2^x+2^{\frac{1}{x}}\geq 2\sqrt{2^x\cdot 2^{\frac{1}{x}}}=2\sqrt{2^{x+\frac{1}{x}}}\geq 2\sqrt{2^2}=4$.

Testul 2 . Ecuaţii exponenţiale

1) $6^{2x-4}=6^{8+5x}\Rightarrow 2x-4=8+5x,\ \Rightarrow 2x-5x=8+4\Rightarrow -3x=12$

$\Rightarrow x=-4.\quad S=\{-4\}$.

2) Ecuaţia dată este echivalentă cu $2^{3x-9}=2^{x^2-3}\Rightarrow\ 3x-9=x^2-3x\Rightarrow\ x^2-6x+9=0$. Se obţine soluţia 3. $S=\{3\}$.

3) $4^{x-2}+4^{x+2}=257\Rightarrow\frac{4^x}{4^2}+4^x\cdot 4^2=257\ \Rightarrow 4^x(\frac{1}{16}+16)=257$

$\Rightarrow 4^x\cdot\frac{257}{16}=257\big|:257\Rightarrow\Rightarrow 4^x=16\Rightarrow x=2.\ \ S=\{2\}$.

4) Se face notaţia $2^x=t\rangle 0$ de unde, ecuaţia dată devine $t^2-9t+8=0$. Rezultă,

$t_1=1\Rightarrow 2^x=1\Rightarrow x=0$ şi $t_2=8\Rightarrow 2^x=8\Rightarrow x=3$. $S=\{0;3\}$

5) $\left(\frac{2}{3}\right)^{x+4}\cdot\frac{9}{4}=\frac{16}{81}\Rightarrow\left(\frac{2}{3}\right)^{x+4}=\frac{16}{81}\cdot\frac{4}{9}\Rightarrow\left(\frac{2}{3}\right)^{x+4}=\left(\frac{2}{3}\right)^5\Rightarrow x+4=5\Rightarrow x=1.\ \ S=\{1\}$.

6) Condiţia de existenţă care se impune pentru început este $x\geq 0$

Ecuaţia dată este echivalentă cu $5^{2-x}=5^{-\sqrt{x}}\ \Rightarrow\ 2-x=-\sqrt{x}\ \Leftrightarrow x-2=\sqrt{x}$. De aici , observăm că $x-2\geq 0\Rightarrow x\geq 2$.

Ridicând la pătrat se obţine ecuaţia $x^2-5x+4=0$ cu soluţia care convine 4. $S=\{4\}$

Testul 3. Ecuaţii exponenţiale

1). $16^{x-1}=0,25\Leftrightarrow 16^{x-1}=\frac{25}{100}\Rightarrow\left(2^4\right)^{x-1}=\frac{1}{4}\Rightarrow 2^{4x-4}=2^{-2}\Rightarrow$

$4x-4=-2\Rightarrow 4x=2\Rightarrow x=\frac{1}{2}.\quad$ Aşadar, $S=\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

2) Se pune condiţia de existenţă a radicalului, $x+2\geq 0\Rightarrow x\geq -2.$

$9^{\sqrt{x+2}}=27\Leftrightarrow 3^{2\sqrt{x+2}}=3^3\Rightarrow 2\sqrt{x+2}=3\Rightarrow\ 4(x+2)=9\ \Rightarrow 4x=1\Rightarrow x=\frac{1}{4}$. Aşadar, $S=\left\{\frac{1}{4}\right\}$.

3) $3^{x-2}+3^{x-1}+3^{x+1}+3^{x+2}=336\Rightarrow 3^x\left(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3}+3+3^2\right)=336$

$\Rightarrow 3^x\cdot\frac{112}{9}=336\Rightarrow 3^x=3^3\Rightarrow x=3$. Aşadar, $S=\{3\}$.

4) Se face notaţia $7^x=t\rangle 0$ de unde, ecuaţia dată devine $t^2-8t+7=0$. Rezultă,
$t_1=1\Rightarrow 7^x=1\Rightarrow x=0$ şi $t_2=7\Rightarrow 7^x=7\Rightarrow x=1$. $S=\{0;1\}$.

5) Ecuaţia dată este echivalentă cu $\left(\frac{25}{16}\right)^{x^2-10}=\left(\frac{8}{10}\right)^2\Rightarrow$

$\left(\frac{5}{4}\right)^{2(x^2-10)}=\left(\frac{5}{4}\right)^{-2}\Rightarrow\ \left(\frac{5}{4}\right)^{2x^2-20}=\left(\frac{5}{4}\right)^{-2}\Rightarrow 2x^2-20=-2\,,\Rightarrow x^2=9\Rightarrow x=\pm 3.$ Aşadar,
$S=\{-3;3\}$.

6) Observăm că $\left(\sqrt{5}+2\right)\cdot\left(\sqrt{5}-2\right)=1$ atunci, $\left(\sqrt{5}-2\right)^x=\frac{1}{\left(\sqrt{5}+2\right)^x}$ prin urmare, facem notaţia

$\left(\sqrt{5}+2\right)^x=t\rangle 0\Rightarrow$ ecuaţia dată devine $t+\frac{1}{t}=18\Rightarrow t^2-18t+1=0$ cu soluţiile $t_{1,2}=9\pm 4\sqrt{5}$. Cum

$9\pm 4\sqrt{5}=\left(2\pm\sqrt{5}\right)^2\Rightarrow\ \left(\sqrt{5}+2\right)^x=\left(2+\sqrt{5}\right)^2\Rightarrow x=2$, sau

$\left(\sqrt{5}+2\right)^x=\left(\sqrt{5}-2\right)^2=\frac{1}{\left(\sqrt{5}+2\right)^2}=\left(\sqrt{5}+2\right)^{-2}\Rightarrow x=-2.$ Aşadar, $S=\{-2;2\}$

Testul 4. Inecuaţii exponenţiale

1) $5^{x-2}\geq 125\Leftrightarrow 5^{x-2}\geq 5^3\Rightarrow x-2\geq 3\Rightarrow x\geq 5.\quad x\in[5;\infty)$.

2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1}\langle\frac{1}{9}\Leftrightarrow\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1}\langle\left(\frac{1}{3}\right)^2\Rightarrow 2x+1\rangle 2\Rightarrow x\rangle\frac{1}{2}.\quad x\in\left(\frac{1}{2},\infty\right)$

3) $3^{x+1}+3^{x+2}+3^{x+3}-1053\langle 0\Leftrightarrow 3^x\left(3+3^2+3^3\right)\langle 1053\Rightarrow$

$3^x\cdot 39\langle 3^3\cdot 39\,|:39\Rightarrow 3^x\langle 3^3\Rightarrow x\langle 3.\ \ x\in(-\infty,3)$.

4) $\left(\frac{3}{2}\right)^{2x+8}\leq\left(\frac{3}{2}\right)^2\Rightarrow 2x+8\leq 2\Rightarrow x\leq -3$.

5) $\left(\frac{4}{5}\right)^{3x^2-1}\geq\left(\frac{16}{25}\right)^{x^2+4}\Leftrightarrow\left(\frac{4}{5}\right)^{3x^2-1}\geq\left(\frac{4}{5}\right)^{2x^2+8}\Rightarrow 3x^2-1\leq 2x^2+8$

$\Rightarrow x^2\leq 9\Rightarrow x\in[-3;3]$.

6) Notăm $2^x=t$ şi ecuaţia dată este echivalentă cu $2t^2-12t+16\leq 0$. Rezolvăm mai întîi ecuaţia de gradul doi asociată asociată

$2t^2-12t+16=0\,|:2\Rightarrow t^2-6t+8=0\Rightarrow t_1=2,t_2=4$ atunci soluţia inecuaţiei în t este

$t\in[2;4]$. Rezultă $2\leq 2^x\leq 4\Rightarrow x\in[1;2]$.

Cap. 6 Funcții și ecuații logaritmice

6.1. Funcții logaritmice

1. $f(7)+f(\frac{15}{2})=-1$; **2.** $f(1)+f(\frac{1}{3})+f(3)+f(\sqrt{3})=-\frac{1}{2}$ **3.** m=3; **4.**

$O(0;0)\in G_f \Rightarrow f(0)=0$, adevărat. **5.** $f(2\sqrt{3}-3)+f(2\sqrt{3}+3)=1$ *iar* $f(\sqrt{3})=\frac{1}{2}$

6. a) f(x) crescătoare pe $(0;\infty)$; b) f(x) descrescătoare pe $(0;\infty)$; c) f(x) crescătoare pe $(0;\infty)$; d) f(x) crescătoare pe $(-2;\infty)$;

7. a) $f(x)\rangle 0, \forall x\in\left(\frac{1}{5};\infty\right)$; b) $f(x)\rangle 0, \forall x\in(-1;\infty)$; c) $f(x)\rangle 0, \forall x\in(-\infty;5)$.

8. $f^{-1}(x)=\frac{3^x}{4}+\frac{1}{2}$

10). a) Se pune condiţia $x-6\rangle 0\Rightarrow x\rangle 6\Rightarrow D=(6;\infty)$;

b) Se pune condiţia $x^2-7x+10\rangle 0\Rightarrow x\in(-\infty;2)\cup(5;\infty)\Rightarrow D=(-\infty;2)\cup(5;\infty)$;

c) Se pune condiţia $\frac{1}{x-2}\rangle 0\Rightarrow x-2\rangle 0\Rightarrow x\in(2;\infty)\Rightarrow D=(2;\infty)$;

d) Din $\frac{x+2}{x-1}\rangle 0\Leftrightarrow\frac{(x+2)(x-1)}{(x-1)^2}\rangle 0\Rightarrow x\in(-\infty;-2)\cup(1;\infty)$; $D=(-\infty;-2)\cup(1;\infty)$.

e) Se pune condiţia $3x-9\rangle 0\Rightarrow x\rangle 3\Rightarrow x\in(3;\infty)\Rightarrow D=(3;\infty)$;

11. a) $D=(-4;\infty)$; b) $D=(-\infty;-3)\cup(3;\infty)$; c) $D=(-2;2)$; d) $D=(-\infty;1)\cup(4;\infty)$;

e) $D=(-\infty;-1)\cup(3;\infty)$; f) $D=(-3;-2)\cup(-2;-1)\cup(1;\infty)$; g) $D=(2;\infty)$; h) $D=(0;\infty)$;

i) $D=(3;5)$; j) $D=(1;4)$; k) Din $\frac{1}{x+6}\rangle 0\Rightarrow x+6\rangle 0\Rightarrow x\rangle -6$. $D=(-6,\infty)$.

l) Din $x^2-8x+12\rangle 0\Rightarrow x\in(-\infty,2)\cup(6,\infty)$. $D=(-\infty,2)\cup(6,\infty)$

12) Trebuie ca $\frac{x+1}{x+2}\rangle 0\Leftrightarrow\frac{(x+1)(x+2)}{(x+2)^2}\rangle 0\Leftrightarrow(x+1)(x+2)\rangle 0\Rightarrow D=(-\infty,-2)\cup(-1,\infty)$.

$f(1)+f(2)+....+f(484)=\log_3\frac{2}{3}+\log_3\frac{3}{4}+\log_3\frac{4}{5}+.....+\log_3\frac{485}{486}=$

$\log_3\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot.....\cdot\frac{485}{486}=\log_3\frac{1}{243}=\log_3 3^{-5}=-5$.

13) $f(2)+f(3)+....+f(10)=2\Leftrightarrow\frac{1}{\log_2 a}+\frac{1}{\log_3 a}+....+\frac{1}{\log_{10} a}=2\Rightarrow$

$\log_a 2+\log_a 3+...+\log_a 10=2\Rightarrow\log_a 2\cdot 3\cdot 4\cdot..\cdot 10=2\Rightarrow\log_a 10!=2\Rightarrow 10!=a^2\Rightarrow a=\sqrt{10!}$.

6.2. Ecuații logaritmice

1). a). Condiţii de existenţă: $x\rangle 0$; $\log_2 x=1\Rightarrow x=2^1=2;\ \ S=\{2\}$.

b). Condiţii de existenţă: $x\rangle 0$; $\log_{\frac{1}{2}} x=2\Rightarrow x=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4};\ S=\left\{\frac{1}{4}\right\}$.

c). C.E: $x\rangle 0$; $\log_3 x=-1\Rightarrow x=3^{-1}=\frac{1}{3};\ \ S=\left\{\frac{1}{3}\right\}$.

d). Condiţii de existenţă: $x\rangle 0$; $\log_4 x=0\Rightarrow x=4^0=1;\ S=\{1\}$.

e). C.E: $x\rangle 0,\ x\neq 1$; $\log_x \frac{1}{9}=2\Rightarrow \frac{1}{9}=x^2\Rightarrow x=\sqrt{\frac{1}{9}}=\frac{1}{3};\ S=\left\{\frac{1}{3}\right\}$.

f). C.E: $x\rangle 0$; $\log_{\frac{1}{5}} x=-2\Rightarrow x=\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}=\left(5^{-1}\right)^{-2}=25;\ S=\{25\}$.

g). C.E: $2x-6\rangle 0\Rightarrow x\rangle 3$; $\log_3(2x-6)=2\Rightarrow 2x-6=3^2\Rightarrow 2x=15\Rightarrow x=7,5;$
$S=\{7,5\}$.

h). C.E: $3x+1\rangle 0\Rightarrow x\rangle -\frac{1}{3}$; $\log_2(3x+1)=4\Rightarrow 3x+1=2^4\Rightarrow x=\frac{15}{3}=5;\ S=\{5\}$.

i). C.E: $x+3\rangle 0\Rightarrow x\rangle -3$; $\lg(x+3)=2\Rightarrow x+3=10^2\Rightarrow x=97;\ S=\{97\}$.

j). Condiţii de existenţă: $x^2-8x-1\rangle 0$;
$\log_2(x^2-8x-1)=3\Rightarrow x^2-8x-1=2^3\Rightarrow x^2-8x-9=0\Rightarrow x_1=-1,\ x_2=9;\ S=\{-1;9\}$.

k). C.E: $x^2-4x-3\rangle 0$**;**
$\log_3(x^2-4x-3)=2\Rightarrow x^2-4x-3=3^2\Rightarrow x^2-4x-12=0\Rightarrow x_1=-2;\ x_2=6$**;** $S=\{-2;6\}$**.**

l). C.E: $x-5\rangle 0\Rightarrow x\rangle 5$**;** $\log_4(x-5)=\frac{1}{2}\Rightarrow x-5=4^{\frac{1}{2}}\Rightarrow x-5=\sqrt{4}\Rightarrow x=7$ **;** $S=\{7\}$**.**

m). C.E: $2x-3\rangle 0\Rightarrow x\rangle \frac{3}{2}$**;** $\log_8(2x-3)=\frac{1}{3}\Rightarrow 2x-3=8^{\frac{1}{3}}\Rightarrow 2x-3=2\Rightarrow x=\frac{5}{2}$**;** $S=\left\{\frac{5}{2}\right\}$**.**

n). Condiţii de existenţă: $\log_3 x\rangle 0\Rightarrow x\rangle 1$**;**
$\log_2(\log_3 x)=1\Rightarrow \log_3 x=2\Rightarrow x=3^2\Rightarrow x=9$ **;** $S=\{9\}$**.**

o). Condiţii de existenţă: $x\rangle 0$; $\log_2(\log_{\frac{1}{2}}(\log_4 x))=0\Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}(\log_4 x)=1\Rightarrow \log_4 x=\frac{1}{2}\Rightarrow x=2$;
$S=\{2\}$.

2). a). Condiţii de existenţă: $x^2-7x+8\rangle 0,\ \ x-7\rangle 0\Rightarrow x\rangle 7$;
$\log_3(x^2-7x+8)-\log_3(x-7)=0\Rightarrow \log_3(x^2-7x+8)=\log_3(x-7)\Rightarrow x^2-7x+8=x-7$
$\Rightarrow x^2-8x+15=0\Rightarrow x_1=3,\ x_2=5$. Cum acestea nu fac parte din domeniul de existenţă al logaritmilor rezultă $S=\varnothing$;

b). C.E: $x+2\rangle 0,\ \ x\rangle 0\Rightarrow x\rangle 0$;
$\log_2(x+2)+\log_2 x=3\Leftrightarrow \log_2(x+2)\cdot x=3\Rightarrow x^2+2x=8\Rightarrow x^2+2x-8=0\Rightarrow x_1=-4,\ x_2=2;$
Soluţia bună este x= 2; $S=\{2\}$;

c). C.E: $x+3\rangle 0,\ \ x+4\rangle 0,\ \ 3-3x\rangle 0\Rightarrow x\in(-3;1)$;
$\lg(x+3)+\lg(x+4)=\lg(3-3x)\Rightarrow \lg(x+3)(x+4)=\lg(3-3x)\Rightarrow x^2+7x+12=3-3x\Rightarrow$
$x^2+10x+9=0\Rightarrow x_1=-1,\ x_2=-9$; Rezultă $S=\{-1\}$;

d). C.E: $x\rangle 0$;

$\log_3 x+\log_9 x+\log_{27} x=\frac{11}{12}\Rightarrow \log_3 x+\frac{\log_3 x}{\log_3 9}+\frac{\log_3 x}{\log_3 27}=\frac{11}{12}\Rightarrow \log_3 x\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=\frac{11}{12}\Rightarrow$

$\log_3 x\cdot\frac{11}{6}=\frac{11}{12}\Rightarrow \log_3 x=\frac{1}{2}\Rightarrow x=3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$; $S=\left\{\sqrt{3}\right\}$;

e). C.E: $x-3\rangle 0\Rightarrow x\rangle 3$; Se face notaţia $\lg(x-3)=t\Rightarrow t^2-t=0\Leftrightarrow t(t-1)=0\Rightarrow t_1=0$ *sau* $t_2=1$.

Pentru $t=0\Rightarrow \lg(x-3)=0\Rightarrow x-3=1\Rightarrow x=4$;

Pentru $t=1\Rightarrow \lg(x-3)=1\Rightarrow x-3=10\Rightarrow x=13$; $S=\{4;13\}$;

f). C.E: $x\rangle 0$; Se face notaţia $\lg x=t\Rightarrow t^2-11t+10=0\Rightarrow t_1=1$ *sau* $t_2=10$;

Pentru $t=1\Rightarrow \lg x=1\Rightarrow x=10$; Pentru $t=10\Rightarrow \lg x=10\Rightarrow x=10^{10}$; $S=\left\{10;10^{10}\right\}$;

3). a) 7; b) 4; c) 95; d) -6; 3; e) -1; 5; f) -4; 2; g) -6; h) 0; 3; i) $\varnothing$**; j) 4; k) 4; l) -3; m)** 3^9**; n) 3;**

4). a) 5; b) 3; c) 5; d) -1; e) 5; f) 2; g) 6; h) 3; i) - 1; j) 6; k) 5; l) 7; m) $\frac{9}{2}$**; n) 1; o)** $S=\varnothing$**;**

p) $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$**; q)**. Condiţii de existenţă: $2x+4\rangle 0$, $3x+1\rangle 0\Rightarrow x\rangle -\frac{1}{3}$;

$\log_2(2x+4)=\log_2(3x+1)$ Cum funcţia logaritmică este bijectivă rezultă $2x+4=3x+1\Rightarrow x=3$;

$S=\{3\}$. **r)**. Condiţii de existenţă: $x-2\rangle 0$, $x^2-5x+3\rangle 0\Rightarrow x\rangle \frac{5+\sqrt{13}}{2}$;

$\log_2(x-2)=\log_2(x^2-5x+3)\Rightarrow x-2=x^2-5x+3\Rightarrow x^2-6x+5=0\Rightarrow x_1=1,\ x_2=5$; Doar x = 5 este soluţie bună. $S=\{5\}$.

5). a) 10; 100; b) 10; 1000; c) 99 ; 10^5 **– 1; d)** $\frac{1}{10}$**; 100; e) 0; -3 ; f) 2; 16; g) 2; h) 3; i) 2; j) 5; 25; k) -2;** -1;

6) $\log_3(x+6)\rangle 0\Leftrightarrow x+6\rangle 1\Rightarrow x\rangle -5.$

7). a) $\lg(3x+10)\geq 2$. Condiţii de existenţă: $3x+10\rangle 0\Rightarrow x\rangle -\frac{10}{3}$.

Inecuaţia dată devine $\lg(3x+10)\geq \lg 10^2\Rightarrow 3x+10\geq 100\Rightarrow\ \ x\geq 30,\ x\in[30;\infty)$.

b) Condiţii de existenţă: $x^2-4\rangle 0$ şi $2x-4\rangle 0$. Din cele două rezultă $x\rangle 2$. Din $\log_{\frac{1}{3}}(x^2-4)\leq \log_{\frac{1}{3}}(2x-4)$ rezultă

$x^2-4\geq 2x-4\Rightarrow x^2-2x\geq 0\Rightarrow x\in(-\infty,0)\cup(2,\infty)\cap Df\Rightarrow x\in(2,\infty).$

c) $\log_{x+1}(x^2-3x+2)\rangle 2$. Condiţii de existenţă: $x+1\rangle 0,\ \Rightarrow x\rangle -1$, $x+1\neq 1\Rightarrow x\neq 0$şi $x^2-3x+2\rangle 0\Rightarrow x\in(-\infty;1)\cup(2;\infty)$. De aici rezultă, $x\in(-1;0)\cup(0;1)\cup(2;\infty)$.

Avem două cazuri: Pentru $x+1\rangle 1,\ \Rightarrow x\rangle 0$ inegalitatea dată devine

$x^2-3x+2\rangle(x+1)^2\Rightarrow -5x\rangle -1\Rightarrow\ x\langle\frac{1}{5}$. Soluţia în acest caz este $x\in\left(0;\frac{1}{5}\right)$.

Pentru $0\langle x+1\langle 1,\ \Rightarrow x\in(-1;0)$ inegalitatea dată devine $x^2-3x+2\langle(x+1)^2\Rightarrow -5x\langle -1\Rightarrow\ x\rangle\frac{1}{5}$.

Soluţia în acest caz este $\varnothing$.

d) Condiţii de existenţă: $x^2-10x+25\rangle 0,\ \Rightarrow x\in\mathbb{R}$. Inegalitatea dată devine,

$\log_5(x^2-10x+25)\langle\log_5 5^2\Rightarrow x^2-10x+25\langle 25\Rightarrow x^2-10x\langle 0\Rightarrow x\in(0;10)$.

e) Condiţii de existenţă: $\log_{\frac{1}{2}} x\rangle 0 \Rightarrow x\rangle 1$. Din $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_{\frac{1}{4}} x\right)\rangle 1$ rezultă

$\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_{\frac{1}{4}} x\right)\rangle \log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2} \Rightarrow \log_{\frac{1}{4}} x\langle\frac{1}{2} \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{4}} x\langle\log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow x\rangle\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow x\rangle\sqrt{\frac{1}{4}} \Rightarrow x\rangle\frac{1}{2}$.

f) Condiţii de existenţă: $9^x-10\cdot 3^x+36\rangle 0$.

$\log_3(9^x-10\cdot 3^x+36)\langle 3 \Leftrightarrow \log_3(9^x-10\cdot 3^x+36)\langle\log_3 3^3 \Rightarrow$

$9^x-10\cdot 3^x+36\langle 27 \Rightarrow 9^x-10\cdot 3^x+9\langle 0$. Notăm cu $t=3^x$ şi rezolvăm ecuaţia de gradul doi asociată funcţiei de gradul doi. Rezultă $t_1=1$şi $t_2=9 \Rightarrow t\in(1;9) \Rightarrow 3^x\in(1;9) \Rightarrow x\in(0;2)$.

8. $\lg x=\frac{\lg(x-2)+\lg(x+4)}{2} \Rightarrow \lg x^2=\lg(x-2)(x+4) \Rightarrow x^2=(x-2)(x+4) \Rightarrow x=4$.

9. Se face notaţia $\log_2 x-3=t \Rightarrow \log_2 x=t+3 \Rightarrow x=2^{t+3} \Rightarrow f(t)=2^{t+1} \Rightarrow$

$S=2+2^2+2^3+....+2^{101}$.

10. $x=2^{2021}-1$.

Teste de autoevaluare

Testul 1. Funcţii logaritmice

2) Din $\frac{1}{x+6}\rangle 0 \Rightarrow x+6\rangle 0 \Rightarrow x\rangle -6$. $D=(-6,\infty)$.

3) Din $x^2-8x+12\rangle 0 \Rightarrow x\in(-\infty,2)\cup(6,\infty)$. $D=(-\infty,2)\cup(6,\infty)$

4) $\log_3(x+6)\rangle 0 \Leftrightarrow x+6\rangle 1 \Rightarrow x\rangle -5$.

5) Trebuie ca $\frac{x+1}{x+2}\rangle 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)(x+2)}{(x+2)^2}\rangle 0 \Leftrightarrow (x+1)(x+2)\rangle 0 \Rightarrow D=(-\infty,-2)\cup(-1,\infty)$.

$f(1)+f(2)+....+f(484)=\log_3\frac{2}{3}+\log_3\frac{3}{4}+\log_3\frac{4}{5}+.....+\log_3\frac{485}{486}=$

$\log_3\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot.....\cdot\frac{485}{486}=\log_3\frac{1}{243}=\log_3 3^{-5}=-5$.

6) $f(2)+f(3)+....+f(10)=2 \Leftrightarrow \frac{1}{\log_2 a}+\frac{1}{\log_3 a}+....+\frac{1}{\log_{10} a}=2 \Rightarrow$

$\log_a 2+\log_a 3+...+\log_a 10=2 \Rightarrow \log_a 2\cdot 3\cdot 4\cdot..\cdot 10=2 \Rightarrow \log_a 10!=2 \Rightarrow 10!=a^2 \Rightarrow a=\sqrt{10!}$.

Testul 2. Ecuaţii logaritmice

1. Mai întâi se pune condiţia de existenţă a logaritmului: $2x-4\rangle 0 \Rightarrow x\rangle 2$. Pentru a rezolva ecuaţia, aplicăm formula $\log_a x=y \Rightarrow x=a^y$, aşadar, în cazul nostru rezultă

$2x-4=4^2 \Rightarrow x=10$. $S=\{10\}$

2. Din condiţiile de existenţă ale logaritmilor rezultă $2x+1\rangle 0,\ \ x+2\rangle 0,\ \Rightarrow x\rangle -\frac{1}{2}$. Mai departe, ecuaţia dată este echivalentă cu $\log_3(2x+1)\cdot(x+2)=2$, de unde rezultă $(2x+1)(x+2)=9\Rightarrow\ 2x^2+5x-7=0\Rightarrow x_1=-\frac{7}{2},\ x_2=1$. Aşadar, $S=\{1\}$.

3. Din condiţiile de existenţă ale logaritmilor rezultă $x+3\rangle 0,\ \ x+6\rangle 0,\ \Rightarrow x\rangle -3$. Mai departe, ecuaţia dată este echivalentă cu $\log_2\frac{x+3}{x+6}=-2$, de unde rezultă $\frac{x+3}{x+6}=2^{-2}\Rightarrow\ 4x+12=x+6\Rightarrow x=-2\Rightarrow S=\{-2\}$.

4. Din condiţiile de existenţă ale logaritmilor rezultă $x^2-4\rangle 0,\ \ 2x+4\rangle 0,\ \Rightarrow x\rangle 2$. Mai departe, ecuaţia dată este echivalentă cu $\log_5(x^2-4)=\log_5(2x+4)\Rightarrow x^2-4=2x+4\Rightarrow x^2-2x-8=0$ cu soluţiile $x_1=-2,\ x_2=4$. Soluţia care convine este 4, aşadar, $S=\{4\}$.

5. Mai întâi se pun condiţiile de existenţă:

$4x+8\rangle 0\Rightarrow x\rangle -2,\ 3x+2\rangle 0\Rightarrow x\rangle \frac{-2}{3}$ de unde rezultă $x\rangle \frac{-2}{3}$.

Ecuaţia dată este echivalentă $\log_2(4x+8)=\log_2 2\cdot(3x+2)\Rightarrow 4x+8=6x+4\Rightarrow x=2$. $S=\{2\}$.

6. Deoarece $\log_3 x^2=2\log_3 x$ şi $\log_{\frac{1}{3}} x=\frac{\log_3 x}{\log_3 3^{-1}}=-\log_3 x$ rezultă că ecuaţia dată este echivalentă cu $\left(2\log_3 x\right)^2-(-\log_3 x)=5$.

$4\left(\log_3 x\right)^2+\log_3 x-5=0$. Notând $\log_3 x=t\Rightarrow 4t^2+t-5=0$ cu soluţiile $t_1=-\frac{10}{8}=-\frac{5}{4}$ şi $t_2=1$. Rezultă , din $\log_3 x=-\frac{5}{4}\Rightarrow x=3^{-\frac{5}{4}}=\frac{1}{\sqrt[4]{3^5}}$ şi din $\log_3 x=1\Rightarrow x=3$.

Testul 3. Ecuaţii logaritmice

1) Mai întâi se pune condiţia de existenţă a logaritmului: $2x+6\rangle 0\Rightarrow x\rangle -3$. Pentru a rezolva ecuaţia, aplicăm formula $\log_a x=y\Rightarrow x=a^y$, aşadar, în cazul nostru rezultă $2x+6=5^3\Rightarrow x=\frac{119}{2}$. $S=\left\{\frac{119}{2}\right\}$.

2) Din condiţiile de existenţă ale logaritmilor rezultă $x^2-x-6\rangle 0,\ \ x+2\rangle 0,\ \Rightarrow x\rangle 3$. Mai departe, aplicăm formula $\log_a f(x)=\log_a g(x)\Rightarrow f(x)=g(x)$. În cazul nostru rezultă $x^2-x-6=x+2\ \Rightarrow x^2-2x-8=0\ \ x_1=-2, x_2=4.\ S=\{4\}$.

3) Din condiţiile de existenţă ale logaritmului rezultă $x-3\rangle 0\Rightarrow x\rangle 3$. Mai departe se aplică formula $\log_a x=y\Rightarrow x=a^y$ de unde rezultă $x^2+3=x^2-6x+9\ \Rightarrow x=1$.

$S=\varnothing$.

4) Din condiţia de existenţă a logaritmului rezultă $x\rangle 0$. Făcând notaţia $\lg x=t$ rezultă ecuaţia $t^2-9t-10=0$ cu soluţiile - 1 şi 10. De aici, rezultă $\lg x=-1\Rightarrow x=10^{-1}=\frac{1}{10}$ şi $\lg x=10\Rightarrow x=10^{10}$.

5) Condiţii de existenţă: $x^3+8x^2+29x+30\rangle 0$ şi $x+3\rangle 0$.

Mai departe se aplică formula $\log_a x=y\Rightarrow x=a^y$ de unde rezultă

$x^3+8x^2+29x+30=(x+3)^2\Rightarrow\ x^3+8x^2+29x+30=x^3+9x^2+27x+27\Rightarrow$

$x^2-2x-3=0\Rightarrow x_1=-1, x_2=3.$

6) Se pune mai întâi condiţia de existenţă a logaritmului şi anume

$x+4\rangle 0\Rightarrow x\rangle -4$. Ecuaţia dată este echivalentă cu $\log_2(2x^2+4)-\log_2(x+4)^2=-2\Rightarrow$

$\log_2\dfrac{2x^2+4}{(x+4)^2}=\log_2 2^{-2}\Rightarrow\ \dfrac{2x^2+4}{x^2+8x+16}=\dfrac{1}{4}\Rightarrow\ 8x^2+16=x^2+8x+16\Rightarrow\ \ x=0.$

Testul 4. Inecuaţii logaritmice

1) $\lg(3x+10)\geq 2$. Condiţii de existenţă: $3x+10\rangle 0\Rightarrow x\rangle -\dfrac{10}{3}$.

Inecuaţia dată devine $\lg(3x+10)\geq\lg 10^2\Rightarrow 3x+10\geq 100\Rightarrow$

$x\geq 30,\ x\in[30;\infty)$.

2) Condiţii de existenţă: $x^2-4\rangle 0$ şi $2x-4\rangle 0$. Din cele două rezultă $x\rangle 2$. Din

$\log_{\frac{1}{3}}(x^2-4)\leq\log_{\frac{1}{3}}(2x-4)$ rezultă

$x^2-4\geq 2x-4\Rightarrow x^2-2x\geq 0\Rightarrow x\in(-\infty,0)\cup(2,\infty)\cap Df\Rightarrow x\in(2,\infty).$

3) $\log_{x+1}(x^2-3x+2)\rangle 2$. Condiţii de existenţă: $x+1\rangle 0,\ \Rightarrow x\rangle -1$, $x+1\neq 1\Rightarrow x\neq 0$ **şi**

$x^2-3x+2\rangle 0\Rightarrow x\in(-\infty;1)\cup(2;\infty)$.

De aici rezultă, $x\in(-1;0)\cup(0;1)\cup(2;\infty)$.

Avem două cazuri: Pentru $x+1\rangle 1,\ \Rightarrow x\rangle 0$ inegalitatea dată devine

$x^2-3x+2\rangle(x+1)^2\Rightarrow -5x\rangle -1\Rightarrow\ x\langle\dfrac{1}{5}$. Soluţia în acest caz este $x\in\left(0;\dfrac{1}{5}\right)$.

Pentru $0\langle x+1\langle 1,\ \Rightarrow x\in(-1;0)$ inegalitatea dată devine $x^2-3x+2\langle(x+1)^2\Rightarrow -5x\langle -1\Rightarrow\ x\rangle\dfrac{1}{5}$.

Soluţia în acest caz este $\varnothing$.

4) Condiţii de existenţă: $x^2-10x+25\rangle 0,\ \Rightarrow x\in\mathbb{R}$. Inegalitatea dată devine,

$\log_5(x^2-10x+25)\langle\log_5 5^2\Rightarrow x^2-10x+25\langle 25\Rightarrow x^2-10x\langle 0\Rightarrow x\in(0;10)$.

5) Condiţii de existenţă: $\log_{\frac{1}{2}}x\rangle 0\Rightarrow x\rangle 1$. Din $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_{\frac{1}{4}}x\right)\rangle 1$ rezultă

$\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_{\frac{1}{4}}x\right)\rangle\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{2}\Rightarrow\log_{\frac{1}{4}}x\langle\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\log_{\frac{1}{4}}x\langle\log_{\frac{1}{4}}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}\Rightarrow x\rangle\left(\dfrac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}\Rightarrow x\rangle\sqrt{\dfrac{1}{4}}\ \Rightarrow x\rangle\dfrac{1}{2}.$

6) Condiţii de existenţă: $9^x-10\cdot 3^x+36\rangle 0$.

$\log_3(9^x-10\cdot 3^x+36)\langle 3\Leftrightarrow\log_3(9^x-10\cdot 3^x+36)\langle\log_3 3^3\Rightarrow$

$9^x-10\cdot 3^x+36\langle 27\Rightarrow 9^x-10\cdot 3^x+9\langle 0$. Notăm cu $t=3^x$ şi rezolvăm ecuaţia de gradul doi asociată funcţiei de gradul doi.

Rezultă $t_1=1$ şi $t_2=9\Rightarrow t\in(1;9)\Rightarrow\ 3^x\in(1;9)\Rightarrow\ x\in(0;2)$.

Cap. 8. Combinări

8.1. Probleme de numărare

1. 28 încercări; **2**. 10 caiete; **3**. 168 de perechi; **4**. 72 de seturi; **5**. 72 de alegeri; **6**. 48 de moduri; **7**. 720 de moduri; **8.** 125 de numere;

8.2. Mulțimi ordonate. Permutări

1). a) $5!\cdot 2!-3!(4!-0!)=120\cdot 2-6(24-1)=240-138=102;$

b) $\frac{8!-6!}{7!+5!}=\frac{8\cdot 7\cdot 6!-6!}{7\cdot 6\cdot 5!+5!}=\frac{6!(56-1)}{5!(42+1)}=\frac{6\cdot \cancel{5!}\cdot 55}{\cancel{5!}\cdot 43}=\frac{330}{43}$;

c). $\frac{3!-4!+2!\cdot 3!}{2!}=\frac{6-24+12}{2}=\frac{-6}{2}=-3.$

h). $\frac{(n+3)!-(n+1)!}{n!}=\frac{(n+3)(n+2)(n+1)n!-(n+1)n!}{n!}=n^3+6n^2+10n+5;$

i). $\frac{(n-1)!}{(n+1)!}-\frac{(n-2)!}{(n-1)!}=\frac{1}{(n+1)n}-\frac{1}{n-1}=\frac{n-1-n^2-n}{(n-1)m(n+1)}=-\frac{(n^2+1)}{n(n^2-1)}$;

j). n^2+3n+2; **k**). $\frac{1}{n^2-3n+2}$; **l).** n^2+2n+1; **m).** $\frac{(n+2)!}{n!}+\frac{(n-2)!}{(n-1)!}=(n+2)(n+1)+\frac{1}{n-1}=$

$\frac{(n-1)(n^2+3n+2)+1}{n-1}=\frac{n^3+2n^2-n-1}{n-1}.$

2). a) Se pun mai întâi condiţiile de existenţă a factorialilor: Este suficient pentru $x+3\geq 0\Rightarrow x\geq -3;$

$x\in\mathbb{Z}$, $\frac{(x+5)!}{(x+3)!}=42\Leftrightarrow (x+5)(x+4)=42\Leftrightarrow x^2+9x-22=0\Rightarrow x_1=2\ si\ x_2=-11\notin\mathbb{N}\Rightarrow x=2;$

b) Din condiţiile de existenţă a factorialilor rezultă $x\geq 1;\ x\in\mathbb{N}$

$\frac{x!}{(x-1)!}+\frac{(x+2)!}{x!}=\frac{(x+1)!}{(x-1)!}+14\Leftrightarrow x+x^2+3x+2=x^2+x+14\Rightarrow 3x=12\Rightarrow x=4;$

c) $x=6$; d) $x=11$; e) $x=5$; f) $x=3$;

g). $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}=30\Leftrightarrow\frac{(n+1)\cdot n\cdot(n-1)!}{(n-1)!}=30\Rightarrow(n+1)\cdot n=30\Rightarrow n=5.$

h). n=8; **i**). n=4; **j**). n=6;

3). Numărul cuvintelor este $5!=120$ cuvinte.

4). Numărul numerelor de şase cifre distincte (ce nu încep cu 0) este $6!-5!=5\cdot 5!.$ S-au scos numerele care încep cu 0.

5). 40320; **6**). 5!; **7**) 6!; $C_6^5=6$; **8**) $5!-4!$; 5^5-4^4 ;

8.3 Combinări

1). a) $\frac{A_6^3+A_6^4}{A_6^2}=\frac{\frac{6!}{3!}+\frac{6!}{2!}}{\frac{6!}{4!}}=\frac{6\cdot 5\cdot 4+6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{6\cdot 5}=16;$

c) $\frac{A_8^6-A_8^5}{A_9^6-A_9^5}=\frac{\frac{8!}{2!}-\frac{8!}{3!}}{\frac{9!}{3!}-\frac{9!}{4!}}=\frac{8!\left(\frac{3!-2!}{2!\cdot 3!}\right)}{9!\left(\frac{4!-3!}{3!\cdot 4!}\right)}=\frac{1}{9}\cdot\frac{4}{12}\cdot\frac{6\cdot 24}{18}=\frac{12}{81}$. **d)** $\frac{A_n^{n-1}+A_n^{n-2}}{A_n^{n-3}}=\frac{\frac{n!}{1!}+\frac{n!}{2!}}{\frac{n!}{3!}}=\frac{1+\frac{1}{2}}{\frac{1}{6}}=\frac{3}{2}\cdot\frac{6}{1}=9$;

2). a) $A_{14}^4=\frac{14!}{(14-4)!}=\frac{14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot \cancel{10}!}{\cancel{10!}}=24024$; **b**) În prima zi se poate da oricare din cele 4 examene deci există patru moduri, prin urmare pentru celelalte 3 examene au mai rămas 13 zile. Aşadar, există un număr de $4\cdot A_{13}^3=4\cdot\frac{13!}{10!}=4\cdot\frac{13\cdot 12\cdot 11\cdot \cancel{10}}{\cancel{10!}}=6864$ moduri de aranjare a examenelor;

3). Fiecare echipă joacă cu celelalte 15 echipe prin urmare sunt în total un număr de $16\cdot 15=240$ de meciuri. Altfel spus, un număr de $A_{16}^2=\frac{16!}{14!}=16\cdot 15=240$.

4). Fără teza din prima zi, mai rămân 3 teze de programat în cele 9 zile adică $A_9^3=\frac{9!}{3!\cdot 6!}=\frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot \cancel{6!}}{\cancel{6!}\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=84$ variante. **5**) În prima zi, cele cinci referate se pot programa în $A_{10}^5=\frac{10!}{5!}$ iar în a doua zi se por programa în $A_5^5=\frac{5!}{0!}=5!$. Aşadar, în total sunt $A_{10}^5\cdot A_5^5=\frac{10!}{5!}\cdot\frac{5!}{0!}=10!$ moduri. **6)** $A_{10}^7-A_9^6$; **7**). $A_{10}^6=\frac{10!}{4!}=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!}}=151200$;

8). A_{20}^2; **9**). 12; **10**). 50; **11**) 336; **18**). a) n=4; b) n=3; c) n=3;

19). Condiţii de existenţă este $n\geq 4,\ n\in\mathbb{N}$.

Ecuaţia dată este echivalentă cu $\frac{n!}{(n-4)!}-n\cdot\frac{n!}{(n-2)!}+3(n-1)\frac{n!}{(n-1)!}=0$ de unde rezultă $n(n-1)(n-2)(n-3)-n\cdot n(n-1)+3(n-1)\cdot n=0\,|:n(n-1)$. Din ecuaţia $n^2-6n+8=0\Rightarrow n_1=2,n_2=4.$ Soluţia care convine este $n=4$. Aşadar, mulţimea soluţiilor ecuaţiei date este $S=\{4\}$.

20). Trebuie pusă condiţia $5n+4\geq n^2+3n-4\geq 0,\ n\in\mathbb{N}$. Din $n^2-2n-8\leq 0,\ n\in\mathbb{N}$ şi $n^2+3n-4\geq 0,\ n\in\mathbb{N}.$ rezultă $n\in\{1,2,3,4\}$. **21)**. a) $C_4^3+C_4^2\cdot C_4^1-C_4^0\cdot C_4^2=4+24-6=22$;

b) $\frac{C_7^6-C_7^4}{C_7^5}=\frac{\frac{7!}{6!\cdot 1!}-\frac{7!}{4!\cdot 3!}}{\frac{7!}{5!\cdot 2!}}=\frac{\frac{1}{6!}-\frac{1}{4!\cdot 3!}}{\frac{1}{5!\cdot 2!}}=\frac{4!\cdot 3!-6!}{6!\cdot 4!\cdot 3!}\cdot\frac{5!\cdot 2!}{1}=\frac{-24\cdot 2}{6\cdot 6}=-\frac{4}{3}$;

c) 114; d)15; e)31; f) 64; g) 2^{2012}; h) 0; i) $\frac{-25}{3}$; j) 168; p). Utilizând formula $C_n^k=C_n^{n-k}$ rezultă că $C_{2014}^2=C_{2014}^{2014-2}=C_{2014}^{2012}$ aşadar, diferenţa combinărilor este egală cu 0.

22). Întrucât nu contează ordinea punctelor prin care trec dreptele rezultă că există un număr de $C_8^2=\frac{8!}{2!\cdot 6!}=\frac{8\cdot 7\cdot \cancel{6!}}{\cancel{6!}\cdot 2\cdot 1}=28$ drepte; **23).** $C_{49}^6=\frac{49!}{6!\cdot 43!}=13983816$;

24). $C_{12}^4\cdot C_{10}^4=\frac{12!}{4!\cdot 8!}\cdot\frac{10!}{6!\cdot 4!}=\frac{\cancel{12}\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot \cancel{8!}}{\cancel{4}\cdot 3\cdot 2\cdot \cancel{8!}}\cdot\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot \cancel{6!}}{\cancel{6!}\cdot 4\cdot 3\cdot 2}=210\cdot 45\cdot 11=103950$;

25). Pentru prima grupă de trei elevi există un număr de C_9^3 moduri de grupare;

Pentru a doua grupă există un număr de C_6^3 moduri de grupare iar pentru ultima grupă C_3^3.

În total există un număr de $C_9^3 \cdot C_6^3 \cdot C_3^3 = \frac{9!}{3! \cdot \cancel{6!}} \cdot \frac{\cancel{6!}}{3! \cdot 3!} \cdot 1 = \frac{9!}{(3!)^3} = 1680$ moduri de grupare.

26). $C_6^3 = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = 20$; **27).** Numărul grupelor de câte trei băieți este

$C_6^3 = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$ iar numărul grupelor de câte trei fete este $C_4^3 = \frac{4!}{1! \cdot 3!} = \frac{4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!} \cdot 1} = 4$.

Atunci, numărul total de perechi care se pot forma este de $C_6^3 \cdot C_4^3 = 20 \cdot 4 = 80$.

28). Aceasta înseamnă că se pot forma delegaţii cu 2 cu 3 sau 4 femei :

$C_6^3 \cdot C_5^2 + C_6^2 \cdot C_5^3 + C_6^1 \cdot C_5^4 = \frac{6!}{3! \cdot 3!} \cdot \frac{5!}{2! \cdot 3!} + \frac{6!}{4! \cdot 2!} \cdot \frac{5!}{2! \cdot 3!} + \frac{6!}{1! \cdot 5!} \cdot \frac{5!}{4! \cdot 1!} = 20 \cdot 10 + 15 \cdot 10 + 6 \cdot 5 = 380$;

30). $C_{10}^3 = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{6} = 120$; **32**). $C_4^1 \cdot C_6^2 = 4 \cdot 15 = 60$ echipe;

33). a) $C_{14}^7 \cdot C_8^3$; b) $C_{14}^{11} \cdot C_8^1 + C_{14}^{12} \cdot C_8^0$; **35** $C_5^2 \cdot C_6^2 \cdot C_2^1 = 300$ echipe; **36).** 572; **37)** 51408;

38). $9 \cdot 6 \cdot 13!$; **39). a) 2;** **c**) Condiţii de existenţă: $x+3 \geq 2 \Rightarrow x \geq -1$; $x+3 \in \mathbb{N}$

$C_{x+3}^2 = x^2 + 6 \Leftrightarrow \frac{(x+3)!}{2! \cdot (x+1)!} = x^2 + 6 \Rightarrow \frac{(x+3)(x+2)}{2} = x^2 + 6 \Rightarrow x^2 + 5x + 6 = 2x^2 + 12 \Rightarrow$

$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x \in \{2;3\}$. **d**) Condiţii de existenţă: $x \geq 3$, $x+1 \geq 2 \Rightarrow x \geq 3$; $x \in \mathbb{N}$ şi $S = \{7\}$.

e) $C_n^{n-2} + n = 10 \Leftrightarrow \frac{n!}{2! \cdot (n-2)!} + n - 10 = 0 \Rightarrow \frac{n(n-1)\cancel{(n-2)!}}{2\cancel{(n-2)!}} + n - 10 = 0 \Rightarrow n^2 + n - 20 = 0$ cu singura soluţie bună, $n = 4$.

f) $\frac{(n+3)!}{2! \cdot (n+1)!} = 6n \Rightarrow \frac{(n+3)(n+2)}{2} = 6n \Rightarrow n^2 - 7n + 6 = 0$ cu soluţiile 1 şi 6. Aşadar, $S = \{1;6\}$.

g) 10; **h) 9;** **i) 6;** p) n=10; q) n=8; s) x = 4;

40). Se pun condiţiile de existenţă: $x+1 \geq 3 \Rightarrow x \geq 2$ şi $x+1 \geq x-1$ ceea ce este adevărată pentru orice x real. Ecuaţia dată este echivalentă cu $\frac{(x+1)!}{(x-2)!} + \frac{(x+1)!}{2! \cdot (x-1)!} = 3(x+1)$.

$\Rightarrow \frac{(x+1)x(x-1)\cancel{(x-2)!}}{\cancel{(x-2)!}} + \frac{(x+1)x\cancel{(x-1)!}}{2\cancel{(x-1)!}} = 3(x+1)$

După aducerea la acelaşi numitor comun rezultă

$2(x+1)x(x-1) + x(x+1) = 6(x+1) \,|:(x+1) \Rightarrow 2x^2 - x - 6 = 0$ cu soluţia bună 2.

41. $x(x^2 + 3x - 4) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$, $x_2 = -4$, $x_3 = 1 \Rightarrow S = \{1\}$.

8.4. Binomul lui Newton

1). 256; **2**). Numărul submulţimilor nevide cu cel mult 2011 elemente este egal cu

$C_{2013}^1 + C_{2013}^2 + C_{2013}^3 + \ldots\ldots + C_{2103}^{2011} = \left(C_{2013}^0 + C_{2013}^1 + C_{2013}^2 + C_{2013}^3 + \ldots\ldots + C_{2103}^{2103}\right) - C_{2013}^0 - C_{2013}^{2012} - C_{2013}^{2013} =$

$= 2^{2013} - 1 - 2013 - 1 = 2^{2013} - 2015$.

3). a) $(2x+3)^4 = C_4^0(2x)^4 + C_4^1(2x)^3 \cdot 3 + C_4^2(2x)^2 \cdot 3^2 + C_4^3(2x) \cdot 3^3 + C_4^4 3^4 =$

$= 16x^4 + 96x^3 + 216x^2 + 216x + 81$

b) $(3x+1)^5 = C_5^0(3x)^5 + C_5^1(3x)^4 + C_5^2(3x)^3 + C_5^3(3x)^2 + C_5^4(3x) + C_5^5 =$
$= 243x^5 + 405x^4 + 270x^3 + 90x^2 + 15x + 1.$

4). a) $(x+2)^6 = C_6^0x^6 + C_6^1x^5\cdot 2 + C_6^2x^4\cdot 2^2 + C_6^3x^3\cdot 2^3 + C_6^4x^2\cdot 2^4 + C_6^5x2^5 + C_6^62^6 =$
$x^6 + 12x^5 + 60x^4 + 160x^3 + 240x^2 + 192x + 64;$

b) $(\sqrt{2}+3)^4 = C_4^0\sqrt{2}^4 + C_4^1\sqrt{2}^3\cdot 3 + C_4^2\sqrt{2}^2\cdot 3^2 + C_4^3\sqrt{2}\cdot 3^3 + C_4^43^4 =$
$4 + 8\sqrt{2} + 108 + 162\sqrt{2} + 81 = 193 + 170\sqrt{2}$;

5). a) Cum $C_n^k = C_n^{n-k}, \forall n \geq k \geq 0 \Rightarrow S = C_n^n + 2C_n^{n-1} + 3C_n^{n-2} + ... + nC_n^1 + (n+1)C_n^0$;

Rezultă $2S = (n+2)(C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n) \Rightarrow S = \frac{(n+2)2^n}{2} = (n+2)2^{n-1}$;

b) Cum $C_n^k = C_n^{n-k}, \forall n \geq k \geq 0 \Rightarrow S = C_n^n + 3C_n^{n-1} + 5C_n^{n-2} + ... + (2n-1)C_n^1 + (2n+1)C_n^0$;

Rezultă $2S = (2n+2)(C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^1 + C_n^0) \Rightarrow S = (n+1)2^n$;

c). Cum $C_{2013}^0 + C_{2013}^1 + C_{2013}^2 + C_{2013}^3 + ... + C_{2103}^{2103} = 2^{2013} \Rightarrow$
$C_{2013}^1 + C_{2013}^2 + C_{2013}^3 + ... + C_{2103}^{2103} = 2^{2013} - C_{2013}^0 = 2^{2013} - 1.$

d) Cum $(1+1)^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + C_{2n}^3 + ... + C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n}$ şi
$(1-1)^{2n} = C_{2n}^0 - C_{2n}^1 + C_{2n}^2 - C_{2n}^3 + ... - C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n}$ rezultă după adunarea celor două relaţii că
$2^{2n} = 2(C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + ... + C_{2n}^{2n}) \vdots 2 \Rightarrow \quad C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + C_{2n}^4 + ... + C_{2n}^{2n} = 2^{2n-1}$

6). Termenul de rang k+1 este $T_{k+1} = C_{10}^k\left(\sqrt[3]{x}\right)^{10-k}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^k$ iar exponentul zero al lui x se realizează pentru

$x^{\frac{10-k}{3}}\cdot x^{-\frac{k}{2}} = x^0 \Rightarrow x^{\frac{10-k}{3}-\frac{k}{2}} = x^0 \Rightarrow \frac{10-k}{3} - \frac{k}{2} = 0$. De aici se obţine $\frac{20-2k-3k}{6} = 0 \Rightarrow k = 4$.

7. a) $T_{15} = T_{14+1} = C_{20}^{14}x^{14}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{20-14} = C_{20}^{14}x^{14}\cdot\frac{1}{x^3} = C_{20}^{14}x^{11}.$

b) Cum dezvoltarea are 21 termeni atunci termenul din mijloc e T_{11} .

$T_{10+1} = C_{20}^{10}x^{10}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{20-10} = C_{20}^{10}x^5$

c) $T_{k+1} = C_{20}^kx^k\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{20-k} = C_{20}^kx^{k-\frac{20-k}{2}}$. Cum dezvoltarea îl conține pe x^{17} adică unul din termeni îl conține pe x^{17} atunci $C_{20}^kx^{k-\frac{20-k}{3}} = C_{20}^kx^{17} \Rightarrow \frac{3k-20}{2} = 17 \Rightarrow k = 18$. Așadar, al 19-lea termen T_{19} îl conține pe x^{17} .

8. $4n+5 \geq n^2 \Rightarrow n \in [-1;5] \cap \mathbb{N} = \{2;3;4\}$.

9. $T_7 = C_{12}^6\cdot\sqrt[3]{a}^{12-6}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^{12} = 3696 \Rightarrow \frac{12!}{6!\cdot 6!}\cdot a^2\cdot a^{-6} = 3696 \Rightarrow a = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

8.4 Teste de autoevaluare

Testul 1. Permutări

1. $\frac{3!-4!+2!\cdot 3!}{2!}=\frac{6-24+12}{2}=\frac{-6}{2}=-3$.

2. Numărul cuvintelor este $5!=120$ cuvinte.

3. Numărul numerelor de şase cifre distincte (ce nu încep cu 0) este $6!-5!=5\cdot 5!$. S-au scos numerele care încep cu 0.

4. $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}=30\Leftrightarrow\frac{(n+1)\cdot n\cdot(n-1)!}{(n-1)!}=30\Rightarrow(n+1)\cdot n=30\Rightarrow n=5$.

5. $\frac{(n+2)!}{n!}+\frac{(n-2)!}{(n-1)!}=(n+2)(n+1)+\frac{1}{n-1}=\frac{(n-1)(n^2+3n+2)+1}{n-1}=\frac{n^3+2n^2-n-1}{n-1}$.

6. $\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1-1}{(k+1)!}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{(k+1)!}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)!}=$

$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)!}=1-\frac{1}{(n+1)!}$.

Testul 2. Aranjamente

1) $\frac{A_8^6-A_8^5}{A_9^6-A_9^5}=\frac{\frac{8!}{2!}-\frac{8!}{3!}}{\frac{9!}{3!}-\frac{9!}{4!}}=\frac{8!\left(\frac{3!-2!}{2!\cdot 3!}\right)}{9!\left(\frac{4!-3!}{3!\cdot 4!}\right)}=\frac{1}{9}\cdot\frac{4}{12}\cdot\frac{6\cdot 24}{18}=\frac{12}{81}$.

2) Numărul tuturor numerelor de telefon de câte şase cifre distincte este egal cu

$A_{10}^6=\frac{10!}{4!}=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!}}=151200$.

3) Fără teza din prima zi, mai rămân 3 teze de programat în cele 9 zile adică

$A_9^3=\frac{9!}{3!\cdot 6!}=\frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot \cancel{6!}}{\cancel{6!}\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=84$ variante.

4) În prima zi, cele cinci referate se pot programa în $A_{10}^5=\frac{10!}{5!}$ iar în a doua zi se por programa în $A_5^5=\frac{5!}{0!}=5!$. Aşadar, în total sunt $A_{10}^5\cdot A_5^5=\frac{10!}{5!}\cdot\frac{5!}{0!}=10!$ moduri.

5) Trebuie pusă condiţia $5n+4\geq n^2+3n-4\geq 0,\ n\in\mathbb{N}$.

Din $n^2-2n-8\leq 0,\ n\in\mathbb{N}$ şi $n^2+3n-4\geq 0,\ n\in\mathbb{N}$. rezultă $n\in\{1,2,3,4\}$.

6) Condiţii de existenţă este $n\geq 4,\ n\in\mathbb{N}$.

Ecuaţia dată este echivalentă cu $\frac{n!}{(n-4)!}-n\cdot\frac{n!}{(n-2)!}+3(n-1)\frac{n!}{(n-1)!}=0$ de unde rezultă $n(n-1)(n-2)(n-3)-n\cdot n(n-1)+3(n-1)\cdot n=0\,|:n(n-1)$. Din ecuaţia $n^2-6n+8=0\Rightarrow n_1=2,n_2=4$. Soluţia care convine este $n=4$. Aşadar, mulţimea soluţiilor ecuaţiei date este $S=\{4\}$.

Testul 3. Combinări

1. $C_6^4=\frac{6!}{4!\cdot 2!}=\frac{6\cdot 5}{2}=15$, $P_3=3!=6$, $A_5^2=\frac{5!}{3!}=20$. Atunci, $C_6^4-P_3\cdot A_5^2=15-6\cdot 20=-105$.

2. Utilizând formula $C_n^k = C_n^{n-k}$ rezultă că $C_{2014}^2 = C_{2014}^{2014-2} = C_{2014}^{2012}$ aşadar, diferenţa combinărilor este egală cu 0.

3) Numărul grupelor de câte trei băieţi este $C_6^3 = \frac{6!}{3!\cdot 3!} = \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 20$ iar numărul grupelor de câte trei fete este $C_4^3 = \frac{4!}{1!\cdot 3!} = \frac{4\cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}\cdot 1} = 4$. Atunci, numărul total de perechi care se pot forma este de $C_6^3 \cdot C_4^3 = 20\cdot 4 = 80$.

4) $\frac{(n+3)!}{2!\cdot (n+1)!} = 6n \Rightarrow \frac{(n+3)(n+2)}{2} = 6n \Rightarrow n^2 - 7n + 6 = 0$ cu soluţiile 1 şi 6. Aşadar, $S = \{1;6\}$.

5. $C_n^{n-2} + n = 10 \Leftrightarrow \frac{n!}{2!\cdot (n-2)!} + n - 10 = 0 \Rightarrow \frac{n(n-1)\cancel{(n-2)!}}{2\cancel{(n-2)!}} + n - 10 = 0 \Rightarrow n^2 + n - 20 = 0$ cu singura soluţie bună, $n = 4$.

6. Se pun condiţiile de existenţă: $x+1 \geq 3 \Rightarrow x \geq 2$ şi $x+1 \geq x-1$ ceea ce este adevărată pentru orice x real. Ecuaţia dată este echivalentă cu $\frac{(x+1)!}{(x-2)!} + \frac{(x+1)!}{2!\cdot (x-1)!} = 3(x+1)$.

$\Rightarrow \frac{(x+1)x(x-1)\cancel{(x-2)!}}{\cancel{(x-2)!}} + \frac{(x+1)x\cancel{(x-1)!}}{2\cancel{(x-1)!}} = 3(x+1)$. După aducerea la acelaşi numitor comun rezultă $2(x+1)x(x-1) + x(x+1) = 6(x+1) \vdots (x+1) \Rightarrow 2x^2 - x - 6 = 0$ cu soluţia bună 2.

Testul 4. Binomul lui Newton

1) $(2x+3)^4 = C_4^0(2x)^4 + C_4^1(2x)^3\cdot 3 + C_4^2(2x)^2\cdot 3^2 + C_4^3(2x)\cdot 3^3 + C_4^4 3^4$
$= 16x^4 + 96x^3 + 216x^2 + 216x + 81$

2) $(3x+1)^5 = C_5^0(3x)^5 + C_5^1(3x)^4 + C_5^2(3x)^3 + C_5^3(3x)^2 + C_5^4(3x) + C_5^5$
$= 243x^5 + 405x^4 + 270x^3 + 90x^2 + 15x + 1.$

3) Cum $C_{2013}^0 + C_{2013}^1 + C_{2013}^2 + C_{2013}^3 + \ldots\ldots + C_{2103}^{2103} = 2^{2013} \Rightarrow$
$C_{2013}^1 + C_{2013}^2 + C_{2013}^3 + \ldots\ldots + C_{2103}^{2103} = 2^{2013} - C_{2013}^0 = 2^{2013} - 1.$

4) Numărul submulţimilor nevide cu cel mult 2011 elemente este egal cu
$C_{2013}^1 + C_{2013}^2 + C_{2013}^3 + \ldots\ldots + C_{2103}^{2011} = \left(C_{2013}^0 + C_{2013}^1 + C_{2013}^2 + C_{2013}^3 + \ldots\ldots + C_{2103}^{2103}\right) - C_{2013}^0 - C_{2012}^{2012} - C_{2013}^{2013} =$
$= 2^{2013} - 1 - 2013 - 1 = 2^{2013} - 2015.$

5) Termenul de rang k+1 este $T_{k+1} = C_{10}^k \left(\sqrt[3]{x}\right)^{10-k} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^k$ iar exponentul zero al lui x se realizează pentru $x^{\frac{10-k}{3}} \cdot x^{-\frac{k}{2}} = x^0 \Rightarrow x^{\frac{10-k}{3} - \frac{k}{2}} = x^0 \Rightarrow \frac{10-k}{3} - \frac{k}{2} = 0$. De aici se obţine $\frac{20-2k-3k}{6} = 0 \Rightarrow k = 4$.

6) Cum $(1+1)^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + C_{2n}^3 + \ldots\ldots + C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n}$ şi
$(1-1)^{2n} = C_{2n}^0 - C_{2n}^1 + C_{2n}^2 - C_{2n}^3 + \ldots\ldots - C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n}$ rezultă după adunarea celor două relaţii că
$2^{2n} = 2(C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + \ldots\ldots + C_{2n}^{2n}) \vdots 2 \Rightarrow C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + C_{2n}^4 + \ldots\ldots + C_{2n}^{2n} = 2^{2n-1}$

Cap. 9 Matematici financiare

9.1 Procente

4). 500 lei; **5**). 1700 lei; **6**). 30000 lei după un an; 90000 după trei ani; **7**). 110 lei; **8).** 157,89; **9**). 500 lei; **10**). 259,74;

9.2 Dobânzi

1). Fie S_0 suma împrumutată de la bancă. Atunci,

$D = p\%\ din\ S_0 \cdot 2 = \frac{7,25}{100} \cdot 500 \cdot 2 = 72,5$. Rezultă, $S = S_0 + D = 500 + 72,5 = 572,5$.

2). $D = p\%\ din\ S_0 \cdot 2 = \frac{10}{100} \cdot 60000 \cdot 2 = 12000 lei$;

3). $D_1 = \frac{8}{\cancel{100}} \cdot 50\cancel{00} = 400\ lei.$, $D_3 = 3.400 = 1200\ lei$;

4). D= 3240-3000=240 Ron; $D = \frac{p}{100} 3000 = 240 \Rightarrow p = 8$, rata dobânzii este de 8%;

5). $12\%\ din\ S = 800 \Rightarrow S = 6667\ lei$;

6). $C_f = C_i(1+d)^n = 1000(1+\frac{5}{100})^2 = 1000(1+0,05)^2 = 1000 \cdot (1,05)^2 = 1000 \cdot 1,1025 \Rightarrow$

$C_f = 1102,5$; Dobânda obţinută este $D = C_f - C_i = 1102,5 - 1000 = 102,5$ euro.

9.3 Probabilități

1). $P = \frac{Numarul\ cazurilor\ favorabile\ realizarii\ evenimentului}{Numarul\ cazurilor\ egal\ posibile} = \frac{2}{14} = \frac{1}{7}$

2). $2^1 = 1 = 1^2$, $2^2 = 4 = 2^2$, $2^3 = 8 \not\geq 3^2$, $2^4 = 16 = 4^2$, $2^5 = 32 \geq 5^2$. **Atunci,** $P = \frac{4}{5}$.

3). $0! = 1 \langle 50$, $1! = 1 \langle 50$, $2! = 2 \langle 50$, $3! = 6 \langle 50$, $4! = 24 \langle 50$, $5! = 120 \not\langle 50$, aşadar, $P = \frac{5}{6}$.

4). $P_3 = 3! = 6 \vdots 3$, $A_3^1 = 3 \vdots 3$, $C_4^3 = \frac{4!}{1! \cdot 3!} = 4 \not\vdots 3$. Rezultă $P = \frac{2}{3}$. **5).** Sunt 12 cazuri favorabile de a extrage o bilă alba, atunci $P = \frac{12^{(6}}{18} = \frac{2}{3}$

6). Numărul elevilor care le fac pe amândouă sunt 20 + 16 – 32 = 4 elevi;

$P = \frac{Numarul\ cazurilor\ favorabile\ realizarii\ evenimentului}{Numarul\ cazurilor\ egal\ posibile} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$

7). Există 36 de perechi de numere şi anume cazuri egal posibile realizării evenimentului cerut.

Dintre acestea 18 formează perechi de numere ce au suma lor pară, prin urmare,

$P = \frac{Numarul\ cazurilor\ favorabile\ realizarii\ evenimentului}{Numarul\ cazurilor\ egal\ posibile\ realizarii\ evenimentului} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$;

8). Cum ştim că există 20 de numere divizibile cu 5 şi anume: 5; 10, 15, 20, … şi anume toţi multiplii de 5 rezultă:

$$P=\frac{\textit{Numarul cazurilor favorabile realizarii evenimentului}}{\textit{Numarul cazurilor egal posibile realizarii evenimentului}}=\frac{20}{100}=\frac{1}{5};$$

9). Se găsesc numerele: 1032, 1302, 1230, 1320, 2130, 2310, 3102, 3120, 3210, 3012 în total 10 numere divizibile cu 2.

Numărul tuturor numerelor de patru cifre care se pot forma cu cifrele 0, 1, 2, 3 este $4! - 3! = 24- 6= 18$. Atunci,

$$P=\frac{\textit{Numarul cazurilor favorabile realizarii evenimentului}}{\textit{Numarul cazurilor egal posibile realizarii evenimentului}}=\frac{10}{18}=\frac{5}{9};$$

10). Submulţimile care au elemente impare sunt: $\{1\},\{3\},\{5\},\{1;3\},\{1;5\},\{3;5\},\{1;3;5\}$ în total de 7, iar numărul tuturor submulţimilor nevide ale unei mulţimi cu 5 elemente este 2^5 -1.

Atunci, $P=\frac{\textit{Numarul cazurilor favorabile realizarii evenimentului}}{\textit{Numarul cazurilor egal posibile realizarii evenimentului}}=\frac{7}{2^5-1}=\frac{7}{31};$

11). $P_4=4!=4\cdot3\cdot2\cdot1=24\vdots4$**;** $A_5^3=\frac{5!}{2!}=\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{2\cdot1}=60\vdots4$**;** $C_5^2=\frac{5!}{2!\cdot(5-2)!}=10$**;**

Atunci, $P=\frac{\textit{Numarul cazurilor favorabile realizarii evenimentului}}{\textit{Numarul cazurilor egal posibile realizarii evenimentului}}=\frac{2}{3};$

12). Numărul elevilor care le fac pe amândouă sunt 20 + 16 – 32 = 4 elevi;

$$P=\frac{\textit{Numarul cazurilor favorabile realizarii evenimentului}}{\textit{Numarul cazurilor egal posibile realizarii evenimentului}}=\frac{4}{32}=\frac{1}{8}.$$

13). Sunt 12 cazuri favorabile de a extrage o bilă alba, atunci $P=\frac{12^{(6}}{18}=\frac{2}{3}$ şi 6 cazuri favorabile de a extrage o bilă neagră, atunci, $P=\frac{6^{(6}}{18}=\frac{1}{3};$

14) $P=\frac{3}{20}$; **15**) $P=\frac{1}{7}$; **16**) $P=\frac{4}{5}$; **17**) $P=\frac{1}{15}$; **18**) $P=\frac{13}{51}$; **19**) $P=\frac{5}{6}$; **20**) $P=\frac{2}{3}$; **21**) $P=\frac{1}{2}$; $P=\frac{1}{16}$; **22**) $P=\frac{5}{8}$, $P=\frac{3}{8}$; **23**) $P=\frac{1}{10}$; $P=\frac{1}{2}$.

24. Cazuri favorabile: 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99.

Cazuri egal posibile: 10, 11, 12, 13, 14, …., 98, 99. În total 90 de numere.

$$P=\frac{\textit{Număr cazuri favorabile}}{\textit{Numar cazuri egal posibile}}=\frac{9}{90}=\frac{1}{10}$$

25. Cazuri favorabile: 20, 22, 24, 26, 28 și la fel pentru cele care încep cu 4, cu 6 și 8 în total 20 de cazuri.

$$P=\frac{\textit{Număr cazuri favorabile}}{\textit{Numar cazuri egal posibile}}=\frac{20}{90}=\frac{2}{9}.$$

26. Cazuri favorabile: 10, 20, 30, 40, ….90 în total 9 cazuri.

$$P=\frac{\textit{Număr cazuri favorabile}}{\textit{Numar cazuri egal posibile}}=\frac{9}{90}=\frac{1}{10}.$$

Teste de autoevaluare

Testul 1. Calcul financiar

1) $24\%\text{ din } 450 = \frac{24}{100}\cdot 450 = \frac{11080}{10} = 108.$

2) $\frac{p}{100}\cdot 32 = 8 \Rightarrow p = \frac{8\cdot 100}{32} = 25$. Aşadar, 8 din 32 înseamnă 25%.

3) $\frac{12}{100}\cdot x = 6 \Rightarrow x = \frac{6\cdot 100}{12} = \frac{600}{12} = 50$. Aşadar, numărul respectiv este 50.

4) $D_1 = \frac{8}{\cancel{100}}\cdot 50\cancel{00} = 400\ lei.,\ D_3 = 3.400 = 1200\ lei$;

5) $C_f = C_i(1+d)^n = 1000(1+\frac{5}{100})^2 = 5000(1+0,1)^2 = 5000\cdot(1,1)^2 = 5000\cdot 1,21 = 6050\ lei$

6) $(x+\frac{10}{100}x)+\frac{5}{100}(x+\frac{10x}{100}) = 300 \Rightarrow \frac{11x}{10}(1+\frac{5}{100}) = 300 \Rightarrow \frac{11x\cdot 105}{10\cdot 100} = 300 \Rightarrow$

$x = \frac{300000}{105\cdot 11} = 259,74$

Testul 2. Probabilităţi

1). $P = \frac{Numarul\ cazurilor\ favorabile\ realizarii\ evenimentului}{Numarul\ cazurilor\ egal\ posibile} = \frac{2}{14} = \frac{1}{7}$

2). $2^1 = 1 = 1^2$, $2^2 = 4 = 2^2$, $2^3 = 8 \not\geq 3^2$, $2^4 = 16 = 4^2$, $2^5 = 32 \geq 5^2$. Atunci, $P = \frac{4}{5}$.

3) $0! = 1 \langle 50$, $1! = 1 \langle 50$, $2! = 2 \langle 50$, $3! = 6 \langle 50$, $4! = 24 \langle 50$, $5! = 120 \not\langle 50$, aşadar, $P = \frac{5}{6}$.

4) $P_3 = 3! = 6 \vdots 3$, $A_3^1 = 3 \vdots 3$, $C_4^3 = \frac{4!}{1!\cdot 3!} = 4 \not\vdots 3$. Rezultă $P = \frac{2}{3}$.

5) Sunt 12 cazuri favorabile de a extrage o bilă alba, atunci $P = \frac{12^{(6}}{18} = \frac{2}{3}$

6) Numărul elevilor care le fac pe amândouă sunt 20 + 16 – 32 = 4 elevi;

$P = \frac{Numarul\ cazurilor\ favorabile\ realizarii\ evenimentului}{Numarul\ cazurilor\ egal\ posibile} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$

Cap. 10. Ecuaţiile dreptei în plan

10.1 . Reper cartezian în plan. Distanţa dintre două puncte din plan

1). Se cunoaşte O(0;0), atunci $AO = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} = \sqrt{4^2+(-8)^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$;

2). Se aplică formula distanţei dintre două puncte $AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ de unde rezultă: $AB=\sqrt{(3-2)^2+(-1-0)^2}=\sqrt{2}$, Analog pentru $BC=\sqrt{34}$, $CA=2\sqrt{5}$. Perimetrul este egal cu $P_{ABC}=\sqrt{2}+\sqrt{34}+2\sqrt{5}$

3). Aria $A_{ABC}=AB^2$, prin urmare se află lungimea laturii AB astfel:

$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=$

$\sqrt{(5-2)^2+(1-3)^2}=\sqrt{13}$. Rezultă $A_{ABC}=\sqrt{13}^2=13.$

4). Mijlocul unui segment este $M(\frac{x_1+x_2}{2};\frac{y_1+y_2}{2})=\ M(\frac{-4+2}{2};\frac{-1+5}{2})=M(-1;2)$.

5). Se determină mai întâi mijlocul M al segmentului [BC] după formula

$M(\frac{x_1+x_2}{2};\frac{y_1+y_2}{2})$.

$\Rightarrow M(1;0)$. Atunci, lungimea medianei este $AM=\sqrt{(1-1)^2+(0-6)^2}=6$.

6. $(x-4)^2+(6-x)^2=2\Rightarrow x=5$; **7**. a) Din $\frac{a}{5}=\frac{6}{b}=\frac{-8}{20}\Rightarrow a=-2,b=-15$; b) $a=4,8,b=-5$;

8. a) $4+2\sqrt{13}$**;** b) $5\sqrt{5}+\sqrt{41}$; c) $2\sqrt{65}+3\sqrt{2}$**;**

10.2 . Ecuaţii ale dreptei în plan

1). Dacă **A(2; -3)** se găseşte pe dreapta **4x – 5y +a = 0** atunci coordonatele sale verifică ecuaţia dată astfel: $4\cdot 2-5\cdot(-3)+a=0$ de unde rezultă a= -23;

2). Se determină mai întâi mijlocul M al segmentului [BC] după formula

$M(\frac{x_1+x_2}{2};\frac{y_1+y_2}{2})$.

$\Rightarrow M(\frac{5}{2};0)$. Atunci, ecuaţia dreptei AM este $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ şi anume

$\frac{x+3}{\frac{5}{2}+3}=\frac{y-1}{-1}\Rightarrow -2x-11y+5=0$**.**

3). Se va aplica formula ecuaţiei unei drepte care trece prin două puncte: $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$;

În cazul nostru, $\frac{y-1}{4-1}=\frac{x+3}{2+3}\Rightarrow(x+3)\cdot 3=(y-1)\cdot 5\Rightarrow$ ecuaţia dreptei AB este

$3x-5y+14=0$

4). Ecuaţia dreptei este y-y_0=m(x-x_0) unde $m=tg\frac{\pi}{4}=1$ iar $(x_0;y_0)$ sunt coordonatele punctului A;

Astfel ecuaţia dreptei devine $y-3=x+1\Rightarrow -x+y-4=0$.

5). Se determină mai întâi ecuaţia dreptei care trece prin punctele A şi B si se pune condiţia ca punctul C să aparţină dreptei AB.

(AB): $\frac{x-(-1)}{1-(-1)}=\frac{y-1}{3-1}\Rightarrow x-y+2=0$; Din $C(4;m)\in(AB)\Rightarrow 4-$ m + 2 = 0 , m= 6.

6). Conform Teoremei bisectoarei rezultă $\frac{BE}{EC}=\frac{AB}{AC}$. Cum AB= 5 şi AC= 10 şi din $\overrightarrow{AE}=\frac{\overrightarrow{AC}+k\cdot\overrightarrow{AB}}{1+k}$, cu $k=\frac{AB}{AC}=\frac{1}{2}$ rezultă $x_E=\frac{x_C+kx_B}{1+k}=-\frac{1}{3}$, $y_E=\frac{y_C+ky_B}{1+k}=1$. Aşadar, coordonatele lui E sunt $E\left(-\frac{1}{3};1\right)$ şi ecuaţia bisectoarei [AE este 3x + y = 0.

7. a) $A\notin d$; b) $A\in d$; c) $A\in d$; d) $A\notin d$;

8. a) $AB:\frac{x-3}{-2-3}=\frac{y-2}{3-2}\Rightarrow x+5y-13=0$; b) $x+y-3=0$; c) $x-y+1=0$; d) $x+4y-9=0$;

9. a) $y-1=-2(x+2)\Rightarrow 2x+y+3=0$; b) $x+y-5=0$; c) $3x-y-7=0$;

10. Se impune condiţia de coliniaritate: $\frac{6-1}{3-1}=\frac{m+3}{2+3}\Rightarrow m=\frac{19}{2}$;

11. Se verifică condiţia de coliniaritate a trei puncte;

12. a) 5; b) $3\sqrt{2}$; c) 13; **13. a)** $2x-y+1=0$**; b)** $x-2y+10=0$**; c)** $x-4y+11=0$**.**

14. a) $\sqrt{3}x-3y+9+\sqrt{3}=0$**; b)** $x-y+2=0$**; c)** $\sqrt{3}x-y+2+3\sqrt{3}=0$**;**

15. a) $m=\frac{2}{3}$**; b)** $m=\frac{1}{5}$ **; c)** $m=-3$**;** **16.** a) $m=\frac{1}{2}$**; b)** $m=-\frac{1}{4}$**; c)** $m=\frac{2}{3}$**;**

17. $A'(-1;-1), B(-2;4), AB=\sqrt{26}$ **;** **18**. $m=\frac{7}{11}$**; 19.** a = - 3; **20.** $\sqrt{10}$**;**

10.3. Condiţii de paralelism si perpendicularitate

1). Două drepte sunt paralele dacă au aceeaşi pantă, prin urmare verificăm dacă panta dreptei AB este egală cu panta dreptei CD. $m_{AB}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-1+2}{5-3}=\frac{1}{2}$,

$m_{CD}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{2-1}{4-2}=\frac{1}{2}$. Rezultă că dreptele AB şi CD sunt paralele.

2). Panta dreptei AB este egală cu $m_{AB}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{a+3}{a-3}$ iar panta dreptei (d) se găseşte din ecuaţia

3x – 4y - 2= 0 astfel: 4y = 3x- 2 , $y=\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}$ de unde rezultă că panta este egală cu $\frac{3}{4}$.

Cum panta dreptei AB este egală cu panta dreptei (d) întrucât cele două drepte sunt paralele rezultă

$\frac{a+3}{a-3}=\frac{3}{4}\Rightarrow a=-21$.

3). Ecuaţia dreptei care trece prin punctul $A(x_0;y_0)$ şi are panta **m** este $y-y_0=m(x-x_0)$.

(d')

Dacă două drepte sunt paralele aceasta înseamnă că au aceeaşi pantă prin urmare panta dreptei d' este egală cu panta dreptei x – 3y + 2 = 0. Din $y=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}\Rightarrow m=\frac{1}{3}$.

Aşadar, ecuaţia dreptei cerute este $y-2=\frac{1}{3}(x+1)\Leftrightarrow x-3y+7=0$.

4). Ecuaţia dreptei care trece prin punctul $A(x_0;y_0)$ şi are panta **m** este $y-y_0=m(x-x_0)$. (d')

Dacă două drepte sunt paralele aceasta înseamnă că au aceeaşi pantă prin urmare panta dreptei d' este egală cu panta dreptei 4x – 2y -3 = 0. Din $y=2x+\frac{3}{2}\Rightarrow m=2$.

Aşadar, ecuaţia dreptei cerute este $y-1=2(x+3)\Leftrightarrow 2x-y+7=0$.

5). Dreptele d_1 şi d_2 sunt paralele $d_1\|d_2$, dacă $\frac{a-2}{1}=\frac{1}{3}$ de unde rezultă $3a-6=1$, $a=\frac{7}{3}$.

6). Trebuie să scriem ecuaţia dreptei care trece prin mijlocul segmentului [AB] şi este perpendiculară pe el. Se calculează mai întâi panta dreptei AB după formula $m_{AB}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=$ $\frac{7-3}{1+1}=2$. Cum produsul pantelor dintre dreapta AB şi mediatoarea sa este egal cu - 1, $m_{AB}\cdot m=-1$ rezultă că panta mediatoarei este eglă cu $-\frac{1}{2}$. Mijlocul segmentului [AB] este $M(0;5)\Rightarrow\ y-5=-\frac{1}{2}(x-0)$ sau $x+2y-10=0$.

7). Se determină mai întâi panta dreptei de ecuaţie 3x – y + 2 = 0. Din y = 3x-2 rezultă panta dreptei este $m=3$ şi cum cele două drepte sunt perpendiculare rezultă

$m'\cdot m=-1\Rightarrow m'\cdot 3=-1\Rightarrow m'=\frac{-1}{3}$

Atunci, ecuaţia dreptei care trece prin $A(-1;2)$ şi are panta **m'** este $y+1=-\frac{1}{3}(x-2)\Rightarrow$

$y-5=-\frac{1}{2}(x-0)\Rightarrow x+3y+1=0$.

8. a) $y=2x+1\Rightarrow m_d=2\Rightarrow y-1=2(x-2)\Rightarrow 2x-y-3=0$; b) $x+2y-1=0$; c) $3x-y+6=0$; d) $x+y=0$;

9. a) $m_{AB}=m_d\Rightarrow\frac{m-1-3}{m-1}=2\Rightarrow m=-2$; b) $m=-5$;

10. a) $d\cap g=\{P\}, P(-1;1)\Rightarrow AP=\sqrt{5}$;

b) $d\cap g=\{P\}, P(-3;2)\Rightarrow AP=2\sqrt{5}$;

10.4. calcule de distanțe și arii

1). a) $P_{ABC}=AB+AC+BC=2\sqrt{5}+5\sqrt{5}+\sqrt{65}=7\sqrt{5}+\sqrt{65}$;

b) $G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)=G\left(\frac{5+3+7}{3};\frac{6+2-5}{3}\right)=G(5;1)$;

c) BC: $\frac{x-3}{7-3}=\frac{y-2}{-5-2}\Rightarrow 7x+4y-29=0$;

d) Panta dreptei BC este $-\frac{7}{4}$ iar panta dreptei AD este $\frac{4}{7}$.

AD: $y-6=m_{AD}(x-5)\Rightarrow y-6=\frac{4}{7}(x-5)$;

e) $d(A,BC)=\frac{|7\cdot 5+4\cdot 6-29|}{\sqrt{7^2+4^2}}=\frac{30}{\sqrt{65}}\Rightarrow A_{ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{65}\cdot\frac{30}{\sqrt{65}}=15\,1$

f) Panta dreptei este egală cu panta dreptei BC şi anume $-\frac{7}{4}$. Rezultă,

$y-6=m_{BC}(x-5)\Rightarrow y-6=-\frac{7}{4}(x-5)\Leftrightarrow 7x+4y-59=0$;

Testul 1. Ecuațiile dreptei în plan

1) Două drepte sunt paralele dacă au aceeaşi pantă, prin urmare verificăm dacă panta dreptei AB este egală cu panta dreptei CD. $m_{AB}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-1+2}{5-3}=\frac{1}{2}$, $m_{CD}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{2-1}{4-2}=\frac{1}{2}$. Rezultă că dreptele AB şi CD sunt paralele.

2) Se determină mai întâi mijlocul M al segmentului [BC] după formula $M(\frac{x_1+x_2}{2};\frac{y_1+y_2}{2})$.

$\Rightarrow M(\frac{5}{2};0)$. Atunci, ecuaţia dreptei AM este $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ şi anume

$\frac{x+3}{\frac{5}{2}+3}=\frac{y-1}{-1}\Rightarrow -2x-11y+5=0$.

3) $AB=\sqrt{(a-1+3)^2+(a+2-1)^2}=5\Rightarrow (a+2)^2+(a+1)^2=25\Rightarrow 2a^2+6a-20=0\Rightarrow$
$a^2+3a-10=0\Rightarrow a_1=-5,a_2=2\Rightarrow a\in\{-5,2\}$.

4) Ecuaţia dreptei AB este $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ adică $\frac{x+3}{a+3}=\frac{y-1}{-2-1}\Rightarrow -3(x+3)=(a+3)(y-1)\Rightarrow$
$-3x-(a+3)y-9+a+3=0$. Cum $P(-2;2)\in AB\Rightarrow -3\cdot(-2)-(a+3)\cdot 2-9+a+3=0\Rightarrow$
$6-2a-6-9+a+3=0\Rightarrow -a=6\Rightarrow a=-6.$

5) Ecuaţia dreptei „d” care trece prin punctul $A(x_0;y_0)$ şi are panta **m** este $y-y_0=m(x-x_0)$. Dacă două drepte sunt paralele aceasta înseamnă că au aceeaşi pantă prin urmare panta dreptei d este egală cu panta dreptei -3x + y -2 = 0 care se găseşte din $y=3x+2\Rightarrow$panta este 3. Aşadar, ecuaţia dreptei cerute este
$y-(-2)=3(x-1)\Rightarrow 3x-y-1=0.$

6) Se rezolvă mai întâi sistemul $\begin{cases}3x+2y=-1\\ x+3y=2\,|\cdot(-3)\end{cases}\Rightarrow\quad\begin{cases}3x+2y=-1\\ -3x-9y=-6\end{cases}\Rightarrow -7y=-7\Rightarrow y=1$

$\Rightarrow x=-1$. Aşadar, punctul de intersecţie a dreptelor este $B(-1;1)$ iar distanţa de la A la B este $AB=\sqrt{(-1+3)^2+(1-2)^2}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}.$

Cap. 11. Probleme recapitulative

1). $8\cdot\frac{1}{2^4}-125\cdot\frac{1}{2\cdot 5^3}=8\cdot\frac{1}{16}-125\cdot\frac{1}{250}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0.$

2). $2^{100}:(2^{55}\cdot 2^{44})+2^{-2}=2^{100}:2^{99}+\frac{1}{4}=2^1+\frac{1}{4}=\frac{9}{4}$;

3). $\sqrt[3]{27}-\sqrt{12}+2\sqrt{3}=\sqrt[3]{3^3}-\sqrt{2^2\cdot 3}+2\sqrt{3}=3-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}=3$.

4). $(1+\sqrt{3})^2=1+2\sqrt{3}+\sqrt{3}^2=4+2\sqrt{3}$, $\sqrt{(2\sqrt{3}-3)^2}=\left|2\sqrt{3}-3\right|=2\sqrt{3}-3$,

$(\sqrt{3}-2)^{-1}=\dfrac{1}{\sqrt{3}-2}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{3-4}=-\sqrt{3}-2$; Atunci,

$(1+\sqrt{3})^2-\sqrt{(2\sqrt{3}-3)^2}+(\sqrt{3}-2)^{-1}=4+2\sqrt{3}-2\sqrt{3}+3-\sqrt{3}-2=5-\sqrt{3}$.

5). $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\dfrac{b}{a}\right)^{n}\Rightarrow\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^{-3}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{1}\right)^{3}=3\sqrt{3}$; $\dfrac{1}{\sqrt{3}-2}=\dfrac{\sqrt{3}+2}{3-4}=-\sqrt{3}-2$;

$\left|\sqrt{12}-4\right|=-\left(\sqrt{12}-4\right)=-2\sqrt{3}+4$. Rezultatul final este egal cu $3\sqrt{3}-\sqrt{3}-2-2\sqrt{3}+4=2$.

6). $\dfrac{1}{2}-3=\dfrac{1-6}{2}=\dfrac{-5}{2}$, $0,5+\sqrt[3]{2^3}=0,5+2=\dfrac{5}{10}+2=\dfrac{1}{2}+2=\dfrac{5}{2}$, atunci $\dfrac{\frac{1}{2}-3}{0,5+\sqrt[3]{8}}-\dfrac{5}{2}:\dfrac{5}{2}=-1$.

7. $\log_2\dfrac{1}{2}=\log_2 2^{-1}=-1$; $\sqrt[3]{-64}=\sqrt[3]{-4^3}=-4$; $-\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-2}=-\left(\dfrac{\sqrt{2}}{1}\right)^{2}=-2$, atunci cel mai mare număr este $\log_2\dfrac{1}{2}$.

8). $A=\sqrt{(\sqrt{5}-3)^2}+\sqrt{(2-\sqrt{5})^2}=\left|\sqrt{5}-3\right|+\left|2-\sqrt{5}\right|=-(\sqrt{5}-3)-(2-\sqrt{5})=-\sqrt{5}+3-2+\sqrt{5}=1$.

9. $\sqrt[3]{5^3}+\dfrac{1}{2}-\log_2 2^5-0,5=5+0,5-5-0,5=0$;

10. $\sqrt[3]{2^3\cdot 3}-3\cdot\sqrt[3]{4^3\cdot 3}+\sqrt[3]{-3^3\cdot 3}=2\cdot\sqrt[3]{3}-3\cdot 4\cdot\sqrt[3]{3}-3\cdot\sqrt[3]{3}=(2-12-3)\cdot\sqrt[3]{3}=-13\sqrt[3]{3}$;

11. $\sqrt[3]{2^3\cdot 5}-\sqrt[3]{5^3\cdot 5}+2\cdot\sqrt[3]{-3^3\cdot 5}=2\sqrt[3]{5}-5\sqrt[3]{5}-6\sqrt[5]{5}=-9\sqrt[3]{5}$.

12. $\sqrt[3]{81}+\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{375}=\sqrt[3]{3^3\cdot 3}+\sqrt[3]{2^3\cdot 3}+\sqrt[3]{5^3\cdot 3}=(3+2+5)\cdot\sqrt[3]{3}=10\sqrt[3]{3}$.

13. $\sqrt[3]{9}^{\log_3 1}+\sqrt[3]{-27}=\sqrt[3]{9}^{0}-3=1-3=-2$;

14. Deoarece $\log_3 1=0\Rightarrow\log_3 81\cdot\log_3 27\cdot\log_3 9\cdot\log_3 3\cdot\log_3 1=0$.

15. $\log_6 2+\log_6 18=\log_6 2\cdot 18=\log_6 6^2=2\in\mathbb{N}$;

16. $\log_a x+\log_a y=\log_a x\cdot y$, $\log_a x-\log_a y=\log_a\dfrac{x}{y}$.

$\log_5 100+\log_5 3^2-\log_5 36=\log_5\dfrac{100\cdot 9}{36}=\log_5\dfrac{100}{4}=\log_5 25=\log_5 5^2=2$.

17). $\dfrac{\log_4 18\cdot 12-\log_4 27}{\log_4 2}=\dfrac{\log_4\frac{18\cdot 12}{27}}{\log_4 2}=\dfrac{\log_4 8}{\log_4 2}=\log_2 8=3$;

18. $\log_3 27+\log_4 16-\sqrt[3]{125}=\log_3 3^3+\log_4 4^2-\sqrt[3]{5^3}=3+2-5=0$;

19. $\log_6 24-\log_6 4=\log_6\dfrac{24}{6}=\log_6 6=1$ conform formulelor $\log_a x-\log_a y=\log_a\dfrac{x}{y}$ și $\log_a a=1$.

20. a,b,c sunt în progresie aritmetică , atunci $b=\dfrac{a+c}{2}$. În cazul nostru,

$\dfrac{7}{3}=\dfrac{\lg\sqrt[3]{x}+2\lg x}{2}\Rightarrow 14=3\cdot\left(\dfrac{1}{3}\lg x+2\lg x\right)\Rightarrow 14=7\lg x\Rightarrow\lg x=2\Rightarrow x=10^2=100$;

21. $tg45^0=1\Rightarrow \lg 1=0\Rightarrow \lg\left(tg1^0\right)\cdot\lg\left(tg2^0\right)\cdot\lg\left(tg3^0\right)\cdot.....\cdot\lg\left(tg45^0\right).=0;$

22. $\lg(tg40^0)\cdot\lg(tg41^0)\cdot.....\cdot\lg(tg45^0)=0.$

23. Funcția $f(x)=\log_{4x-1}8x^2$ este corect definită

$$\Leftrightarrow\begin{cases}8x^2\rangle 0,\ \forall x\in\mathbb{R}\\ 4x-1\rangle 0\Rightarrow x\rangle\dfrac{1}{4}\\ 4x-1\neq 1\Rightarrow x\neq\dfrac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow x\in\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2};\infty\right).$$

24. $\frac{1}{3}\cdot\log_2 125-3\cdot\log_2 x-4\cdot\log_2 y=\log_2\left(5^3\right)^{\frac{1}{3}}-\log_2 x^3-\log_2 y^4=\log_2\frac{5}{x^3\cdot y^4}$

25. $\log_2 288=\log_2 2^5\cdot 3^2=\log_2 2^5+\log_2 3^2=5\log_2 2+2\log_2 3=5+2a.$

26. $\log_3 24=\log_3 2^3\cdot 3=\log_3 2^3+\log_3 3=3\log_3 2+1=1+3a.$

27. $(4-6i)\cdot a+(8+2i)\cdot b=4+2i\Rightarrow 4a+8b+(-6a+2b)\cdot i=4+2i\Rightarrow$ $\Rightarrow\begin{cases}4a+8b=4\\ -6a+2b=2\end{cases}\Big|\cdot(-4)\Rightarrow$

$a=-\frac{1}{7},\ b=\frac{24}{56}.$

28. $(3-2i\sqrt{2})^2=a+ib\Leftrightarrow 9-12i\sqrt{2}-8=a+ib\Rightarrow\ 1-12i\sqrt{2}=a+ib\Rightarrow a=1,\ b=-12\sqrt{2}.$

29. $i^{33}+i^{55}+i^{77}=i^{4\cdot 8+1}+i^{4\cdot 13+3}+i^{4\cdot 19+1}=i-i+i=i;$

30. $(2+i\sqrt{3})^2+(2-i\sqrt{3})^2=4+4i\sqrt{3}-3+4-4i\sqrt{3}-3=2\in\mathbb{Z};$

31. $z_1\cdot z_2=26+7i\Rightarrow|z_1\cdot z_2|=|26+7i|=\sqrt{26^2+7^2}=\sqrt{725}.$

32. $\sqrt[3]{x^2+5x+5}=-1\big|()^3\Rightarrow x^2+5x+5=-1\Rightarrow x^2+5x+6=0\Rightarrow x\in\{-3;-2\}.$

33. $\sqrt{x-3}=5\big|()^2\Rightarrow x-3=25\Rightarrow x=28$ care respectă condiția de existență $x-3\geq 0.$

34. $\sqrt[3]{2-x}=x\big|()^3\Rightarrow 2-x=x^3\Rightarrow x^3+x-2=0\Rightarrow$ soluțiile întregi se găsesc printre divizorii termenului liber, 2 cu schema lui Horner sau cu ajutorul descompunerii: $x^3-x+2x-2=0\Rightarrow x(x^2-1)+2(x-1)=0\Rightarrow\ (x-1)(x^2+x+2)=0\Rightarrow x_1=1,\ x_{2,3}\notin\mathbb{R}.\quad S=\{1\}$

35. $\sqrt{x^2-4x+4}=3\big|()^2\Rightarrow x^2-4x+4=9\Rightarrow x^2-4x-5=0\Rightarrow\quad x\in\{-1;5\}.$ Din condiția de existență

$x^2-4x+4\rangle 0$ care are loc pentru orice x real și pozitiv, întrucât discriminantul ecuației de gradul doi $x^2-4x+4=0$ este negativ, rezultă $S=\{-1;5\}.$

36. $\sqrt{x^2-x-2}=2\big|()^2\Rightarrow x^2-x-2=4\Rightarrow x^2-x-6=0\Rightarrow x\in\{-2;3\}.$ Din condiția de existență a ecuației, $x^2-x-2\rangle 0$ rezultă $S=\{-2;3\}.$

37. $\sqrt{3x+4}=2\sqrt{x}\big|()^2\Rightarrow 3x+4=4x\Rightarrow 3x-4x=-4\Rightarrow x=4.$ Condiții de existență a ecuației: $\begin{cases}3x+4\rangle 0\\ x\rangle 0\end{cases}.$

38. $\sqrt{x+5}=x-1|()^2\Rightarrow x+5=(x-1)^2\Rightarrow x+5=x^2-2x+1\Rightarrow\ x^2-3x-4=0\Rightarrow\ x\in\{-1;4\}$. Din condițiile de existență a ecuației $\begin{cases}x+5\geq 0\\ x-1\geq 0\end{cases}\Rightarrow x\geq 1$, se obține $S=\{4\}$.

39. $\sqrt{-x^2+5x+3}=x|()^2\Rightarrow -x^2+5x+3=x^2\Rightarrow 2x^2-5x-3=0\Rightarrow x\in\left\{-\frac{1}{4},3\right\}$.

Din condițiile de existență ale ecuației obținem: $\begin{cases}-x^2+5x+3\rangle 0\\ x\geq 0\end{cases}$. Atunci, $S=\{3\}$.

40. $\sqrt{5-x}=x+1|()^2\Rightarrow 5-x=(x+1)^2\Rightarrow 5-x=x^2+2x+1\Rightarrow x^2+3x-4=0\Rightarrow\ x\in\{-4;1\}$. Din condițiile de existență a ecuației $\begin{cases}5-x\geq 0\\ x+1\geq 0\end{cases}\Rightarrow x\in[-1;5]$, se obține $S=\{1\}$.

41. $\sqrt[3]{x^3+x^2-x-2}=x|()^3\Rightarrow x^3+x^2-x-2=x^3\Rightarrow x^2-x-2=0\ \Rightarrow x\in\{-1;2\}$.

42. $\sqrt{4x-3}=2x-3|()^2\Rightarrow 4x-3=(2x-3)^2\Rightarrow 4x-3=4x^2-12x+9\Rightarrow x^2-4x+3=0\Rightarrow$

$x\in\{1;3\}$. Din condițiile de existență a ecuației $\begin{cases}4x-3\geq 0\\ 2x-3\geq 0\end{cases}\Rightarrow x\geq\frac{3}{2}$, atunci $S=\{3\}$.

43. $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}=2\Rightarrow\sqrt{1+x}=2-\sqrt{1-x}|()^2\Rightarrow\quad 1+x=4-2\sqrt{1-x}+1-x\Rightarrow$

$2\sqrt{1-x}=4-2x\big|:2\Rightarrow\sqrt{1-x}=2-x|\ \ ()^2\Rightarrow 1-x=4-4x+x^2\Rightarrow\ \ x^2-3x+3=0\Rightarrow x\notin\mathbb{R}$.

44. $f(-2)+f(-1)+f(1)+f(2)=\frac{1}{2^2}-2^2+\frac{1}{2}-2+2-\frac{1}{2}+2^2-\frac{1}{2^2}=0$.

45. $2^x+2^{x+2}=10\Rightarrow 2^x\left(1+2^2\right)=10\Rightarrow 2^x=\frac{10}{5}=2\Rightarrow x=1;$

46. $\left(\frac{1}{2}\right)^x=2^{x-2}\Rightarrow 2^{-x}=2^{x-2}\Rightarrow -x=x-2\Rightarrow -2x=-2\Rightarrow x=1$.

47. $3^x+2\cdot 3^{x+1}=7\Leftrightarrow 3^x\cdot(1+2\cdot 3)=7\big|:7\Rightarrow 3^x=1\Rightarrow x=0.$

48. $(a^{f(x)}=a^{g(x)}\Rightarrow f(x)=g(x))$, $3^{2x^2-5x}=3^{-3}\Rightarrow 2x^2-5x=-3\Rightarrow 2x^2-5x+3=0\Rightarrow x\in\left\{1;\frac{3}{2}\right\}$.

49. $5^{1-x}=25^x\Rightarrow 5^{1-x}=5^{2x}\Rightarrow 1-x=2x\Rightarrow 3x=1\Rightarrow x=\frac{1}{3}.$

50. $2^{x^2-4x}=\frac{1}{8}\Rightarrow 2^{x^2-4x}=2^{-3}\Rightarrow x^2-4x=-3\Rightarrow x^2-4x+3=0\Rightarrow x\in\{1;3\}$.

51. $3^x+9^x+27^x=39\Rightarrow 3^x+3^{2x}+3^{3x}=39\Rightarrow 3^x+\left(3^x\right)^2+\left(3^x\right)^3=39\Rightarrow$ se face notația $3^x=t\rangle 0$.

Atunci, ecuația dată devine $t+t^2+t^3=39\Rightarrow t(1+t+t^2)=39=3\cdot 13\Rightarrow\ t=3\Rightarrow 3^x=3\Rightarrow x=1.$

$S=\{1\}$.

52. $5^{1+x^2+6x}=5^{-7}\Rightarrow 1+x^2+6x=-7\Rightarrow x^2+6x+8=0\Rightarrow x\in\{-4;-2\}$

53. $3^{x-2}+3^{x+2}=\frac{82}{81}\Rightarrow\frac{3^x}{3^2}+3^x\cdot 3^2=\frac{82}{81}\Rightarrow\ 3^x\left(\frac{1}{9}+9\right)=\frac{82}{81}\Rightarrow 3^x\cdot\frac{82}{9}=\frac{82}{81}\Big|\cdot\frac{9}{82}\Rightarrow\ 3^x=\frac{82}{81}\cdot\frac{9}{82}\Rightarrow$

$3^x=\frac{1}{9}=3^{-2}\Rightarrow x=-2$.

54. $2^{x+2}+2^x-10=0\Rightarrow 2^x\cdot 2^2+2^x-10=0\Rightarrow 2^x(4+1)=10\Rightarrow 2^x=\frac{10}{5}\Rightarrow 2^x=2\Rightarrow x=1.$

55. $2^{\sqrt{x-1}}=4\Rightarrow 2^{\sqrt{x-1}}=2^2\Rightarrow \sqrt{x-1}=2\left|()^2\right.\Rightarrow x-1=4\Rightarrow x=5$. Condiții de existență a radicalului: $x-1\geq 0\Rightarrow x\geq 1.$

56. $\log_2(x+5)=3\Rightarrow x+5=2^3\Rightarrow x=8-5\Rightarrow x=3$, care verifică condiția de existență a logaritmului $x+5\rangle 0\Rightarrow x\rangle -5.$

57. $\lg(x^2-3x)=1\Rightarrow x^2-3x=10\Rightarrow x^2-3x-10=0\Rightarrow x\in\{-2;5\}$. Din condițiile de existență a ecuației rezultă $x^2-3x\rangle 0\Rightarrow x\in(-\infty,0)\cup(3;\infty)$, atunci $S=\{-2;5\}$.

58. $\log_3\left(x^2-7x+8\right)=\log_3(x-7)\Rightarrow\ x^2-7x+8=x-7\Rightarrow x^2-8x+15=0\ \ x\in\{3;5\}$.

Din condițiile de existență obținem $\begin{cases}x^2-7x+8\rangle 0\\ x-7\rangle 0\end{cases}\Rightarrow x\rangle 7$, așadar, $S=\{\varnothing\}$.

59. $\log_2(x+2)+\log_2 x=3\Rightarrow \log_2(x+2)\cdot x=3\Rightarrow x^2+2x=2^3\Rightarrow x^2+2x-8=0\Rightarrow x\in\{-4;2\}$.

Din condițiile de existență a ecuației $\begin{cases}x+2\rangle 0\\ x\rangle 0\end{cases}\Rightarrow x\rangle 0$ obținem $S=\{2\}$. S-au folosit formulele $\log_a x+\log_a y=\log_a x\cdot y$ și $\log_a x=N\Rightarrow x=a^N$.

60. $\log_2(2x+4)=\log_2(3x+1)\Rightarrow 2x+4=3x+1\Rightarrow 2x-3x=1-4\Rightarrow x=3$.

Din condițiile de existență a ecuației $\begin{cases}2x+4\rangle 0\\ 3x+1\rangle 0\end{cases}\Rightarrow x\rangle -\frac{1}{3}$, atunci $S=\{3\}$.

61. $\log_2(x^2-2x+1)=\log_2(x-1)\Rightarrow\quad x^2-2x+1=x-1\Rightarrow\quad x^2-3x+2=0\Rightarrow x\in\{1;2\}$. Din condițiile de existență a logaritmilor $\begin{cases}x^2-2x+1\rangle 0\\ x-1\rangle 0\end{cases}\Rightarrow x\rangle 1$, se obține $S=\{2\}$.

62. $\lg^2 x-4\lg x+3=0$. Se notează $\lg x=t\Rightarrow t^2-4t+3=0\Rightarrow t\in\{1;3\}\Rightarrow\ \lg x=1\Rightarrow x=10$ și $\lg x=3\Rightarrow x=1000$.

63. $|A\cup B|=2500$, $|A|=|B|=2015\Rightarrow\ |A\cap B|=|A|+|B|-|A\cup B|=2015+2015-2500=1530$.

64. 6!=720;

65. În fiecare din cele cinci poziții ale cifrelor telefonului pot fi oricare din cele 9 elemente ale mulțimii, adică $9\cdot 9\cdot 9\cdot 9\cdot 9=9^5$;

66. Numărul submulțimilor unei mulțimi cu n elemente este egal cu 2^n iar pentru submulțimi nevide 2^n-1;

În cazul nostru, N= 2^4-1=15;

67. $10!=1\cdot 2\cdot 3\cdot .....\cdot 10$;

68. $A_9^5=\frac{9!}{(9-5)!}=\frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4!}{4!}=15120$;

69. $A_8^6=\frac{8!}{(8-6)!}=\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot \cancel{2!}}{\cancel{2!}}=20160$.

70. $A_8^4=\frac{8!}{(8-4)!}=\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!}}=1680$;

71. Cei 8opt alergători pot ocupa oricare unul din cele 3 locuri, I, II, III adică $8\cdot 7\cdot 6=336$ sau $A_8^3=\frac{8!}{(8-3)!}=\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5!}{5!}=336$ situații;

72. $P_4=4!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4=24$.

73. $C_{10}^9-C_9^8=\frac{10!}{(10-9)!\cdot 9!}-\frac{9!}{(9-8)!\cdot 8!}=10-9=1$.

74. $A_5^4=\frac{5!}{(5-4)!}=5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=120$, $C_7^3=\frac{7!}{(5-3)!\cdot 3!}=\frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot \cancel{3!}}{2!\cdot \cancel{3!}}=35$; $P_3=3!=1\cdot 2\cdot 3=6$

$\Rightarrow \frac{2C_7^3-A_5^4}{P_3}=\frac{2\cdot 35-120}{6}=\frac{-50}{6}=-\frac{25}{3}$;

75. $\frac{(n+1)!+n!}{n!}=2020\Rightarrow \frac{(n+1)\cdot n!+n!}{n!}=2020\Rightarrow \frac{n!(n+2)}{n!}=2020\Rightarrow n+2=2020\Rightarrow n=2018$.

76. $C_8^3-C_8^5=\frac{8!}{(8-3)!\cdot 3!}-\frac{8!}{(8-5)!\cdot 5!}=\frac{8\cdot 7\cdot 6}{6}-\frac{8\cdot 7\cdot 6}{6}=0$. Se putea folosi si formula $C_n^k=C_n^{n-k}$.

77. $C_n^k=\frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}$, $A_n^k=\frac{n!}{(n-k)!}$.

$C_9^6=\frac{9!}{(9-6)!\cdot 6!}=\frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot \cancel{6!}}{3!\cdot \cancel{6!}}=94$; $C_9^5=\frac{9!}{(9-5)!\cdot 5!}=\frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot \cancel{5!}}{4!\cdot \cancel{5!}}=126$;

$A_9^5=\frac{9!}{(9-5)!}=\frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!}}=15120$. Atunci, $\frac{C_9^6-C_9^5}{A_9^5}=\frac{-32}{15120}$.

78. $C_n^k=\frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}$, $A_n^k=\frac{n!}{(n-k)!}$. $A_7^5=\frac{7}{(\ -\ 7}=\frac{!}{\cancel{2!}\ 5}\ \cdot\cancel{7}=2520$.

$A_7^4=\frac{7!}{(7-4)!}=\frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}}=840$, $C_5^3=\frac{5!}{(5-3)!\cdot 3!}=\frac{5\cdot 4\cdot \cancel{3!}}{2!\cdot \cancel{3!}}=10$;

$\frac{A_7^4-A_7^4}{C_5^3}=\frac{2520-840}{10}=178$

79. $A_{2014}^1=\frac{2014!}{(2014-1)!}=\frac{2014\cdot 2013!}{2013!}=2014$, $C_{2014}^1=\frac{2014!}{(2014-1)!\cdot 1!}=\frac{2014\cdot \cancel{2013!}}{\cancel{2013!}}=2014$;

Se pot folosi si formulele $A_n^1=n$, $C_n^1=n$. $\frac{A_{2014}^1+C_{2014}^1}{2014}=\frac{A_{2014}^1+C_{2014}^1}{2014}=\frac{2\cdot 2014}{2014}=2$.

80. $P_n=n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot ....\cdot n$ $C_n^k=\frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}$, $A_n^k=\frac{n!}{(n-k)!}$.

$P_6=6!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6=720$, $A_6^3=\frac{6!}{(6-3)!}=\frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}}=120$

$C_7^3=\frac{7!}{(5-3)!\cdot 3!}=\frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot \cancel{3!}}{2!\cdot \cancel{3!}}=35;$, $\frac{P_6+A_6^3}{C_7^3}=\frac{120+720}{35}=\frac{168}{7}$.

81. $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}=-4n+6\Rightarrow\frac{(n+1)\cdot n\cdot\cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}}=-4n+6\Rightarrow\ n^2+n=-4n+6\Rightarrow n^2+5n-6=0$ de unde se obține $n\in\{-6;1\}$. Din condiția de existență a factorialelor rezultă că $n-1\geq 0\Rightarrow n\geq 1$, așadar $S=\{1\}$.

82. $A_5^2=\frac{5!}{(5-2)!}=\frac{5\cdot 4\cdot 3!}{3!}=20$, $C_5^2=\frac{5!}{(5-2)!\cdot 2!}=\frac{5\cdot 4\cdot\cancel{3!}}{\cancel{3!}\cdot 2}=10;$

$P_4=4!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4=24\Rightarrow A_5^2+C_5^2-P_4=20+10-24=6.$

83. $C_n^k=\frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}\Rightarrow C_7^5=\frac{7!}{(7-5)!\cdot 5!}=\frac{7\cdot 6\cdot 5!}{2!\cdot 5!}=\frac{42}{2}=21;$ $C_7^6=\frac{7!}{(7-6)!\cdot 6!}=\frac{7\cdot 6!}{1!\cdot 6!}=7,$

$C_6^4=\frac{6!}{(6-4)!\cdot 4!}=\frac{6\cdot 5\cdot 4!}{2!\cdot 4!}=\frac{30}{2}=15.$ $C_7^5-C_7^6-C_6^4$= 21-7-15=-1;

84. Se utilizează formula $C_n^k=C_n^{n-k}$ sau se calculează efectiv combinările:

$C_{18}^2=C_{18}^{18-2}=C_{18}^{16}$, $C_{18}^3=C_{18}^{18-3}=C_{18}^{15}$. Atunci, $C_{18}^2-C_{18}^{16}+C_{18}^3-C_{18}^{15}=0$.

85. $C_n^0+C_n^1=8\Rightarrow 1+n=8\Rightarrow n=7$.

86. $C_n^3-2n=0\Rightarrow\frac{n!}{(n-3)!\cdot 3!}-2n=0\Rightarrow n(n-1)(n-2)=12n$. Cum n este natural și $n\neq 0\Rightarrow$prin împărțirea ecuației cu n că $n^2-3n-10=0$ cu soluția n=5.

87. Conform formulei se obține $C_n^2=28\Leftrightarrow\frac{n!}{(n-2)!\cdot 2!}=28\Rightarrow n(n-1)=2\cdot 28\Rightarrow n=8.$ este singura care verifică condițiile de existență: $n\in\mathbb{N},n\geq 2.$

88. $2C_n^{\ 2}-6C_{n+1}^{\ 3}=6n\Rightarrow$ $2\cdot\frac{n!}{(n-2)!\cdot 2!}-6\cdot\frac{(n+1)!}{(n-2)!\cdot 3!}=6n\Rightarrow$

$2\cdot\frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!\cdot 2}-6\cdot\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!\cdot 6}=6n\Rightarrow$

$n(n-1)-(n+1)n(n-1)-6n=0\Rightarrow n(n-1-n^2+1-6)=0\Rightarrow\ n(-n^2+n-6)=0\Rightarrow n\in\varnothing.$

Condiții de existență a combinărilor: $n\geq 2,\ n\in\mathbb{N}$.

89. Se aplică binomul lui Newton: $C_n^0+C_n^1+C_n^2+.....+C_n^n=2^n$; În cazul nostru $\left(C_n^n+C_n^{n-1}+C_n^{n-2}+.....+C_n^2+C_n^1\right)+C_n^0=1023+C_n^0\Rightarrow$

$2^n=1023+C_n^0\Rightarrow 2^n=1023+1\Rightarrow 2^n=1024\Rightarrow n=10.$

90. $C_{2020}^1+C_{2020}^2+C_{2020}^3+.....+C_{2020}^{2020}=2^{2020}-1$ din formula $2^n=(1+1)^n=C_n^0+C_n^1+C_n^2+C_n^3+.....+C_n^n$

91.

$\log_2 128=\log_2 2^7=7\log_2 2=7\cdot 1=7;\ \log_2\frac{1}{64}=\log_2\frac{1}{2^6}=\log_2 2^{-6}=-6\cdot 1=-6;$

$\log_5 125=\log_5 5^3=3\cdot\log_5 5=3;\ P=\frac{numar_cazuri_favorabile}{numar_cazuri_egal_posibile}=\frac{2}{3}.$

92. Se verifică pentru fiecare element al mulțimii $\{1,2,3,4,5\}$ inegalitatea $n!\rangle 20$.

$1!=1, 2!=2,\ 3!=6,\ 4!=24\rangle 20,\ 5!=120\rangle 20$. Aşadar, sunt două cazuri fabvorabile . $P=\frac{2}{5}$.

93. Numere prime: 2; 3; 5; 7; 11; 13 Numărul cazurilor favorabile: 6;
Numărul cazurilor egal posibile 13; atunci, $P=\frac{6}{13}$.

94. $P=\frac{C_8^2}{C_{12}^2}=\frac{\frac{8!}{6!\cdot 2!}}{\frac{12!}{10!\cdot 2!}}=\frac{14}{33}$; 95. Numărul de cazuri favorabile, 2: $27=3^3,\ 64=4^3$.

Numărul de cazuri egal posibile, 90: 10, 11, 12, 13, …., 99.
$P=\frac{2}{90}=\frac{1}{45}$.

96. Număr cazuri favorabile, 3: 115, 151, 511; Număr cazuri posibile, 900. $P=\frac{3}{900}=\frac{1}{300}$.

97. $P=\frac{C_6^4}{C_{14}^4}=\frac{15}{7\cdot 13\cdot 11}$;

98. TVA = $\frac{18}{100}\cdot 250=\frac{4500}{100}=45$.

99. La clasa a X-a B sunt promovați 23 din 30 adică $\frac{23\cdot 100}{30}=76$ adică 76% procentul de promovabilitate.

100. $TVA=\frac{19}{100}\cdot 238=\frac{4522}{100}=45,22$

101. $884-850=34\Rightarrow\ p\%\ din\ 850=34\Rightarrow\frac{p}{100}\cdot 850=34\Rightarrow p=\frac{340}{85}=4.$

102. Fie x prețul inițial. Atunci, după prima ieftinire se obține prețul $x-\frac{10}{100}x=\frac{90x}{100}=\frac{9}{10}x$. După a doua ieftinire se obține prețul de 567 lei adică $\frac{9}{10}x-\frac{10}{100}\cdot\frac{9}{10}x=567\Rightarrow\frac{90x-9x}{100}=567\Rightarrow 81x=567\cdot 100\Rightarrow x=700$.

103. $x+\frac{15}{100}x=51\Rightarrow\frac{115}{100}x=51\Rightarrow x=\frac{51\cdot 100}{115}=44,34$.

104. $D=p\%\ din\ N\Rightarrow\ D/_{1an}=6\%\ din\ 1800=\frac{6}{100}\cdot 1800=108$ euro.

105. $S_{fin}=S_{in}+D=1000+\frac{5}{100}\cdot 1000\cdot 2=1000+100=1100$ euro.

106. $D=8\%\ din\ 1500=\frac{8}{100}\cdot 1500=120$. Suma finală este 1500+120=1620.

107. $a=\frac{25}{200}\cdot b\Rightarrow a=\frac{1}{4}\cdot b\Rightarrow a+b=\frac{5}{4}b$ sau $b=4a\Rightarrow a+b=a+4a=5a$.
$\frac{x\cdot 5a}{100}=a\Rightarrow x=\frac{100a}{5a}=20$. Răspuns, 20%.

108. $x-\frac{15}{100}\cdot x=680\Rightarrow 85x=68000\Rightarrow x=800$ lei.

109. (d): $4x-2y-6=0;\quad A(a;a+2)\in d\Rightarrow 4\cdot a-2\cdot(a+2)-6=0\Rightarrow 2a=10\Rightarrow a=5.$

110. (d): $2x+ay-1=0.$ Cum $A(-1;1)\in d\Rightarrow 2\cdot(-1)+a\cdot 1-1=0\Rightarrow a=3$.

111. Triunghiul ABC este echilateral, atunci $P_{ABC}=3AB$. Cum $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}==\sqrt{(1-(-2))^2+(4-1)^2}=\sqrt{3^2+3^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$ rezultă. $P_{ABC}=3AB=3\cdot 3\sqrt{2}=9\sqrt{2}$

112. $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{(-3+2)^2+(3-2)^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$.

113. M este mijlocul segmentului $[BC]$: $M\left(\frac{x_B+x_C}{2},\frac{y_B+y_C}{2}\right)=M(1;0)$ Atunci, lungimea segmentului $[AM]$ *este* $AM=\sqrt{(x_M-x_A)^2+(y_M-y_A)^2}=\sqrt{6^2}=6.$

114. $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{(4-(-1))^2+(-2-2)^2}=\sqrt{25+16}=\sqrt{41}$.

$BC=\sqrt{16+25}=\sqrt{41}$, $CA=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$. Atunci, $P_{ABC}=AB+AC+BC=2\sqrt{41}+\sqrt{2}$.

115. $AB=5\Rightarrow\sqrt{(-1-2)^2+(a+2)^2}=5|()^2\Rightarrow\ 9+(a+2)^2=25\Rightarrow(a+2)=16\Rightarrow a+2=\pm 4$.
Convine doar soluția a=2;

116. $A(x_A,y_A),B(x_B,y_B)\Rightarrow$panta dreptei AB este $m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{a-(-3)}{a-1-2}$.

Dreapta (d): ax+by+c =0 are panta egală cu $m_d=-\frac{a}{b}$. În cazu nostru, (d): $3x-4y-2=0\Rightarrow -4y=-3x+2\Rightarrow y=\frac{3}{4}x-\frac{2}{4}\Rightarrow$ panta dreptei (d) este $m_d=\frac{3}{4}$.
Cum dreapta d este paralelă cu dreapta AB, rezultă că au pantele egale, adică $m_d=m_{AB}\Rightarrow$ $\frac{3}{4}=\frac{a+4}{a-3}$ adică $4a+16=3a-9\Rightarrow a=-25$.

117). Ecuația dreptei AB este : $\begin{vmatrix} x & y & 1\\ -2 & 4 & 1\\ 3 & 5 & 1\end{vmatrix}=0\Rightarrow 4x-10+3y-12-5x+2y=0\Rightarrow -x+5y-22=0.$

118. Ecuația dreptei **d** care trece prin punctul $A(x_0,y_0)$ și are panta m este $y-y_0=m_d(x-x_0)$.
Se găsește mai întâi panta dreptei (g): $2x-y+2=0\Leftrightarrow y=2x+2\Rightarrow m_g=2$. Cum cele două drepte sunt perpendiculare, $d\perp g\Rightarrow m_d\cdot m_g=-1\Rightarrow\ m_d\cdot 2=-1\Rightarrow m_d=-\frac{1}{2}$. Așadar, ecuația dreptei d este $y-2=-\frac{1}{2}(x+4)\Rightarrow x+2y=0$.

119. Ecuația dreptei **d** care trece prin punctul $A(x_0, y_0)$ și are panta m este $y - y_0 = m_d(x - x_0)$.

Se găsește mai întâi panta dreptei (g): $-2x + 4y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{2}{4}x + \frac{1}{4} \Rightarrow m_g = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Cum cele două drepte sunt paralele, $d \parallel g \Rightarrow m_d = m_g \Rightarrow m_d = \frac{1}{2}$. Așadar, ecuația dreptei d este $y - 1 = \frac{1}{2}(x + 2) \Rightarrow -x + 2y - 4 = 0$.

120. $y - y_0 = m_d(x - x_0)$ unde m este panta dreptei adică $m_d = tg\alpha = tg30^0 = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow$

$y - 3 = \frac{\sqrt{3}}{3}(x + 1) \Rightarrow 3y - 9 = \sqrt{3}x + \sqrt{3} \Rightarrow -\sqrt{3}x + 3y - 9 - \sqrt{3} = 0$.

121. Ecuația dreptei d este $y - y_0 = m_d(x - x_0)$ unde $m_d = tg\frac{\pi}{6} = tg30^0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Atunci, $y - 1 = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - 2) \Rightarrow \sqrt{3}x - 3y + 3 - 2\sqrt{3} = 0$.

122. Fie $C(x; y)$ simetricul lu A față de B, adică B este mijlocul lui AC. Atunci, $0 = \frac{2 + x}{2} \Rightarrow x = -2$ și $4 = \frac{-8 + y}{2} \Rightarrow y = 16$. Rezultă $C(-2;16)$.

123. Mijlocul segmentului $[BC]$: $M\left(\frac{x_B + x_C}{2}, \frac{y_B + y_C}{2}\right) = M\left(\frac{5}{2}; 0\right)$.

Ecuația medianei $[AM]$ este ecuația dreptei AM : $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ \frac{5}{2} & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x + 11y - 5 = 0.$

124. $d_1 \parallel d_2 \Rightarrow \frac{a - 2}{1} = \frac{1}{3} \Rightarrow 3a - 6 = 1 \Rightarrow 3a = 7 \Rightarrow a = \frac{7}{3}$.

125. Ecuația dreptei este $\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}$ sau cu ajutorul determinantului

$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -3x - 2y + 11 = 0.$

126. Două drepte sunt paralele, $AB \parallel CD \Leftrightarrow m_{AB} = m_{CD}$

$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1 - (-1)}{2 - (-4)} = \frac{1}{3}$; $m_{CD} = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_A} = \frac{2 - 0}{5 - (-1)} = \frac{1}{3}$. Deci, cele două drepte sunt paralele.

127. (d): $y - y_0 = m_d(x - x_0)$; (g): $2x - 6y + 8 = 0 \Rightarrow 6y = 2x + 8 \Rightarrow y = \frac{1}{3}x + \frac{8}{6} \Rightarrow$

$m_g=\frac{1}{3}$. Cum $d\parallel g\Rightarrow m_d=m_g=\frac{1}{3}\Rightarrow y-1=\frac{1}{3}(x+3)\Rightarrow -x+3y-6=0$.

128. Triunghiul ABC este dreptunghic în B deoarece AB=8, BC=6 și AC=10 iar cu Teorema Reciprocă a lui Pitagora ($AB^2+BC^2=AC^2$) se arată acest lucru.
Se mai poate arăta cu produsul pantelor dreptelor AB și BC care dau -1 adică cele două drepte sunt perpendiculare.

129. Cu teorema cosinusului se află AC, și anume $AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos B\Rightarrow$ $AC^2=25+16-2\cdot 5\cdot 4\cdot\frac{4}{5}\Rightarrow \quad AC^2=9\Rightarrow AC=3.$ Atunci, perimetrul triunghiului ABC este egal cu $P_{ABC}=AB+AC+BC=5+3+4=12$.

130. $\overrightarrow{OA}(2;3),\ \overrightarrow{OB}(-1;-5)\Rightarrow\ \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=(2+(-1);3+(-5)=(1;-2)$.

131). $d_1\parallel d_2\Rightarrow\frac{1}{1}=\frac{-(m+1)}{-7}\Rightarrow 7=m+1\Rightarrow m=6.$

132. Ecuația drepeti AB este: $\begin{vmatrix} x & y & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 3 & 4 & 1\end{vmatrix}=0\Rightarrow 2x+4+3y-6-4x-y=0$. Rezultă

$-x+y-1=0\Rightarrow y=x+1$, atunci panta dreptei AB este 1 care este egală cu panta dreptei cerute. Așadar, ecuația paralelei este $y-y_C=m_d(x-x_C)\Rightarrow y-1=1(x-0)\Rightarrow y=x+1.$

133. Se aplică teorema cosinusului: $AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos B$,
$49=x^2+64-2\cdot x\cdot 8\cdot\cos 60^0\Rightarrow\ x^2-8x+15=0\Rightarrow\ x\in\{3;5\}$.

134. Mai întâi se determină coordonatele mijlocului segmentului $[BC]$, $M(\frac{2+4}{2};\frac{-2+2}{2})=M(3;0)$.

Atunci, ecuația dreptei AM este : $\begin{vmatrix} x & y & 1\\ -3 & 1 & 1\\ 3 & 0 & 1\end{vmatrix}=0\Rightarrow x+3y-3+3y=0\Rightarrow x+6y-3=0$.

135. x; x+7; x+8 sunt lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic, atunci cu teorema reciprocă a lui Pitagora rezultă $(x+8)^2=x^2+(x+7)^2\Rightarrow\ x^2+16x+64=x^2+x^2+14x+49\Rightarrow$ $x^2-2x-15=0\Rightarrow x\in\{-2;5\}$. Convine doar soluția 5.

136. $AB=\sqrt{(4-1)^2+(-2-1)^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$.

137). $y-y_0=m(x-x_0)\Rightarrow y+2=2x-2\Rightarrow y-2x+4=0$.

138. $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1\\ 3 & 3 & 1\\ m & 5 & 1\end{vmatrix}=0\Rightarrow 6+15+4m-3m-10-12=0\Rightarrow m=1.$

139. $G\left(\frac{-1-3+4}{3};\frac{4-4+3}{3}\right)=G(0;1)$. Ecuația dreptei AG este $\begin{vmatrix} x & y & 1\\ -1 & 4 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=0\Rightarrow 3x+y-1=0$.

140. (d): 4x-y+1 =0 , sau y= 4x+1 cu panta m=4. Cum cele două drepte sunt paralele, rezultă că au pantele egale. Atunci ecuația dreptei cerute este $y-2=4(x+1)\Rightarrow 4x-y+6=0$.

141. $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{(-m-2)^2+(-2-m)^2}=4\sqrt{2}\,|()^2\Rightarrow$ $2(m+2)^2=16\cdot 2\Rightarrow (m+2)^2=16\Rightarrow m+2=\pm 4\Rightarrow m\in\{-6;2\}$.

142. $AB=\sqrt{7}\Rightarrow\sqrt{(m-1)^2+(3-m)^2}=7\Rightarrow$ $m^2-2m+1+9-6m+m^2=7\Rightarrow 2m^2-8m+3=0\Rightarrow m\in\left\{2\pm\frac{\sqrt{10}}{2}\right\}$.

143. $\begin{cases}3x-4y-5=0\\ x+2y+5=0\end{cases}\cdot 2\Rightarrow x=-1\Rightarrow y=-2\Rightarrow P(-1;-2)$.

144. ABCD este dreptunghi atunci AC=BD, rezultă $\sqrt{(2-4)^2+(0-6)^2}=\sqrt{(6-0)^2+(2-4)^2}\Rightarrow\sqrt{40}=\sqrt{40}$.

145. $\begin{cases}A(-1;2)\in d\\ B(3;6)\in d\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2=-1\cdot a+b\\ 6=3a+b\end{cases}\Rightarrow a=1\Rightarrow b=3$.

Teste de autoevaluare

Testul 1. 1. a) 2. c) 3. d) 4. b) 5. d) 6. c) .

Testul 2. 1. a) 2. c) 3. b) 4. b) 5. d) 6. c)

Bibliografie

1. Adrian Stan. Sinteze matematice. Editura Rafet. Rm. Sărat. 2007.
2. Adrian Stan, colab. Matematică. Ghid de pregătire M2. Bacalaureat 2010. Editura Campion. Bucureşti. 2010.
3. Adrian Stan. Polinoame. Proprietăţi aritmetice. Editura EditGraph. Buzău. 2010.
4. Adrian Stan. Memorator la matematică cu exemple. Editura Editgraph. Buzău. 2012.
5. Adrian Stan și colab. Teste la matematică Clasele IX – X. Editura Editgraph. Buzău. 2013.
6. Adrian Stan și colab. Matematică. Bacalaureat 2015. Editura Campion. București. 2014.
7. Aurelia Gomolea. Matematică. Manual pentru clasa a XI-a. Editura Teora. Bucureşti. 2002.
8. Becheanu M., Grigore Gh.,Ianuş S.,Ichim I. Probleme de algebră, analiză matematică şi geometrie. Editura Cartea Românească. 1991.
9. Bordieanu Nicolae, Bordieanu Mona. Culegere de exerciţii şi probleme de algebră, clasele IX- XII. Editura Conexiuni. Bacău. 2001.
10. Burtea Marius, Burtea Georgeta. Manual de matematică clasa a IX-a. Editura Carminis. Piteşti. 2004.
11. Burtea Marius, Burtea Georgeta. Culegere de exerciţii şi probleme Matematică M2. Editura Campion. Bucureşti. 2009.
12. Burtea Marius, Burtea Georgeta. Matematică , manual pentru clasa a XI-a. Editura Carminis. Piteşti. 2008.
13. Cohal Traian, Iurea Gheorghe. Probleme de matematică pentru clasa a XI-a. Editura Taida. Iaşi. 2006.
14. Coşniţă C., Turtoiu F. Probleme de algebră. Editura Tehnică . Bucureşti. 1989.
15. Dan Brânzei. Matematică. Manual pentru clasa a IX-a. Editura Sigma. Bucureşti. 1999.
16. Dumitru Săvulescu. Matematică. Manual pentru clasa a XII-a . editura. Art. 2007
17. GangaM., Matematică, manual pentru clasa a XI-a. Editura Mathpress. Ploieşti. 2002.
18. Gomolea Aurelia şi colaboratori. Matematică, manual pentru clasa a XI-a. Editura Teora Educaţional. Bucureşti. 2003.
19. Ion Necşuleu. Matematică. Manual pentru clasa a XI-a. Editura Fair Partners. Bucureşti. 2006
20. Lupaş Luciana, Lupaş Alexandru. Probleme de algebră. Editura Gil. Zalău. 2002.
21. Marian Andronache. Matematică pentru clasa IX-a. Editura Art.Bucureşti. 2005.
22. Mircea Ganga. Matematică. Manual pentru clasa a X-a. Editura MathPress. 2005.
23. Mirică Ştefan şi colaboratori, Matematică, manual pentru clasa a XI-a. Editura Aramis. Bucureşti. 2009.
24. Năstăsescu C., Niţă. C, Brandiburu M., Joiţa D. Exerciţii şi probleme de algebră. Editura Didactică şi Pedagogică. Bucureşti. 1983.
25. Fără autor. Ghid metodic. Bacalaureat 2009. M2. Editura Gil . Zalău. 2009.