ADRIAN STAN

MATEMATICĂ

pentru clasa a IX-a



Editura editgraph

ADRIAN STAN

MATEMATICĂ
pentru clasa a IX-a

Buzău, 2016

ADRIAN STAN

MATEMATICĂ
pentru clasa a IX-a

Buzău, 2016

Referenți științifici:
Prof. Marin Chirciu, Colegiul Național „Zinca Golescu”, Pitești
Prof. Florin Stănescu, Școala Gimnazială „Șerban Cioculescu”, Găești

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
STAN, ADRIAN
Matematică pentru clasa a IX-a / Adrian Stan. - Buzău : Editgraph, 2016
ISBN 978-606-663-439-7

51(075)(076)

ISBN: 978-606-663-439-7
Editor: Florin Comăniță
Corectură: Florentina Popescu
Tehnoredactare: Adrian Stan
Coperta: Adrian Stan

Tipar: editgraph Buzău
www.editgraph.ro

CUPRINS

Prefață **7**
Introducere **9**
Simboluri matematice **13**
Breviar teoretic **17**

Partea I.

1. Numere reale **31**
1.1 Operații cu numere întregi și raționale **31**
1.2 Operații cu numere reale **38**
1.3 Calcul algebric **46**
1.4 Modulul numerelor reale **51**
1.5 Ecuații în mulțimea numerelor reale **55**
1.6 Aproximarea numerelor reale **60**
1.7 Inecuații și intervale în $\mathbb{R}$ **64**
1.8 Inegalități în $\mathbb{R}$ **74**

2. Elemente de logică matematică **80**
2.1 Enunț. Propoziție. Valoare de adevăr **80**
2.2 Predicate. Cuantificatori **85**
2.3 Tipuri de raționament. Metoda inducției matematice **87**

3. Progresii **92**
3.1 Șiruri **92**
3.2 Progresii aritmetice **96**
3.3 Progresii geometrice **101**

4. Funcții **109**
4.1 Funcții. Definiție. Proprietăți **109**
4.2 Monotonia funcțiilor **116**
4.3 Compunerea funcțiilor **120**

5. Funcția de gradul întâi **123**
5.1 Definiție. Graficul funcției de gradul întâi **123**
5.2 Ecuații reductibile la ecuații de gradul întâi **128**
5.3 Monotonia și semnul funcției de gradul întâi **132**
5.4 Sisteme de ecuații **137**

6. Funcția de gradul al doilea **143**
6.1 Definiție. Grafiucl funcției de gradul al doilea **143**
6.2 Ecuația de gradul al doilea **150**
6.3 Monotonia și semnul funcției de gradul al doilea **154**
6.4 Relațiile lui Viete **159**
6.5 Sisteme de ecuații **162**

Partea a II-a
1. Calcul vectorial 168
1.1 Vectori sub formă algebrică 168
1.2 Operații cu vectori 170
1.3 Modulul unui vector 171
1.4 Vectori coliniari. Vectori ortogonali 174

2. Aplicații ale vectorilor în geometrie 177

3. Elemente de trigonometrie 189
3.1 Măsura unghiurilor 189
3.2 Reducerea la un unghi ascuțit 192
3.3 Formule trigonometrice 195

4. Aplicații ale trigonometriei în geometrie 201
4.1 Relații metrice în triunghiul dreptunghic 201
4.2 Teorema sinusurilor. Teorema cosinusului 206
4.3 Aria triunghiului 211

Partea a III-a
1. Probleme recapitulative, clasa a IX-a 217
2. Probleme propuse pentru concursuri 223
Indicații și răspunsuri 227
Bibliografie 267

Prefață

Lucrarea „ **Matematică pentru clasa a IX-a** ” reprezintă un auxiliar didactic util pentru toți elevii de clasa a IX-a care studiază matematica după programa M2 și își propune aprofundarea cunoștințelor prin parcurgerea materiei lecție cu lecție.

Fiecare lecție este realizată în ideea de a prezenta noțiunile teoretice într-o formă cât mai simplă și ușor de reținut, unele din ele având și demonstrații și fiind însoțite de exemple care să facă înțelegerea și aplicarea cunoștințelor cât mai ușoară.

Elevii pot găsi pentru fiecare lecție o serie de exerciții rezolvate detaliat din care pot să înțeleagă lecția și pe care le pot lua ca model pentru efectuarea celorlalte exerciții propuse.

Este recomandat ca fiecare elev să-și însușească noțiunile teoretice noi care apar și tipurile de exerciții prin rezolvarea de către ei mai întâi a acelor exerciții rezolvate și verificarea apoi a rezultatelor cu cele din carte. Mai departe se poate trece la aprofundarea lecției prin rezolvarea de către elevi a acelor exerciții nerezolvate care se propun spre rezolvare și verificarea cu răspunsurile de la sfârșitul cărții.

Cartea este însoțită la sfârșit de un capitol conținând probleme recapitulative din materia clasei a IX-a, care pot fi rezolvate ca o recapitulare a materiei la sfârșitul anului școlar sau pot fi propuse ca temă de lucru pentru vacanță. De asemenea, la sfârșit întâlnim și o selecție a unor probleme propuse de autor la o serie de concursuri județene sau naționale de matematică cum ar fi „Sclipirea Minții” sau ” Magia Numerelor”. Având un grad de dificultate peste nivelul programei școlare, problemele sunt însoțite de rezolvări complete.

O sinteză a tuturor cunoștințelor teoretice din clasa a IX-a și nu numai, căci se întâlnesc și cunoștințele de algebră din gimnaziu, se poate găsi la începutul cărții, devenind utilă pentru acei elevi care caută o anumită formulă pe care nu și-o mai amintesc.

Cartea poate fi abordată și de către profesori pentru a-și organiza materia și a oferi elevilor o gamă largă de exerciții din care să poată lucra cu ei.

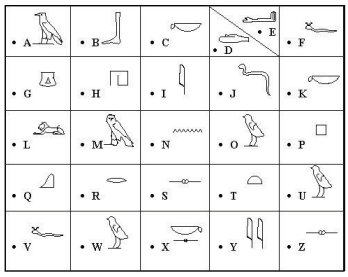
Sperăm că această carte să contribuie esențial la înțelegerea mult mai ușoară a matematicii iar prin perseverența și conștiinciozitatea elevilor de a lucra exercițiile să ducă la obținerea unor rezultate mai bune la școală sau la examene.

Prof. Adrian Stan,
Liceul Tehnologic „Costin Nenițescu”, Buzău

Introducere

Numerele și reprezentarea lor a fost dintodeauna o necesitate de a reprezenta vârsta unui om sau a unui animal, de a indica trecerea anilor care s-au scurs de la un anumit eveniment, puteau arăta valoarea producțiilor agricole, a numărului de oameni sau sclavi care munceau pământul sau în construcții. Indicau de asemenea datoriile pe care le aveau de plătit sau foloseau la diverse măsurători.

Acum mult timp, să fie circa 4000 de ani înaintea erei noastre, în delta Nilului din Egipt, populațiile băștinașe au dezvoltat un sistem de scriere cu simboluri numite hieroglife. Datorită necesității de a cunoaște succesiunea fenomenelor atmosferice și astronomice, egiptenii au realizat calendare lunare și solare. Numerele egiptene erau reprezentate prin simboluri diferite plecând de la 1 la 10 și apoi pentru 100, 1000, etc., toate celelalte erau scrise în funcție de acestea.



Au rămas celebre descoperirile **papirusului Rhind** sau cel al **scribului Ahmes** (2000-1800 î.e.n) unde sunt prezentate mediile aritmetice, geometrice, armonice, formule pentru arii, metode de înmulțiri, împărțiri, calcule cu fracții.



Scrierea cuneiformă o regăsim în Babilon, vechiul Irak, cam tot în aceași perioadă. Aici, în Mesopotamia între cele două râuri Tigru și Eufrat s-a dezvoltat probabil cea mai veche civilizație, cea sumeriană. De la sistemul lor de numerație în baza 60 ne-a rămas exprimarea timpului în 60 de secunde minutul, și 60 de minute ora. Începând cu anul 1850 arheologii au descoperit peste 400 de tăblițe din argilă scrise în cuneiforme, pe una din ele fiind descoperită o aproximare a numărului $\sqrt{2}$ cu cinci zecimale.

Simbolurile pe care le foloseau romanii pentru numere proveneau de la civilizația etruscă pe care o asimilaseră urmașii Romei începând cu sec 5 î.e.n și până în sec 1 î.e.n.

1 = I	11 = XI	25 = XXV
2 = II	12 = XII	30 = XXX
3 = III	13 = XIII	40 = XL
4 = IV	14 = XIV	49 = XLIX
5 = V	15 = XV	50 = L
6 = VI	16 = XVI	51 = LI
7 = VII	17 = XVII	60 = LX
8 = VIII	18 = XVIII	70 = LXX
9 = IX	19 = XIX	80 = LXXX
10 = X	20 = XX	90 = XC
	21 = XXI	99 = XCIX

Grecii foloseau pentru numere, literele de la alfabet α, β, γ, ε, δ, π, σ, etc., și apoi pentru multiplii lui 10, 100, 1000, etc. Pentru numere cu două cifre ei foloseau două litere, pentru numere cu trei cifre foloseau trei litere. Cum nu aveau foarte multe litere în alfabet ei mai foloseau o serie de

α	Alpha	a	1	ι	Iota	i	10	ρ	Rho	r	100
β	Beta	b	2	κ	Kappa	k	20	σ (ς)	Sigma	s	200
γ	Gamma	g	3	λ	Lambda	l	30	τ	Tau	t	300
δ	Delta	d	4	μ	Mu	m	40	υ	Upsilon	u	400
ε	Epsilon	e	5	ν	Nu	n	50	φ	Phi	ph	500
ς	Digamma*	st	6	ξ	Xi	x	60	χ	Chi	ch	600
ζ	Zeta	z	7	ο	Omicron	o	70	ψ	Psi	ps	700
η	Eta	Ē	8	π	Pi	p	80	ω	Omega	ō	800
θ	Theta	th	9	ϙ	Koppa*	q	90	ϡ	Sampi*	sp	900

simboluri la dreapta literei pentru a arăta că numărul se multiplică. Toate numerele aveau o bară deasupra pentru a se face deosebirea dintre cuvinte și numere.
Matematicienii greci ai Antichității au legat studiul matematicii de necesitățile practice ale timpurilor lor: măsurarea înălțimii piramidelor folosind lungimea umbrelor lor, determinarea distanței dintre două puncte inaccesibile, calculul ariei unor suprafețe neregulate, probleme de măsurători și transformări, etc.

Cei mai mari gânditori și reprezentanți ai școlii științifice grecești au fost: **Thales din Milet, Pitagora din Samos, Platon, Aristotel, Eudoxus, Euclid, Eratostene din Cyrene, Arhimede din Sirucaza, Heron din Alexandria, Ptolemeu, Pappos din Alexandria;**

Pe inscripțiile budiste de acum 2000 de ani î.e.n descoperite în Valea Indusului, s-au descoperit notațiile pentru numere asemănătoare cu cele transmise de către episcopul creștin sirian **Severus Sebokht** (575- 667) care a trăit în Mesopotamia în anii 650 e.n.



Matematicianul chinez **Liu Hui** utilizând poligoane regulate cu un număr foarte mare de laturi reușește să determine valoarea exactă cu cinci zecimale a numărului pi, $\pi = 3{,}14159$. De asemenea, el utilizează o metodă de aproximare a soluțiilor unei ecuații, metodă ce avea să fie descoperită mult mai târziu de cel care îi poartă numele: metoda lui Horner. ([6],p15).

Matematicianul indian **Brahmagupta** (589 -668) a introdus în 628 printr-o lucrare de a sa ("Deschiderea Universului"), cifra zero și a dat reguli de calcul aritmetic folosite ulterior la observațiile astronomice pe care le-a monitorizat, fiind conducătorul Observatorului astronomic din Uijjain.

El cunoştea calculul cu fracţii , raționalizarea numitorilor fracțiilor şi știa și modul de rezolvare a unor ecuaţii, al calculului rădăcinii pătrate şi al unor probleme de astronomie și sunt descrise operațiile de adunare și scădere cu numere negative.

În plus, se cunoaște că de la el provine formula de rezolvare a ecuației de gradul al doilea, $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, scrise în cuvinte fără a folosi simbolurile actuale.

În anul 766, cartea lui **Brahmagupta** era deja tradusă în arabă și se găsea în posesia califului Abu Ja'far Abdallah ibn Muhammad al-Mansur (712 - 775) din Bagdad, care înființase o școală celebră de astronomie și științe.

Matematicianul și astronomul persan **al- Khwarizmi** (circa 825), care învățase la școala califului al-Mansur, traduce multe din textele indiene în arabă, iar prin lucrarea sa "On the Calculation with Hindu Numerals" este cel care a promovat introducerea sistemului în baza 10 de numerație hindus, în lumea arabică. Mai târziu, lucrarea sa a fost tradusă în latină, dând Europei în 976, mai precis în Spania care era sub ocupație arabă, un sistem de numerație mult mai ușor de folosit.

Acest lucru a condus inițial la un conflict între susținătorii lui, numiți " algoriști " de la numele matematicianului **al-Khwarizimi** și acei călugări numiți "abacişti", care foloseau sistemul roman de scriere iar pentru calcul foloseau abacul. ([8], p18).

De aceea, introducerea pe cale largă a sistemului de numerație indo-arab a întârziat cel puțin 500 de ani.

Alți mari oameni de știință arabi au fost **Abu Kamil** (850- 930) care a rezolvat ecuații algebrice de grad cel mult 8, **Abu al-Wafa Buzjani** (940-998) care a introdus definiția tangentei, **Al Biruni** (973-1048) care consideră pentru prima dată cercul trigonometric de rază 1, și de asemenea a găsit regulile de calcul cu sume de puteri și scrierea regulii de trei simplă, **Omar Khayyam** (1048- 1131), preocupat de geometria analitică și neeuclidiană precum și de găsirea soluțiilor ecuațiilor cubice.

Mayașii, circa 36 î.e.n foloseau un sistem în care exista și simbolul pentru cifra 0. Deși cifra zero se găsea în general în cultura popoarelor Americii de Sud, nu se poate spune că a influențat deosebit dezvoltarea matematicii.

Deși **al Khwarizmi** a introdus zero în lumea arabică, denumirea de „zero" provine de la matematicianul venețian **Luca Pacioli** (1445 - 1514), care l-a folosit în textele sale, plecând de la cuvântul arab "zephirum", pentru a denumi cifra 0.

Leonardo Pisano (zis și **Fibonacci**) (1170 - 1250) pe când era doar un băiat, a călătorit cu tatăl său care era negustor, în nordul Africii și a luat astfel contact cu scrierea arabă. Nu peste mult timp, s-a dedicat matematicii iar în 1202 prin lucrarae sa „Liber Abaci" avea să facă și el cunoscut sistemul de scriere cu cifre arabe pe care-l va promova: „ Cele nouă simboluri indiene sunt 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1. Cu aceste nouă și cu semnul 0, orice număr poate fi scris", (apud [8], p 20).

Numerele naturale au fost primele numere folosite căci puteau reprezenta obiecte din natură. Deși matematicienii lumii antice înțelegeau conceptul de infinit, ca cel mai mare număr posibil, de abia în 1655 este introdus prin simbolul ∞ de către **John Wallis** în cartea sa " De sectionibus conicis". ([8], p 26).

Numerele negative au apărut la început prin cuvinte sau prin diverse simboluri reprezentând datorii, temperaturi negative, etc., încă din sec 2 î.e.n, în cartea chineză " Jinzhang suanshu" ("The Chapters on the Mathematical Art ") sau într-un manuscris indian datând din sec al VII-lea. De abia în 1489, **Johannes Widmann**(1460-1498) prin cartea sa "Mercantile Arithmetic" ("Aritmetica comercială") introduce în Europa simbolul " – " pentru numere negative cât și cel pentru plus "+", semnificând de fapt surplusul(+) și deficitul(-) în problemele economice.

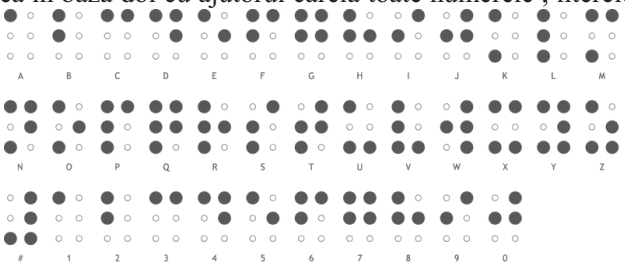
Expresii ale fracțiilor zecimale s-au descoperit în Valea Indusului pe o serie de obiecte arheologice datând din mileniul doi î.e.n iar în lumea arabă, primul text rămas care conține fracțiile zecimale aparțin lui Abu ' l Hasan al – Uqlidisi (920- 980). Mai târziu în sec. 12, cu ajutorul fracțiilor zecimale matematicianul iranian **Ibn al-Maghribi** deduce valoarea aproximativă a numerelor iraționale.

În Europa, primele încercări de folosire a fracțiilor zecimale s-au realizat în 1492 la **Francesco Pellos** și în 1530 la **Christoff Rudolff**. Cel care avea să fie creditat cu introducerea calculului cu fracții zecimale a fost **Simon Stevin**(1548-1520) în 1585 cu o notație de forma $3\,\textcircled{0}\,4\,\textcircled{1}\,7\,\textcircled{2}\,5\,\textcircled{3}$ reprezentând în fapt numărul 3,475.

Francois Viete (1540 - 1603) folosește o altă metodă de a scrie fracțiile zecimale cu ajutorul unei bare verticale care separa întregii de zecimale. Abia în 1612, germanul **Barholomaeus Pitiscus** (1561- 1613) separa întregii de zecimală printr-un punct iar italianul **Giovanni Magini** (1555- 1617) folosește virgula " , " pentru acest lucru.

În 1825, **Louis Braille** introduce alfabetul care-i poartă numele, alfabetul Braille pentru cei cu deficiențe de vedere. Sistemul de citire este format din litere scrise cu ajutorul unor puncte care ies în relief și pot fi simțite cu ajutorul degetelor, pentru fiecare literă și număr existând un semn diferit obținut prin combinarea celor șase puncte aflate pe o matrice de tipul 3 cu 2, adică trei linii și două coloane.

Dezvoltarea electronicii și a tehnicii de calcul a făcut posibilă dezvoltarea unui limbaj informatic bazat pe scrierea în baza doi cu ajutorul căreia toate numerele , literele și simbolurile se transformă în secvențe de unități de informații, astfel un octet sau byte este format din 8 căsuțe numite biți- cele mai mici unități de informație care iau numai valorile 0 sau 1.



Inginerul american de origine germană **Werner Buchholz** este cel care introduce în 1956 termenul de byte în timp ce lucra la compania IBM.

Cu timpul, au mai apărut și alte simboluri și sisteme de numerație.

În 1976, **Donald Knuts** introduce simbolul "$\wedge$" pentru a introduce ridicarea la putere. Astfel, $n\hat{}k = n^k$, $n\hat{}\hat{}n = n^{(n^n)}$. Ca exemplu, $4\hat{}2 = 4^2 = 16$.

Un sistem de numerație verbal l-a dezvoltat **Jaime Redin** în 1993. Astfel, acest sistem s-a dorit să fie mult mai intuitiv și ușor de folosit. Ca exemplu, numărul 3214 358 se poate scrie astfel: 3M214T358 de la cuvintele M = milion (million) iar T= zeci de mii (thousand).

Așadar, numerele și operațiile cu ele au cunoscut un amplu proces de elaborare și definitivare a lor, cunoștințele au trecut de la o generație la alta, de la o civilizație la alta, de la un continent la altul datorită schimburilor comerciale, a interferării culturilor datorită războaielor și a unor oameni de știință excepționali care studiau din mai multe domenii, de la politică și filozofie până la muzică și arte, de la matematică și științe în general până la cunoașterea mai multor limbi străine.

Simboluri matematice

,	**Virgula (separă întregii de partea zecimală a numerelor)**
+	**Plus (simbol pentru adunarea a două cantități)**
-	**Minus (simbol pentru scăderea a două cantități)**
·	**Înmulțit (simbol pentru înmulțirea numerelor)**
—	**Linie de fracție (indică raportul a două numere, segmente sau expresii)**
=	**Egal (exprimă egalitatea dintre două cantități)**
≠	**Diferit (pentru două cantități care nu au aceeași valoare)**
≡	**Identic sau identic egal (se folosește pentru a sublinia înb mod deosebit identitatea ambelor părți ale unei egalități)**
⟨	**Mai mic (exprimă relația dintre doi termeni, cel din stânga este mai mic decât cel din dreapta)**
⟩	**Mai mare(exprimă relația dintre doi termeni, cel din stânga este mai mare decât cel din dreapta)**
≤	**Mai mic sau egal (** $a \le b$ **înseamnă** $a \langle b$ **sau** $a = b$ **)**
≥	**Mai mare sau egal (** $a \ge b$ **înseamnă** $a \rangle b$ **sau** $a = b$ **)**
≈	**Aproximativ egal (indică valoarea aproximativă a numărului)**
⇒	**Rezultă sau implică**
→	**Implică (în logica formală)**
⇔	**Echivalent, dacă și numai dacă**
↔	**Echivalent (în logica formală)**
∧	**Operatorul și (conjuncție în logica formală)**
∨	**Operatorul sau (disjuncția în logica formală)**
~	**Asemenea (simbol folosit pentru a indica asemănarea dintre două figuri geometrice)**
‖	**Paralel (indică relația de paralelism în geometrie)**
⊥	**Perpendicular (sau Ortogonal) (indică relația de perpendicularitate)**
∈	**Aparține (** $a \in A$ **, adică a este un element a lui A)**
∉	**Nu aparține (** $a \in A$ **adică a nu aparține lui A)**
∪	**Reuniunea (la mulțimi,** $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$ **)**
∩	**Intersecția (la mulțimi,** $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ si } x \in B\}$ **)**
∖	**Diferența (la mulțimi,** $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ si } x \notin B\}$
Δ	**Diferența simetrică (** $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

$\times$	**Produsul cartezian** $A\times B=\{(x;y)\mid x\in A, y\in B\}$
$\subset$	**Inclus**
$\supset$	**Include**
$\subseteq$	**Inclus**
$\supseteq$	**Include**
$\varnothing$	**Mulțimea vidă (mulțimea care nu are niciun element)**
$\mathbb{N}$	**Mulțimea numerelor naturale** $\mathbb{N}=\{0;1;2;3;\ldots\ldots;n;\ldots.\}$
$\mathbb{N}^*$	**Mulțimea numerelor naturale nenule** $\mathbb{N}^*=\{1;2;3;\ldots\ldots n;\ldots.\}$
$\mathbb{Z}$	**Mulțimea numerelor întregi** $\mathbb{Z}=\{\ldots,-3;-2;-1;0;1;2;3;\ldots\ldots;n;\ldots.\}$
$\mathbb{Z}^*$	**Mulțimea numerelor întregi nenule** $\mathbb{Z}^*=\{\ldots,-3;-2;-1;1;2;3;\ldots\ldots;n;\ldots.\}$
$\mathbb{Q}$	**Mulțimea numerelor raționale**
$\mathbb{Q}^*$	**Mulțimea numerelor raționale nenule**
$\mathbb{R}$	**Mulțimea numerelor reale**
$\mathbb{R}^*$	**Mulțimea numerelor reale nenule**
$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$	**Mulțimea numerelor iraționale**
$\sqrt{x}$	**Rădăcina pătrată a lui x**
$\lvert x\rvert$	**Modulul lui x sau valoarea absolută a lui x**
$n!$	**n factorial (** $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\ldots\cdot n,\ \ n\in\mathbb{N}$ **)**
a^n	**a la puterea n (** $a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\ldots\cdot a}_{n\ de\ a}$ **)**
$[x]$	**Partea întreagă a lui x**
$\{x\}$	**Partea fracționară a lui x**
$\log_a x$	**Logaritm în baza a din x**
$\lg x$	**Logaritm zecimal din x (logaritm în baza 10)**
$\ln x$	**Logaritm natural din x (logaritm în baza e – numărul lui Euler)**

$i=\overline{1,n}$	**i ia valori de la 1 la n (** $i \in \{1,2,3,\ldots..,n\}$, $n \in \mathbb{N}$. **)**
$\sum_{i=1}^{n} a_i$	**Sumă după i de la 1 la n (** $\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots. + a_n$ **)**
$\prod_{i=1}^{n} a_i$	**Produs după i de la 1 la n (** $\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots\ldots \cdot a_n$ **)**
$\forall$	**Oricare ar fi (cuantificatorul universal,** $\forall x, p(x)$**, oricare ar fi x, are loc proprietatea p(x))**
$\exists$	**Există (cuantificatorul existențial,** $\exists x, p(x)$ **, există x cu proprietatea p(x))**
q.e.d	**Ceea ce era de demonstrat (Quod erat demonstarndum)**

Alfabetul grec (vechi) de tipar

A	α	**alfa**
B	β	**beta**
Γ	γ	**gamma**
Δ	δ	**delta**
E	ε	**epsilon**
Z	ζ	**dzeta**
H	η	**eta**
Θ	θ	**theta**
I	$\imath$	**iota**
K	κ	**kappa**
Λ	λ	**landa**
M	μ	**miu**
N	ν	**niu**
Ξ	ξ	**csi**
O	o	**omicron**
Π	π	**pi**
P	ρ	**ro**
Σ	σ	**sigma**
T	τ	**tau**
Υ	υ	**ipsilon**
Φ	φ	**fi**
X	χ	**hi**
Ψ	ψ	**psi**
Ω	ω	**omega**

Breviar teoretic

1. NUMERE REALE

Definiţie: A amplifica o fracţie cu un număr natural, diferit de 0, înseamnă a înmulţi atât numărătorul cât şi numitorul, cu acel număr. $\frac{a}{b}=\frac{a\cdot m}{b\cdot m}, b\neq 0, m\neq 0.$

Definiţie: A simplifica o fracţie cu un număr natural, diferit de 0, înseamnă a împărţi atât numărătorul, cât şi numitorul la acel număr. $\frac{a}{b}=\frac{a:m}{b:m}, b\neq 0, m\neq 0.$

Definiţie: Fracţia $\frac{a}{b}, b\neq 0$ **se numeşte fracţie ireductibilă, dacă nu se mai poate simplifica adică cel mai mare divizor comun al lor este egal cu 1, c.m.m.d.c(a,b)=1, altfel spus, numerele a, b sunt prime între ele.**

Compararea fracţiilor: Fie $a,b,c,d\in\mathbb{N},\quad a,b,c,d\neq 0$**.**

$\frac{a}{b}\rangle\frac{c}{b}\Leftrightarrow a\rangle c \qquad \frac{a}{b}\rangle\frac{a}{c}\Leftrightarrow b\langle c \qquad \frac{a}{b}\rangle\frac{c}{d}\Leftrightarrow a\cdot d\rangle b\cdot c$

Definiţie: Fie $a,b,c,d\in\mathbb{N},\quad a,b,c,d\neq 0$**.**

Fracţiile $\frac{a}{b}$ **şi** $\frac{c}{d}$ **se numesc echivalente dacă şi numai dacă** $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow a\cdot d=b\cdot c$**.**

Fracţie subunitară, echiunitară, supraunitară:

Fracţia $\frac{a}{b}, b\neq 0$ **se numeşte fracţie subunitară, dacă a < b sau** $\frac{a}{b}\langle 1$**.**

Fracţia $\frac{a}{b}, b\neq 0$ **se numeşte fracţie echiunitară, dacă a = b sau** $\frac{a}{b}=1$**.**

Fracţia $\frac{a}{b}, b\neq 0$ **se numeşte fracţie supraunitară, dacă a>b sau** $\frac{a}{b}\rangle 1$**.**

Definiţie: Se numeşte număr raţional , numărul reprezentat prin fracţia $\frac{a}{b}$ **(fracţie ordinară) şi toate fracţiile echivalente cu aceasta;**
Operaţii cu numere fracţionare: Pentru a aduna sau scădea numere fracţionare reprezentate prin numitori diferiţi se aduc fracţiile la acelaşi numitor prin amplificarea fiecărei fracţii cu câtul dintre c.m.m.m.c al numitorilor şi numitorul fracţiei respective.

$\boxed{\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}};$ $\boxed{\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}};$ $\boxed{\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}};$ $\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^0=1};$

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$; $\left(\frac{a}{b}\right)^m \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m+n}$; $\left(\frac{a}{b}\right)^m : \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m-n}$; $\left[\left(\frac{a}{b}\right)^m\right]^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m\cdot n}$;

Inversul lui $\frac{a}{b}$ este numărul $\frac{b}{a}$, oricare ar fi a, b diferite de zero.

$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$; $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{b^n}{a^n}$; $a\frac{b}{c} = \frac{a\cdot c+b}{c}$.

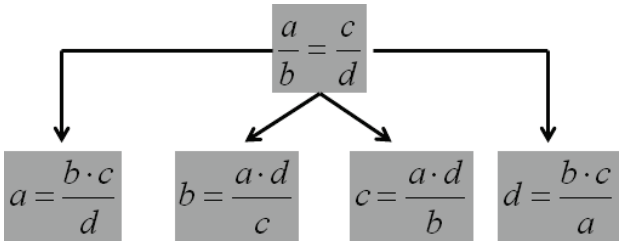
Definiţie: Un raport în care numitorul este 100, se numeşte **raport procentual** si se notează de forma $\frac{p}{100} = p\%$, sau $(p\cdot\frac{1}{100})$; **p se numeşte procent.**

$p\%\ din\ x = \frac{p}{100}\cdot x$; $p\%\ din\ \frac{a}{b} = \frac{p}{100}\cdot\frac{a}{b}$ sau $p\cdot\frac{1}{100}\cdot\frac{a}{b}$

$\frac{p}{100}$ **din x =a** $\Rightarrow x = a\cdot\frac{100}{p}$. **p % din N =a** $\Rightarrow p = \frac{a\cdot 100}{N}$. **D** $= \frac{S\cdot p\cdot n}{100\cdot 12}$ ….

Dobânda obţinută prin depunerea la bancă a unei sume **S** de bani pe o perioadă de **n** luni cu procentul **p** al dobândei anuale acordate de bancă **Proprietatea fundamentală a proporţiilor**: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a\cdot d = b\cdot c$

Aflarea unui termen necunoscut dintr-o proporţie



Modulul numerelor întregi: Fie $a\in\mathbb{Z} \Rightarrow |a| = \begin{cases} a, & a\rangle 0 \\ 0, & a = 0 \\ -a, & a\langle 0 \end{cases}$;

Proprietăţile modulului

1. $|a|\geq 0, \quad \forall a\in\mathbb{R}$; **2.** $|a| = 0, \quad \Leftrightarrow a = 0$; **3.** $|a| = |-a|, \quad \forall a\in\mathbb{R}$;

4. $|a| = |b|, \quad \Leftrightarrow a = \pm b$; **5.** $|x| = a, \quad \Rightarrow x = \pm a, \quad a\rangle 0$;

6. $|x|\leq a, \quad \Leftrightarrow x\in[-a,a], \quad a\rangle 0$; **7.** $|x|\geq a, \quad \Leftrightarrow x\in[-\infty,-a]\cup[a,+\infty], \quad a\rangle 0$;

Definiţie: **Fie** $a,b\in\mathbb{R}^*$, $m,n\in\mathbb{Z}^*$; **Atunci,** $a^n \underline{\underline{def}}\ \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\ldots\cdot a}_{n\ factori}$.

Proprietăţi:

1. $a^o = 1;\ a^1 = a;\ 0^n = 0$; **2.** $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$; **3.** $a^m : a^n = a^{m-n}$ **sau** $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$;

4. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ **5.** $(a:b)^n = a^n : b^n$ **sau** $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$;

6. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$; **7.** $(-1)^n = \begin{cases} 1, n \ \ par \\ -1, n \ \ impar \end{cases}$;

Definiţia radicalului de ordinul doi $\sqrt{a} \in \mathbb{R}_+$ $\sqrt{a} \geq 0,\ \forall a \geq 0$ $\sqrt{a}$ **nu există dacă** $a\langle 0$;

Proprietăţile radicalilor

$Fie\, a, b \in \mathbb{R}_+$

1. $\sqrt{a^2} = |a| \geq 0,$ **2.** $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ **3.** $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}},\ b \neq 0$

4. $\sqrt{a^n} = (\sqrt{a})^n = a^{\frac{n}{2}}$ **5.** $\sqrt{a} \in \mathbb{Q} \Rightarrow a = k^2$ **6.** $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}$

7. $\sqrt{a^2 b} = |a|\sqrt{b}$ **8.** $x\sqrt{a} \cdot y\sqrt{b} = xy\sqrt{ab}$ **9.** $x\sqrt{a} \pm y\sqrt{a} = (x \pm y)\sqrt{a}$

10. $\frac{x\sqrt{a}}{y\sqrt{b}} = \frac{x}{y}\sqrt{\frac{a}{b}},\ \ y, b \neq 0$ **11.** $\left(x\sqrt{a}\right)^n = x^n \sqrt{a^n}$

12. $\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$ unde $\mathbf{a^2-b=k^2}$.

<u>Calcul algebric</u>

Formule de calcul prescurtat în $\mathbb{R}$

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$ **2.** $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2;$

3. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$; **4.** $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

5. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$; **6.** $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2 b + 3ab^2 - b^3$;

7. $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$; **8.** $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$.

Reguli de calcul cu numere reale reprezentate prin litere

Factor comun $a \cdot x + a \cdot y + a \cdot z = a \cdot (x + y + z)$ $x \cdot (a+b+c) = x \cdot a + x \cdot b + x \cdot c$

Desfacerea parantezelor: $(x+y) \cdot (a+b+c) = x \cdot a + x \cdot b + x \cdot c + y \cdot a + y \cdot b + y \cdot c$

Raţionalizări $\boxed{\frac{x}{\sqrt{a}}=\frac{x\sqrt{a}}{a},\qquad \frac{x}{a\sqrt{b}}=\frac{x\sqrt{b}}{ab}}$

$\boxed{\frac{x}{a+\sqrt{b}}=\frac{x(a-\sqrt{b})}{a^2-b},\qquad \frac{x}{a-\sqrt{b}}=\frac{x(a+\sqrt{b})}{a^2-b}}$

Medii

Media aritmetică $m_a=\frac{x+y}{2}$; **Media geometrică** $m_g=\sqrt{x\cdot y}$,

$\forall x,y\in R^*{}_+$

Media ponderată $m_p=\frac{p\cdot x+q\cdot y}{p+q}; p,q\in N^*-ponderile$ **.**

Ecuaţii în mulţimea numerelor reale $\boxed{a\cdot x+b=0\Rightarrow a\cdot x=-b\Rightarrow x=-\frac{b}{a}}$, $a\neq 0.$

$\boxed{x^2=a\Rightarrow x=\pm\sqrt{a}, a\rangle 0.}$;

Ecuaţia de gradul al doilea: $ax^2+bx+c=0, a\neq 0, a,b,c\in\mathbb{R}$, $\Delta=b^2-4ac$,

$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Dacă $\Delta\langle 0\Rightarrow$	$S=\varnothing$	**Ecuaţia nu are soluţii reale**
Dacă $\Delta=0\Rightarrow$	$S=\left\{-\frac{b}{2a}\right\}$	**Ecuaţia are soluţie dublă** $x_1=x_2$
Dacă $\Delta\geq 0\Rightarrow$	$S=\left\{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a},\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$	**Ecuaţia are două soluţii reale diferite**

Intervale în $\mathbb{R}$ **.** Fie $a,b\in\mathbb{R},\ a\langle b.$

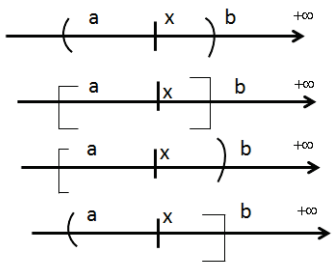
Intervale mărginite

$(a,b)=\{x\in\mathbb{R}\,|\,a\langle x\langle b\}$

$[a,b]=\{x\in\mathbb{R}\,|\,a\leq x\leq b\}$

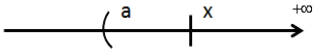
$[a,b)=\{x\in\mathbb{R}\,|\,a\leq x\langle b\}$

$(a,b]=\{x\in\mathbb{R}\,|\,a\langle x\leq b\}$

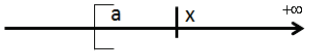


Intervale nemărginite

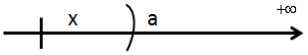
$(a,+\infty)=\{x\in\mathbb{R}\,|\,a<x\}$



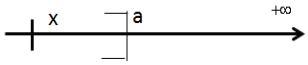
$[a,+\infty)=\{x\in\mathbb{R}\,|\,a\le x\}$



$(-\infty,a)=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x<a\}$



$(-\infty,a]=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\le a\}$



Inecuaţii în $\mathbb{R}$. Inecuaţii de forma $ax+b\le 0(\ <,\ \ge,\ >\ )$, $a\in\mathbb{R}^*, b\in\mathbb{R}$.

$ax+b\le 0\Rightarrow$	$x\le -\frac{b}{a}$	dacă $a>0$
	$x\ge -\frac{b}{a}$	dacă $a<0$

2. PROGRESII

Definiţie: Se numeşte progresie aritmetică un şir în care diferenţa oricăror doi termeni consecutivi este un număr constant r, numit raţia progresiei aritmetice.

1. Relaţia de recurenţă între doi termeni consecutivi: $a_{n+1} = a_n + r, \forall n \geq 1$;

2. a_{n-1}, a_n, a_{n+1} **sunt termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice** $\Leftrightarrow$

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

3. Termenul general este dat de formula : $a_n = a_1 + (n-1)r$

4. Suma oricăror doi termeni egal depărtaţi de extremi este egal cu suma termenilor extremi : $a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n$

5. Suma primilor n termeni : $S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$

6. Şirul termenilor unei progresii aritmetice: $a_1, a_1 + r, a_1 + 2r, ..., a_1 + (n-1)r$

$$a_m - a_n = (m-n)r$$

7. Trei numere $x_1,\ x_2,\ x_3$ **se scriu în progresie aritmetică de forma :**

$x_1 = u - v,\ x_2 = u,\ x_3 = u + v$ **,** $u, v \in \mathbb{R}$ **;**

Definiţie : Se numeşte progresie geometrică un şir în care raportul oricăror doi termeni consecutivi este un număr constant q, numit raţia progresiei geometrice.

1. Relaţia de recurenţă între doi termeni consecutivi: $b_{n+1} = b_n \cdot q, \forall n \geq 1$

2. b_{n-1}, b_n, b_{n+1} **sunt termenii consecutivi ai unei progresii geometrice** $\Leftrightarrow$

$$b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$$

3. Termenul general este dat de : $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$

4. Produsul oricaror doi termeni egal depărtaţi de extremi este egal cu produsul extremilor $b_k \cdot b_{n-k+1} = b_1 \cdot b_n$

5. Suma primilor n termeni ai unei progresii geometrice : $S_n = b_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$

6. Şirul termenilor unei progresii geometrice : $b_1,\ b_1 q,\ b_1 q^2, ...,\ b_1 q^{n-1}$

$$\frac{b_m}{b_n} = q^{m-n};$$

7. Trei numere $x_1,\ x_2,\ x_3$ **se scriu în progresie geometrică de forma :**

$$x_1 = \frac{u}{v},\ x_2 = u,\ x_3 = u \cdot v \quad u, v \in \mathbb{R}$$

3. FUNCŢII

Definiţie : Fie A şi B două mulţimi nevide. Se numeşte **funcţie definită pe A cu valori în B** , un triplet de forma (**A,B,f**) în care, printr-un procedeu (lege, corespondenţă) notat cu **f**, fiecărui element **x** din A îi corespunde un singur element **y** din B.

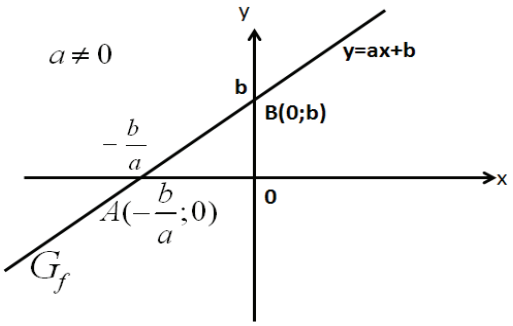
Convenim să notăm o funcţie astfel, $f: A \to B$ sau $A \xrightarrow{f} B$, unde

Definiţie: Fie $f: A \to B$. Se numeşte **imaginea funcţiei f** , mulţimea tuturor valorilor funcţiei f pe care o notăm cu **f(A) sau Im** $_f$.

Definiţie: Două funcţii **f şi g sunt egale** dacă şi numai dacă, au acelaşi domeniu de definiţie, acelaşi codomeniu şi stabilesc aceeaşi corespondenţă.

Definiţie : Fie A şi B două mulţimi (finite) de numere reale şi $f: A \to B$. Graficul funcţiei f reprezintă mulţimea tuturor punctelor de forma (x, f(x)) unde $x \in A$ iar f(x) este valoarea funcţiei f în x. $G_f = \{(x, f(x)) | x \in A, f(x) \in B\} \subset A \times B$.

Intersecţia graficului funcţiei de gradul întâi cu axele de coordonate, OX, OY: y=ax+b

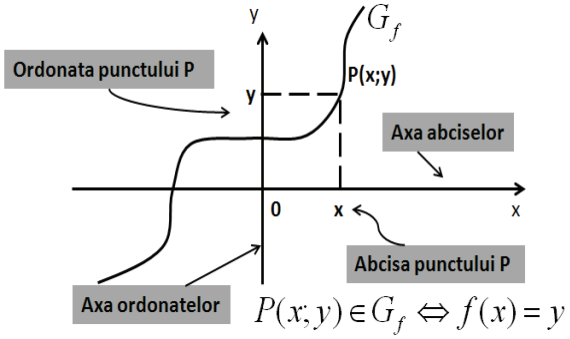


$\cap OX : y = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a} \Rightarrow A(-\frac{b}{a}, 0)$

$\cap OY : x = 0 \Rightarrow y = b \Rightarrow B(0, b)$

$G_f \cap Ox = A(-\frac{b}{a};0)$,

$G_f \cap Oy = B(0;b)$



$P(x;y) \in G_f \Leftrightarrow f(x) = y$

Definiţie : Un punct P(a,b) aparţine graficului unei funcţii f ,
$P(a;b) \in G_f \Leftrightarrow f(a) = b$.

Funcţii monotone

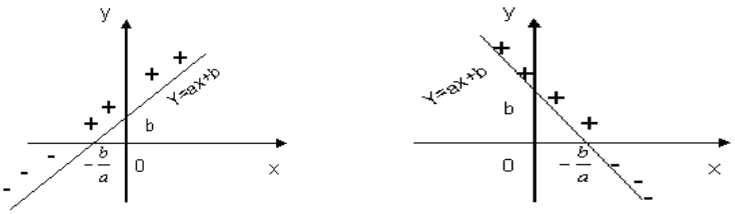
Definiţie : O **funcţie** $f:D\to\mathbb{R},\ D\subseteq\mathbb{R}$ **se numeşte strict crescătoare** pe D (respectiv **strict descrescătoare** pe D $\Leftrightarrow(\forall)x_1,x_2\in D, x_1\langle x_2\Rightarrow f(x_1)\langle f(x_2)$ (respectiv $f(x_1)\rangle f(x_2)$).

Definiţie : O **funcţie** $f:D\to\mathbb{R},\ D\subseteq\mathbb{R}$ **se numeşte crescătoare** pe D (respectiv **descrescătoare** pe D $\Leftrightarrow(\forall)x_1,x_2\in D, x_1\langle x_2\Rightarrow f(x_1)\le f(x_2)$ (respectiv $f(x_1)\ge f(x_2)$).

O funcţie care este crescătoare sau descrescătoare pe D se mai numeşte **monotonă.**

Definiţie: O **funcţie** $f:D\to\mathbb{R},\ D\subseteq\mathbb{R}$ **se numeşte constantă** $\Leftrightarrow(\forall)x_1,x_2\in D\Rightarrow f(x_1)=f(x_2)$.

Monotonia funcţiei de gradul întâi $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$, $a,b\in R$.
Pentru $a\rangle 0$**, funcţia este strict crescătoare, iar pentru** $a\langle 0$ **funcţia este strict descrescătoare.**



Semnul funcţiei de gradul întâi

f(x)= ax+b	$-\infty$					$-\frac{b}{a}$					$+\infty$
$a\rangle 0$	-	-	-	-	-	0	+	+	+	+	+
$a\langle 0$	+	+	+	+	+	0	-	-	-	-	-

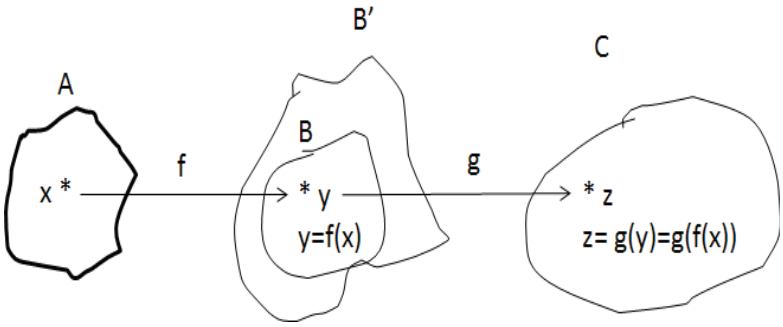
În concluzie, semnul funcţiei de gradul întâi este:

f(x)= ax+b	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
	Semn contrar semnului lui a	0	semnul lui a

Teoremă: O **funcţie** $f:D\to\mathbb{R},\ D\subseteq R$ **se numeşte strict crescătoare** pe D (respectiv **strict descrescătoare** pe D $\Leftrightarrow(\forall)x_1,x_2\in D\Rightarrow\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\rangle 0$ (respectiv $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\langle 0$).

- **Compunerea funcţiilor**

Definiţie: Fie $f:A\to B$ şi $g:B\to C$ două funcţii. Prin **compunerea funcţiei g cu funcţia f** se înţelege funcţia $g\circ f:A\to C$ (şi citim g compus cu f) cu proprietatea că $(g\circ f)(x)=g(f(x)),\ \forall x\in A$.



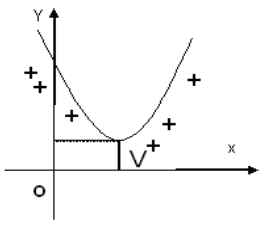
FUNCŢIA DE GRADUL AL DOILEA

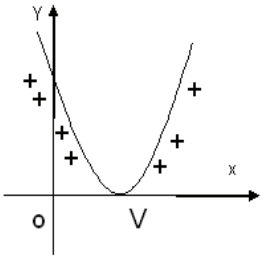
Forma canonică a funcţiei **f:R→R**, $f(x)=ax^2+bx+c, \quad a,b,c\in R, a\neq 0$ este

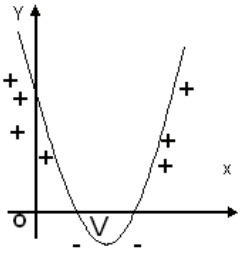
$f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}, \forall x\in R;$

Graficul funcţiei este o parabolă de vârf $V\left(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a}\right)$, unde $\Delta=b^2-4ac$

$a\rangle 0$ **f este convexă;**







$\Delta\langle 0$; **x1,x2** $\in$ **C** $\Delta=0$, **x1=x2** $\in$ **R** $\Delta\rangle 0, x_1\neq x_2\in R$

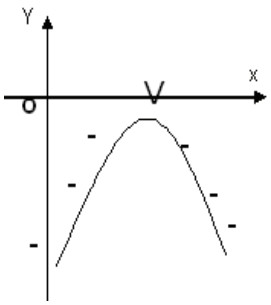
f(x) >0, $\forall x\in R$; f(x) ≥ 0, $\forall x\in R$; f(x) ≥ 0,

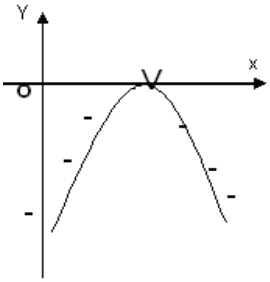
$\forall x\in(-\infty,x_1]\cup[x_2,+\infty)$;

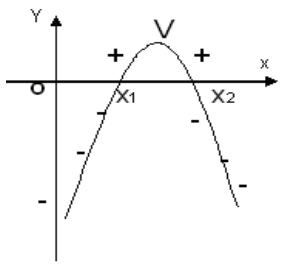
$V\left(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a}\right)$ - punct de minim; f(x)=0 $\Leftrightarrow x=-\frac{b}{2a}$ f(x)<0, $\forall x\in(x_1,x_2)$

Pentru $x\in\left(-\infty,-\frac{b}{2a}\right)$ funcţia este strict descrescătoare;Pentru $x\in[-\frac{b}{2a},+\infty)$, funcţia este strict crescătoare.

a<0 funcţia este concavă







$\Delta\langle 0$; $\mathbf{x_1,x_2} \in \mathbf{C}$ $\Delta = 0$, $\mathbf{x_1=x_2} \in \mathbf{R}$ $\Delta\rangle 0, x_1 \neq x_2 \in R$

f(x) <0, $\forall x \in R$; f(x) ≤ 0, $\forall x \in R$; f(x) ≥ 0, $\forall x \in [x_1, x_2]$;

$V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ - punct de maxim; f(x)=0 $\Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a}$ f(x)<0,

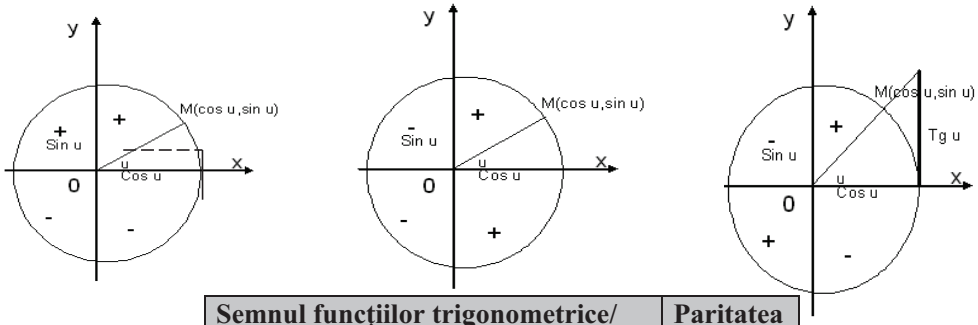
$\forall x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$

Pentru $x \in \left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$ funcţia este strict crescătoare;Pentru $x \in [-\frac{b}{2a}, +\infty)$, funcţia este strict descrescătoare.

4. Elemente de trigonometrie

Semnul funcțiilor trigonometrice

Sin: $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to[-1,1]$ **Cos:** $[0,\pi]\to[-1,1]$ **Tg:** $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$



Semnul funcţiilor trigonometrice/ cadrane					Paritatea
Funcția	**I**	**II**	**III**	**IV**	
Sin	+	+	-	-	**Impară**
Cos	+	-	-	+	**Pară**
Tg	+	-	+	-	**Impară**
Ctg	+	-	+	-	**impară**

<u>Reducerea la un unghi ascuțit</u>

Fie u $\in(0,\frac{\pi}{2})$ **Notăm sgn f= semnul funcţiei f; cof = cofuncţia lui f**

$$\sin\left(k\frac{\pi}{2}\pm u\right)=\begin{cases}\operatorname{sgn} f(k\frac{\pi}{2}\pm u)\cdot\sin u, k=par\\ \operatorname{sgn} f(k\frac{\pi}{2}\pm u)\cdot\cos u, k=impar\end{cases}$$ **În general** $$f(k\frac{\pi}{2}\pm u)=\begin{cases}\operatorname{sgn} f(k\frac{\pi}{2}\pm u)\cdot f(u), k=par\\ \operatorname{sgn} f(k\frac{\pi}{2}\pm u)\cdot cof(u), k=impar\end{cases}$$

Valorile funcțiilor trigonometrice pentru unghiuri fundamentale

n^0	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0	150^0	180^0	270^0	360^0
x rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
Sin x	**0**	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	**1**	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	**0**	**-1**	**0**
Cos x	**1**	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	**0**	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	**-1**	**0**	**1**
Tg x	**0**	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	**1**	$\sqrt{3}$	/	$-\sqrt{3}$	**-1**	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	**0**	/	**0**

Reducerea la primul cadran al argumentului funcţiilor trigonometrice

Funcţia sin x.

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=cosx, \forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right];$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}-30^0\right)=cos30^0=\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=cosx, \forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right];$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$
$\sin(\pi-x)=\sin x, \forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right];$	$\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\sin(\pi+x)=-\sin x, \forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right];$	$\sin\left(\pi+30^0\right)=-\sin 30^0=-\frac{1}{2}$
$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=-cosx, \forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right];$	$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=-cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=-cosx, \forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right];$	$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+45^0\right)=-cos45^0=-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\sin(2\pi-x)=-\sin x, \forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right];$	$\sin\left(2\pi-30^0\right)=-\sin 30^0=-\frac{1}{2}$
$\sin(2\pi+x)=\sin x, \forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right];$	$\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Funcţia cos x

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x, \forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right];$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}-60^0\right)=\sin 60^0=\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x, \forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right];$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\cos(\pi-x)=-cosx, \forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right];$	$\cos\left(\pi-60^0\right)=-cos60^0=-\frac{1}{2}$
$\cos(\pi+x)=-cosx, \forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right];$	$\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=-\sin x, \forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right];$	$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-30^0\right)=-\sin 30^0=-\frac{1}{2}$

$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=\sin x, \forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right];$	$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos(2\pi-x)=\cos x, \forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$	$\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos(2\pi+x)=\cos x, \forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$	$\cos\left(2\pi+60^0\right)=\cos 60^0=\frac{1}{2}$

Funcția tg x

$tg\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=ctgx, \forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right]$	$tg\left(\frac{\pi}{2}-45^0\right)=ctg45^0=1$
$tg\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-ctgx, \forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right]$	$tg\left(\frac{\pi}{2}+60^0\right)=-ctg60^0=-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$tg(\pi-x)=-tgx, \forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$	$tg\left(\pi-30^0\right)=-tg30^0=-\sqrt{3}$
$tg(\pi+x)=tgx, \forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$	$tg\left(\pi+45^0\right)=tg45^0=1$
$tg\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=ctgx, \forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right]$	$tg\left(\frac{3\pi}{2}-45^0\right)=ctg45^0=1$
$tg\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=-ctgx, \forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right]$	$tg\left(\frac{3\pi}{2}+30^0\right)=-ctg30^0=-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$tg(2\pi-x)=-tgx, \forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right]$	$tg\left(2\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-tg\frac{\pi}{4}=-1$
$tg(2\pi+x)=tgx, \forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right]$	$tg\left(2\pi+\frac{\pi}{3}\right)=tg\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$

Formule trigonometrice

1. Formula fundamentală a trigonometriei

$\boxed{\sin^2 a+\cos^2 a=1,\ \forall a\in\mathbb{R}.}\ \Rightarrow \sin a=\pm\sqrt{1-\cos^2 a}\,,\ \Rightarrow \cos a=\pm\sqrt{1-\sin^2 a}\,;$

2. $\boxed{\sin a=\pm\dfrac{tga}{\sqrt{1+tg^2 a}}}\qquad \boxed{\cos a=\pm\dfrac{1}{\sqrt{1+tg^2 a}}}\,,\ a\in\mathbb{R}\setminus\left\{(2k+1)\dfrac{\pi}{2}\right\}.$

3. $\boxed{\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a}\,,$ **4.** $\boxed{\sin(a-b)=\sin a\cos b-\sin b\cos a}\,,\ a,b\in\mathbb{R}$

5. $\boxed{\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b}\,,$ **6.** $\boxed{\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b}\,,\ a,b\in\mathbb{R}$

7. $\boxed{\sin 2a=2\sin a\cos a;}\,,$ **8.** $\boxed{\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a=2\cos^2 a-1=1-2\sin^2 a}\,,\ a\in\mathbb{R}$

9. $\boxed{tg(a+b)=\dfrac{tga+tgb}{1-tga\cdot tgb};\quad tg(a-b)=\dfrac{tga-tgb}{1+tga\cdot tgb};}\quad a,b\in\mathbb{R}\setminus\left\{(2k+1)\dfrac{\pi}{2}\right\}$

Alte formule trigonometrice

$\cos^2\alpha=\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2};\quad \sin^2\alpha=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2};\qquad \cos\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}};\sin\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}};$

$tg\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}};\quad ctg\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}\qquad tg2\alpha=\dfrac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha};\quad ctg2\alpha=\dfrac{ctg^2\alpha-1}{2ctg\alpha};$

$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha;\qquad tg3\alpha=\dfrac{3tg\alpha-tg^3\alpha}{1-3tg^2\alpha}$

$\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha;\qquad ctg3\alpha=\dfrac{ctg^3\alpha-3ctg\alpha}{3ctg^2\alpha-1};\qquad tg\alpha=\dfrac{2tg\dfrac{\alpha}{2}}{1-tg^2\dfrac{\alpha}{2}};\quad ctg\alpha=\dfrac{1-tg^2\dfrac{\alpha}{2}}{2tg\dfrac{\alpha}{2}};$

$tg\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{1}{ctg\dfrac{\alpha}{2}};\qquad \sin\alpha=\dfrac{2tg\dfrac{\alpha}{2}}{1+tg^2\dfrac{\alpha}{2}};\quad \cos\alpha=\dfrac{1-tg^2\dfrac{\alpha}{2}}{1+tg^2\dfrac{\alpha}{2}};$

$\sin a+\sin b=2\sin\dfrac{a+b}{2}\cdot\cos\dfrac{a-b}{2}\qquad \sin a-\sin b=2\sin\dfrac{a-b}{2}\cdot\cos\dfrac{a+b}{2}$

$\cos a-\cos b=-2\sin\dfrac{a+b}{2}\cdot\sin\dfrac{a-b}{2}\qquad \cos a+\cos b=2\sin\dfrac{a-b}{2}\cdot\cos\dfrac{a+b}{2}$

PARTEA I

1. NUMERE REALE

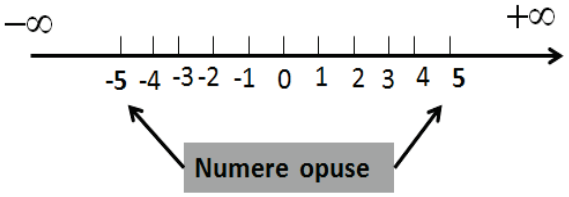
Recapitulare și completări

1.1 Numere întregi și numere raționale

Operaţii cu numere întregi

Mulțimea numerelor întregi: $\mathbb{Z} = \{....., -n, ... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ..., n, ...\}$, $n \in \mathbb{N}$.
$\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

$-a$ este opusul lui **a**, $\forall a \in \mathbb{Z}$.



Definiție: Modulul numerelor întregi: Fie $a \in \mathbb{Z} \Rightarrow |a| = \begin{cases} a, & a \rangle 0 \\ 0, & a = 0 \\ -a, & a \langle 0 \end{cases}$;

Exemple: $|-5| = 5$; $|-7| = 7$; $|4| = 4$; $|-10| = 10$;

Pentru a aduna două sau mai multe numere întregi care au acelaşi semn, se adună numerele în modul şi se dă semnul comun.
Exemplu: (+5) + (+3)= +8; (-5) + (-3)= - 8;

Pentru a aduna două numere întregi de semne contrare, din cel mai mare în modul se scade cel mai mic în modul şi se dă semnul celui mai mare în modul.
Exemplu: (-7) + (+5) = -(7-5) = - 2; 3+ (– 10) = - (10-3)= - 7;
(-12) + (+4) = - (12-4)= - 8; (-5) + (-8) = - (5+8) = -13
Exemple de scăderi: 2 – 10 = - (10-2) = -8; 5- (- 8) = 5 + 8 = 13;
- (4) – (- 5) = - 4 + 5 = 1; (-10) – (-6) = -10 +6= - 4

Înmulţirea şi împărţirea : Regula semnelor.

. , :	+	-
+	+	-
-	-	+

Exemple: $\begin{matrix}(-4)\cdot(-5)=20; & (-7)\cdot(+5)=-35\\ 6:(-2)=-3; & (-24):(-8)=3\end{matrix}$;

Pentru a înmulţi două numere naturale se pun numerele unele sub altele unităţi sub unităţi, zeci sub zeci, etc, şi se înmulţesc pe rând toate cifrele de jos începînd cu cifra unităţilor cu tot numărul de sus .

Pentru a împărţi două numere naturale , se ia primul număr - deîmpărţitul şi se împarte la al doilea – împărţitor şi se găseşte câtul care indică de câte ori se cuprinde împărţitorul în deîmpărţit.

Cînd se termină cifrele de la deîmpărţit se coboară un zero punând şi virgula la cât.

Puteri cu exponent întreg

Definiţie: Fie $a,b\in\mathbb{R}^*$, $m,n\in\mathbb{Z}^*$; Atunci, $a^n \underline{\underline{def}} \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot.....\cdot a}_{n\ \ factori}$

Exemple: $2^5=\underbrace{2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2}_{5\ de\ 2}=32;\quad (-2)^3=\underbrace{(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)}_{3\ de\ (-2)}=-8;\quad \left(\sqrt{5}\right)^4=\underbrace{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}_{5}\cdot\underbrace{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}_{5}=25;$

Proprietăţi:

1. $\boxed{a^o=1;\ a^1=a;\ 0^n=0}$; Exemplu: $5^0=1$;
2. $\boxed{a^m\cdot a^n=a^{m+n}}$; Exemplu: $(-3)^2\cdot(-3)^3=(-3)^{2+3}=(-3)^5=-243$;
3. $\boxed{a^m:a^n=a^{m-n}\ \text{sau}\ \frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}}$; Exemplu: $(-5)^7:(-5)^3=(-5)^{7-3}=(-5)^4=625$;
4. $\boxed{(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n}$; Exemplu: $\left(3\sqrt{2}\right)^4=3^4\cdot\sqrt{2}^4=81\cdot4=324$;
5. $\boxed{(a:b)^n=a^n:b^n\quad\text{sau}\quad\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}}$; Exemplu: $\left(\frac{5}{3}\right)^3=\frac{5^3}{3^3}=\frac{125}{27}$;
6. $\boxed{a^{-n}=\frac{1}{a^n}}$;

Exemplu: $(-2)^{-4}=\frac{1}{(-2)^4}=\frac{1}{16};\quad\left(\frac{7}{6}\right)^{-1}=\frac{6}{7};\quad(-2)^{-3}=\frac{1}{(-2)^3}=-\frac{1}{8};$

7. $\boxed{(-1)^n=\begin{cases}1, n\ \ par\\ -1, n\ \ impar\end{cases}}$; Exemplu: $(-1)^{2011}=-1;\quad(-1)^{2012}=1;$

Definiţie: A amplifica o fracţie cu un număr natural, diferit de 0, înseamnă a înmulţi atât numărătorul cât şi numitorul, cu acel număr. $\frac{a}{b}=\frac{a\cdot m}{b\cdot m}, b\neq0, m\neq0.$

Exemplu: $\overset{5)}{\frac{2}{3}}=\frac{2\cdot5}{3\cdot5}=\frac{10}{15};$

Definiţie: A simplifica o fracţie cu un număr natural, diferit de 0, înseamnă a împărţi atât numărătorul, cât şi numitorul la acel număr. $\frac{a}{b}=\frac{a:m}{b:m}, b\neq 0, m\neq 0.$

Exemplu: $\frac{20^{(4}}{12}=\frac{20:4}{12:4}=\frac{5}{3}$;

Definiţie: Fracţia $\frac{a}{b}, b\neq 0$ se numeşte **fracţie ireductibilă**, dacă nu se mai poate simplifica adică cel mai mare divizor comun al lor este egal cu 1, c.m.m.d.c(a,b)=1, altfel spus, numerele a, b sunt prime între ele.

Exemple: $\frac{1}{2};\frac{3}{5};\frac{7}{9};\frac{11}{16};...$

Compararea fracţiilor: Fie $a,b,c,d\in\mathbb{N},\ \ a,b,c,d\neq 0$.

$\frac{a}{b}\rangle\frac{c}{b}\Leftrightarrow a\rangle c \qquad \frac{a}{b}\rangle\frac{a}{c}\Leftrightarrow b\langle c \qquad \frac{a}{b}\rangle\frac{c}{d}\Leftrightarrow a\cdot d\rangle b\cdot c$

Exemple: $\frac{2}{3}\langle\frac{5}{3}$ deoarece $2\langle 5$; $\frac{5}{2}\rangle\frac{5}{3}$ deoarece $2\langle 3$; $\frac{5}{7}\rangle\frac{2}{3}$ deoarece $3\cdot 5\rangle 2\cdot 7$;

Definiţie: Fie $a,b,c,d\in\mathbb{N},\ \ a,b,c,d\neq 0$. Fracţiile $\frac{a}{b}$ şi $\frac{c}{d}$ se numesc **echivalente** dacă şi numai dacă $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow a\cdot d=b\cdot c$.

Exemplu de fracţii echivalente: $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=.....$

Fracţie subunitară, echiunitară, supraunitară:

Fracţia $\frac{a}{b}, b\neq 0$ se numeşte **fracţie subunitară**, dacă a < b sau $\frac{a}{b}\langle 1$.

Fracţia $\frac{a}{b}, b\neq 0$ se numeşte **fracţie echiunitară**, dacă a = b sau $\frac{a}{b}=1$.

Fracţia $\frac{a}{b}, b\neq 0$ se numeşte **fracţie supraunitară**, dacă a>b sau $\frac{a}{b}\rangle 1$.

Exemple: $\frac{2}{5}$ este fracţie subunitară, $\frac{7}{3}$ este fracţie supraunitară, $\frac{3}{3}$ este fracţie echiunitară.

Definiţie: Se numeşte **număr raţional** , numărul reprezentat prin fracţia $\frac{a}{b}$ (fracţie ordinară) şi toate fracţiile echivalente cu aceasta;

Exemple de numere raţionale: $\frac{1}{2};\ \frac{4}{5};\ 0,5;\ 0,123;\ 1,2(5);\ 0,3333.....;$

Operaţii cu numere fracţionare:

Pentru a aduna sau scădea numere fracţionare reprezentate prin numitori diferiţi se aduc fracţiile la acelaşi numitor prin amplificarea fiecărei fracţii cu câtul dintre c.m.m.m.c al numitorilor şi numitorul fracţiei respective.

$\boxed{\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}}$; Exemplu: $\frac{1}{5}+\frac{4}{5}=\frac{5}{5}=1$;

$\boxed{\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}}$; Exemplu: $\frac{2}{27}\cdot\frac{9}{8}=\frac{\cancel{2}\cdot\cancel{9}}{\cancel{27}_{3}\cdot\cancel{8}_{4}}=\frac{1}{12}$;

$\boxed{\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}}$; Exemplu: $\frac{3}{16}:\frac{81}{4}=\frac{\cancel{3}}{\cancel{16}_{4}}\cdot\frac{\cancel{4}}{\cancel{81}_{27}}=\frac{1}{108}$;

$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^{0}=1}$; Exemplu: $\left(\frac{2}{3}\right)^{0}=1$;

$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^{n}=\frac{a^n}{b^n}}$; Exemplu: $\left(\frac{2}{3}\right)^{3}=\frac{2^3}{3^3}=\frac{8}{27}$;

$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^{m}\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^{n}=\left(\frac{a}{b}\right)^{m+n}}$; Exemplu: $\left(\frac{2}{5}\right)^{3}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{4}=\left(\frac{2}{5}\right)^{7}$;

$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^{m}:\left(\frac{a}{b}\right)^{n}=\left(\frac{a}{b}\right)^{m-n}}$; Exemplu: $\left(\frac{2}{5}\right)^{6}:\left(\frac{2}{5}\right)^{4}=\left(\frac{2}{5}\right)^{2}=\frac{4}{25}$;

$\boxed{\left[\left(\frac{a}{b}\right)^{m}\right]^{n}=\left(\frac{a}{b}\right)^{m\cdot n}}$; Exemplu: $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\right]^{3}=\left(\frac{1}{2}\right)^{6}=\frac{1}{64}$;

Inversul lui $\frac{a}{b}$ este numărul $\frac{b}{a}$, oricare ar fi a, b diferite de zero.

$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}=\frac{b}{a}}$; $\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\frac{b^n}{a^n}}$; Exemplu: $\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}=\frac{2}{3}$; $\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}=\frac{2^3}{3^3}=\frac{8}{27}$;

Introducerea unui întreg în fracţie: $a\frac{b}{c}=\frac{a\cdot c+b}{c}$; **Exemplu**: $4\frac{3}{5}=\frac{4\cdot 5+3}{5}=\frac{23}{5}$;

Fracţii zecimale

Fracţii zecimale: finite: $\{0,5;1,45;2,5;0,12345;.....\}$

Transformarea fracţiilor ordinare în fracţii zecimale finite:

Exemple: $\frac{3}{10}=0,3$, $\frac{3}{100}=0,03$, $\frac{3}{1000}=0,003$, $\frac{2564}{100}=25,64$, $\frac{2}{5}=0,4$, $\frac{1}{4}=0,25$.

Transformarea fracţiilor zecimale finite în fracţii ordinare: $\overline{a,b}=\frac{\overline{ab}}{10}$; $\overline{a,bc}=\frac{\overline{abc}}{100}$;

Exemple: $7,4=\frac{74}{10}$; $2,35=\frac{235}{100}$.

Operaţii cu fracţii zecimale:

La adunarea sau scăderea fracţiilor zecimale finite, numerele trebuie aşezate astfel încât virgula să fie sub virgulă. $2,56+1,34=4,90$; $4,257-1,13=3,127$;

$$\begin{array}{r} 2,56+ \\ \underline{1,34} \\ 4,90 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4,257- \\ \underline{1,13} \\ 3,127 \end{array}$$

La înmulţirea cu 10, 100, 1000 a unei fracţii zecimale finite se deplasează virgula spre dreapta cu 1,2,3 cifre.

$$3,456\cdot 10=34,56; \quad 3,456\cdot 100=345,6; \quad 3,456\cdot 1000=3456$$

La împărţirea cu 10,100,1000, a unei fracţii zecimale finite se deplasează virgula spre stânga cu 1,2,3 cifre.

$$7258:10=725,8; \quad 7258:100=72,58; \quad 7258:1000=7,258$$

La înmulţirea fracţiilor zecimale finite, efectuăm înmulţirea obişnuită după care punem virgula de la dreapta spre stânga după un număr de zecimale egal cu numărul de cifre zecimale ale celor două numere:

$3,47\cdot 2,4=8,328$

$$\begin{array}{r} 3,47\cdot \\ \underline{2,4} \\ 1388 \\ \underline{694} \\ 8,328 \end{array}$$

La împărţirea fracţiilor zecimale finite se vor înmulţii ambele numere cu puteri ale lui 10 astfel încât să împărţim numere fără virgulă:

$3,6:0,24=360:24=15$

!Nu toate fracţiile ordinare se transformă în fracţii zecimale finite.

Exemple: $\frac{1}{3}=0,3333.....$; $\frac{2}{3}=0,666666.....$, $\frac{4}{33}=0,121212.....$,

Fracţii zecimale periodice: $\{1,(3);21,3(5);2,3(4).....\}$

Transformarea fracţiilor zecimale periodice în fracţii ordinare:

$\overline{a,(b)}=\frac{\overline{ab}-a}{9}$; $\overline{a,(bc)}=\frac{\overline{abc}-a}{99}$; **Exemple**: $\overline{1,(4)}=\frac{14-1}{3}=\frac{13}{3}$;

$\overline{2,(15)}=\frac{215-2}{99}=\frac{213}{99}$

Fracţii periodice mixte:

$\overline{a,b(c)}=\frac{\overline{abc}-\overline{ab}}{90}$; $\overline{a,b(cd)}=\frac{\overline{abcd}-\overline{ab}}{990}$; **Exemple** : $\overline{1,2(6)}=\frac{126-12}{90}=\frac{114}{90}$;

$3,45(7)=\frac{3457-345}{900}=\frac{3112}{900}$.

Activitate independentă		**Răspuns**
Să se calculeze: **a)** $\frac{2}{9}-\frac{1}{3}-\frac{5}{6}$; **b)** $2^{-3}+(-3)^{-2}$; **c)** $0,3(5)-0,2(3)$; **d)** $(-4)^6\cdot(-4)^8:(-4)^{12}$		

Exercitii rezolvate

1. Să se calculeze:

a) $126\cdot 48$; **b)** $1234\cdot 46$; **c)** $126:48$;

Rezolvare:

$$\begin{array}{r} 126\bullet \\ 48 \\ \hline 1008 \\ 504 \\ \hline 6048 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1234\cdot \\ 46 \\ \hline 7404 \\ 4936 \\ \hline 56764 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 126 & 48 \\ \hline 96 & 2,62 \\ \hline 300 & \\ 288 & \\ \hline 120 & \\ 96 & \\ \hline 24 & \end{array}$$

2. Să se calculeze:

a) $-7-5-3$; **b)** $-9+3-7+2$; **c)** $-2\cdot(4-7)$; **d)** $(-27):(-9)$;

e) $2-(-3)^2-(-2)^3\cdot 4$; **f)** $(-5)^6\cdot(-5)^3:(-5)^7$;

Rezolvare:

a) $-7-5-3=-15$; b) $-9+3-7+2=-16+5=-11$; c) $-2\cdot(4-7)=-2\cdot(-3)=6$;

d) $(-27):(-9)=3$; e) $2-(-3)^2-(-2)^3\cdot 4=2-9-(-8)\cdot 4=-7+32=25$;

f) $(-5)^6\cdot(-5)^3:(-5)^7=(-5)^{6+3-7}=(-5)^2=25$;

3. Suma a douăzeci de numere întregi consecutive este 150. Să se determine produsul lor.

Rezolvare: Dacă primele douăzeci de numere întregi consecutive ar fi 1, 2, 3, ..., 20, atunci suma lor ar fi egală cu 210, așadar, există și numere negative printre ele, inclusiv 0, prin urmare, produsul este egal cu 0.

4. Să se calculeze:

a) $\frac{3}{7}+\frac{9}{7}-\frac{5}{7}$; **b)** $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}$; **c)** $\frac{2}{9}-\frac{1}{3}+\frac{5}{6}$; **c)** $\frac{56}{125}\cdot\frac{25}{8}$; **d)** $\left(-\frac{32}{9}\right)\cdot\left(-\frac{18}{16}\right)$; **e)** $\frac{25}{16}:\left(-\frac{15}{4}\right)$;

f) $\left(-\frac{36}{49}\right):\left(-\frac{6}{7}\right)$; **g)** $8\cdot\frac{3}{7}$; **h)** $\left(-\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^4\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^5$; **i)** $\left(-\frac{1}{2}\right)^{18}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{15}$;

Rezolvare:

a) $\frac{3}{7}+\frac{9}{7}-\frac{5}{7}=\frac{3+9-5}{7}=\frac{7}{7}=1$; b) $\overset{3)}{\frac{1}{4}}+\overset{6)}{\frac{1}{2}}-\overset{2)}{\frac{1}{6}}=\frac{3+6-2}{12}=\frac{7}{12}$; c) $\frac{\overset{7}{\cancel{56}}}{\cancel{125}_{5}}\cdot\frac{\cancel{25}}{\cancel{8}}=\frac{7}{5}$;

d) $\left(-\frac{\overset{2}{\cancel{32}}}{\cancel{9}}\right)\cdot\left(-\frac{\cancel{18}^{2}}{\cancel{16}}\right)=4$; e) $\frac{25}{16}:\left(-\frac{15}{4}\right)=-\frac{\overset{5}{\cancel{25}}}{\cancel{16}_{4}}\cdot\frac{\cancel{4}}{\cancel{15}_{3}}=-\frac{5}{12}$;

f) $\left(-\frac{36}{49}\right):\left(-\frac{6}{7}\right)=\left(-\frac{36}{49}\right):\left(-\frac{7}{6}\right)=\frac{6}{7}$; g) $8\cdot\frac{3}{7}=\frac{8\cdot 3}{7}=\frac{24}{7}$;

h) $\left(-\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^4\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^5=\left(-\frac{1}{3}\right)^{14}=\frac{1}{3^{14}}$; i) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{18}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{15}=\left(-\frac{1}{2}\right)^3=-\frac{1}{8}$;

5. Să se calculeze:

a) $(-8-4):(-6)+(-2)^3-2^4$; **b)** $\frac{7}{9}\cdot\left(-\frac{3}{14}\right)+\left(-\frac{4}{3}\right)^2:\frac{32}{3}$;

Rezolvare: a) $(-8-4):(-6)+(-2)^3-2^4=2-8-16=-22$;

b) $\frac{\cancel{7}}{\cancel{9}_3}\cdot\left(-\frac{\cancel{3}}{\cancel{14}_2}\right)+\left(-\frac{4}{3}\right)^2:\frac{32}{3}=-\frac{1}{6}+\frac{\cancel{16}}{\cancel{9}_3}\cdot\frac{\cancel{3}}{\cancel{32}_2}=-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=0$

Exercitii propuse

1. Să se calculeze:

a) $32{,}6\cdot 4{,}8$; b) $16{,}2:4{,}5$; c) $(-12)+(-5)$; d) $(-6)-(-9)$;

e) $18-20-6$; f) $(-5)\cdot(-6)+(+8)\cdot(-3)$; g) $(-14):(-2)-(-6)\cdot(+3)$; h) $(-3)^2+(-3)^3$;

i) $(-2)+(-2)^2+(-2)^3$; j) $(-1)^5-8+(-3)\cdot(-2)^4$; k) $(-3)\cdot(8-10+1)$; l) $(-7)\cdot(-42):(-21)$;

m) $2^3\cdot 2^5\cdot 2^7$; n) $(-3)^4\cdot(-3)^5$; o) $(-5)\cdot(-5)^2\cdot(-5)^3\cdot(-5)^4$; p) $5^{10}:5^6$;

q) $(-3)^8:(-3)^5$; r) 6^0; s) $6^{10}:2^{10}$; t) $12^{15}:4^{15}$;

u) $18^6:(-18)^4:(-18)^2$; v) 3^{-1}; x) $2^{-2}+2^{-3}$;

2. Să se calculeze:

a) $78\cdot 56$; b) $129\cdot 68$; c) $35\cdot 76+35\cdot 24$; d) $47\cdot 65-36\cdot 65+53\cdot 65$;

e) $1350:18$; f) $837:31$; g) $-6+3-9-5$; h) $17-28+18-10$;

i) $-6\cdot(-3)+2\cdot(-9)$; j) $15\cdot(-2)-3\cdot(-5)$; k) $(-7+3)\cdot(-5+2)$; l) $-3\cdot(6-10)+(4-7)\cdot(-3)$;

m) $-5\cdot\left[-7-2\cdot(6-13)\right]$; n) $(-3)^3\cdot(-3)^2\cdot(-3)$; o) $2^8:2^5:2^3$;

p) $(-2)^4+(-3)^3+(-1)^{2013}+(-2013)^0$; q) $(-5)^4\cdot(-5)^5:(-5)^7$; r) $\left[(-2)^2\right]^3+\left[(-1)^6\right]^4$

s) $(-6)^3:3^2$; ș) $(-8)^2:2^6$; t) $25^6:5^{10}$; ț) $(-36)^4:6^7$;

u) $-3\cdot(-2)^4+(-5)^3:(-25)$; v) $-4^2+(-7)^2\cdot(-7)^3:(-7)^4$; x) $|-6|+|-7|-|-8|$;

y) $|-5+3-9|$; z) $|-4\cdot(-7+3)-9|$; w) $(-6)^4:(-6)^2-4^2+(-9+5)\cdot(-6)$;

3. Să se calculeze:

a) $\frac{3}{2}-\frac{1}{3}+2$; b) $\frac{1}{6}-\frac{4}{3}+\frac{1}{2}$; c) $\frac{2}{5}-\frac{3}{4}+1$; d) $\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{2}$; e) $2\cdot(\frac{3}{2}-\frac{5}{8}-1)$;

f) $\frac{5}{3}\cdot\frac{9}{25}$; g) $\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{15}\cdot\frac{75}{8}$; h) $\frac{80}{25}:\frac{8}{5}$; i) $(-\frac{7}{16}):\frac{28}{32}$; j) $\left(-\frac{2}{5}\right)^3\cdot(-\frac{5}{8})$;

k) $(-\frac{1}{2})\cdot(-\frac{1}{2})^2\cdot(-\frac{1}{2})^3$; l) $(-\frac{9}{64})^2\cdot(\frac{3}{4})^3:(-\frac{3^6}{4^5})$; m) $\left(\frac{5}{8}\right)^0$; n) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}$; o) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}$.

4. Să se calculeze:

a) i) $4,25\cdot 10$; ii) $4,25\cdot 100$ iii) $4,25\cdot 1000$

b) i) $4,25:10$; ii) $4,25:100$ iii) $4,25:1000$

c) i) $7,68\cdot 2,9$; ii) $42,37\cdot 5,6$ iii) $1,378\cdot 5,4$

d) i) $837,6:7,8$; ii) $65,9:2,3$ iii) $198,4:5,4$

e) $\frac{1}{2}-\frac{1}{6}-\frac{1}{3}$; f) $\frac{2}{5}-\frac{1}{15}+\frac{4}{3}$; g) $\frac{5}{3}-\frac{7}{12}-\frac{1}{6}$ h) $\frac{4}{9}-\frac{2}{3}-\frac{1}{6}$;

i) $\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{16}$; j) $-\frac{4}{9}\cdot\left(-\frac{3}{16}\right)$; k) $\frac{81}{49}:\frac{9}{7}$; l) $\frac{6}{25}\cdot\frac{5}{18}-\frac{7}{36}:\frac{14}{9}$;

m) $\left(-\frac{2}{3}\right)^3-\left(-\frac{1}{3}\right)^2$; n) $\left(-\frac{2}{2}\right)^2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^4:\left(-\frac{3}{2}\right)^5$; o) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^4$;

p) $\left(-\frac{5}{2}\right)^{10}:\left(-\frac{5}{2}\right)^7$; q) $(-2)^{-3}+(-2)^{-2}+(-2)^{-1}$; r) $(-3)^{-2}+(-3)^{-1}$; s) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$;

t) $\left(-\frac{2}{5}\right)^{-2}+\left(-\frac{1}{5}\right)^{-3}$;

5. a) Se consideră numărul $\frac{69}{13}=5,a_1a_2a_3.....$ Să se calculeze $a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot....\cdot a_{2012}$;

b) Se consideră numărul $\frac{25}{13}=1,a_1a_2a_3.....$ Să se calculeze $a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot....\cdot a_{2012}$.

1.2 Operații cu numere reale

Definiția radicalului de ordinul doi

$\sqrt{a}\in\mathbb{R}_+$ $\boxed{\sqrt{a}\geq 0,\ \forall a\geq 0}$ $\sqrt{a}$ nu există dacă $a\langle 0$;

Exemplu de extragere a rădăcinii pătrate

$\sqrt{5\,4\,7\,5\,6}$ | $2\,3\,4$

4 | $43\cdot 3=129$

$1\,4\,7$ | $464\cdot 4=1856$

$1\,2\,9$

$=1\,8\,5\,6$

$=1\,8\,5\,6$

$=\ =\ =\ =$

rest (1);

Extragerea rădăcinii pătrate dintr-un număr natural

Se grupează cifrele numărului câte două de la dreapat spre stânga: 5.47.56;
Se află cel mai mare număr (2) al cărui pătrat să fie mai mic sau egal cu 5 și îl scriem în dreapta sus, la răspuns iar pătratul său 2^2=4 se pune sub 5 și se face scăderea.
Se coboară grupa a doua (47) lângă primul

Se dublează rădăcina (2·2=4) și se trece jos în dreapta lângă care se adaugă câtul dintre 14 și 4 adică 3, apoi se înmulțește numărul obținut (43) cu 3 și se adaugă sub 147, după care se scad;
Lângă noul rest se adaugă ultima grupă (56);
Se dublează rădăcina (23·3=46); Lângă 46 se adaugă câtul dintre 185 și 46 adică 4 și se înmulțește numărul 464 cu 4. Rezultatul produsului se adaugă sub 1856 și se scad. Se obține restul 0. Așadar, $\sqrt{54756}=234$.

Pătratele perfecte până la 20 şi extragerea rădăcinii din pătrate perfecte

$n^2=N$	$\sqrt{N}=n$	$n^2=N$	$\sqrt{N}=n$
$0^2=0$	$\sqrt{0}=0$	$10^2=100$	$\sqrt{100}=10$
$1^2=1$	$\sqrt{1}=1$	$11^2=121$	$\sqrt{121}=11$
$2^2=4$	$\sqrt{4}=2$	$12^2=144$	$\sqrt{144}=12$
$3^2=9$	$\sqrt{9}=3$	$13^2=169$	$\sqrt{169}=13$
$4^2=16$	$\sqrt{16}=4$	$14^2=196$	$\sqrt{196}=14$
$5^2=25$	$\sqrt{25}=5$	$15^2=225$	$\sqrt{225}=15$
$6^2=36$	$\sqrt{36}=6$	$16^2=256$	$\sqrt{256}=16$
$7^2=49$	$\sqrt{49}=7$	$17^2=289$	$\sqrt{289}=17$
$8^2=64$	$\sqrt{64}=8$	$18^2=324$	$\sqrt{324}=18$
$9^2=81$	$\sqrt{81}=9$	$19^2=361$	$\sqrt{361}=19$
$10^2=100$	$\sqrt{100}=10$	$20^2=400$	$\sqrt{400}=20$

Proprietăţile radicalilor

$Fie\, a,b\in\mathbb{R}_+$

1. $\boxed{\sqrt{a^2}=|a|\geq 0,}$ Exemplu: $\sqrt{(-5)^2}=|-5|=5$;
2. $\boxed{\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}}$ Exemplu: $\sqrt{72}=\sqrt{36}\cdot\sqrt{2}=6\sqrt{2}$;
3. $\boxed{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}},\ b\neq 0}$ Exemplu: $\sqrt{\frac{9}{16}}=\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}}=\frac{3}{4}$;
4. $\boxed{\sqrt{a^n}=(\sqrt{a})^n=a^{\frac{n}{2}}}$ Exemplu: $\sqrt{3^{2012}}=3^{\frac{2012}{2}}=3^{1006}$;
5. Dacă $\boxed{\sqrt{a}\in\mathbb{Q}\Rightarrow a=k^2}$

Exemplu: $\sqrt{3^{2n}+8\cdot 3^n+16}\in\mathbb{Q}\Rightarrow 3^{2n}+8\cdot 3^n+16=k^2;\ \ k=3^n+4$;

6. $\boxed{a\sqrt{b}=\sqrt{a^2b}}$ Exemplu: $2\sqrt{3}=\sqrt{2^2\cdot 3}=\sqrt{12}$;
7. $\boxed{\sqrt{a^2b}=|a|\sqrt{b}}$ Exemplu: $\sqrt{3^8\cdot 5}=3^4\cdot\sqrt{5}$;
8. $\boxed{x\sqrt{a}\cdot y\sqrt{b}=xy\sqrt{ab}}$ Exemplu: $3\sqrt{2}\cdot 5\sqrt{3}=3\cdot 5\cdot\sqrt{2\cdot 3}=15\sqrt{6}$;
9. $\boxed{x\sqrt{a}\pm y\sqrt{a}=(x\pm y)\sqrt{a}}$ Exemplu: $4\sqrt{5}+2\sqrt{5}=(4+2)\sqrt{5}=6\sqrt{5}$;
10. $\boxed{\frac{x\sqrt{a}}{y\sqrt{b}}=\frac{x}{y}\sqrt{\frac{a}{b}},\ \ y,b\neq 0}$ Exemplu: $\frac{8\sqrt{24}}{4\sqrt{6}}=\frac{8}{4}\cdot\sqrt{\frac{24}{6}}=2\sqrt{4}=2\cdot 2=4$;

11. $\boxed{\left(x\sqrt{a}\right)^n = x^n\sqrt{a^n}}$ Exemplu: $\left(2\sqrt{6}\right)^3 = 2^3\cdot\sqrt{6}^3 = 8\cdot 6\sqrt{6} = 48\sqrt{6}$;

12. $\boxed{\sqrt{a\pm\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}}$ unde $a^2-b=k^2$. (formula radicalilor dubli)

Exemplu: $\sqrt{3-\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{9-5}}{2}} - \sqrt{\frac{3-\sqrt{9-5}}{2}} = \sqrt{\frac{5}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}$;

Raționalizarea numitorului unei fracții:

$$\frac{x}{\sqrt{a}} = \frac{x\sqrt{a}}{a}, \qquad \frac{x}{a\sqrt{b}} = \frac{x\sqrt{b}}{ab}$$
$$\frac{x}{a+\sqrt{b}} = \frac{x(a-\sqrt{b})}{a^2-b}, \qquad \frac{x}{a-\sqrt{b}} = \frac{x(a+\sqrt{b})}{a^2-b}$$

Exemple: $\frac{3}{2\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{2\cdot 6_2} = \frac{\sqrt{6}}{4}$; $\frac{2}{\sqrt{3}-2} = \frac{2(\sqrt{3}+2)}{3-4} = -2(\sqrt{3}+2)$

Medii

Media aritmetică $m_a = \frac{x+y}{2}$ $m_a(4;6;11) = \frac{4+6+11}{3} = \frac{21}{3} = 7$;

Media geometrică $m_g = \sqrt{x\cdot y}$, $\forall x, y \in R^*_+$

$m_g(2\sqrt{3};\sqrt{12}) = \sqrt{3\sqrt{3}\cdot\sqrt{48}} = \sqrt{3^2\cdot 4} = 6$;

Media ponderată $m_p = \frac{p\cdot x + q\cdot y}{p+q}; p,q \in N^* - ponderile$

Media armonică $m_h = \frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} = \frac{2xy}{x+y}$, $\forall x, y \in R^*$

Activitate independentă	**Răspuns**
Să se raționalizeze: **a)** $\frac{1}{4\sqrt{8}}$; **b)** $\frac{1}{5\sqrt{3}-6\sqrt{2}}$; **c)** $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}$;	**a)** $\frac{\sqrt{2}}{16}$; b) $\frac{5\sqrt{3}+6\sqrt{2}}{3}$

Exercitii rezolvate

1. Să se extragă rădăcina pătrată din următoarele numere:
a) 385**; b)** $3^4\cdot 5^6$**; c)** 576**; d) 1,44; e) 0,0081;**
Rezolvare:

a) $\sqrt{385} \approx 19,62$ **; b)** $\sqrt{3^4\cdot 5^6} = \sqrt{\left(3^2\cdot 5^3\right)^2} = 3^2\cdot 5^3$**; c)** $\sqrt{576} = \sqrt{3^2\cdot 2^6} = 3\cdot 2^3 = 24$**;**

d) $\sqrt{1,44} = \sqrt{(1,2)^2} = 1,2$**; e)** $\sqrt{0,0081} = \sqrt{(0,3)^4} = 0,3^2 = 0,09$**.**

$\sqrt{385}$ | $19,62$

1

285

261

2400

2316

8400

7844

556

29·9=261

386·6=2316

3922·2=7844

$1^2=1$

$2\cdot 1=2$

$2\cdot 19=38$

$2\cdot 196=392$

2. Să se calculeze:

a) $8\sqrt{3}-15\sqrt{3}+2\sqrt{3}$; **b)** $10\sqrt{2}-4\sqrt{3}+12\sqrt{2}-6\sqrt{3}$; **c)** $\sqrt{12}-\sqrt{27}-\sqrt{243}$;

d) $\sqrt{100}-\sqrt{144}-\sqrt{256}$; **e)** $3\cdot\sqrt{45}-2\cdot\sqrt{80}$; **f)** $2\sqrt{18}-4\sqrt{8}$;

g) $2\sqrt{3}\cdot(-4\sqrt{3})$; **h)** $\left(-5\sqrt{2}\right)\cdot(-2\sqrt{7})$; **i)** $\left(-81\sqrt{8}\right):(9\sqrt{2})$;

j) $\left(-24\sqrt{12}\right):(-3\sqrt{3})$; **k)** $\sqrt{2}^4\cdot\sqrt{2}^8\cdot\sqrt{2}^{10}$; **l)** $\sqrt{2}^4\cdot(-\sqrt{8})^4$;

m) $\left(-2\sqrt{2}\right)^3\cdot(2\sqrt{3})^2$; **n)** $\left(2\sqrt{2}\right)^{-2}$; **o)** $\left(\sqrt{243}-2\sqrt{48}\right):(-3\sqrt{3})$.

Rezolvare:

a) $8\sqrt{3}-15\sqrt{3}+2\sqrt{3}=(8-15+2)\sqrt{3}=-5\sqrt{3}$;

b) $10\sqrt{2}-4\sqrt{3}+12\sqrt{2}-6\sqrt{3}=(10+12)\sqrt{2}-(4+6)\sqrt{3}=22\sqrt{2}-10\sqrt{3}$;

c) $\sqrt{12}-\sqrt{27}-\sqrt{243}=\sqrt{2^2\cdot 3}-\sqrt{3^2\cdot 3}-\sqrt{9^2\cdot 3}=2\sqrt{3}-3\sqrt{3}-9\sqrt{3}=-10\sqrt{3}$;

d) $\sqrt{100}-\sqrt{144}-\sqrt{256}=\sqrt{10^2}-\sqrt{12^2}-\sqrt{16^2}=10-12-16=-18$;

e) $3\cdot\sqrt{45}-2\cdot\sqrt{80}=3\cdot\sqrt{9\cdot 5}-2\cdot\sqrt{16\cdot 5}=9\sqrt{5}-8\sqrt{5}=\sqrt{5}$;

f) $2\sqrt{18}-4\sqrt{8}=2\sqrt{9\cdot 2}-4\cdot\sqrt{4\cdot 2}=6\sqrt{2}-8\sqrt{2}=-2\sqrt{2}$;

g) $2\sqrt{3}\cdot(-4\sqrt{3})=-8\sqrt{9}=-8\cdot 3=-24$;

h) $\left(-5\sqrt{2}\right)\cdot(-2\sqrt{7})=10\sqrt{14}$;

i) $\left(-81\sqrt{8}\right):(9\sqrt{2})=-9\sqrt{4}=-9\cdot 2=-18$;

j) $\left(-24\sqrt{12}\right):(-3\sqrt{3})=8\sqrt{4}=16$;

k) $\sqrt{2}^4\cdot\sqrt{2}^8\cdot\sqrt{2}^{10}=\sqrt{2}^{4+8+10}=\sqrt{2}^{22}=2^{11}=2048$;

l) $\sqrt{2}^4\cdot(-\sqrt{8})^4=\left(-\sqrt{16}\right)^4=(-4)^4=256$;

m) $\left(-2\sqrt{2}\right)^3\cdot(2\sqrt{3})^2=(-8\cdot 2\sqrt{2})\cdot 4\cdot 3=-192\sqrt{2}$;

n) $\left(2\sqrt{2}\right)^{-2}=\dfrac{1}{(2\sqrt{2})^2}=\dfrac{1}{8}$;

o) $\left(4\cdot\sqrt{243}-2\sqrt{48}\right):(-\sqrt{3})=\left(36\sqrt{3}-8\sqrt{3}\right):(-\sqrt{3})=\left(28\sqrt{3}\right):(-\sqrt{3})=-28$;

3. Se consideră numărul $\sqrt{41}\approx 6,a_1a_2a_3.....$ **. Să se calculeze** $a_1\cdot a_2\cdot a_3$ **.**

Rezolvare: $\sqrt{41}\approx 6,403.....$ Rezultă $a_1\cdot a_2\cdot a_3=4\cdot 0\cdot 6=0$.

4. Să se raționalizeze numitorii fracțiilor:

a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; **b)** $\frac{1}{4\sqrt{2}}$; **c)** $\frac{2}{3\sqrt{2}}$; **d)** $\frac{4}{4-\sqrt{2}}$; **e)** $\frac{2}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}$;

Rezolvare:

a) $\overset{\sqrt{3})}{\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}}$; b) $\overset{\sqrt{2})}{\frac{1}{4\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4\cdot 2}=\frac{\sqrt{2}}{8}}$; c) $\overset{\sqrt{2}}{\frac{2}{3\sqrt{2}}=\frac{\cancel{2}\sqrt{2}}{3\cdot\cancel{2}}=\frac{\sqrt{2}}{3}}$;

d) Se amplifică cu conjugata de la numitor: $\overset{4+\sqrt{2})}{\frac{4}{4-\sqrt{2}}=\frac{4(4+\sqrt{2})}{4^2-\sqrt{2}^2}=\frac{4(4+\sqrt{2})}{12}=\frac{4+\sqrt{2}}{3}}$;

e) $\overset{3\sqrt{2}-2\sqrt{3})}{\frac{2}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}=\frac{2(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})}{(3\sqrt{2})^2-(2\sqrt{3})^2}=\frac{2(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})}{18-12}=\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{3}}$;

5. Să se calculeze $\sqrt{6+2\sqrt{5}}(\sqrt{3-\sqrt{5}}+\sqrt{12-4\sqrt{5}})$.

Rezolvare: Cum $(6+2\sqrt{5})(3-\sqrt{5})=18-10=8\Rightarrow\sqrt{6+2\sqrt{5}}\cdot\sqrt{3-\sqrt{5}}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ şi cum

$\left(6+2\sqrt{5}\right)\cdot\left(12-4\sqrt{5}\right)=72-40=32\Rightarrow\sqrt{6+2\sqrt{5}}\cdot\sqrt{12-4\sqrt{5}}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$. Răspunsul este $6\sqrt{2}$;

6. Să se determine $n\in\mathbb{Z}$ **astfel încât** $\sqrt{\frac{3n+4}{n-1}}\in\mathbb{N}$.

Rezolvare: Trebuie determinat $n\in\mathbb{Z}$ astfel încât $\frac{3n+4}{n-1}=k^2,\ k\in\mathbb{Q}$.

$\frac{3n+4}{n-1}=\frac{3(n-1)+7}{n-1}=3+\frac{7}{n-1}=k^2\Leftrightarrow n-1=7\Rightarrow n=8.$

7. Determinați $m,n\in\mathbb{Q}$ **astfel încât** $m+4\sqrt{3}=\sqrt{27}+n\cdot\left(3+2\sqrt{3}\right)$.

Rezolvare: $m+4\sqrt{3}=3n+(3+2n)\sqrt{3}\Rightarrow m=3n,\ 3+2n=4\Rightarrow n=\frac{1}{2},\ m=\frac{3}{2}.$

8. Dacă $a=2016\cdot 2017,$ **arătați că** $\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}}\langle 2017$.

Rezolvare: $a+\sqrt{a+\sqrt{a}}\langle 2017^2\Rightarrow\sqrt{a+\sqrt{a}}\langle 2017^2-2016\cdot 2017\Rightarrow$

$\sqrt{a+\sqrt{a}}\langle 2017\Rightarrow a+\sqrt{a}\langle 2017^2\quad\Rightarrow\sqrt{a}\langle 2017\Rightarrow a\langle 2017$, ceea ce este adevărat.

9. Dacă $\frac{a}{b}=\sqrt{2016}$. **Să se calculeze** $\frac{5b}{a\cdot\sqrt{14}+2b}$.

Rezolvare: Din $a=b\cdot 12\sqrt{14}\Rightarrow\frac{5b}{a\cdot\sqrt{14}+2b}=\frac{5b}{b\cdot 12\sqrt{14}\sqrt{14}+2b}=\frac{5b}{170b}=\frac{1}{34}.$

10. Să se arate că $\sqrt{1\cdot 2\cdot 3\cdot.....\cdot 16+17}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

Rez. $u(1\cdot 2\cdot 3\cdot.....\cdot 16+17)=0+7=7$, ceea ce înseamnă că numărul de sub radical nu e pătrat perfect.

11. Să se arate că $\sqrt{5n+23}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

Rezolvare: $u(5n+23)\in\{3;8\}$, ceea ce înseamnă că numărul de sub radical nu e pătrat perfect.

12. Să se calculeze $A=\left(2018-\frac{2018}{\sqrt{1+3+5+...+2017}}\right)^{2016}:1008^{2016}$**;**

Rezolvare:

$A=\left(2018-\frac{2018}{\sqrt{1009^2}}\right)^{2016}:1008^{2016}=(2018-2)^{2016}:1008^{2016}=2016^{2016}:1008^{2016}=2$.

13. Să se arate că $\sqrt{1+3+5+...+111}\in\mathbb{Q}$**.**

Rezolvare: $1+3+5+...+111=56^2$;

14. Să se arate că $\sqrt{2017^{2015}-2016^{2015}}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$**.**

Rezolvare: $u(2017^{2015})=3,\ u(2016^{2015})=6\Rightarrow$ultimam cifră a numărului de sub radical este 7 deci, numărul nu este pătrat perfect.

15. Să se calculeze $(a-b)^2$**, unde** $a=\sqrt{3(1+\sqrt{2})+\sqrt{11+6\sqrt{2}}}$**,** $b=\sqrt{2-\sqrt{9-4\sqrt{2}}}$**.**

Rezolvare: $a=\sqrt{3(1+\sqrt{2})+(3+\sqrt{2})}=\sqrt{6+4\sqrt{2}}=\sqrt{2}+2$,

$b=\sqrt{2-(2\sqrt{2}-1)}=\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$. Atunci, $(a-b)^2=3^2=9$.

16. Să se arate că $A=\frac{\sqrt{4^{50}\cdot5^{102}+100^{51}}}{\sqrt{2^{100}\cdot3^{104}-6^{102}}}\in\mathbb{Q}$**.**

Rezolvare: $A=\frac{\sqrt{10^{100}(25+100)}}{\sqrt{6^{100}(81-36)}}=\frac{10^{50}\sqrt{125}}{6^{50}\sqrt{45}}=\left(\frac{10}{6}\right)^{50}\cdot\frac{5}{3}=\left(\frac{5}{3}\right)^{51}\in\mathbb{Q}$.

Exercitii propuse

1. Să se calculeze:

a) $\sqrt{2}+3\sqrt{2}+4\sqrt{2}$; b) $5\sqrt{3}-8\sqrt{3}$; c) $(12\sqrt{2})\cdot(3\sqrt{2})$; d) $(-8\sqrt{5}):(-2\sqrt{5})$;

e) $(-3\sqrt{2})\cdot(2\sqrt{5})$; f) $(2\sqrt{5})^3$; g) $(-3\sqrt{2})^4$; h) $(-2\sqrt{3})^3$;

i) $2\sqrt{16}+3\sqrt{25}-4\sqrt{81}$; j) $\sqrt{100}-\sqrt{225}+\sqrt{169}$; k) $3\sqrt{27}-5\sqrt{12}+\sqrt{243}$;

l) $2\sqrt{64}+\sqrt{18}-3\sqrt{32}$; m) $(2\sqrt{3}+3)(5+\sqrt{3})$; n) $\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)\left(2\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)$;

o) $\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2$; p) $\left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2$; q) $(3\sqrt{2}-5)(3\sqrt{2}+5)$;

2. Să se calculeze:

a) i) $3\sqrt{2}-8\sqrt{2}-5\sqrt{2}$; ii) $8\sqrt{3}-20\sqrt{3}+5\sqrt{3}$;

b) $4\sqrt{12}-5\sqrt{27}$; c) $\sqrt{125}-2\sqrt{45}-3\sqrt{20}$; d) $\sqrt{18}+5\sqrt{50}-8\sqrt{32}$;

e) $3\sqrt{2}\left(5\sqrt{2}-4\sqrt{3}\right)$; f) $\left(-8\sqrt{3}\right)\cdot\left(-2\sqrt{3}\right)$; g) $\left(3\sqrt{5}\right)\cdot\left(-4\sqrt{5}\right)-\left(-6\sqrt{2}\right):\left(-3\sqrt{2}\right)$;

h) $-2\sqrt{5}\cdot\left(3\sqrt{6}-2\sqrt{20}\right)$; i) $-4\sqrt{3}\cdot\left(2\sqrt{3}-5\sqrt{7}+\sqrt{12}\right)$; j) $\left(-4\sqrt{3}\right)^2+\left(-2\sqrt{5}\right)^2$;

k) $\left(-2\sqrt{3}\right)^3-\left(-3\sqrt{3}\right)^3$; l) $\left(5\sqrt{2}-4\sqrt{5}\right)\cdot\left(2\sqrt{5}-3\sqrt{2}\right)$; m) $\left(2\sqrt{5}-3\right)^2$;

n) $\left(3\sqrt{2}-2\right)^2$; o) $\left(2\sqrt{5}-3\right)\cdot\left(2\sqrt{5}+3\right)$; p) $\left(\sqrt{6}+2\right)^2+\left(\sqrt{3}-2\sqrt{2}\right)^2$;

q) $\left(4\sqrt{3}-5\right)\cdot\left(4\sqrt{3}+5\right)$; r) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}+4\right)^2$; s) $2\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2$;

t) $\frac{1}{2\sqrt{5}}-\frac{1}{3\sqrt{2}}$; u) $\frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}+\frac{2}{3\sqrt{2}-4}$; v) $\left(-4\sqrt{3}\right)^2+\left(-2\sqrt{5}\right)^2$;

x) $\left(-2\sqrt{3}\right)^{-2}+\left(-4\sqrt{2}\right)^{-2}$;

3. Să se calculeze:

a) $2\sqrt{3}-8\sqrt{3}+3\sqrt{3}$; b) $(7\sqrt{2}-5\sqrt{3})-(6\sqrt{2}-9\sqrt{3})$; c) $(8\sqrt{5}-6\sqrt{2})-(4\sqrt{2}+3\sqrt{5})$;

d) $\sqrt{98}-\sqrt{44}-\sqrt{50}+\sqrt{99}$; e) $3\sqrt{175}-2\sqrt{28}-3\sqrt{63}$; f) $\frac{2}{3\sqrt{5}}+\frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}-\frac{1}{2\sqrt{5}}$;

g) $\frac{3}{\sqrt{18}}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{32}}+\frac{1}{\sqrt{72}}$; h) $(\sqrt{243}-2\sqrt{48}-5\sqrt{75}):(3\sqrt{3})$;

i) $(\sqrt{216}-\sqrt{150}+\sqrt{96}-\sqrt{54}):(-\sqrt{6})$;

4. Să se raţionalizeze numitorii fracţiilor:

a) $\frac{1}{\sqrt{5}}$; b) $\frac{2}{3\sqrt{5}}$; c) $\frac{5\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$; d) $\frac{1+\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}$; e) $\frac{2}{2+\sqrt{2}}$; f) $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$;

g) $\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}$; h) $\frac{1}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}$; i) $\frac{1}{\sqrt{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}}$; j) $\frac{1}{1-\sqrt{3}+\sqrt{5}}$; k) $\frac{\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{3}}}{\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3}}}$;

5. Se consideră numărul $\sqrt{13}=3,a_1a_2a_3....$. Să se calculeze:

a) $a_1+a_2+a_3$; b) $a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot....\cdot a_{2012}$;

6. Să se compare numerele:

a) $\sqrt{5}$ şi $\sqrt{7}$; b) $-\sqrt{5}$ şi $-\sqrt{7}$; c) $3\sqrt{2}$ şi $\sqrt{27}$; d) $5\sqrt{7}$ şi $8\sqrt{3}$; e) $4\sqrt{5}$ şi $2\sqrt{21}$;

f) $4\sqrt{8}$ şi $5\sqrt{5}$; g) $\frac{2}{\sqrt{2}}$ şi $\frac{3}{\sqrt{3}}$; h) $4\sqrt{2}$ şi $\frac{9}{\sqrt{2}}$; i) $8\sqrt{3}$ şi $\frac{24}{\sqrt{3}}$; j) $\sqrt{7}+2$ şi $3+\sqrt{2}$;

k) $\sqrt{6}+4$ şi $2+3\sqrt{2}$; l) $1+\sqrt{7}$ şi $\sqrt{5}+\sqrt{3}$;

7. Să se calculeze media aritmetică şi media geometrică a numerelor:

a) $a=\frac{1}{8}$, b= 9; b) $a=3\sqrt{2}$, $b=12\sqrt{2}$;

c) $a=\sqrt{5}$, $b=4\sqrt{125}$; d) $a=\sqrt{6}-\sqrt{2}$, $b=\sqrt{6}+\sqrt{2}$;

e) $a=(\sqrt{5}-1)^2$, $b=(\sqrt{5}+1)^2$; f) $a=(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2$, $b=(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2$;

g) $a=\sqrt{12}$, $b=\sqrt{300}$; h) $a=11-6\sqrt{2}$, $b=11+6\sqrt{2}$;

i) $a=\frac{8}{\sqrt{5}}$, $b=\frac{\sqrt{5}}{2}$; j) $a=\sqrt{7+4\sqrt{3}}$, $b=\sqrt{7-4\sqrt{3}}$;

k) $a=\sqrt{(4-\sqrt{5})^2}$, $b=\sqrt{(4+\sqrt{5})^2}$; l) $a=\sqrt{(3\sqrt{2}-5)^2}$, $b=\sqrt{(5+3\sqrt{2})^2}$

8. Fie mulţimea $A=\left\{-4;-3,5;0,(6);\frac{2}{3};3\sqrt{2};-\frac{5}{2};\frac{1}{2\sqrt{3}}\right\}$. Pentru fiecare element al mulţimii A să se scrie: a) inversul; b) opusul; c) modulul; d) pătratul;

9. Să se arate că $\frac{\sqrt{1+2+3+...+n}}{\sqrt{1+2+3+....+n+1}}=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

10. Să se arate că $\sqrt{5n+7} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

11. Să se arate că numărul

$x = \frac{\sqrt{1}-\sqrt{2}}{\sqrt{1\cdot 2}} + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2\cdot 3}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{4}}{\sqrt{3\cdot 4}} + ... + \frac{\sqrt{142}-\sqrt{143}}{\sqrt{142\cdot 143}} + \frac{\sqrt{143}-\sqrt{144}}{\sqrt{143\cdot 144}} \in \mathbb{Q}$.

12. Să se arate că $E = \sqrt{3}\cdot\sqrt{6+\sqrt{33}}\cdot\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{33}}}\cdot\sqrt{3-\sqrt{3+\sqrt{33}}} \in \mathbb{Q}$.

13. Se consideră numărul $x = \sqrt{2(2-2\sqrt{3})-2\sqrt{3}(2-2\sqrt{3})} + \sqrt{2(2+2\sqrt{3})+2\sqrt{3}(2+2\sqrt{3})}$. Să se arate că $x\cdot\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$.

14. Să se aducă la o formă mai simplă expresiile:

a) $E(a) = \sqrt{2a^4 + \sqrt{a^8 + \sqrt{6a^{16} + \sqrt{9a^{32}}}}}$; **b)** $\frac{\sqrt{\sqrt{\sqrt{81x^{16}}}}}{\sqrt{\sqrt{16y^8}}}$; **c)** $\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}} + \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}$;

d) $\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} + \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{3}}}}$; **e)** $\frac{(x+y)^3-(x-y)^3}{(x+y)^2-(x-y)^2}$.

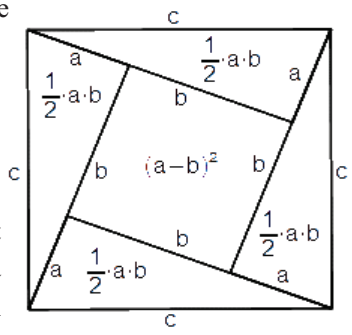
15. *Să se determine aria triunghiului ABC știind că $\sqrt{a^2-4a+13} + \sqrt{b^2-6b+25} + \sqrt{c^2-8c+41} \le 12$, unde a, b, c sunt laturile triunghiurile.

16. Să se aducă la o formă mai simplă expresia $\sqrt{a^4+5a^8+\sqrt{16a^{16}}}$, $a \in \mathbb{R}$.

17. Să se calculeze $\sqrt{a^2-b^2}$ unde $a = 7{,}5$, $b = 4{,}5$.

Știați că ... ?

În secolul al 12-lea, cel mai mare matematician și astronom indian din perioada medievală, **Bhāskara II** (1114 - 1185), descrie în cartea sa „ Lilavati”(1150) extragerea rădăcinii pătrate și a celei cubice precum și operațiile de înmulțire și împărțire cu numere negative. De asemenea, el a studiat toate ramurile matematicii cunoscute la acel timp.



În lucrările sale apar noțiuni matematice echivalente sau aproximativ echivalente cu numerele infinitezimale, derivatele, teorema de medie, derivata funcției sinus fiind un precursor al calculului diferențial, cu mult înaintea lui Newton și Leibniz. A dat prima metodă de determinare a soluțiilor generale a ecuației $x^2 - ny^2 = 1$, cunoscută sub numele de ecuația lui Pell și a dezvoltat geometria sferică.

A dat o demonstrație celebră a teoremei lui Pitagora, $c^2 = a^2 + b^2$, cu ajurorul ariilor, ca în figura alăturată, și de asemenea, cunoștea descompunerea radicalilor suprapuși și raționalizarea numitorilor. ([6], p.20)

1.3 Calcul algebric

Formule de calcul prescurtat în $\mathbb{R}$

1. $\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;}$ **Exemple:** $(3x+2)^2 = (3x)^2 + 2\cdot 3x\cdot 2 + 2^2 = 9x^2 + 12x + 4$;

$\left(2\sqrt{3}+4\right)^2 = (2\sqrt{3})^2 + 2\cdot 2\sqrt{3}\cdot 4 + 4^2 = 12 + 16\sqrt{3} + 16 = 28 + 16\sqrt{3}$;

2. $\boxed{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2;}$ **Exemple:** $(2x-3)^2 = (2x)^2 - 2\cdot 2x\cdot 3 + 3^2 = 4x^2 - 12x + 9$;

$\left(2\sqrt{3}-4\right)^2 = (2\sqrt{3})^2 - 2\cdot 2\sqrt{3}\cdot 4 + 4^2 = 12 - 16\sqrt{3} + 16 = 28 - 16\sqrt{3}$;

3. $\boxed{(a+b)(a-b) = a^2 - b^2}$; **Exemple:** $(3x-4)(3x+4) = (3x)^2 - 4^2 = 9x^2 - 16$;

$(\sqrt{5}-3)(\sqrt{5}+3) = \sqrt{5}^2 - 3^2 = 5 - 9 = -4$;

4. $\boxed{(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca}$

Exemplu: $(x^2+x+3)^2 = (x^2)^2 + x^2 + 3^2 + 2x^2\cdot x + 2x\cdot 3 + 2x^2\cdot 3 = x^4 + 2x^3 + 7x^2 + 6x + 9$

5. $\boxed{(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$;

Exemplu: $(2x+3)^3 = (2x)^3 + 3(2x)^2\cdot 3 + 3(2x)\cdot 3^2 + 3^3 = 8x^3 + 36x^2 + 54x + 27$

6. $\boxed{(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}$;

Exemplu: $(5x-2)^3 = (5x)^3 - 3(5x)^2\cdot 2 + 3(5x)\cdot 2^2 - 2^3 = 125x^3 - 150x^2 + 60x - 8$

7. $\boxed{a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)}$;

Exemplu: $(2x)^3 - 27 = (2x-3)(4x^2 + 6x + 9)$;

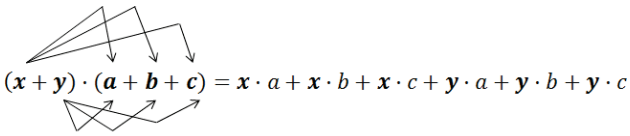
8. $\boxed{a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)}$.

Exemplu: $8x^3 - 1 = (2x-1)(4x^2 + 2x + 1)$

Reguli de calcul cu numere reale reprezentate prin litere

Factor comun $\boxed{a\cdot x + a\cdot y + a\cdot z = a\cdot(x+y+z)}$ $\boxed{x\cdot(a+b+c) = x\cdot a + x\cdot b + x\cdot c}$

Desfacerea parantezelor: $\boxed{(x+y)\cdot(a+b+c) = x\cdot a + x\cdot b + x\cdot c + y\cdot a + y\cdot b + y\cdot c}$



Exemple: a) $-3\sqrt{2}x^2y(2 + x - \sqrt{2}y^3) = -6\sqrt{2}x^2y - 3\sqrt{2}x^3y + 6x^2y^4$;

b) $(2x+4y)\cdot(x-3y) = 2x^2 - 6xy + 4xy - 12y^2$.

<u>Descompuneri în factori</u>

1. Metoda factorului comun

$\boxed{ab + ac - ad = a(b+c-d)}$ **Exemplu:** $25x^3 - 15x^2 + 20x = 5x(5x^2 - 3x + 4)$;

$\boxed{ax + ay + bx + by = a(x+y) + b(x+y) = (x+y)(a+b)}$

Exemplu: $12x^2+6x+10x+5=6x(2x+1)+5(2x+1)=(2x+1)(6x+5)$;

2. Utilizarea formulelor de calcul prescurtat

$\boxed{a^2+2ab+b^2=(a+b)^2}$ **Exemplu:** $4x^2+4x+1=(2x+1)^2$;

$\boxed{a^2-2ab+b^2=(a-b)^2}$ **Exemplu:** $x^6-6x^3+9=(x^3-3)^2$;

$\boxed{a^2-b^2=(a-b)(a+b)}$ **Exemplu:** $x^2-2=(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$;

$\boxed{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac=(a+b+c)^2}$ **Exemplu:**
$x^2+4x+2\sqrt{2}x+6+4\sqrt{2}=(x+2+\sqrt{2})^2$;

Activitate independentă	**Răspuns**
Să se calculeze: **a)** $(x-4)^3-(x+4)^3$; **b)** $(3x-5)^2+(3x-6)^2-2\cdot(3x-5)(3x-6)$;	**a)** $-24x^2-128$; **b) 1;**

Exercitii rezolvate

1. Să se calculeze:

a) $7x+2x-12x-4x$; **b)** $5x^2-6x+3x-15x^2$; **c)** $-2x^3(3x^2-4x+2)$;

d) $(2x-3)(3x+2)$; **e)** $(x+5)^2$; **f)** $(3x-4)^2$;

g) $(4x-2)(4x+2)$; **h)** $(x+4)^3$; **i)** $(x-2)^3$;

Rezolvare:

a) $7x+2x-12x-4x=-7x$; b) $5x^2-6x+3x-15x^2=-10x^2-3x$;

c) $-2x^3(3x^2-4x+2)=-6x^5+8x^4-4x^3$; d)

$(2x-3)(3x+2)=6x^2+4x-9x-6=6x^2-5x-6$;

e) $(x+5)^2=x^2+10x+25$; f) $(3x-4)^2=9x^2-24x+16$;

g) $(4x-2)(4x+2)=16x^2-4$; h) $(x+4)^3=x^3+3x^2\cdot4+3x\cdot4^2+4^3=x^3+12x^2+48x+64$;

i) $(x-2)^3=x^3-3x^2\cdot2+3x\cdot2^2-2^3=x^3-6x+12x-8$;

2. Utilizând metode combinate sau formula de descompunere a trinomului de gradul al doilea $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, unde x_1,x_2 sunt soluțiile ecuației de gradul doi, să se descompună:

a) x^2-7x+6; **b)** $x^2-7x+10$; **c)** x^2+5x+6;

Rezolvare: a) $x^2-7x+6=x^2-x-6x+6=x(x-1)-6(x-1)=(x-1)(x-6)$;

b) $x^2-7x+10=x^2-2x-5x+10=x(x-2)-5(x-2)=(x-2)(x-5)$;

c) $x^2+5x+6=x^2+2x+3x+6=x(x+2)+3(x+3)=(x+2)(x+3)$;

3. Utilizând metode combinate să se descompună:

a) x^3+x^2+x+1; **b)** x^3-2x^2+x-2; **c)** x^3-3x^2-x+3; **d)** x^4-1; **e)** x^5-1; **f)** x^6-1;

Rezolvare:

a) $x^3+x^2+x+1=x^2(x+1)+(x+1)=(x+1)(x^2+1)$;

b) $x^3-2x^2+x-2=x^2(x-2)+(x-2)=(x-2)(x^2+1)$;

c) $x^3-3x^2-x+3=x^2(x-3)-(x-3)=(x-3)(x^2-1)=(x-3)(x-1)(x+1)$;

d) $x^4-1=(x^2-1)(x^2+1)=(x-1)(x+1)(x^2+1)$;

e) $x^5-1=x^5-x^4+x^3-x^2+x^2-x+x-1=(x-1)(x^4+x^2+x+1)$;

f) $x^6-1=(x^3-1)(x^3+1)=(x-1)(x^2+x+1)(x+1)(x^2-x+1)$;

4. Să se calculeze :

a) $(2x+3)^2-(3x-1)^2+(x-4)(x+4)$; **b)** $\dfrac{(3x+1)^3-(3x-1)^3}{27x^2+1}$

Rezolvare: a) $(2x+3)^2-(3x-1)^2+(x-4)(x+4)=4x^2+12x+9-(9x^2-6x+1)$

$+x^2-16=4x^2+12x+9-9x^2+6x-1+x^2-16=$

$=-4x^2+18x-8$. S-au aplicat formulele $(a+b)^2,(a-b)^2$, $(a+b)(a-b)$.

b) $\dfrac{(3x+1)^3-(3x-1)^3}{27x^2+1}=\dfrac{27x^3+27x^2+9x+1-(27x^3-27x^2+9x-1)}{27x^2+1}=\ =\dfrac{2(27x^2+1)}{27x^2+1}=2$.

5. Dacă $2a(a-4)+2b(b-1)+\dfrac{17}{2}=0$**,** $a,b\in\mathbb{R}$**, să se calculeze** $(a-1)^{2017}+(a-6b)^{2017}$**.**

Rezolvare: Relația dată este echivalentă cu $2(a^2-4a+4)+2(b^2-b+\dfrac{1}{4})=0\Leftrightarrow$

$2(a-2)^2+2(b-\dfrac{1}{2})^2=0$, de unde se obțin $a=2$ și $b=\dfrac{1}{2}$. Atunci,

$(a-1)^{2017}+(a-6b)^{2017}=(2-1)^{2017}+(2-3)^{2017}=1-1=0$.

6. Să se determine $a,b,c\in\mathbb{Z}$**pentru care** $(a+3)^2+(b-4)^2+(c-2)^2=0$**.**

Rezolvare: $a=-3;\ b=4;\ c=2.$

7. Să se arate că $\sqrt{x^2+2x+5}+\sqrt{x^2+4x+8}+\sqrt{x^2+6x+13}\ \rangle\ 6,\ \forall x\in\mathbb{R}$**.**

Rezolvare:

$\sqrt{x^2+2x+5}=\sqrt{(x+1)^2+4}\rangle\ 2$**,** $\sqrt{x^2+4x+8}=\sqrt{(x+2)^2+4}\rangle\ 2$,

$\sqrt{x^2+6x+13}\ =\sqrt{(x+3)^2+4}\rangle\ 2$.

Astfel, suma din membrul stâng este mai mare decât 6.

8. Dacă $x-2y=-2$ **și** $x\in[-2;2]$**. Să se calculeze valoarea expresiei**

$E=\sqrt{x^2+y^2+4x+4}+\sqrt{x^2+y^2-4x-4y+8}$**.**

Rezolvare: $E=\sqrt{(x+2)^2+y^2}+\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}$. Din $x-2y=-2\Rightarrow x+2=2y$ şi

$x-2=2(y-2)$;

$x\in[-2;2]\Rightarrow -2\le x\le 2\,|+2\Rightarrow 0\le x+2\le 4\Rightarrow 0\le 2y\le 4\Rightarrow 0\le y\le 2\Rightarrow |y|=y$.

$-2\le x\le 2\,|-2\Rightarrow -4\le x-2\le 0\Rightarrow |y-2|=-(y-2)$.

Rezultă, $E=\sqrt{4y^2+y^2}+\sqrt{4(y-2)^2+(y-2)^2}=\sqrt{5y^2}+\sqrt{5(y-2)^2}=\ \sqrt{5}(|y|+|y-2|)=$

$=\sqrt{5}(y-y+2)=2\sqrt{5}$.

Exercitii propuse

1. Să se calculeze:

a) $3x+5x-12x-2x$; b) $2(x-4)-3(x+2)$; c) $2x^2-3x+4x-5x^2$;

d) $2x^3-5x^2+4x^3-(3x^3+2x^2)$; e) $2\sqrt{3}x-3\sqrt{2}x-4\sqrt{3}x-3\sqrt{2}x$; f) $5x^2-4x-7x^2-8x$;

2. Să se calculeze:

a) $x\cdot\left(2x^3-3x+4\right)$; b) $2x\cdot\left(3\sqrt{2}x^3+4x^2-5x-3\right)$; c) $\frac{1}{2}x^2\cdot\left(4x^2-2x+8\right)$;

d) $2\sqrt{3}x\cdot\left(4x^2-3\sqrt{2}x+\sqrt{3}\right)$; e) $(x-2)\cdot(2x-5)$; f) $\left(x^2-2x+3\right)\cdot(x-3)$;

g) $\left(8x^4-12x^3+6x^2-24x\right):(-2x)$;

3. Utilizând formula $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, să se calculeze:

a) $(\sqrt{2}+1)^2$; b) $(2\sqrt{3}+4)^2$; c) $(x+3)^2$;

d) $(x+2)^2$; e) $(3x+2)^2$; f) $(5x+3)^2$;

4. Utilizând formula $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$, să se calculeze:

a) $(\sqrt{3}-1)^2$; b) $(2\sqrt{3}-2)^2$; c) $(x-3)^2$;

d) $(x-2)^2$; e) $(3x-2)^2$; f) $(5x-3)^2$;

5. Utilizând formula $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$, să se calculeze:

a) $(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)$; b) $(2\sqrt{3}+\sqrt{2})(2\sqrt{3}-\sqrt{2})$; c) $(x-4)(x+4)$;

d) $(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$; e) $(2x-5)(2x+5)$; f) $(3x-2)(3x+2)$;

6. Utilizând formula $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)$, să se calculeze:

a) $(x+\sqrt{2}+3)^2$; b) $(x^2+x+1)^2$; c) $(2x+\sqrt{3}+1)^2$;

d) $(x^2+2x-3)^2$;

7. Utilizând formula $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, să se calculeze:

a) $(\sqrt{2}+1)^3$; b) $(x+1)^3$; c) $(x+2)^3$;

d) $(2x+3)^3$; e) $(3x+1)^3$;

8. Utilizând formula $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$, să se calculeze:

a) $(\sqrt{3}-2)^3$; b) $(x-2)^3$; c) $(2x-1)^3$;

d) $(3x-2)^3$;

9. Să se calculeze:

a) $2x + 6x -10x$; b) $3x^2 -4x+ 6x^2 +x$; c) $-4x^2(3x-2)$; d) $(x^2-2x+6)(3x-4)$;

e) $(2x- 4)(x^2 -5)$; f) $(x-5)^2$; g) $(x+6)^2$; h) $(x-4)(x+4)$;

i) $(2x-\sqrt{3})(2x+\sqrt{3})$; j) $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$; k) $\left(3x-\frac{1}{4}\right)^2$; l) $\left(x^2-3x\right)^2$;

m) $-2\sqrt{3}x\cdot(3\sqrt{3}x^2-x)$; n) $(-x)^3\cdot(-x)^2\cdot(-x)$; o) $\frac{3\sqrt{5}x^6}{9x^2}\cdot\frac{3}{\sqrt{15}x^3}$; p) $\frac{(x-2)^2}{4}-\frac{x+3}{2}+\frac{3}{4}$.

10. Să se calculeze:

a) $6x+3x-8x-9x$; b) $7x^2-5x-9x^2+2x$; c) $3x^2-4x^2-10x^2$;

d) $-5x\cdot(-2x)+6x-7x^2$; e) $(-4x^3)\cdot(-2x^2)$; f) $6x^3\cdot(-2x^4)$;

g) $-9x\cdot(4x^2-3x+5)$; h) $-3x^2\cdot(5x-4)$; i) $-81x^4:(-9x^3)$;

j) $-36x^3:(-4x)$; k) $(-3x^2)^3+(-2x)^6$; l) $(-2\sqrt{3}x^2)\cdot(\sqrt{3}x^3)$;

m) $-6\sqrt{2}x\cdot(3\sqrt{2}x-4x^2)$; n) $(4x^2-5x)\cdot(3x^2-x)$; o) $(3x^2-6x+2)\cdot(x-3)$;

p) $(2x^2+3)\cdot(4x-4)$; q) $(x-3)^2$; r) $(x+5)^2$;

s) $(5x-3)\cdot(5x+3)$; t) $(3x-4)^2+(2x+4)^2$; u) $(x^2+x+2)^2$;

v) $(x+1)^3$; x) $(x-2)^3$; y) $(2x+3)^3$;

z) $(3x-1)^3$;

11. Să se calculeze:

a) $-3x^2(5x^2+2\sqrt{2}x-4)$; b) $-4x^3(2\sqrt{3}x^2-5x+\sqrt{2})$; c) $-2\sqrt{2}x^3(2x^2-3\sqrt{2}x+4)$;

d) $-5x^3(3x^2-3\sqrt{2}x+8)$; e) $(x-\sqrt{3})^3$; f) $(2x+\sqrt{2})^3$;

g) $(3x-\sqrt{2})^3$; h) $(x+2\sqrt{3})^3$; i) $(x+2\sqrt{2})^3$;

12. Să se calculeze:

a) $(2\sqrt{5}-3)^2$; b) $(3x-3)^2$; c) $(3\sqrt{2}-4)^{-1}$; d) $\frac{3}{4\sqrt{2}}$; e) $\sqrt{14+6\sqrt{5}}$; f) $\left(\sqrt{3+\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{5}}}\right)^2$;

g) $(2x+\sqrt{3}+1)^2$; h) $(2\sqrt{2}+1)^3$; i) $(\sqrt{3}-2)^3$; j) $(3\sqrt{2}+5)^3$; k) $(2\sqrt{3}-1)^3$;

13. Utilizând metoda factorului comun $a\cdot x+a\cdot y=a(x+y)$ să se descompună în factori:

a) $3x^2y+6xy^2$; b) $9x^3+12x^2+6x$; c) $36x^3-18x^2+9x$; d) $3\sqrt{2}x^2+9\sqrt{2}x$;

14. Utilizând formulele de descompunere $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$, $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$, $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$, $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$, $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ să se descompună:

a) x^2+4x+4; b) x^2+6x+9; c) $4x^2+4x+1$;

d) $9x^2+12x+4$; e) x^2-4x+4; f) $x^2-8x+16$;

g) $4x^2-8x+4$; h) $25x^2-10x+1$; i) x^2-9;

j) x^2-25; k) $4x^2-9$; l) x^2-2;

m) $x^2-\frac{1}{4}$; n) x^3-1; o) x^3-8;

p) x^3-27; q) x^3+1; r) x^3+8;

s) x^3+27;

15. Utilizând metode combinate sau formula de descompunere a trinomului de gradul al doilea $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, unde x_1,x_2 sunt soluțiile ecuației de gradul doi, să se descompună: a) x^2+9x+8; b) x^2-x-20; c) x^2-6x-7; d) x^2+3x-4;

1.4 Modulul numerelor reale

Definiție: Modulul numerelor reale. Fie $a \in \mathbb{R}$**. Atunci,** $|a| = \begin{cases} a, & a \rangle 0 \\ 0, & a = 0 \\ -a, & a \langle 0 \end{cases}$ **;**

Exemple:

1). $|-\sqrt{3}| = \sqrt{3}$; $|-2\sqrt{5}| = 2\sqrt{5}$; $|3\sqrt{6}| = 3\sqrt{6}$;

2). $|3-\sqrt{3}|$; $|\sqrt{5}-3|$; $|4-3\sqrt{2}|$;

3). $\sqrt{(7-3\sqrt{5})^2}$; $\sqrt{(3-2\sqrt{3})^2}$;

Proprietăţile modulului

1. $|a| \geq 0, \quad \forall a \in \mathbb{R}$;

2. $|a| = 0, \quad \Leftrightarrow a = 0$; **Exemplu:** $|x-4| = 0 \Rightarrow x-4 = 0 \Rightarrow x = 4$;

3. $|a| = |-a|, \quad \forall a \in \mathbb{R}$; **Exemplu:** $|-5| = |5| = 5$ **;**

4. $|a| = |b|, \quad \Leftrightarrow a = \pm b$; **Exemplu:**

$|x| = |-7| \Rightarrow x = \pm(-7) \Rightarrow x = \mp 7$ **;**

5. $|x| = a, \quad \Rightarrow x = \pm a, \quad a \rangle 0$; **Exemplu:** $|x| = 5 \Rightarrow x = \pm 5$ **;**

6. $|x| \leq a, \quad \Leftrightarrow x \in [-a, a], \quad a \rangle 0$; **Exemplu:** $|x| \leq 5 \Rightarrow x \in [-5;5]$ **;**

7. $|x| \geq a, \quad \Leftrightarrow x \in [-\infty, -a] \cup [a, +\infty], \quad a \rangle 0$; **Exemplu:** $|x| \geq 5 \Rightarrow x \in (-\infty; -5] \cup [5; +\infty)$

Calculul radicalilor dubli

$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$ unde a²-b=k² . (formula radicalilor dubli)

Exemplu: $\sqrt{7+4\sqrt{3}} = \sqrt{7+\sqrt{48}} = \sqrt{\frac{7+\sqrt{7^2-48}}{2}} + \sqrt{\frac{7-\sqrt{7^2-48}}{2}} = \sqrt{\frac{8}{2}} + \sqrt{\frac{6}{2}} = 2+\sqrt{3}$;

Altfel, aceste exerciţii se pot rezolva uşor utilizând formulele de calcul prescurtat, şi anume, să se formeze un pătrat perfect sub radical: $7+4\sqrt{3} = (a+b)^2 \Rightarrow \underline{7} + \underline{\underline{4\sqrt{3}}} = \underline{a^2} + \underline{\underline{2ab}} + \underline{b^2}$. În cazul nostru se identifică termenii corespunzători începând întodeauna cu termenul care conţine radicalul $4\sqrt{3} = 2ab \,|: 2 \Rightarrow 2\sqrt{3} = ab$ şi $7 = a^2 + b^2$. Din cele două rezultă $a = 2, b = \sqrt{3}$.

Aşadar, $\sqrt{7+4\sqrt{3}} = \sqrt{(2+\sqrt{3})^2} = |2+\sqrt{3}| = 2+\sqrt{3}$.

Activitate independentă	**Răspuns**
1. Să se calculeze: **a)** $\lvert 5-2\sqrt{7}\rvert$; **b)** $\lvert 6-2\sqrt{5}\rvert$; **c)** $\sqrt{(3-\sqrt{10})^2}$; **d)** $\sqrt{6+4\sqrt{2}}$;	a) $-5+2\sqrt{7}$; b) $-6+2\sqrt{5}$

Exercitii rezolvate

1. Să se calculeze:

a) $|2-6-8|$; **b)** $|3-2\cdot(4-5)|$; **c)** $\left|2\sqrt{3}-6\sqrt{3}\right|$; **d)** $\left|3\sqrt{3}-4\sqrt{2}\right|$;

e) $\left|5\sqrt{2}-2\sqrt{5}\right|$; **f)** $\left|\frac{1}{5\sqrt{2}}-\frac{1}{3\sqrt{2}}\right|$; **g)** $\sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2}$; **h)** $\sqrt{4-2\sqrt{3}}$.

Rezolvare:

a) $|2-6-8|=|-12|=12$; **b)** $|3-2\cdot(4-5)|=|3+2|=5$; **c)** $\left|2\sqrt{3}-6\sqrt{3}\right|=\left|-4\sqrt{3}\right|=4\sqrt{3}$;

d) $\left|3\sqrt{3}-4\sqrt{2}\right|=-3\sqrt{3}+4\sqrt{2}$, deoarece $3\sqrt{3}\langle 4\sqrt{2}$;

e) $\left|5\sqrt{2}-2\sqrt{5}\right|=5\sqrt{2}-2\sqrt{5}$, deoarece $5\sqrt{2}\rangle 2\sqrt{5}$;

f) $\left|\frac{1}{5\sqrt{2}}-\frac{1}{3\sqrt{2}}\right|=\left|\frac{3-5}{15\sqrt{2}}\right|=\left|\frac{-2}{15\sqrt{2}}\right|=\frac{2}{15\sqrt{2}}$;

g) $\sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2}=\left|\sqrt{2}-\sqrt{3}\right|=-\sqrt{2}+\sqrt{3}$;

h) $\sqrt{4-2\sqrt{3}}=\sqrt{(1-\sqrt{3})^2}=\left|1-\sqrt{3}\right|=-1+\sqrt{3}$;

2. Să se calculeze, aducând la o formă mai simplă, fără radicali:

a) $\sqrt{(x-6)^2}$; **b)** $\sqrt{x^2-4x+4}$; **c)** $\sqrt{x^2-10x+25}$; **d)** $\sqrt{x^2+16x+64}$;

Rezolvare:

a) $\sqrt{(x-6)^2}=|x-6|$; **b)** $\sqrt{x^2-4x+4}=\sqrt{(x-2)^2}=|x-2|$;

c) $\sqrt{x^2-10x+25}=\sqrt{(x-5)^2}=|x-5|$; **d)** $\sqrt{x^2+16x+64}=\sqrt{(x+8)^2}=|x+8|$.

3. Să se expliciteze modulele:

a) $|x-5|$; **b)** $|2x+6|$;

Rezolvare:

a) $|x-5|=\begin{cases}x-5, & x-5\geq 0\Rightarrow x\geq 5\\ -x+5, & x-5\langle 0\Rightarrow x\langle 5\end{cases}$; **b)** $|2x+6|=\begin{cases}2x+6, & 2x+6\geq 0\Rightarrow x\geq -3\\ -2x-6, & 2x+6\langle 0\Rightarrow x\langle -3\end{cases}$.

4. Dacă $a=\sqrt{6-2\sqrt{5}}-\sqrt{6+2\sqrt{5}}$ **. Să se calculeze** $(a+2)^{2016}$**.**

Rezolvare: Cum $6-2\sqrt{5}=(\sqrt{5}-1)^2$ iar $6+2\sqrt{5}=(\sqrt{5}+1)^2$, atunci,

$a=\left|\sqrt{5}-1\right|-\left|\sqrt{5}+1\right|=\sqrt{5}-1-\sqrt{5}-1=-2$. Rezultă $(a+2)^{2016}=(-2+2)^{2016}=0$.

5. Dacă $a=\sqrt{8-2\sqrt{15}}-\sqrt{8+2\sqrt{15}}$ **. Să se calculeze** $(a+2\sqrt{3})^{2016}$**.**

Rezolvare:

$a=\sqrt{8-2\sqrt{15}}-\sqrt{8+2\sqrt{15}}=\sqrt{(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2}-\sqrt{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2}=\left|\sqrt{5}-\sqrt{3}\right|-\left|\sqrt{5}+\sqrt{3}\right|=-2\sqrt{3}$.

Rezultă, $(a+2\sqrt{3})^{2016}=(-2\sqrt{3}+2\sqrt{3})^{2016}=0$.

6. Dacă $a=\sqrt{5-2\sqrt{6}}+\sqrt{5+2\sqrt{6}}-\sqrt{8}$ **. Să se calculeze** a^{2016}**.**

Rezolvare:

$a=\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}-\sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}-\sqrt{8}=\left|\sqrt{3}-\sqrt{2}\right|-\left|\sqrt{3}+\sqrt{2}\right|-2\sqrt{3}=2\sqrt{3}-2\sqrt{3}=0$.

Rezultă, $a^{2016}=0$.

7. Să se arate că $\sqrt{\frac{2016^N-N^{2016}}{2015}}\in\mathbb{N}$**, unde** $N=\sqrt{(1-\sqrt{3})^2}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}$**.**

Rezolvare:

$N=\sqrt{(1-\sqrt{3})^2}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}=\left|1-\sqrt{3}\right|+\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}=\left|1-\sqrt{3}\right|+\left|2-\sqrt{3}\right|=-1+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}=1$.

Atunci, $\sqrt{\frac{2016^N-N^{2016}}{2015}}=\sqrt{\frac{2016-1}{2015}}=\sqrt{1}=1\in\mathbb{N}$.

8. Să se determine mulțimea $A=\left\{a\in\mathbb{Z}\,\middle|\,\frac{\sqrt{29+12\sqrt{5}}-\sqrt{21+4\sqrt{5}}}{a+2}\in\mathbb{Z}\right\}$**.**

Rezolvare:

$\frac{\sqrt{29+12\sqrt{5}}-\sqrt{21+4\sqrt{5}}}{a+2}=\frac{\sqrt{(3+2\sqrt{5})^2}-\sqrt{(1+2\sqrt{5})^2}}{a+2}=\frac{3+2\sqrt{5}-1-2\sqrt{5}}{a+2}=$

$\frac{2}{a+2}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow a+2\,|\,2$

$\Rightarrow a+2\in\{-2,-1,1,2\}$. Rezultă, $a\in\{-4,-3,-1,0\}$.

Exercitii propuse

1. Să se calculeze:

a) $|-6|$; b) $|-4-9|$; c) $|-2\cdot(-3)+5|$; d) $\left|-\sqrt{3}\right|$; e) $\left|-2\sqrt{5}\right|$; f) $\left|-\frac{1}{\sqrt{3}}\right|$;

g) $\left|\left(-\sqrt{3}\right)^3\right|$; h) $\left|\left(-2\sqrt{2}\right)^2\right|$; i) $\left|2\sqrt{3}+5\right|$; j) $\left|5\sqrt{2}+4\right|$; k) $\left|\sqrt{3}-1\right|$; l) $\left|2\sqrt{3}-3\right|$;

m) $\left|1-\sqrt{3}\right|$; n) $\left|\sqrt{3}-2\right|$; o) $\left|\sqrt{7}-3\right|$; p) $\left|\sqrt{5}-\pi\right|$; q) $\left|\pi-\sqrt{6}\right|$; r)

$\left|\sqrt{3^{30}}-\sqrt{5^{20}}\right|$; s) $\left|\sqrt{2^{40}}-\sqrt{8^{14}}\right|$; t) $\left|\sqrt{2^{45}}-\sqrt{3^{30}}\right|$; u) $\left|2-\sqrt{2}\right|+\left|3-\sqrt{2}\right|+\left|1-2\sqrt{2}\right|$;

v) $\left|1-\sqrt{3}\right|+\left|\sqrt{2}-1\right|-\left|\sqrt{2}+\sqrt{3}\right|$; x) $\left|3-2\sqrt{2}\right|+\left|4\sqrt{2}-6\right|-\left|7-5\sqrt{2}\right|$;

2. Să se calculeze:

a) $\sqrt{\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)^2}$; b) $\sqrt{\left(\sqrt{5}-\sqrt{7}\right)^2}$; c) $\sqrt{\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^2}$; d) $\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}$; e) $\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}$;

f) $\sqrt{\left(4\sqrt{3}-7\right)^2}$; g) $\sqrt{\left(5-3\sqrt{3}\right)^2}$; i) $\sqrt{\left(5\sqrt{3}-3\sqrt{8}\right)^2}$;

3. Să se calculeze:

a) $\sqrt{\left(3-\sqrt{8}\right)^2}+\sqrt{\left(2-\sqrt{8}\right)^2}$; b) $\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}+\sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}$; c) $\sqrt{\left(\sqrt{3}-2\right)^2}-\sqrt{\left(2\sqrt{3}-4\right)^2}$;

d) $\sqrt{\left(4-\sqrt{5}\right)^2}+\sqrt{\left(3\sqrt{5}-7\right)^2}+\sqrt{\left(4\sqrt{5}-4\right)^2}$; e) $\sqrt{\left(5-2\sqrt{2}\right)^2}+\sqrt{\left(4\sqrt{2}-6\right)^2}$;

4. Să se expliciteze modulele:

a) $|x-2|$; b) $|x+3|$; c) $|x-8|$; d) $|2x-6|$; e) $|3x+12|$; f) $|x^2-4|$;

g) $|x^2-16|$; h) $|x^2+16|$; i) $|x^2-9|$; j) $|x^2+9|$;

5. Să se calculeze:

a) $\frac{1}{2\sqrt{3}-\sqrt{11}}+\left|2\sqrt{11}-4\sqrt{3}\right|$; b) $\frac{1}{2\sqrt{5}-3\sqrt{2}}+\left|3\sqrt{5}-5\sqrt{2}\right|$;

c) $\frac{2}{5\sqrt{2}-4\sqrt{3}}+\left|4\sqrt{3}-5\sqrt{2}\right|$; d) $\frac{4}{2\sqrt{11}+4\sqrt{3}}+\left|\sqrt{11}-2\sqrt{3}\right|$;

6*. Să se calculeze:

a) $|x+3|+|x-2|$; b) $|x-5|+|x-3|$; c) $|2x+8|+|3x-9|$; d) $|5x-10|-|x+3|$;

e) $|x^2-16|+|x-4|$; f) $\sqrt{(x-2)^2}+\sqrt{(x-4)^2}$; g) $\sqrt{(x+2)^2}+\sqrt{(x-2)^2}$;

h) $\sqrt{x^2+2x+1}+\sqrt{x^2-2x+1}$; i) $\sqrt{x^2+6x+9}+\sqrt{x^2-6x+9}$;

j) $\sqrt{x^2+4x+4}+\sqrt{x^2-10x+25}$; k) $\sqrt{(x+2)^2}+\sqrt{(x^2-4)^2}+\sqrt{x^2-4x+4}$;

7*. Să se calculeze:

a) $\sqrt{4-2\sqrt{3}}$; b) $\sqrt{6-4\sqrt{2}}$; c) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$; d) $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$;

e) $\sqrt{5-2\sqrt{6}}$; f) $\sqrt{6-\sqrt{20}}$; g) $\sqrt{14+6\sqrt{5}}$; h) $\sqrt{7-2\sqrt{10}}$;

i) $\sqrt{6-2\sqrt{5}}$; j) $\sqrt{3+\sqrt{8+2\sqrt{7}}}$; k) $\sqrt{4+\sqrt{9-4\sqrt{2}}}$; l) $\sqrt{9-2\sqrt{11-6\sqrt{2}}}$;

8*. Să se calculeze:

a) $\left|\sqrt{17}-3\sqrt{2}\right|-\sqrt{(2\sqrt{17}-3\sqrt{8})^2}$; b) $\left|\sqrt{26}-3\sqrt{3}\right|-\sqrt{(3\sqrt{26}-9\sqrt{3})^2}$;

c) $(2+\sqrt{3})^2+\left|4\sqrt{3}-7\right|+(\sqrt{3}-2)^{-1}$; d) $(2+\sqrt{3})^{-2}+\left|7-4\sqrt{3}\right|+(\sqrt{3}-2)^2$;

e) $\sqrt{(5-\sqrt{3})^2}+(1+2\sqrt{2})^2+(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{-1}$;

9*. Să se arate că numărul $A=\sqrt{2+\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}}\in\mathbb{Z},\ \forall x\in[1;5]$.

10. Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ dacă :

a) $|a-8|+|b+5|=0$; b) $|2a+6|+|b-2|=0$;

c) $|a^2-16|+(b-5)^2=0$; d) $\sqrt{(a+2)^2}+\sqrt{(b-3)^2}=0$;

e) $\sqrt{(a-5)^2}+|2b+6|=0$; f) $\sqrt{a^2+4a+4}+\sqrt{b^2-6b+9}=0$.

1.5 Ecuații în $\mathbb{R}$

Definiţie: Se numeşte ecuaţie, o expresie algebrică cu una sau mai multe necunoscute şi în care apare o singură dată semnul egal.

Exemplu: 3x+8=2 este o ecuaţie cu necunoscuta x.

Definiţie: Un număr " a „ este soluţie a unei ecuaţii dacă înlocuind pe x cu „ a " , obţinem o propoziţie adevărată.

De exemplu, pentru **x = -2** se obţine -6+8=2, (Adevărat), rezultă că **-2** este soluţie a ecuaţiei date.

Definiţie: Se numesc ecuaţii echivalente, ecuaţiile care admit aceeaşi mulţime de soluţii.

De obicei se notează cu **S** mulţimea soluţiilor unei ecuaţii.
Exemplu: Ecuaţiile 3x+8=2 şi x+4=2 sunt echivalente deoarece au aceeaşi soluţie, şi anume **x= -2**.

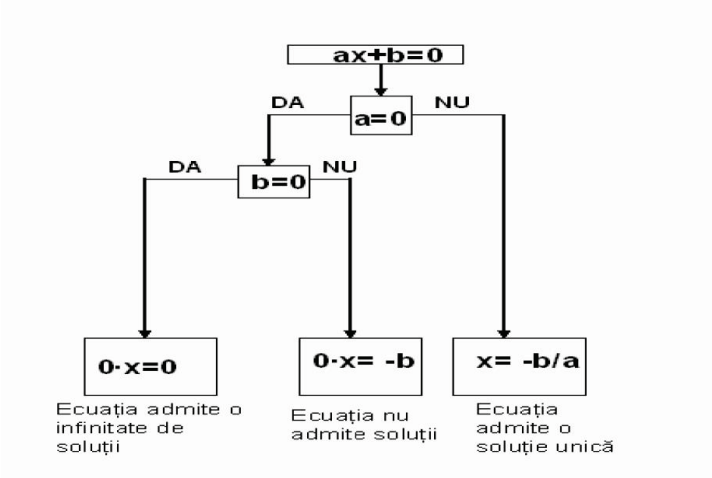
Definiţie. Se numeşte domeniu al unei ecuaţii , mulţimea în care ecuaţia admite soluţii.

Dacă soluţiile unei ecuaţii nu sunt din domeniu, atunci spunem că **ecuaţia nu are soluţii** în acel domeniu. De exemplu, ecuaţia 3x+8=2, având soluţia x= **-2**, spunem că nu are soluţii în mulţimea $\mathbb{N}$, deoarece -2 nu aparţine lui $\mathbb{N}$ **,** dar are soluţie în $\mathbb{Z}$.

Definiție: A rezolva o ecuație înseamnîă a determina mulțimea soluțiilor acesteia dintr-o mulțime dată.

Pentru aceasta, se transformă ecuaţia dată în ecuaţii echivalente prin trecerea dintr-un membru al ecuaţiei în celălalt, al unuia sau a mai multor termeni, trecere însoţită de schimbarea semnului termenului respectiv, sau prin înmulţiri sau împărţiri ai ambilor membri ai ecuaţiei cu acelaşi număr.

Schema logică de rezolvare a ecuaţiei a·x+b=0 în $\mathbb{R}$, $a,b \in \mathbb{R}$



$\boxed{a\cdot x+b=0\Rightarrow a\cdot x=-b\Rightarrow x=-\frac{b}{a}}$, $a\neq 0$.

Exemple: a) $3x-6=0\Rightarrow 3x=6\Rightarrow x=2$;

b) $2x+4-3(3x+4)=2-5(x-2)\Rightarrow$

$2x+4-9x-12=2-5x+10$ (Desfacerea parantezelor)

$2x-9x+5x=2+10-4+12$ (Separarea termenilor- cei cu x în stânga, cei fără x, în dreapta)

$-2x=20\,|:(-2)$ (Calculul între termenii asemenea)

$\Rightarrow x=\frac{20}{-2}=-10$. (Aplicarea formulei)

Tipuri de ecuații:

1. $\boxed{x^2=a\Rightarrow x=\pm\sqrt{a}, a\rangle 0.}$; **Exemplu:** $x^2=64\Rightarrow x=\pm\sqrt{64}\Rightarrow x=\pm 8$;

2. $\boxed{|x|=a,\quad \Rightarrow x=\pm a,\quad a\rangle 0}$; **Exemplu:** $|x|=5\Rightarrow x=\pm 5$;

3. $\boxed{|x|=|y|\Rightarrow x=\pm y}$;

Exemplu: $|2x+3|=|x-1|\Rightarrow 2x+3=\pm(x-1)\Rightarrow\begin{cases}2x+3=x-1\Rightarrow x=-4\\ 2x+3=-x+1\Rightarrow 3x=-2\Rightarrow x=-\frac{2}{3}\end{cases}$.

4. $\boxed{a\cdot x^2+b\cdot x+c=0\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$, $a\neq 0$. $b^2-4ac\rangle 0$;

Exemplu:

$x^2-6x+5=0\Rightarrow\Delta=6^2-4\cdot 1\cdot 5=36-20=16\Rightarrow x_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{16}}{2}=\frac{6\pm 4}{2}\Rightarrow$

$x_1=\frac{6-4}{2}=1,\quad x_2=\frac{6+4}{2}=5$;

Activitate independentă		**Răspuns**
1. Să se rezolve ecuațiile: **a)** $\|5x+15\|=10$; **b)** $\|3x+8\|=\|2x-7\|$; **c)** $\|x^2-36\|+\|x-6\|=0$		**a)** $S=\{-5;1\}$; **b)** $S=\left\{-\frac{1}{5};-15\right\}$; **c)** $S=\{6\}$

Exercitii rezolvate

1. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţiile:

a) $x+4=6$; **b)** $x-3=7$; **c)** $3x+6=x-10$; **d)** $4(x-2)=x+1$;

e) $\frac{x}{4}-\frac{x+2}{3}=2$; **f)** $\frac{x}{2}+\frac{x+1}{4}+\frac{x+2}{8}=\frac{3x-1}{4}$; **g)** $\frac{2x-4}{2}=\frac{x}{3}$; **h)** $\frac{x+4}{3}=\frac{2x+1}{2}$.

i) $\frac{x}{3\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$;

Rezolvare:

a) $x+4=6\Rightarrow x=6-4=2,\ S=\{2\}$;

b) $x-3=7\Rightarrow x=7+3=10,\ S=\{10\}$;

c) $3x+6=x-10\Rightarrow 3x-x=-10-6\Rightarrow 2x=-16\Rightarrow x=-8,\ S=\{-8\}$;

d) $4(x-2)=x+1\Rightarrow 4x-8=x+1\Rightarrow 4x-x=1+8\Rightarrow 3x=9\Rightarrow x=3,\ S=\{3\}$;

e) $\overset{3)}{\frac{x}{4}}-\overset{4)}{\frac{x+2}{3}}=\overset{12)}{2}\Rightarrow 3x-4x-8=24\Rightarrow -x=32\Rightarrow x=-32,\ S=\{-32\}$;

f) $\frac{x}{2}+\frac{x+1}{4}+\frac{x+2}{8}=\frac{3x-1}{4}\Rightarrow 4x+2x+2+x+2=6x-2\Rightarrow x=-6,\ S=\{-6\}$;

g) Conform proprietăţii fundamentale a proporţiilor rezultă

$(2x-4)\cdot 3=2\cdot x\Rightarrow 6x-12=2x\Rightarrow 6x-2x=12\Rightarrow 4x=12\Rightarrow x=3.\ S=\{3\}$

h) $\frac{x+4}{3}=\frac{2x+1}{2}\Rightarrow 2(x+4)=3(2x+1)\Rightarrow 2x+8=6x+3\Rightarrow -4x=-5\Rightarrow x=\frac{5}{4},\ S=\left\{\frac{5}{4}\right\}$.

i) Conform proprietăţii fundamentale a proporţiilor rezultă $x\cdot\sqrt{6}=6\cdot\sqrt{6}\Rightarrow x=6$.

$S=\{6\}$

2. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţiile:

a) $x^2=16$; **b)** $x^2=7$; **c)** $(x+4)^2=100$; **d)** $(x-3)^2=12$;

e) $(x-5)^2=0$; **f)** $x^2+x=20$; **g)** $x^2+4x=5$; **h)** $x^2+9x=0$;

Rezolvare:

a) Se aplică formula $x^2=a\Rightarrow x=\pm\sqrt{a},\ a\geq 0,\quad x^2=16\Rightarrow x=\pm\sqrt{16}=\pm 4,\ S=\{-4;4\}$;

b) $x^2=7\Rightarrow x=\pm\sqrt{7},\ S=\left\{-\sqrt{7},\sqrt{7}\right\}$;

c) Din formula $x^2=a\Rightarrow x=\pm\sqrt{a},\ a\geq 0$, în cazul nostru avem:

$(x+4)^2=100\Rightarrow x+4=\pm\sqrt{100}\Rightarrow x=-4\pm 10\Rightarrow\ S=\{-14;6\}$

d) Din formula $x^2=a\Rightarrow x=\pm\sqrt{a},\ a\geq 0$, în cazul nostru avem:

$(x-3)^2=12\Rightarrow x-3=\pm\sqrt{12}\Rightarrow x=3\pm 2\sqrt{3}\ \ S=\left\{3-2\sqrt{3};3+2\sqrt{3}\right\}$.

e) $(x-5)^2=0\Rightarrow x-5=0\Rightarrow x=5,\ S=\{5\}$;

f) $x^2+x=20\Rightarrow x(x+1)=4\cdot 5\Rightarrow x=4,$ *sau* $x(x+1)=(-5)\cdot(-4)\Rightarrow x=-5,\ S=\{-5;4\}$;

g) $x^2+4x=5\Rightarrow x(x+4)=5\Rightarrow x\in\{-5;1\}$;

h) $x^2+9x=0\Rightarrow x(x+9)=0\Rightarrow x\in\{-9;0\}$.

3. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţiile:

a) $|x|=7$; **b)** $|x|=-5$; **c)** $|x-4|=6$; **d)** $|3x-9|=12$;

e) $|2x+1|=3$; **f)** $|x+6|=|2x-1|$; **g)** $|2x+4|=|x-3|$; **h)** $\sqrt{(x-4)^2}=6$.

Rezolvare:

a) Din formula $|x|=a\Rightarrow x=\pm a,\ (a\geq 0),\ |x|=7\Rightarrow x=\pm 7,\ S=\{-7;7\}$;

b) $|x|=-5\Rightarrow x\in\varnothing$;

c) $|x-4|=6\Rightarrow x-4=\pm 6\Rightarrow x\in\{-2;10\}$;

d) $|3x-9|=12\Rightarrow 3x-9=\pm 12\Rightarrow\begin{cases}3x-9=-12\Rightarrow 3x=-3\Rightarrow x=-1\\3x-9=12\Rightarrow 3x=21\Rightarrow x=7\end{cases}$;

e) Din formula $|x|=a\Rightarrow x=\pm a,\ (a\geq 0)$, rezultă $|2x+1|=3\Rightarrow 2x+1=\pm 3\Rightarrow x\in\{-2,1\}$;

f) Din formula $|x|=|y|\Rightarrow x=\pm y$, rezultă

$|x+6|=|2x-1|\Rightarrow x+6=\pm(2x-1)\Rightarrow x\in\left\{-\frac{5}{7},7\right\}$;

g) $|2x+4|=|x-3|\Rightarrow 2x+4=\pm(x-3)\Rightarrow x\in\left\{-7;-\frac{1}{3}\right\}$;

h) $\sqrt{(x-4)^2}=6\Rightarrow|x-4|=6\Rightarrow x-4=\pm 6\Rightarrow x\in\{-2;10\}$.

4. Să se rezolve ecuațiile: a) $|2x-2|+|x+3|=7$; **b)** $|x-6|+|x+1|=5$.

Rezolvare: a) Se explicitează fiecare modul , astfel, $|2x-2|=\begin{cases}2x-2,\ 2x-2\geq 0,\ x\geq 1\\-2x+2,\ 2x-2\leq 0,\ x\leq 1\end{cases}$,

$|x+3|=\begin{cases}x+3,\ x+3\geq 0,\ x\geq -3\\-x-3,\ x+3\leq 0,\ x\leq -3\end{cases}$.

x	$-\infty$	**-3**	**1**	$-\infty$
$\|2x-2\|$	-2x+2	-2x+2	**0**	2x-2
$\|x+3\|$	-x-3	**0** x+3		x+3

Pentru $x\in(-\infty;-3)$, ecuația dată devine -2x+2-x-3=7. Rezultă, $x=-\frac{8}{3}\notin(-\infty;-3)$.

Pentru $x\in[-3;1)$, ecuația dată devine -2x+2 +x +3=7. Rezultă, $x=-2$.

Pentru $x\in[1;\infty)$, ecuația dată devine 2x-2 +x+3=7. Rezultă, $x=2$.

Aşadar, $S=\{-2;2\}$.

b) După explicitarea modulelor se obţine: Pentru $x\in(-\infty;-1]\Rightarrow -2x+3=5\Rightarrow x=-1$.

Pentru $x\in[4;\infty)\Rightarrow 2x-3=5\Rightarrow x=4$. Aşadar, $S=\{-1;4\}$

5. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\sqrt{6-4\sqrt{2}}+(1+\sqrt{2})^{-2}+|x-5\sqrt{2}|=6$.

Rezolvare:

Ecuaţia dată este echivalentă cu

$|2-\sqrt{2}|+\frac{1}{3+2\sqrt{2}}+|x-5\sqrt{2}|=6\Rightarrow 2-\sqrt{2}+3-2\sqrt{2}+|x-5\sqrt{2}|=6\Rightarrow$

$|x-5\sqrt{2}|=1+3\sqrt{2}\Rightarrow x-5\sqrt{2}=\pm(1+3\sqrt{2})\Rightarrow x\in\{-1+2\sqrt{2},1+8\sqrt{2}\}$.

Exercitii propuse

1. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $4x+6=26$; b) $5x-17=8$; c) $4x+2=x-13$; d) $3(x-4)=x+2$;

e) $\frac{x}{6}-\frac{x-5}{2}=1$; f) $\frac{x}{9}+\frac{2x-1}{3}+\frac{x-2}{2}=\frac{2x-1}{6}$; g) $\frac{x+3}{5}=\frac{x-2}{3}$; h) $\frac{x+4}{x+1}=\frac{x-2}{x-3}$

2. Să se arate ca urmatoarele ecuații sunt echivalente:

a) $x+8=13$ *si* $\frac{x}{2}-\frac{5}{3}=\frac{5}{6}$ *b)* $x:\frac{15}{2}=\frac{16}{5}$ *si* $\frac{3}{4}x+\frac{5}{2}=\frac{2}{3}x+4\frac{1}{2}$

3. Să se rezolve în Q_+, ecuațiile:

a) $x+\frac{2}{7}=\frac{1}{3}$ *b)* $x-2\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$ *c)* $2\frac{7}{9}-x=\frac{1}{3}$ *d)* $4x=\frac{12}{18}$

e) $\frac{3}{8}\cdot x=\frac{9}{16}$ *f)* $x:\frac{5}{3}=\frac{75}{6}$ *g)* $\frac{x}{6}=\frac{5}{10}$ *h)* $\frac{x-3}{4}=5$

i) $\frac{3x+2}{3}=\frac{2x+1}{4}$ *j)* $\frac{x+5}{4}=\frac{x-3}{3}$ *k)* $x+\frac{5}{6}=\frac{2}{3}+x$ *l)* $\frac{3}{2}x-\frac{2}{10}=\frac{x}{5}$

m) $\frac{4}{3}x+\frac{2}{9}=\frac{1}{2}x+\frac{7}{9}$ *n)* $2{,}15+1{,}2\cdot x=6{,}4$ *o)* $x\cdot 1{,}3=1{,}69$ *p)* $1{,}44+x\cdot 2{,}5=3{,}69$

4. Să se rezolve ecuatiile , în Q_+:

a) $0{,}(3)\cdot(x-2)=\frac{1}{6}$ *b)* $0{,}(15)\cdot\left(x+\frac{2}{3}\right)=\frac{10}{11}$ *c)* $\frac{1}{8}\left[x-0{,}3(6)\right]=\frac{1}{15}$

d) $0{,}(7)+2x=x+4$ *e)* $5\frac{3}{4}x+1{,}25=3(x-8)$ *f)* $\frac{1}{3}\left(x+\frac{2}{3}\right)=\frac{5}{12}$

g) $7x+4{,}(8)=x+5{,}(5)$ *h)* $6(x+2)\cdot 3\frac{1}{4}=x+54\frac{1}{2}$

5. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $x^2=-16$; b) $x^2=81$; c) $x^2=12$; d) $(x-8)^2=0$;

e) $(x-5)^2=100$; f) $x^2+x=56$; g) $x^2-2x=8$; h) $x^2+5x=24$;

6. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $|x|=8$; b) $|x|=12$; c) $|x|=-4$; d) $|x|=-7$;

e) $|x+3|=6$; f) $|2x-8|=10$; g) $|5x+30|=5$; h) $|4x+2|=18$;

i) $|3x-2|=-5$; j) $|2x+1|=3$; k) $|x^2+1|=-2$;

7. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $|x+6|=0$; b) $|6x-12|=0$; c) $|x^2-9|=0$;

d) $|x^2-25|=0$; e) $|x^2-6x+8|=0$; f) $|x^2-7x+10|=0$;

g) $|x+3|+|y-2|=0$; h) $|4x+8|+|y-5|=0$; i) $|2x-16|+|3y+9|=0$;

j) $|x^2-4|+|2y-4|=0$; k) $|(4x-2)\cdot(y+3)|=0$; l) $|(5x+10)\cdot(y-4)|=0$;

m) $|x+3|+|2x^2-12|=0$; n) $|x^2-25|+|x-5|=0$; o)

$|4x^2-4x+1|+|y^2-10y+25|=0$;

p) $\sqrt{(x-4)^2}+|x^2-16|=0$; q) $\sqrt{(x+5)^2}+\sqrt{(y-2)^2}=0$; r) $(2x+6)^2+|x^2-9|=0$;

s) $\sqrt{x^2-8x+16}+|y+3|=0$; t) $x^2-10x+25+|y+6|=0$; u) $x^2+20x+100+\sqrt{x^2-100}=0$;

8. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $|5x-3|=|2x+9|$; b) $|2x-6|=|x+4|$;

c) $|3x-1|=|4x+3|$; d) $|x^2+x-4|=|x^2+3|$;

e) $|x^2+3x-8|=|x^2+x+2|$; f) $|2x+2|=x-3$;

g) $|5x-6|=x+3$; h) $|x^2+x-2|=x-1$;

i) $|x^2+x-6|=x+3$; j) $|(x+5)(x-2)-(x-1)^2|=4$;

k) $|(2-x)(2+x)+(2-x)^2|=3$; l) $|(x-2)^3-(x+2)^3|=2$;

9. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $(x-3)\cdot(x+3)=16$; b) $(x-4)\cdot(x+4)=9$;

c) $(5-x)\cdot(5+x)=9$; d) $(x-4)\cdot(x+3)-(x+5)\cdot(x+1)=0$;

e) $(x+1)^2-(x-3)^2=4$; f) $(x+4)^2+(x-2)^2=2(x-3)\cdot(x+3)$;

g) $(x-3)^3-(x+3)^3=18x\cdot(4-x)$;

Știați că ... ?

În sec. 3, matematicianul grec din Alexandria, **Diofant** a renunțat la reprezentarea geometrică intuitivă a mărimilor numerice prin segmente sau arii folosind notațiile literare.

Prin opera sa „Arithmetika" este întemeietorul algebrei, relatând metode de rezolvare a ecuațiilor algebrice de ordinul 1 și 2, precum și folosirea simbolurilor pentru necunoscute, a folosit reguli de calcul algebric abstract precum și tipuri de ecuații care astăzi îi poartă numele, ecuații diofantice. Se pare că această operă a avut în original 13 cărți, din care au rămas doar 7. ([6], p.14)

1.6 Aproximarea numerelor reale

1. Aproximarea numerelor reale

Exemplu: Să se aproximeze prin lipsă respectiv prin adaos numărul $\sqrt{17}$.

Rezolvare: $\sqrt{17}=4,12310.....$.

Aproximarea se poate face la ordinul zecimilor, sutimilor, miimilor, etc.

La ordinul	Aproximare prin lipsă	Aproximare prin adaos
Zecimilor	4,1	4,2
Sutimilor	4,12	4,13
Miimilor	4,123	4,124

2. Rotunjirea numerelor reale

Exemplu: Să se rotunjească la ordinul zecimilor, sutimilor, miimilor numărul $\sqrt{21}$.

Rezolvare: $\sqrt{21} = 4,5825.....$, atunci,

Rotunjire la ordinul		
Zecimilor	4,6	Deoarece $8 \rangle 5$
Sutimilor	4,58	Deoarece $2 \langle 5$
Miimilor	4,583	Deoarece $5 \geq 5$

3. Partea întreagă a unui număr real

Definiţie: Partea întreagă a unui număr real este cel mai mare număr întreg mai mic sau egal cu numărul dat. $[x] \leq x \langle [x]+1, \forall x \in \mathbb{R}$

$[x] \in \mathbb{Z}$ şi se numeşte partea întreagă a lui x.

$\{x\} \in [0,1)$ şi se numeşte partea fracţionară a lui x.

$x = [x] + \{x\}, \forall x \in \mathbb{R}.$ $\quad \{x\} = x - [x], \forall x \in \mathbb{R}.$

Exemple:

$2,73 = 2 + 0,73 \Rightarrow [2,73] = 2, \ \{2,73\} = 0,73.$

$-3,48 = -4 + 0,52 \Rightarrow [-3,48] = -4, \ \{-3,48\} = 0,52.$

Proprietăţi: Dacă $x, y \in \mathbb{R}$, atunci:

a) $x - 1 < [x] \leq x$;

b) $[x+y] \geq [x] + [y]$;

c) $[x+n] = [x] + n, \forall n \in \mathbf{Z}; \{x+n\} = \{x\}, n \in \mathbb{Z}.$

d) $[x] + [-x] = \begin{cases} 0, x \in \mathbf{Z} \\ -1, x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z} \end{cases}$;

e) $\left[\frac{[x]}{n}\right] = \left[\frac{x}{n}\right], \forall n \in \mathbf{N}^*$;

f) $[x] = [y] \Leftrightarrow |x-y| \langle 1$;

g) $[\{x\}] = 0; \ \{[x]\} = 0$;

h) $\{x\} = \{y\} \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$;

i) $[x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \left[x + \frac{2}{n}\right] + \left[x + \frac{3}{n}\right] + ... + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] = [nx], \ \forall n \in \mathbf{N}^*$ (identitatea lui Hermite)

Activitate independentă	**Răspuns**
Se consideră aproximarea numărului $\sqrt{74} = 8, a_1 a_2 a_3 .....$. a) Să se aproximeze prin lipsă cu două zecimale; b) Să se calculeze produsul $P = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot ..... \cdot a_{10}$.	**a)** $\sqrt{7} = 8,60$**;** **b)** $P = 0$**;**

Exercitii rezolvate

1. Să se aproximeze prin lipsă, respectiv prin adaos numărul $\sqrt{21}$.

Rezolvare: $\sqrt{21}=4,5825.....$.

Aproximarea se poate face la ordinul zecimilor, sutimilor, miimilor, etc.

La ordinul	Aproximare prin lipsă	Aproximare prin adaos
Zecimilor	4,5	4,6
Sutimilor	4,58	4,59
Miimilor	4,582	4,583

2. Fie numărul rațional $\frac{13}{6}=2,a_1a_2a_3.....a_n.....$. Calculați suma

$S=a_1+a_2+a_3+...+a_{20}$.

Rezolvare: $\frac{13}{6}=2,1666.....=2,1(6)$. Atunci,

$S=a_1+a_2+a_3+...+a_{20}=1+\underbrace{6+6+6+.....+6}_{19\ de\ 6}=1+19\cdot 6=115.$

3. Fie numărul rațional $\frac{23}{15}=1,a_1a_2a_3.....a_n.....$. Calculați suma

$S=a_1+a_2+a_3+...+a_{100}$.

Rezolvare: $\frac{23}{15}=1,533333.....=1,5(3)$. Atunci,

$S=a_1+a_2+a_3+...+a_{100}=5+\underbrace{3+3+3+.....+3}_{19\ de\ 6}=5+99\cdot 3=302.$

4. Fie numărul rațional $\frac{11}{9}=1,a_1a_2a_3.....a_n.....$. Calculați produsul

$P=a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot ...\cdot a_8$.

Rezolvare: $\frac{11}{9}=1,2222.....$. Atunci, $P=a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot ...\cdot a_8=\underbrace{2\cdot 2\cdot 2\cdot .....\cdot 2}_{8\ de\ 2}=2^8=256$.

5. Se consideră fracția zecimală $\frac{37}{15}=2,a_1a_2a_3.....a_n.....$. Se cere:

a) Să se calculeze suma $S=a_1+a_2+a_3+...+a_{2016}$;

b) Să se calculeze produsul $P=a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot ...\cdot a_{2016}$.

Rezolvare: a) $\frac{37}{15}=2,40666.....$, atunci,

$S=a_1+a_2+a_3+...+a_{2016}=4+0+\underbrace{6+6+6+.....+6}_{2014\ de\ 6}=4+2016\cdot 6=12088$.

b) $P=a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot ...\cdot a_{2016}=4\cdot 0\cdot 6\cdot 6\cdot ....\cdot 6=0$.

6. Fie fracția zecimală infinită $\frac{5}{11}=0,a_1a_2a_3.....a_{2016}.....$. Să se calculeze suma

$S=a_1+a_2+a_3+...+a_{2016}$.

Rezolvare: $\frac{5}{11}=0,454545.....=0,(45)$. $S=4+5+4+5+.....=4\cdot 1008+5\cdot 1008=1072.$

7. Se consideră fracția zecimală infinită $\frac{7}{12}=0,a_1a_2a_3.....a_{2016}.....$ **. Să se determine numărul de elemente ale mulțimii** $A=\{a_1,a_2,a_3,...,\}$**.**

Rezolvare: $\frac{7}{12}=0,58(3)$. $A=\{3;5;8\}\Rightarrow card(A)=3.$

8. Dacă $x^2+y^2=8xy,\ x,y\in\mathbb{R}_+^*$ **atunci, să se calculeze** $\left[\frac{x}{y}\right]$**, unde** $[a]$ **reprezintă partea întreagă a lui a.**

Rezolvare: Metoda I: Din $x^2+y^2=8xy\Big|:y^2\Rightarrow\left(\frac{x}{y}\right)^2-8\left(\frac{x}{y}\right)+1=0$. Notăm pe $\frac{x}{y}$ cu $t\rangle 0$ şi obţinem $t^2-8t+1=0\Rightarrow t=4+\sqrt{15}\Rightarrow t\approx 7,87\Rightarrow\left[\frac{x}{y}\right]=7$.

Metoda a II-a: Cum $(x+y)^2=10xy,\ (x-y)^2=6xy\Rightarrow\frac{x+y}{x-y}=\frac{\sqrt{10xy}}{\sqrt{6xy}}=\sqrt{\frac{10}{6}}=\frac{\sqrt{15}}{3}\Rightarrow$

$3x+3y=\sqrt{15}x-\sqrt{15}y\Rightarrow\frac{x}{y}=-\frac{3+\sqrt{15}}{3-\sqrt{15}}=\frac{24+6\sqrt{15}}{6}=4+\sqrt{15}$ Atunci, $\left[\frac{x}{y}\right]=7$.

Exercitii propuse

1. Să se aproximeze prin lipsă respectiv prin adaos numerele:

a) $1,(342)$; b) $0,12(35)$; c) $\frac{2}{9}$; d) $\frac{1}{7}$; e) $\frac{19}{12}$;

2. Să se aproximeze prin lipsă respectiv prin adaos numerele:

a) $\sqrt{7}$; b) $\sqrt{15}$; c) $\sqrt{37}$;

3. Să se rotunjească numerele:

a) $1,(342)$; b) $0,12(35)$; c) $\frac{2}{9}$; d) $\frac{1}{7}$; e) $\frac{19}{12}$;

4. Să se rotunjească numerele:

a) $\sqrt{29}$; b) $\sqrt{31}$; c) $\sqrt{54}$;

5. Să se determine a 2016-a zecimală a numerelor:

a) $4,(3)$; b) $1,2(5)$; c) $3,(14)$; d) $1,(342)$; e) $0,12(35)$; f) $\frac{2}{9}$; g) $\frac{1}{7}$; h) $\frac{19}{12}$;

6. Să se determine a 2014-a zecimală a numărului $\frac{81}{11}$.

7. Se consideră numărul $\sqrt{41}\approx 6,a_1a_2a_3.....$. Să se calculeze $a_1\cdot a_2\cdot a_3$.

8. Să se aproximeze prin lipsă cu două zecimale:

a) $\sqrt{2}$; b) $3+\sqrt{2}$; c) $3\sqrt{2}$; d) $\sqrt{3}$; e) $\sqrt{74}$;

9. Să se aproximeze prin lipsă cu două zecimale numerele: a) $\frac{176}{15}$; b) $\sqrt{21}$; c) $\frac{2}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}$;

10. Aflați x din proporția $\frac{x}{3\sqrt{2}-4}=\frac{3\sqrt{2}+4}{2\sqrt{2}+3}$ și aproximați-l cu două zecimale prin lipsă.

11. Să se rotunjească la a doua zecimală, numărul $x=1+\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}$.

12. Să se determine partea fracţionară a numărului $A=\frac{7^{2013}+8^{2013}+9^{2013}}{10}$.

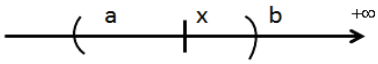
1.7 Intervale și inecuații în $\mathbb{R}$

Fie $a,b\in\mathbb{R}$, $a\langle b$.

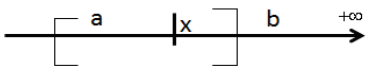
Definiție: Se numește **interval**, orice submulțime infinită de puncte a lui $\mathbb{R}$, având una din formele de mai jos.

1. Intervale mărginite

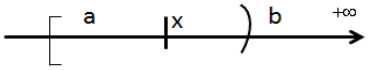
$(a,b)=\{x\in\mathbb{R}\,|\,a\langle x\langle b\}$



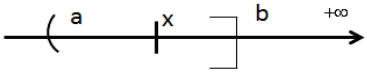
$[a,b]=\{x\in\mathbb{R}\,|\,a\le x\le b\}$



$[a,b)=\{x\in\mathbb{R}\,|\,a\le x\langle b\}$

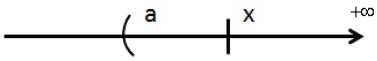


$(a,b]=\{x\in\mathbb{R}\,|\,a\langle x\le b\}$

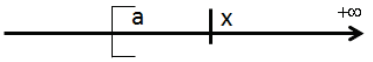


2. Intervale nemărginite

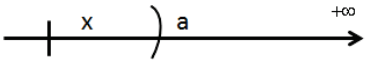
$(a,+\infty)=\{x\in\mathbb{R}\,|\,a\langle x\}$



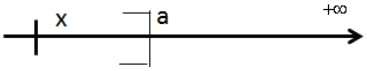
$[a,+\infty)=\{x\in\mathbb{R}\,|\,a\le x\}$



$(-\infty,a)=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\langle a\}$



$(-\infty,a]=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\le a\}$



$(-\infty;\infty)=\mathbb{R}$.

Definiție: Un interval de forma $[-a;a]$ sau $(-a;a)$ se numește interval simetric.

$[-a;a]=\{x\in\mathbb{R}\,|\,-a\le x\le a\}=\{x\in\mathbb{R}\,\|\,|x|\le a\}$. $\quad (-a;a)=\{x\in\mathbb{R}\,|\,-a<x<a\}=\{x\in\mathbb{R}\,\|\,|x|<a\}$.

Operații cu intervale:

Reuniunea intervalelor: $I\cup J=\{x\,|\,x\in I \text{ sau } x\in J\}$,

Intersecția intervalelor: $I\cap J=\{x\,|\,x\in I \text{ si } x\in J\}$,

Diferența intervalelor: $I\setminus J=\{x\,|\,x\in I \text{ sau } x\notin J\}$,

Complementara lui J în raport cu I: $C_I(J)=I\setminus J$.

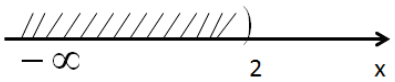
Inecuaţii în $\mathbb{R}$

Inecuaţii de forma $ax+b\le 0$($<$, $\ge$, $>$), $a\in\mathbb{R}^*, b\in\mathbb{R}$.

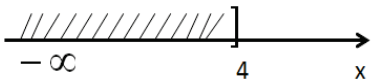
$ax+b\le 0\Rightarrow$	$x\le -\frac{b}{a}$	dacă $a>0$
	$x\ge -\frac{b}{a}$	dacă $a<0$

Exemple:

a) $3x-6<0\Rightarrow 3x<6\,|:3\Rightarrow x<2\Leftrightarrow x\in(-\infty;2)$.



b) $-2x+8\ge 0\Rightarrow -2x\ge -8\,|:(-2)\Rightarrow x\le 4\Leftrightarrow x\in(-\infty;4]$.



Inecuații de forma $|x|\le a$ $(\ge a, <a, >a)$, $a\ge 0$.

$|x|\le a \Rightarrow -a\le x\le a\Leftrightarrow x\in[-a;a]$. $\quad |x|\ge a \Rightarrow x\le -a$ şi $x\ge a \Leftrightarrow x\in(-\infty;-a]\cup[a;\infty)$.

Exemple:

a) $|x|\le 10 \Rightarrow -10\le x\le 10\Leftrightarrow x\in[-10;10]$. **b)** $|x|\ge 5 \Rightarrow x\in(-\infty;-5]\cup[5;\infty)$.

Inecuații de forma $x^2\le a$ $(\ge a, <a, >a)$, $a\ge 0$.

$x^2\le a \Rightarrow x\in[-\sqrt{a};\sqrt{a}]$; $\quad x^2\ge a \Rightarrow x\in(-\infty;-\sqrt{a}]\cup[\sqrt{a};\infty)$.

Exemple:

a) $x^2\le 81 \Rightarrow x\in[-9;9]$; **b)** $x^2\ge 25 \Rightarrow x\in(-\infty;-5]\cup[5;\infty)$.

Mulţimi

Definiție: Se numeşte **mulţime** (în sensul dat de Cantor), o colecţie de obiecte (pe care le numim elementele mulţimii) care sunt diferite şi au aceleaşi proprietăţi.

Exemple: Mulţimea numerelor naturale, mulţimea paginilor unei cărţi, mulţimea elevilor dintr-o clasă, mulţimea frunzelor unui copac.

Un element x aparţine unei mulţimi A şi scriem $x \in A$ dacă x se găşeşte printre elementele lui A;

În caz contrar, spunem că x nu apaţine mulţimii A şi scriem $x \notin A$.

Noţiunile de **mulţime**, **element**, **relaţie de apartenenţă** sunt noţiuni fundamentale adică se pot explica şi li se pot da exemplificări dar nu impun definiţii care să facă apel la alte noţiuni mai simple.

Definiţie: Se numeşte **mulţimea vidă** şi se notează cu $\varnothing$, mulţimea care nu conţine niciun element.

Definiţie: Se numeşte **mulţime finită**, mulţimea care conţine un număr finit de elemente; În caz contrar se numeşte mulţime infinită.

Exemplu de mulţimi finite: Mulţimea elevilor dintr-o clasă, mulţimea caselor dintr-un oraş, mulţimea literelor dintr-un alfabet;

Exemplu de mulţimi infinite: Mulţimea numerelor naturale, a numerelor întregi, a numerelor rationale, a numerelor reale, a funcţiilor, etc.

Definiţie: Se numeşte cardinal al unei mulţimi finite şi scriem card (A), numărul de elemente pe care-l are aceasta.

Exemplu: $A = \{0;1;2;3;4;5;6\} \Rightarrow card(A) = 7$.

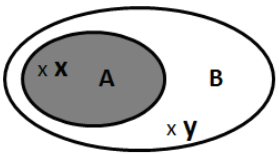
Definiţie: Două **mulţimi** sunt **egale** dacă au aceleaşi elemente.
$A = B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \leftrightarrow x \in B)$.

Exemplu: $\{a,b,c,d\} = \{d,b,a,c\}$.

Proprietăţi ale relaţiei de egalitate a mulţimilor:
Reflexivitate: $A = A$ pentru orice mulţime A;
Simetrie: Dacă $A = B$, atunci $B = A$;
Tranzitivitate: Dacă $A = B$ şi $B = C$, atunci $A = C$.

Definiţie: Fie A şi B mulţimi. Spunem că **A este inclusă în B** (sau că B include pe A) şi scriem $A \subset B$ (sau $B \supset A$) dacă elementele lui A aparţin şi lui B. În acest caz, A se numeşte **submulţime** a lui B.

Notaţii:
$A \subset B$, $A \neq B$, A este inclusă strict în B;
$A \subseteq B$,A este inclusă în B;
$A \not\subset B$, A nu este inclusă în B;



$A \subset B \quad x \in A,\ y \notin A$

$A = B \Leftrightarrow \left(A \subset B \; si \; B \subset A\right)$.

Definiţie: **Mulţimea părţilor unei mulţimi E** este $P(E) = \left\{X \middle| X \subset E\right\}$.

Exemplu: $P(\{1,2,3\}) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

Numărul tuturor submulţimilor unei mulţimi cu n elemente este egal cu 2^n.

Operaţii cu mulţimi

Definiţie: Fie A şi B mulţimi. Se numeşte **pereche ordonată** formată din elementele x şi y , perechea (x, y) în sensul că x este primul element iar y este al doilea element.

Definiţie: Se numeşte **produs cartezian al mulţimilor A şi B** mulţimea notată $A \times B$ în care elementele sunt perechi ordonate de forma (x, y) cu $x \in A$ şi $y \in B$.

$A \times B = \left\{(x; y) \middle| x \in A, y \in B\right\}$

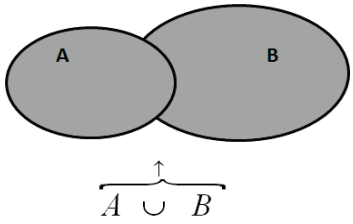
Exemplu: Fie $A = \{1,2\}$ şi $B = \{a,b,c\}$. Atunci produsul cartezian dintre A şi B este

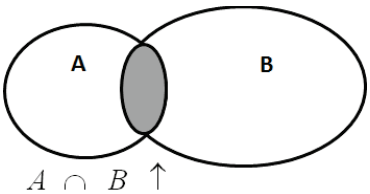
$\{1,2\} \times \{a,b,c\} = \{(1,a),(1,b),(1,c),(2,a),(2,b),(2,c)\}$.

X	a	b	c
1	(1,a)	(1,b)	(1,c)
2	(2,a)	(2,b)	(2,c)

Notaţii: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$, etc.

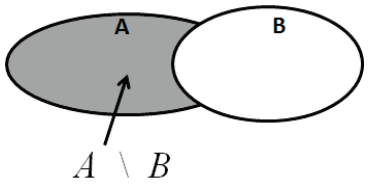
Definiţie: Se numeşte **reuniunea mulţimilor A şi B** , mulţimea tuturor elementelor care aparţin cel puţin uneia din mulţimile A şi B. $A \cup B = \left\{x \middle| x \in A \;\; sau \;\; x \in B\right\}$

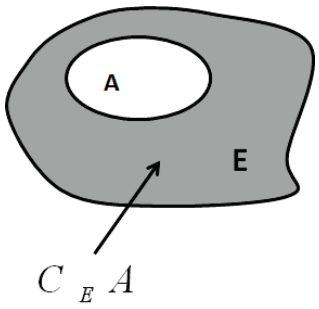




Definiţie: Se numeşte **intersecţia mulţimilor A şi B** , mulţimea elementelor care aparţin şi lui A şi lui B. $A \cap B = \left\{x \middle| x \in A \;\; si \;\; x \in B\right\}$

Definiţie: Se numeşte **diferenţa mulţimilor dintre A şi B**, mulţimea formată din elementele lui A care nu sunt elemente ale lui B. $A \setminus B = \left\{ x \middle| x \in A \quad si \quad x \notin B \right\}$





Definiţie: Fie E o mulţime şi A o submulţime a lui E. Se numeşte **complementara lui A în raport cu E**, submulţimea lui E formată din acele elemente care nu aparţin lui A.

$C_E A = \left\{ x \middle| x \in E \quad si \quad x \notin A \right\}, \qquad C_E A = E \setminus A.$

<u>Proprietăţi ale operaţiilor cu mulţimi</u>

Fie $A, B, C \subset E$.

1. Asociativitatea reuniunii şi a interecţiei: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
2. Comutativitatea reuniunii şi a intersecţiei: $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$.
3. Distributivitatea reuniunii faţă de intersecţie: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
4. Distributivitatea intersecţiei faţă de reuniune: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
5. $A \cup A = A$, $A \cap A = A$.
6. $A \cup \varnothing = A$, $A \cap \varnothing = \varnothing$.
7. Formulele lui De Morgan: $C_E(A \cup B) = C_E A \cap C_E B$, $C_E(A \cap B) = C_E A \cup C_E B$.
8. $C_E(C_E A) = A$.
9. $A \setminus B = C_E(A \cap B)$.

10. Principiul includerii şi excluderii: card(A ∪ B) =card (A) +card(B) –card (A∩B).

Exercitii rezolvate

1. Folosind definiția intervalului de numere reale să se expliciteze relațiile:

a) $x \in (0;1)$; **b)** $x \in (-4;4)$; **c)** $x \in \left(1;\frac{3}{2}\right)$; **d)** $x \in \left[-2;\sqrt{2}\right]$;

e) $x \in \left[-\frac{5}{2};\frac{4}{3}\right)$; **f)** $x \in \left(-3\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$; **g)** $x \notin (-1;1)$; **h)** $x \notin [2;\infty)$; **i)** $x \notin (-\infty;0]$;

Rezolvare:

a) $x \in (0;1) \Leftrightarrow 0 \langle x \langle 1$; b) $x \in (-4;4) \Leftrightarrow -4 \langle x \langle 4$; c) $x \in \left(1;\frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow 1 \langle x \langle \frac{3}{2}$;

d) $x \in \left[-2;\sqrt{2}\right] \Leftrightarrow -2 \le x \le \sqrt{2}$; e) $x \in \left[-\frac{5}{2};\frac{4}{3}\right) \Leftrightarrow -\frac{5}{2} \le x \langle \frac{4}{3}$;

f) $x \in \left(-3\sqrt{2};\sqrt{2}\right) \Leftrightarrow -3\sqrt{2} \langle x \langle \sqrt{2}$; g) $x \notin (-1;1) \Leftrightarrow x \in (-\infty;-1] \cup [1;\infty)$;

h) $x \notin [2;\infty) \Leftrightarrow x \in (-\infty;2)$; i) $x \notin (-\infty;0] \Leftrightarrow x \in (0;\infty)$.

2. Să se stabilească care din relațiile de mai jos sunt adevărate sau false.

a) $4 \in (-1;4]$; **b)** $-2 \in (-3;-1)$; **c)** $-5 \in [-3;-1]$; **d)** $\frac{1}{2} \in \left(0;\frac{5}{4}\right)$; **e)** $2\sqrt{3} \in (3;4)$;

f) $-\sqrt{2} \in \left(-\sqrt{3};0\right]$; **g)** $\frac{1}{4} \in \left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$; **h)** $\sqrt{3} \notin (1,73;1,74]$; **i)** $\frac{\sqrt{2}}{2} \notin \left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)$; **j)** $5 \notin \left(\frac{36}{7};\frac{37}{7}\right]$.

Rezolvare:

a) A; b) A; c) F; d) F; e) A; f) A; g) A; h) F; i) A; j) A;

3. Să se determine mulțimile:

a) $\left[-2,5;\sqrt{2}\right] \cap \mathbb{Z}$; **b)** $\left(-\frac{5}{3};\frac{7}{2}\right) \cap \mathbb{Z}$; **c)** $\left[-4\sqrt{2};-2\sqrt{3}\right] \cap \mathbb{Z}$;

d) $\left[-\sqrt{9};\sqrt{7}\right] \cap \mathbb{N}$; **e)** $\left(-2;\frac{8}{3}\right) \cap \mathbb{N}^*$

Rezolvare:

a) $\left[-2,5;\sqrt{2}\right] \cap \mathbb{Z} = \{-2;-1;0;1\}$; b) $\left(-\frac{5}{3};\frac{7}{2}\right) \cap \mathbb{Z} = \{-1;0;1;2;3\}$;

c) $\left[-4\sqrt{2};-2\sqrt{3}\right] \cap \mathbb{Z} = \{-5;-4\}$; d) $\left[-\sqrt{9};\sqrt{7}\right] \cap \mathbb{N} = \{0;1;2\}$; e) $\left(-2;\frac{8}{3}\right) \cap \mathbb{N}^* = \{1;2\}$.

4. Să se scrie sub formă de interval următoarele mulțimi de numere reale și să se reprezinte geometric pe axa numerelor reale.

a) $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{3}{5} \le x \langle \frac{5}{7}\right\}$; b) $B = \left\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \le 2\right\}$; c) $C = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \langle 25\right\}$;

d) $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \rangle\ 8\right\}$; e) $E = \left\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \ge 3\right\}$;

Rezolvare:

a) $A = \left[\frac{3}{5};\frac{5}{7}\right)$; b) $B = [-2;2]$; c) $C = (-5;5)$;

d) $D = \left(-\infty;-2\sqrt{2}\right) \cup \left(2\sqrt{2};\infty\right)$; e) $E = (-\infty;-3] \cup [3;\infty)$.

5. Să se scrie sub formă de interval următoarele mulțimi de numere reale și să se reprezinte geometric pe axa numerelor reale.

a) $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 2x-4 \ge x-1\right\}$; **b)** $B = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -4 \langle \frac{2x+4}{2} \langle 1\right\}$;

c) $C=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,|5x-2|\le 3\right\}$ **d)** $D=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,|x-4|\rangle\ 2\right\}$; **e)** $E=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,(2x+3)^2\le 25\right\}$

Rezolvare:

a) $2x-4\ge x-1\Rightarrow 2x-x\ge 4-1\Rightarrow x\ge 3\Rightarrow A=[3;\infty)$;

b) $-4\langle\ \dfrac{2x+4}{2}\ \langle\ 1\Rightarrow -8\langle 2x+4\langle 2\Rightarrow -12\langle 2x\langle -2\,\big|:2\Rightarrow -6\langle x\langle -1\Rightarrow B=(-6;-1)$;

c) $|5x-2|\le 3\Rightarrow -3\le 5x-2\le 3\Rightarrow -1\le 5x\le 5\Rightarrow C=\left[-\dfrac{1}{5};1\right]$;

d) $|x-4|\rangle\ 2\Rightarrow 2\langle x-4\langle -2\Rightarrow 6\langle x\langle 2\Rightarrow D=(-\infty;2)\cup(6;\infty)$:

e) $(2x+3)^2\le 25\Rightarrow -5\le 2x+3\le 5\Rightarrow -8\le 2x\le 2\Rightarrow -4\le x\le 1\Rightarrow E=[-4;1]$.

6. Să se determine $x\in\mathbb{R}$ astfel încât să existe intervalele:

a) $I_1=(2x-8;x+2)$; **b)** $I_2=\left[\dfrac{2x+4}{3};\dfrac{x+3}{2}\right]$; **c)** $I_3=[3-x;x+9]$; **d)** $I_4=\left(\dfrac{2x-4}{3};0\right]$.

Rezolvare:

a) Se pune condiția $2x-8\langle x+2\Rightarrow x\langle 10$;

b) Din $\dfrac{2x+4}{3}\ \langle\ \dfrac{x+3}{2}\Rightarrow 4x+8\langle 3x+9\Rightarrow x\langle 1$;

c) $3-x\langle x+9\Rightarrow -2x\langle 6\Rightarrow x\rangle -3$;

d) $\dfrac{2x-4}{3}\langle 0\Rightarrow 2x-4\langle 0\Rightarrow 2x\langle 4\Rightarrow x\langle 2$.

7. Se consideră mulțimile $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,-2\le 3x+4\le 7\right\}$ și $B=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,x^2\le 4\right\}$.

a) Să se scrie mulțimile A și B ca intervale de numere reale;

b) Să se determine mulțimile $A\cup B;A\cap B;A\setminus B;B\setminus A$;

Rezolvare:

a) $-2\le 3x+4\le 7\,\big|-4\Rightarrow -6\le 3x\le 3\,\big|:3\Rightarrow -2\le x\le 1$. Așadar, $A=[-2;1]$;

$x^2\le 4\Rightarrow -2\le x\le 2\Rightarrow B=[-2;2]$;

b) $A\cup B=[-2;2]$; $A\cap B=[-2;1]$; $A\setminus B=\varnothing$; $B\setminus A=(1;2]$;

8. Fie $x,y\in\mathbb{R}$. Dacă $x\in(-1;4),y\in(-2;3)$, să se arate că $x+2y\in[-5;7]$.

Rezolvare:

Din $x\in(-1;4)\Rightarrow -1\langle x\langle 4\Rightarrow -2\langle 2x\langle 8$ și din $y\in(-2;3)\Rightarrow -2\langle x\langle 3\Rightarrow -8\langle 4y\langle 12$. Așadar, $-10\langle 2x+4y\langle 20$.

9. Să se determine următoarele mulțimi:

a) $(-4;3)\cup(-2;1)$; **b)** $\left(-4\sqrt{2};3\sqrt{5}\right)\cup\left(-5\sqrt{2};2\sqrt{5}\right)$; **c)** $\left[\dfrac{7}{3};\dfrac{12}{5}\right]\cup\left[\dfrac{5}{3};\dfrac{11}{5}\right]$;

d) $(-\infty;5]\cup[5;\infty)$; **e)** $(-\infty;7)\cup[5;\infty)$; **f)** $\left(\dfrac{4}{9};1\right)\cup\left(\dfrac{4}{6};2\right)$;

g) $\left(-\sqrt{15};1\right]\cup\left[-\sqrt{11};2\right)$; **h)** $\mathbb{R}\cup(4;\infty)$;

Rezolvare:

a) $(-4;3)$; b) $\left(-5\sqrt{2};3\sqrt{5}\right)$; c) $\left[\dfrac{5}{3};\dfrac{12}{5}\right]$; d) $\mathbb{R}$; e) $\mathbb{R}$; f) $\left(\dfrac{4}{9};2\right)$; g) $\left(-\sqrt{15};2\right)$; h) $\mathbb{R}$;

10. Să se determine următoarele mulțimi:

a) $(-4;5)\cap(0;8)$; **b)** $(-3,2;\ 2]\cap\left(-\frac{1}{2};1\right)$; **c)** $(1;\ 4]\cap[0;3]$; **d)** $\left(-3\sqrt{2};1\right)\cap\left(-\sqrt{3};2\right)$;

e) $(-\infty;3)\cap(1;\infty)$; **f)** $\left(-\infty;\ \frac{3}{2}\right]\cap\left[\frac{2}{3};\infty\right)$; **g)** $\left(-\infty;\ \sqrt{16}\right]\cap\left[3\sqrt{2};\infty\right)$; **h)** $\left[\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right]\cap\left[\frac{2}{3};\frac{4}{5}\right]$;

i) $\left(-\infty;\frac{3}{4}\right)\cap\left(\frac{1}{3};\infty\right)$; **j)** $\left(-\infty;2\sqrt{3}\right)\cap\left(1+\sqrt{3};\infty\right)$;

Rezolvare:

a) $(0;5)$; b) $\left(-\frac{1}{2};1\right)$; c) $[0;3]$; d) $\left(-\sqrt{3};1\right)$; e) $(1;3)$; f) $\left[\frac{2}{3};\frac{3}{2}\right]$;

g) $\varnothing$; h) $\left[\frac{2}{3};\frac{1}{2}\right]$; i) $\left(\frac{1}{3};\frac{3}{4}\right)$; j) $\left(1+\sqrt{3};2\sqrt{3}\right)$.

Exercitii propuse

1. Să se determine mulțimile:

a) $[-1;4)\cap\mathbb{Z}$; b) $[-2;2]\cap\mathbb{N}$; c) $\left[-\sqrt{3};\sqrt{3}\right]\cap\mathbb{Z}$; d) $\left(-\frac{7}{2};\frac{9}{2}\right)\cap\mathbb{N}^*$; e) $\left[-4;\frac{1}{2}\right]\cap\mathbb{N}^*$;

f) $(-3;\pi)\cap\mathbb{Z}$; g) $\left(-\sqrt{25};\frac{2\sqrt{16}}{3}\right)\cap\mathbb{Z}^*$; h) $\left(-2^0;\frac{3^2}{4}\right)\cap\mathbb{N}$; i) $\left[-2\sqrt{3};\sqrt{5}\right]\cap\mathbb{Z}$; j)

$\left(-\frac{1}{9};-\frac{1}{2}\right)\cap\mathbb{Z}$.

2. Să se scrie sub formă de interval următoarele mulțimi de numere reale și să se reprezinte geometric pe axa numerelor reale.

a) $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,-4<x\le 1\right\}$; b) $B=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,\frac{2}{3}\le x<\frac{8}{3}\right\}$; c) $C=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,-\frac{5}{2}\le x\le\frac{3}{2}\right\}$

d) $D=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,-3\sqrt{2}<x<2\sqrt{2}\right\}$; e) $E=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,|x|<4\right\}$; f) $F=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,|x|\le 5\right\}$;

g) $G=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,x^2\le 9\right\}$ h) $H=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,x^2<16\right\}$; i) $I=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,|x|\ge 2\right\}$;

j) $J=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,x^2\ge 25\right\}$.

3. Să se scrie sub formă de interval următoarele mulțimi de numere reale și să se reprezinte geometric pe axa numerelor reale.

a) $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,-3<2x-5\le 9\right\}$; b) $B=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,-2\le\frac{x+4}{3}\le 6\right\}$;

c) $C=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,|2x-4|\le 8\right\}$ d) $D=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,|x+3|<2\right\}$;

e) $E=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,(x+4)^2\le 4\right\}$; f) $F=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,(2x-5)^2\le 9\right\}$;

g) $G=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,|x|\ge 2\right\}$ h) $H=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,|3x-9|\ge 9\right\}$;

i) $I=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,(x+2)^2\rangle 9\right\}$; j) $J=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,|3x+6|\geq 5\right\}$.

4. Să se determine $x\in\mathbb{R}$ astfel încât să existe intervalele:

a) $I_1=(x+4;3)$; b) $I_2=[2x-6;10]$; c) $I_3=\left[\frac{x+3}{4};\frac{3x+5}{2}\right]$;

d) $I_4=[2-x;4+x]$; e) $I_5=\left(0;\frac{3x-6}{2}\right]$.

5. Determinați toate valorile reale ale numărului x dacă $6\in(5x-4;4x+8)$.

6. Se consideră mulțimile $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,|2x+1|\leq 5\right\}$ și $B=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,-1\leq\frac{x+2}{3}\leq 1\right\}$.

a) Să se scrie mulțimile A și B ca intervale de numere reale;
b) Să se determine mulțimile $A\cup B; A\cap B; A\setminus B; B\setminus A$;

7. Se consideră mulțimile $A=\left\{x\in\mathbb{Z}\,\middle|\,-4\ \langle 2x-6\ \langle 4\right\}$ și $B=\left\{x\in\mathbb{Z}\,\middle|\,|x-3|\leq 1\right\}$.

Să se arate că mulțimile A și B sunt egale.

8. Se consideră mulțimile $A=\left\{x\in\mathbb{Z}\,\middle|\,-3\leq 2x-4\leq 3\right\}$ și $B=\left\{x\in\mathbb{Z}\,\middle|\,(x-2)^2\leq 4\right\}$.

a) Să se scrie mulțimile A și B ca intervale de numere reale;
b) Să se determine mulțimile $A\cup B; A\cap B; A\setminus B; B\setminus A$;

9. Se consideră mulțimile $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,|x-3|\leq 1\right\}$ și $B=\left\{x\in\mathbb{N}\,\middle|\,\frac{3+2x}{3}\langle 5\right\}$.

a) Să se scrie mulțimile A și B ca intervale de numere reale;
b) Să se determine mulțimile $A\cup B; A\cap B; A\setminus B; B\setminus A$;

10. Fie $x,y\in\mathbb{R}$. Dacă $x\in[-3;3], y\in[-1;2]$, să se arate că $x+2y\in[-5;7]$.

11. Fie $x,y\in\mathbb{R}$. Dacă $|x|\leq 4,\ y^2\leq 9$, să se arate că $|x+y|\leq 7$.

12. Să se determine următoarele mulțimi:

a) $(-2;6)\cup(-1;3)$; b) $\left(1;2\sqrt{3}\right)\cup\left[0;\sqrt{3}\right]$; c) $\left[\frac{4}{5};2\right]\cup\left[\frac{\sqrt{7}}{2};\frac{10}{3}\right]$; d) $(-\infty;-2]\cup[-3;\infty)$;

e) $\left(-\infty;\sqrt{8}\right)\cup\left[2\sqrt{2};\infty\right)$; f) $[1;4)\cup\left(\sqrt{3};\infty\right)$; g) $[-2;3)\cup\{3\}$; h) $(-\infty;2)\cup[2;\infty)$;

13. Să se determine următoarele mulțimi:

a) $(-3;3)\cap(-2;2)$; b) $[-4;1]\cap(-3;3)$; c) $[2;5)\cap[0;1)$; d) $\left[-5;2\sqrt{2}\right]\cap\left(-3;\sqrt{2}\right)$;

e) $\left(-\infty;\frac{9}{3}\right]\cap\left[\frac{6}{3};\infty\right)$; f) $\left(-\infty;-3\sqrt{3}\right)\cap\left(-4\sqrt{3};\infty\right)$; g) $\left(-\infty;\frac{5}{2}\right)\cap\left(\frac{7}{2};\infty\right)$; h)

$\left[\frac{3}{2};\frac{10}{4}\right]\cap\left[\frac{5}{4};\frac{9}{4}\right]$;

14. Să se determine numărul elementelor mulțimii: $A=\left\{x\in\mathbb{Z}\,\middle|\,|x+3|\leq 1\right\}$.

15. Să se determine mulțimile:

a) $\left(-\infty;\frac{7}{2}\right]\cap\left(\frac{5}{4};+\infty\right)$; b) $(0;6)\setminus[4;7)$; c) $(-5;8)\cup[-2;10]$;

d) $(-3;3)\cap\mathbb{N}^*$; e) $(-3;3)\cap\{-4;-3;-2;-1;0;1\}$;

16. Să se determine mulțimea $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,(1-4x)^2\leq 9\right\}$.

17. Să se determine numărul x astfel încât să existe intervalul $I=\left[\frac{x+2}{3};\frac{2x+5}{4}\right]$.

18. Dacă $\{x;2;6\}\cap\{x\in\mathbb{Z}\,|\,-1\le x\le 3\}=\{1;2\}$, atunci, să se determine x;

19. Determinați elementele mulțimii $A=\left\{x\in\mathbb{Z}\,\middle|\,\frac{6}{4x-1}\in\mathbb{Z}\right\}$.

20. Determinați cardinalul mulțimii $A=\left\{x\in\mathbb{Z}\,\middle|\,\frac{4}{x+3}\in\mathbb{Z}\right\}$.

21. Determinați $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât intervalele $A=[2;6]$, $B=[2a-4;3b+3]$ să fie egale.

22. Determinați $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât $A\cap B=[5;7]$, unde $A=[1;8]$, $B=[4a-3;2b+6]$.

23. Determinați cardinalul mulțimii $(A\setminus B)\cap\mathbb{Z}$, unde $A=(-5;6]$, $B=(-2;8]$.

24. Determinați elementele mulțimii A, unde:

a) $A=\left\{x\in\mathbb{N}\,\middle|\,\frac{5}{x-1}\in\mathbb{N}\right\}$; b) $A=\left\{x\in\mathbb{Z}\,\middle|\,\frac{8}{x+2}\in\mathbb{Z}\right\}$;

c) $A=\left\{x\in\mathbb{Z}\,\middle|\,\frac{x+6}{x+3}\in\mathbb{Z}\right\}$; d) $A=\left\{x\in\mathbb{Z}\,\middle|\,\frac{6x+14}{2x+4}\in\mathbb{Z}\right\}$;

25. Să se rezolve inecuațiile:

a) $6x-4\ge 2$; b) $3x+5\le 26$; c) $4x+6\rangle 3+3x$;

d) $2x+5\ge 10-3x$; e) $5x+9\le 10x-6$; f) $3(2+x)-5(x+4)\ge 0$;

g) $2(x-5)-10\rangle 3(x+4)-6$; h) $5(x-3)\ge 8x+3(x-2)$; i) $\frac{x-3}{2}+\frac{x+4}{3}\ge\frac{1}{4}$;

j) $\frac{2x-1}{2}+\frac{3x-2}{8}+\frac{1}{4}\ge 2$; k) $x^2\le 16$; l) $x^2\le 25$;

m) $2x^2\le 72$; n) $(x-6)^2\le 49$; o) $(x-6)^2\le 49$;

p) $x^2\ge 9$; q) $(x+2)^2\ge 9$; r) $x^2-6x\ge 0$;

s) $x^2-10x\le 0$; t) $x^2+9x\rangle 0$; u) $x^2-5x+4\ge 0$;

v) $x^2-9x+8\ge 0$; x) $x^2-4x-12\langle 0$; y) $\frac{1}{2x+6}\rangle 0$;

z) $\frac{2x+8}{x-2}\ge 0$; t) $\frac{x+3}{x-4}+\frac{2x+1}{x-4}-3\ge 0$; u) $\frac{x^2+4x+4}{x^2-4}\ge 0$;

26. Să se rezolve inecuațiile:

a) $|x|\le 5$; b) $|x|\le 8$; c) $|x+4|\le 9$;

d) $|2x-3|\langle 8$; e) $|3x-6|\langle 10$; f) $\left|\frac{x-3}{2}\right|\le 1$;

g) $\left|\frac{2x-6}{3}\right|\le 2$; h) $\left|\frac{x+2}{3}-4\right|\le 5$; i) $\left|\frac{2x+3}{2}-\frac{x-4}{3}\right|\le 8$;

j) $|x|\ge 2$; k) $|x|\ge 5$; l) $|x|\rangle 7$;

m) $|x-9|\ge 3$; n) $|2x+8|\ge 10$; o) $|5x-10|\rangle 5$;

Ştiaţi că ... ?

În anul 1202 prin lucrarea „ Liber Abaci”, **Leonardo Fibonacci**(1170 - 1250) introduce în Europa sistemul de calcul cu cifre indoarabe. Fiu de negustor, el a călătorit şi a învăţat în Algeria, Egipt, Siria, Bizanţ. O dată întors în Europa, el s-a preocupat de obţinerea a numeroase aplicaţii practice în calculul economic, în geometrie, în calcularea şi împărţirea ariilor. Lucrarea sa a avut un impact deosebit în Europa, căci sistemul zecimal prezentat era foarte util în transformările de măsuri, în schimbul banilor. A fost primul care a introdus în Europa numerele negative fiind interpretate ca datorii. A propus denumirea de ’zero” pentru numărul 0 şi a folosirii liniei de fracţii precum şi a rezolvării de ecuaţii algebrice prin aproximarea soluţiilor acestora.



Tot el a perfecţionat regula de adunare a fracţiilor, prin aducerea la acelaşi numitor comun după calcularea celui mai mic multiplu comun. De asemenea, a dat criteriile de divizibilitate cu 2, 3 5, 9. ([6], p21)

1.8* Inegalităţi în $\mathbb{R}$

1. Inegalităţi uzuale

Fie $a,b\in\mathbb{R}$**. Atunci au loc inegalităţile:**

Dacă $a\le b$ **şi** $c\le d\Rightarrow a+c\le b+d$**;**

Dacă $a\le b\Rightarrow -a\ge -b$**;**

Dacă $0<a\le b\Rightarrow \frac{1}{a}\ge\frac{1}{b}>0$**;**

Dacă $0\le a\le b$ **şi** $0\le c\le d\Rightarrow 0\le a\cdot c\le b\cdot d$**;**

Dacă $a\le b$ **şi** $c>0\Rightarrow a\cdot c\le b\cdot c$ **şi** $\frac{a}{c}\le\frac{b}{c}$**;**

Dacă $a\le b$ **şi** $c<0\Rightarrow a\cdot c\ge b\cdot c$ **şi** $\frac{a}{c}\ge\frac{b}{c}$**;**

Dacă $0<a<b$ **şi** $c>0\Rightarrow m\cdot a=n\cdot b\Rightarrow m>n$ **;**

Dacă $a<b<0\Rightarrow a^2>b^2>0$**;**

Dacă $0<a\le b\Rightarrow \sqrt{a}\ \le\sqrt{b}$**;**

Dacă $a>1\Rightarrow a^m<a^n\Leftrightarrow m<n,\ \forall m,n\in\mathbb{R}$**;**

Dacă $a\in(0;1)\Rightarrow a^m<a^n\Leftrightarrow m>n,\ \forall m,n\in\mathbb{R}$**;**

Dacă $a \neq 1 \Rightarrow a^m = a^n \Leftrightarrow m = n,\ \forall m,n \in \mathbb{R}$;

Dacă $a,b,c,d \rangle 0$ **și** $\frac{a}{c} \leq \frac{b}{c} \Rightarrow a \leq b$;

Dacă $a,b,c,d \rangle 0$ **și** $\frac{a}{b} \leq \frac{a}{c} \Rightarrow b \geq c$;

Dacă $n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n \cdot n} \leq \frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$;

Dacă $a \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{a}} \langle \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{a-1}} = \sqrt{a} - \sqrt{a-1}$ **și** $\frac{1}{2\sqrt{a}} \rangle \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{a+1}} = \sqrt{a+1} - \sqrt{a}$;

2. $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2,\ \forall a,b \rangle 0$; $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leq 2,\ \forall a,b \langle 0$.

Demonstrație: Aducând la același numitor, se obține $a^2 + b^2 \geq 2ab \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$, adevărat, $\forall a,b \rangle 0$. Există egalitate pentru a = b.

Din inegalitatea de mai sus se poate deduce și următoarele inegalități

$a + \frac{1}{a} \geq 2,\ \forall a \rangle 0,\quad a + \frac{1}{a} \leq -2,\ \forall a \langle 0.$

3. Inegalitatea mediilor. $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2},\ \forall a,b \in \mathbb{R}_+.$

Demonstrație: $\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \Leftrightarrow \frac{4a^2b^2}{(a+b)^2} \leq ab \Leftrightarrow (a+b)^2 \geq 4ab \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$,

ceea ce este adevărat. $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$, ceea ce este adevărat.

Există egalitate în relație, pentru a = b.

4. Să se arate că $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac,\ \forall a,b,c \in \mathbb{R}$.

Demonstrație:

Inegalitatea dată este echivalentă cu

$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2\right] \geq 0,\ \forall a,b,c \in \mathbb{R}.$

5. Inegalitatea lui Bernoulli. $(1+a)^n \geq 1 + na,\ \forall n \in \mathbb{N},\ a \geq -1.$

Demonstrație:

Se aplică inegalitatea mediilor pentru n numere.

$\sqrt[n]{(1+na) \cdot \underbrace{1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1}_{n-1 \text{ de } 1}} \leq \frac{1 + na + (n-1) \cdot 1}{n} = 1 + a \Rightarrow (1+a)^n \geq 1 + na,\ \forall n \in \mathbb{N}.$

6. Inegalitatea lui Cauchy – Buniakovski – Schwarz

$\left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right) \cdot \left(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2\right) \geq \left(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n\right)^2,\ \forall a_i, b_i \in \mathbb{R}.$

Demonstrație: Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = (a_1x + b_1)^2 + (a_2x + b_2)^2 + \ldots + (a_nx + b_n)^2 \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

$f(x) = (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2) \cdot x^2 + 2(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)x + (b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2)$.

$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \Delta \leq 0 \Leftrightarrow 4(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 - 4(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2) \leq 0 \Leftrightarrow$

$(a_1^2+a_2^2+....+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+....+b_n^2)\geq(a_1b_1+a_2b_2+.....+a_nb_n)^2$.

7. Inegalitatea lui Minkowski

$\sqrt{(a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2+....+(a_n+b_n)^2}\leq\sqrt{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2}+\sqrt{b_1^2+b_2^2+...+b_n^2}$, $\forall a_i,b_i\in\mathbb{R}$.

Demonstrație: Se ridică la puterea a doua inegalitatea din enunț, de două ori.

$a_1^2+a_2^2+...+a_n^2+b_1^2+b_2^2+...+b_n^2+2(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n)\leq$

$a_1^2+a_2^2+...+a_n^2+b_1^2+b_2^2+...+b_n^2+2\cdot\sqrt{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+...+b_n^2}$

După reducerea termenilor asemenea, rezultă

$4(a_1b_1+...+a_nb_n)^2\leq4(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2)$, ceea ce este adevărat.

8. Să se arate că $|a\cdot\sin x+b\cdot\cos x|\leq\sqrt{a^2+b^2}$.

Demonstrație: Inegalitatea dată se poate deduce din inegalitatea lui Cauchy – Buniakowsky – Schwartz.

$(a^2+b^2)\cdot(\sin^2x+\cos^2x)\geq(a\cdot\sin x+b\cdot\cos x)^2\Rightarrow|a\cdot\sin x+b\cdot\cos x|\leq\sqrt{a^2+b^2}$.

S-a folosit faptul că $\sin^2x+\cos^2x=1,\ \forall x\in\mathbb{R}$. (formula fundamentală a trigonometriei).

9. Inegalitatea lui Cebâșev. $a^a\cdot b^b\cdot c^c\geq(a\cdot b\cdot c)^{\frac{a+b+c}{3}}$, $a,b,c\in\mathbb{R}_+^*$**.**

Demonstrație:

Știm că $\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}\geq1,\ \left(\frac{b}{c}\right)^{b-c}\geq1,\ \left(\frac{c}{a}\right)^{c-a}\geq1,\ \forall a,b,c\in\mathbb{R}_+^*$.

$\left(a^a\cdot b^b\cdot c^c\right)^2\geq a^{b+c}\cdot b^{c+a}\cdot c^{a+b}\left|\cdot a^a\cdot b^b\cdot c^c\right.\Rightarrow\ \left(a^a\cdot b^b\cdot c^c\right)^3\geq a^{a+b+c}\cdot b^{a+b+c}\cdot c^{a+b+c}\Rightarrow$

$a^a\cdot b^b\cdot c^c\geq(a\cdot b\cdot c)^{\frac{a+b+c}{3}}$, $a,b,c\in\mathbb{R}_+^*$**.**

Exercitii rezolvate

1. Să se arate că dacă $a,b\geq0$**, atunci** $\sqrt{a}+\sqrt{b}\leq\sqrt{2(a+b)}$**.**

Demonstrație:

Se ridică la pătrat inegalitatea dată, astfel, din

$\sqrt{a}+\sqrt{b}\leq\sqrt{2(a+b)}\left|()^2\right.\Rightarrow a+2\sqrt{ab}+b\leq2(a+b)\Rightarrow a+b\geq2\sqrt{ab}$, ceea ce este adevărat.

2. Să se arate că $x(x+1)(x+2)(x+3)\geq-1,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Demonstrație:

$x(x+1)(x+2)(x+3)\geq-1\Leftrightarrow(x^2+3x)(x^2+3x+2)\geq-1$. Notăm cu $t=x^2+3x$

$t(t+2)+1\geq0\Leftrightarrow t^2+2t+1\geq0\Leftrightarrow(t+1)^2\geq0,\ \forall t\in\mathbb{R}$.

3. Să se arate că $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(y+\frac{1}{y}\right)^2\geq\frac{25}{2},\ \forall x,y\rangle0$ **și x+y= 0.**

Demonstrație:

Se aplică inegalitatea $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \geq xy$. Cum $x+y=1 \Rightarrow xy \leq \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{xy} \geq 4.$

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(y+\frac{1}{y}\right)^2=(x+y)^2-2xy+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^2-\frac{2}{xy}+4 \geq \frac{25}{2},\ \forall x,y\rangle 0$.

4. Dacă $x,y \in (-1;\infty)$ **atunci** $\frac{x^2+2x+10}{x+1}+\frac{y^2+2y+10}{y+1} \geq 12$.

Demonstrație:

Folosind inegalitatea $a^2+b^2 \geq 2ab$, avem: $(x+1)^2+3^2 \geq 2\cdot 3(x+1)$,

$(y+1)^2+3^2 \geq 2\cdot 3(y+1)$.

Așadar, $\frac{x^2+2x+10}{x+1}+\frac{y^2+2y+10}{y+1} \geq \frac{6(x+1)}{x+1}+\frac{6(y+1)}{y+1}=12$.

5. Să se arate că $\sqrt{x^2+2x+1}+\sqrt{x^2+2x+5}+\sqrt{x^2+2x+10} \rangle\ 6,\ \forall x \in \mathbb{R}.$

Demonstrație:

Membrul stâng este echivalent cu

$\sqrt{(x+1)^2+1}+\sqrt{(x+1)^2+4}+\sqrt{(x+1)^2+9} \rangle\ 1+2+3=6,\ \forall x \in \mathbb{R}.$

6. Să se arate că $(a+b+c)(ab+bc+ca) \geq 9abc,\ \forall a,b,c \in \mathbb{R}_+$

Demonstrație:

Știm că $\begin{cases} a^2+b^2 \geq 2ab \,|\cdot c \\ b^2+c^2 \geq 2bc \,|\cdot a \\ c^2+a^2 \geq 2ac \,|\cdot b \end{cases} \Rightarrow\ c(a^2+b^2)+a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2) \geq 6abc \,|+3abc \Rightarrow$

$ca^2+cb^2+ab^2+ac^2+bc^2+ba^2+3abc \geq 9abc \Leftrightarrow\ (a+b+c)(ab+bc+ac) \geq 9abc$.

7. Să se arate că $a^3+b^3+c^3 \geq 3abc,\ \forall a,b,c \in \mathbb{R}_+.$

Demonstrație:

Știm că $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac) \geq 0$, deorece se cunoaște inegalitatea $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ac,\ \forall a,b,c \in \mathbb{R}$.

8. Să se demonstreze că dacă $a+b+c=1$**, atunci** $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq 9,\ \forall a,b,c \in \mathbb{R}_+.$

Demonstrație:

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{a+b+c}{a}+\frac{a+b+c}{b}+\frac{a+b+c}{c}=1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}+1+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+1$. Grupând convenabil pentru a putea aplica formula $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2,\ \forall a,b \rangle\ 0$, se obține concluzia cerută.

Altfel, dacă se utilizează inegalitatea Cauchy – Buniakovski – Schwarz, inegalitatea dată este evidentă.

9. Să se arate că

$\sqrt{a_1 \cdot a_2}+\sqrt{a_1 \cdot a_3}+.....+\sqrt{a_1 \cdot a_n}+\sqrt{a_2 \cdot a_3}+...+\sqrt{a_{n-1} \cdot a_n} \leq \frac{n-1}{2}(a_1+a_2+...+a_n)$,

$\forall a_i \in \mathbb{R}_+,\ i=\overline{1,n}$

Demonstrație:

Pentru fiecare termen din stînga se aplică inegalitatea mediiilor: $\sqrt{a_i \cdot a_{i+1}} \le \frac{a_i + a_{i+1}}{2}$.

10. Să se arate că $(a+b+c)\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge 9,\ \forall a,b,c\in\mathbb{R}^*$.

Demonstrație: Se folosește inegalitatea Cauchy – Buniakovski – Schwarz:

$$(\sqrt{a}^2+\sqrt{b}^2+\sqrt{c}^2)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{a}^2}+\frac{1}{\sqrt{b}^2}+\frac{1}{\sqrt{c}^2}\right)\ge(1+1+1)^2=9,\ \forall a,b,c\in\mathbb{R}_+^*.$$

Altfel, se pot desface parantezele și se aplică inegalitatea $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge 2,\ \forall a,b\rangle 0$.

$$(a+b+c)\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=1+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+1+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+1=$$

$$1+1+1+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)\ge 9$$

11. Să se arate că $\left(a_1+a_2+a_3+....+a_n\right)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+....+\frac{1}{a_n}\right)\ge n^2,\ \forall a_i\in\mathbb{R}_+^*$.

Demonstrație: Se aplică inegalitatea Cauchy – Buniakovski – Schwarz:

$$\left(\sqrt{a_1}^2+\sqrt{a_2}^2+\sqrt{a_3}^2+....+\sqrt{a_n}^2\right)\left(\frac{1}{\sqrt{a_1}^2}+\frac{1}{\sqrt{a_2}^2}+....+\frac{1}{\sqrt{a_n}^2}\right)\ge(1+1+...+1)^2=n^2,\ \forall a_i\in\mathbb{R}_+^*.$$

Exercitii propuse

1. Să se arate că $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)\ge 9abc,\ \forall a,b,c\in\mathbb{R}_+$.

2. Să se arate că dacă $a,b,c\in\mathbb{R}_+$ cu $ab+bc+ca=1$, atunci $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge 3(a+b+c)$.

3. Să se arate că $\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2}{n}}\rangle\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n},\ \forall a_i\in\mathbb{R}_+$.

4. Să se arate că $a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge 6,\ \forall a,b,c\rangle 0$.

5. Să se arate că $\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}\ge 6,\ \forall a,b,c\ \rangle\ 0$.

6. Să se arate că $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2},\ \forall a,b,c\ \rangle\ 0$.

7. Să se arate că $\frac{a^2+b^2}{a+b}\ge\frac{a+b}{2},\ \forall a,b\in\mathbb{R}$.

8. Să se arate că $\frac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}}\ge 2,\ \forall a\in\mathbb{R}$.

9. Să se arate că $\frac{a^3+b^3}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^3$, $\forall a,b \in \mathbb{R}_+$.

10. Să se arate că $\left(1+\frac{a}{b}\right)^n + \left(1+\frac{b}{a}\right)^n \geq 2^{n-1}$, $a,b \rangle 0$, $n \in \mathbb{N}$.

11. Să se arate că $\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \rangle 2$, $\forall a,b,c \in \mathbb{R}_+^*$.

12. Să se arate că $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$, $\forall a,b,c \in \mathbb{R}_+^*$.

13. Să se arate că $\sqrt{2}+\sqrt{6}+\sqrt{12}+...+\sqrt{n(n+1)} \langle \frac{n(n+2)}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

14. Să se arate că $(a+b)^6 + (b+c)^2 + (c+a)^6 \geq 192a^2b^2c^2, \forall a,b,c \in \mathbb{R}_+$.

15. Dacă $a,b,c \in \mathbb{R}^*$ atunci:

a) $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$; b) $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}$; c) $\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \geq a+b+c$;

16. Să se demonstreze că $\frac{a^{n+1}-1}{n+1} \rangle \frac{a^n-1}{n}$, $a \rangle 1, n \in \mathbb{N}^*$.

17. Fie $a_1, a_2, ..., a_n$ numere reale pozitive astfel încât $a_1 \cdot a_2 \cdot ..... \cdot a_n = 1$. Să se arate că $(1+a_1)\cdot(1+a_2)\cdot.....\cdot(1+a_n) \geq 2^n$.

18. Dacă $a \rangle 0$, $b \rangle 0$ atunci, $\sqrt{\frac{a^2}{b}} + \sqrt{\frac{b^2}{a}} \rangle \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

19. Să se arate că $3(1+a^2+a^4) \rangle (1+a+a^2)^2$, $\forall a \in \mathbb{R}$.

20. Să se arate că $\frac{a+b+c}{d} + \frac{b+c+d}{a} + \frac{c+d+a}{b} + \frac{d+a+b}{c} \geq 12$, $\forall a,b,c,d \in \mathbb{R}_+^*$.

21. Dacă $a+b+c=1$ și $a,b,c \geq -1$, atunci $\sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}+\sqrt{c+1} \leq \sqrt{12}$.

22. Dacă $a+b+c=1$ și $a,b,c \geq -\frac{1}{3}$, atunci $\sqrt{3a+1}+\sqrt{3b+1}+\sqrt{3c+1} \leq \sqrt{18}$.

23. Dacă $a+2b+4c \geq 21$, să se arate că $a^2+b^2+c^2 \geq 21$.

24. Să se arate că dacă $a_1^2 + a_2^2 + ... + a_{10}^2 = 1$, atunci,
$a_1 + a_2 + ... + a_{10} \leq \sqrt{10}$, $\forall a_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1,10}$.

25. Să se arate că $\sqrt{1-a^2} + \sqrt{1-b^2} \leq 2\sqrt{1-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}$.

26. Dacă $a,b,c \in \mathbb{R}_+^*$, atunci , să se arate că $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2}$.

27. Dacă $a,b,c \in \mathbb{R}_+^*$, atunci , să se arate că $\frac{a^3+b^3+c^3}{a^2+b^2+c^2} \geq \frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}$.

28. Să se arate că $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot....\cdot\frac{2n-1}{2n} \langle \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

2. ELEMENTE DE LOGICĂ MATEMATICĂ

2.1 Enunț. Propoziție. Valoare de adevăr

Definiţie: Se numeşte **propoziţie** în sensul logicii matematice un enunţ(o succesiune de semne dintr-un alfabet) căruia i se poate asocia valoarea de adevăr sau fals.

Propoziţiile (în sensul logicii matematice) sunt fie adevărate , fie false şi nu amândouă în acelaşi timp. Se notează de abicei cu literele p, q, r, …etc.

Exemple:

" 3 divide 15" este o propoziţie adevărată, iar " 4 divide 15" este o propoziţie falsă.

Definiţie: Prin **valoarea de adevăr** a unei propoziţii se înţelege calitatea acesteia de a fi adevărată sau falsă. O propoziţie adevărată are valoarea de adevăr 1, iar o propoziţie falsă are valoarea de adevăr 0.

$v(p)=1$	Dacă p este adevărată
$v(p)=0$	Dacă p este falsă

Operaţii logice

Negaţia propoziţiilor

Definiţie: **Negaţia unei propoziţii p** este o nouă propoziţie care este adevărată când p este falsă şi este falsă când p este adevărată.

Notaţia pentru negaţia propoziţiei **p** este **$\neg$ p** (şi se citeste **non p**) iar valoarea de adevăr este **v($\neg$ p)=1-v(p).**

p	**$\neg$ p**
1	**0**
0	**1**

Exemple:

Propoziţia p	Negaţia propoziţiei p
România se află în Europa	România nu se află în Europa
5 divide pe 8	5 nu divide pe 8
Triunghiul are trei laturi	Triunghiul nu are trei laturi

Conjunţia propoziţiilor

Definiţie: **Conjuncţia a două propoziţii p şi q** este o nouă propoziţie adevărată când ambele propoziţii p şi q sunt adevărate şi falsă când cel puţin una din ele este falsă.

Notaţia pentru conjuncţia a două propoziţii este **pΛq şi se citeşte p şi q** iar valoarea de adevăr este **v(pΛq)=v(p)·v(q)**

p	q	p∧q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Exemple:
Propoziţia " $8\rangle 5$ " şi " 12 este divizibil cu 4" este adevărată;
Propoziţia " $6 \le 3$ " şi " 15 este divizibil cu 3" este falsă;

Disjuncţia propoziţiilor

Definiţie: **Disjuncţia a două propoziţii p şi q** este o nouă propoziţie falsă când ambele propoziţii p şi q sunt false şi adevărată când cel puţin una din ele este adevărată.

Notaţia pentru disjuncţia a două propoziţii este **p V q şi se citeşte p sau q** iar valoarea de adevăr este **v(p V q)=v(p)+v(q) - v(p)·v(q)**

p	q	p V q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Exemple:
Propoziţia " $\sqrt{100} = 10$ " şi " **12+5=20** " este adevărată;
Propoziţia " 25 este divizibil cu 3" şi " România se află în America " este falsă;

Implicaţia propoziţiilor

Definiţie: **Implicaţiia propoziţiilor p şi q** este o nouă propoziţie falsă numai când p este adevărată şi q falsă, în rest fiind adevărată indiferent de valoarea lui p şi q.

Notaţia pentru implicaţia a două propoziţii este $p \to q$ şi se citeşte "p implică q", sau, "dacă p, atunci q" iar valoarea de adevăr este $v(p \to q) = 1 - v(p) + v(p) \cdot v(q)$.

p	q	p → q
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Exemple:
Propoziţia " Dacă 7 este mai mic decât 10 atunci 10 este divizibil cu 7" este falsă;
Propoziţia " Dacă triunghiul are 4 laturi atunci pătratul are 3 laturi" este adevărată.

Pornind de la propoziţia $p \to q$ se poate construi:
Reciproca: $q \to p$;
Contrara: $\neg p \to \neg q$;
Contrapoziţia (Contrara reciprocei): $\neg q \to \neg p$.

Echivalenţa propoziţiilor

Definiţie: **Echivalenţa propoziţiilor p şi q** este o nouă propoziţie adevărată când ambele propoziţii au aceeaşi valoare de adevăr. În această situaţie **propoziţiile se numesc echivalente**.

Notaţia pentru implicaţia propoziţiilor este $p \leftrightarrow q$ şi se citeşte " p este echivalent cu q" sau " p dacă şi numai dacă q" iar valoarea de adevăr este egală cu $v(p \leftrightarrow q) = 1 - v(p) - v(q) + 2v(p) \cdot v(q)$.

Echivalenţa propoziţiilor este dată de formula: $p \leftrightarrow q = (p \to q) \wedge (q \to p)$.

p	q	p ↔ q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Exemplu:
Propoziţia " Cireşele sunt albastre dacă şi numai dacă Soarele răsare de la apus" este adevărată.

Definiţie: Se numeşte **tautologie** o expresie compusă din mai multe propoziţii care indiferent de valoarea de adevăr a propoziţiilor componente, valoarea de adevăr a expresiei este **1**.

Formule logice

Legea dublei negaţii: $\neg(\neg p) \leftrightarrow p$.

Legea terţului exclus: Propoziţia $p \vee (\neg p)$ este adevărată întodeauna;

Principiul necontradicţiei: Propoziţia $\neg(p \wedge \neg p)$ este adevărată întodeauna;

Metoda reducerii la absurd: $(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$;

Formula implicaţiei: $(p \to q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$;

Legea negaţiei implicaţiei: $\neg(p \to q) \leftrightarrow (p \wedge \neg q)$

Legile lui De Morgan:

$\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$;

$\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$;

Exercitii rezolvate

1.Să se determine valoarea de adevăr a următoarelor propoziţii:

a) Rezultatul calculului $\sqrt{5^2 + 4^2}$ este 9;

b) Partea întregă a numărului – 7,6 este -8;

c) Numărul $\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}} + \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{6}}{\sqrt{6}}$ este raţional;

d) $a^2+b^2 \geq 2ab,\ \forall a,b \in \mathbb{R}$.

Rezolvare: a) Fals; b) Adevăr; c) Adevăr; d) Adevăr.

2. Să se determine mulțimea de adevăr a următoarelor predicate:

a) p(x): " $3(x-5)-4=2x-9\ , x \in \mathbb{Z}$"; **b) q(x):** " $3x^2-5x+2=0\ , x \in \mathbb{R}$".

Rezolvare: a) $3x-15-4=2x-9 \Rightarrow x=10$. Mulțimea de adevăr este $S=\{10\}$;

b) $x_{1,2}=\frac{5\pm 1}{6} \Rightarrow x_1=\frac{2}{3},\ x_2=1$. Mulțimea de adevăr este $S=\left\{\frac{2}{3},1\right\}$;

3. Să se determine valoarea de adevăr a propoziției " există un număr real x astfel încât

$|x+5|+|x^2+4x-5|=0$ **";**

Rezolvare: Din $|x+5|=0,\ si\ |x^2+4x-5|=0 \Rightarrow x=-5$, propozitia este adevărată.

4. Se consideră propozițiile p(x): " $\forall x \in \mathbb{R}$ *avem* $x^2+x+1 \rangle 0$ **",**

q(x): " $\sqrt{25+(-2)\cdot(-8)} \in \mathbb{N}$".

Să se stabilească valoarea de adevăr a propozițiilor:

$p, q, p \wedge q, p \vee q, p \to q, q \to p, p \leftrightarrow q$

$\overline{p} \wedge \overline{q}, \overline{p} \vee \overline{q}, p \wedge \overline{p}, q \vee \overline{q}$, **unde** $\overline{p}$ **înseamnă negația lui p.**

Rezolvare:

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \to q$	$q \to p$	$p \leftrightarrow q$
1	0	0	1	0	1	0

p	q	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$\overline{p} \vee \overline{q}$	$\overline{p} \wedge \overline{q}$	$p \wedge \overline{p}$	$q \wedge \overline{q}$
1	0	0	1	1	0	0	0

5. Să se verifice echivalența logică $|x-3| \geq 1 \Leftrightarrow \left[x \in (-\infty;2] \vee x \in [4;+\infty)\right]$.

Rezolvare: Din $|x-3| \geq 1 \Rightarrow x-3 \geq 1 \Rightarrow x \geq 4$ sau $x-3 \leq -1 \Rightarrow x \leq 2$. Așadar, echivalența este o propoziție adevărată.

Exercitii propuse

1. Să se determine valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

a) **a**: Rezultatul calculului $\frac{1}{4}-\frac{3}{2}+\frac{1}{8}$ este egal cu $\frac{-9}{8}$;

b) **b**: Numărul $(-2)^3+(-2)^2$ este mai mare decât numărul $(-3)^2+(-3)^3$;

c) **c**: Media aritmetică a numerelor $-8;\ 2;\ 6$ este egală cu 1;

d) **d**: După raționalizare, numărul $\frac{6}{\sqrt{3}}$ este egal cu $2\sqrt{3}$;

e) **e**: Media geometrică a numerelor $2-\sqrt{3}$ și $2+\sqrt{3}$ este egală cu 2;

f) **f**: Numărul 4 este soluție a ecuației $2x-6=x-2$;

g) **g**: $\sqrt{2^2+3^2}=2+3$;

2. Să se determine valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

a) **a**: $|a|\geq 0,\ \forall a\in\mathbb{R}$;

b) **b**: $x^2\geq 0,\ \forall a\in\mathbb{R}$;

c) **c**: $\sqrt{a}\geq 0,\ \forall a\in[0;\infty)$;

d) **d**: $\sqrt{4^2+9^2}=4+3$;

e) **e**: $\frac{1}{\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{a}}{a}$;

f) **f**: $\sqrt{x\cdot y}\geq\frac{x+y}{2},\ \forall x,y\in\mathbb{R}$;

g) **g**: $|1-\sqrt{3}|=1-\sqrt{3}$;

h) **h**: ultima cifră a numărului $6^n,\ n\in\mathbb{N}^*$, este 6.

3. Să se determine valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

a) **a**: $|3-2\cdot 4-8^0|=6$;

b) **b**: $\sqrt{7}\in\mathbb{Q}$;

c) **c**: $2^4\cdot 2^3\cdot 2^5:2^{10}=4$;

d) **d**: $3^9\rangle 25^3$;

e) **e**: $0,1(9)=\frac{1}{5}$;

f) **f**: $\sqrt{(-2)^2\cdot 3^2}=-6$;

g) **g**: $(5-\sqrt{3})^2+(5+\sqrt{3})^2\in\mathbb{N}$;

4. Să se determine valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

a) **a**: Numărul 5 este soluție a ecuației $x^2-25=0$;

b) **b**: Numărul $-2+3\cdot(-4+3)+8$ este egal cu 3;

c) **c**: După aducerea la același numitor , numărul $\frac{2}{3}+\frac{1}{9}-\frac{4}{6}$ este egal cu $\frac{1}{9}$;

d) **d**: $\sqrt{144}+2\cdot\sqrt{81}+\sqrt{100}=5$ este egal cu $2\sqrt{3}$;

e) **e**: $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$ este egal cu $\sqrt{3}-2$;

f) **f**: Pentru ecuația $2x^2-4x-1=0$, discriminantul este $\Delta=24$;

g) **g**: $x^2+x+1\rangle 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$;

h) **h**: $1+2+3+...+10=55$;

i) **i**: Soluția număr natural a ecuației $|4-x|=5$ este 9;

j) **j**: $(x-2)^2+2x=(x-1)^2,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

k) **k**: $\frac{4}{\sqrt{8}-2}$ este egal cu $2\sqrt{2}+2$;

l) **l**: Dacă $|x^2-9|+|x+3|=0$, atunci $x=-3$;

m) **m**: Dacă $(x-2)^2+|x-2|=0$, atunci x=2;

n) **n**: Dacă $3x-12\geq 0$, atunci $x\in[5;\infty)$;

o) **o**: Dacă $2^{x+1}=64$, atunci x = 4;

5. Se consideră propozițiile: **p(x):** "$\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)^2-4\cdot\frac{2}{9}:\frac{16}{81}=-\frac{30}{8}$", **q(x):**

"$\sqrt{18}-\sqrt{72}+\sqrt{128}=5\sqrt{2}$"

Să se determine valoarea de adevăr a propozițiilor: $p,\ q,\ p\vee q,\ p\wedge q,\ p\to q,\ p\leftrightarrow q$.

6. Se consideră propozițiile: **p:** "$3^4\rangle 5^3$", **și q:** "$\sqrt{8}\langle 3$"

Să se determine valoarea de adevăr a propozițiilor: $p,\ q,\ p\vee q,\ p\wedge q,\ p\to q,\ p\leftrightarrow q$.

7. Să se verifice echivalențele logice:

a) $\left[x \in [0;\infty) \wedge x \in (-\infty;2]\right] \Leftrightarrow x \in [0;2]$.

b) $\left[x \in [-2;\infty) \vee x \in (0;\infty)\right] \Leftrightarrow x \in (0;\infty).$;

c) $|x-2| \le 3 \Leftrightarrow x \in [-1;5]$;

d) $|x+2| \ge 4 \Leftrightarrow \left[x \in (-\infty;-6] \vee x \in [2;\infty)\right]$

2. 2 Predicate. Cuantificatori

Definiţie: Se numeşte **predicat** un enunţ care conţine una sau mai multe variabile şi care devine propoziţie pentru orice valoare s-ar da variabilelor.

Exemplu: Enuntul 3x+5=8 este un exemplu de predicat care devine propoziţie adevărată pentru x = 1 şi devine propoziţie falsă pentru x= 2 sau pentru orice altă valoare a variabilei x.

Dacă predicatul conţine două variabile se mai numeşte predicat binar.

Definiţie: Pentru a defini corect un predicat este nevoie de definirea corectă a **mulţimii de definiţie** a predicatului adică mulţimea de unde iau valori variabilele.
Pentru acele valori ale variabilei / variabilelor pentru care predicatul este o propoziţie adevărată se defineşte **mulţimea de adevăr a predicatului**.

Exemplu: Predicatul $"x \in \mathbb{R}, 3x+5=8"$ are mulţimea de adevăr $\{1\}$ şi mulţimea de definiţie $\mathbb{R}$.

Definiţie: Fie p(x) un predicat în funcţie de variabila x şi D mulţimea de definiţie . În propoziţia $"\exists x \in D, p(x)"$ cuantificatorul " **există**", notat cu "$\exists$" se numeşte **cuantificator existential** iar propoziţia se numeşte existenţială şi este adevărată când există cel puţin un element x_0 din D astfel încât $p(x_0)$ să fie adevărată.

Exemplu: Propoziţia $"\exists x \in \mathbb{N}, 3x-4\langle 0"$ este adevărată deoarece există numărul 1 sau 0 pentru care $3x-4\langle 0$.

Definiţie: Fie p(x) un predicat în funcţie de variabila x şi D mulţimea de definiţie . În propoziţia $"\forall x \in D, p(x)"$ cuantificatorul " **oricare**", notat cu "$\forall$" se numeşte **cuantificator universal** iar propoziţia se numeşte universală şi este adevărată pentru orice valoare a lui x din D şi este falsă dacă există cel puţin un element x_0 din D astfel încât $p(x_0)$ să fie falsă.

Exemplu: Propoziţia $"\forall x \in \mathbb{N}, x(x+1) \vdots 2"$ este adevărată deoarece pentru orice valoare număr natural al lui x se obţine un număr par care este divizibil cu 2.

Reguli de negaţie

Negaţia propoziţiei existenţiale: $\neg\left(\exists x \in D, p(x)\right) \leftrightarrow \left(\forall x \in D, \neg p(x)\right)$.

Negaţia propoziţiei universale: $\neg\left(\forall x \in D, p(x)\right) \leftrightarrow \left(\exists x \in D, \neg p(x)\right)$.

Definiţie: Două **predicate** $p(x),\ q(x)$ se numesc **echivalente** şi scriem $p(x)\Leftrightarrow q(x)$ dacă propoziţia $"(\forall x)(p(x)\leftrightarrow q(x))"$ este adevărată.

Exercitii rezolvate

1. Fie predicatele p(x,y,z): $"\ x+y+z\geq 0"$**, q(x,y,z):** $"\ x^3+y^3+z^3\geq 3xyz"$**. Să se arate că** $p(x,y,z)\Rightarrow q(x,y,z)$**.**

Rezolvare: Din

$x^3+y^3+z^3-3xyz=\underbrace{(x+y+z)}_{\geq 0}\underbrace{(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)}_{\geq 0}\Rightarrow\ x^3+y^3+z^3\geq 3xyz$.

2. Pe mulţimea $\mathbb{R}$ **se consideră predicatele: p(x): "**$4x-8\geq 0$**", q(x): "**$|x-5|\leq 1$**". Să se determine mulţmea de adevăr a predicatelor: a) p(x), q(x); b) non p(x), non q(x).**

Rezolvare: a) Cum $4x-8\geq 0\Rightarrow 4x\geq 8\Rightarrow x\geq 2$; Aşadar, mulţimea de adevăr a predicatului p(x) este $A=[2;\infty)$;

Cum $|x-5|\leq 1\Rightarrow -1\leq x-5\leq 1\Rightarrow 4\leq x\leq 6\Rightarrow x\in[4;6]$, aşadar, mulţimea de adevăr este $B=[4;6]$.

b) Pentru *non* $p(x)$ se calculează $C_{\mathbb{R}}A=(-\infty;2)$ şi pentru *non* $q(x)$ se calculează $C_{\mathbb{R}}B=(-\infty;4)\cup(6;\infty)$.

3. Fie predicatele p(x): „x divide 5, $x\in\mathbb{N}$**", q(x) : „**$x\leq 5,\ x\in\mathbb{N}$**. „ Se consideră mulţimile** $A=\{x|p(x)\},\ B=\{x|q(x)\}$**. Să se calculeze:** $A\cup B,\ A\cap B,\ A\setminus B,\ B\setminus A$**.**

Rezolvare: $x|5\Rightarrow A=\{1;5\}$ şi $x\leq 5\Rightarrow B=\{0;1;2;3;4;5\}$.

Atunci, $A\cup B=\{0;1;2;3;4;5\},\ A\cap B=\{1;5\},\ A\setminus B=\{\varnothing\},\ B\setminus A=\{\varnothing\}$.

4. Se consideră predicatele p(x): "$-5\leq 3x-2\leq 7,\ x\in\mathbb{Z}$**", q(x): "**$|x-2|\leq 4,\ x\in\mathbb{Z}$**" şi mulţimile** $A=\{x|p(x)\},\ B=\{x|q(x)\}$**. Să se calculeze:** $A\cup B,\ A\cap B,\ A\setminus B,\ B\setminus A$**.**

Rezolvare: $-5\leq 3x-2\leq 7\Rightarrow -3\leq 3x\leq 9\Rightarrow -1\leq x\leq 3\Rightarrow A=\{-1;0;1;2;3\}$;

$|x-2|\leq 4\Rightarrow -4\leq x-2\leq 4\Rightarrow -2\leq x\leq 6\Rightarrow B=\{-2;-1;0;1;2;3;4;5;6\}$. Atunci,

$A\cup B=B,\ A\cap B=A,\ A\setminus B=\{\varnothing\},\ B\setminus A=\{-2;-1;4;5;6\}$.

5. Se consideră predicatele p(x): "$\frac{x+3}{x+1}\in\mathbb{N}$**", q(x): "**$\frac{3x+5}{x+1}\in\mathbb{N}$**" , unde x este număr natural şi mulţimile** $A=\{x|p(x)\},\ B=\{x|q(x)\}$**. Să se arate că A=B.**

Rezolvare: $\frac{x+3}{x+1}=\frac{x+1+2}{x+1}=1+\frac{2}{x+1}\in\mathbb{N}\Leftrightarrow x+1|2\Rightarrow x+1\in D_2=\{1;2\}$. Aşadar, $A=\{0;1\}$.

Analog, $\frac{3x+5}{x+1}=\frac{3(x+1)+2}{x+1}=3+\frac{2}{x+1}\in\mathbb{N}\Leftrightarrow x+1|2\Rightarrow x+1\in\{1;2\}\Rightarrow B=\{0;1\}$. Deci, A = B.

6. Fie mulţimea $A=\{x\in\mathbb{Z}|x=5k+1,\ k\in\mathbb{Z}\}$.

a) Să se determine valoarea de adevăr a propoziţiilor: $8\in A;\ 2016\in A$**.**

b) Verificați dacă $(\forall x)(\forall y)\left[(x \in A \wedge y \in A) \to x+y \in A\right]$**.**

Rezolvare: a) $8 \in A \Leftrightarrow 5k+1=8 \Rightarrow k=\frac{7}{5} \notin \mathbb{Z}$, așadar, propoziția este falsă;

$2016 \in A \Leftrightarrow 2016=5k+1 \Rightarrow 5k=2015 \Rightarrow k=403 \in \mathbb{Z}$, așadar, propoziția este adevărată.

b) Propoziția este falsă. Vom da un contraexemplu: $6 \in A$; $2016 \in A \not\Rightarrow 6+2016 \notin A$.

$6+2016=2022=5k+1 \Rightarrow k=\frac{2021}{5} \notin \mathbb{Z}$.

Exercitii propuse

1. Fie predicatul p(x): " restul împărțirii lui x prin 4 este mai mic decât 3 ".

a) Să se determine valoarea de adevăr pentru p(22), p(187);

b) Să se determine valoarea de adevăr pentru propozițiile:

$p(17) \wedge p(23)$; $p(30) \to p(60)$; $p(25) \vee p(48)$; $p(45) \leftrightarrow p(83)$;

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=4x+8$. Să se arate că propoziția $(\forall x)(\forall y)(f(x)=f(y) \Rightarrow x=y)$ este adevărată.

3. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=x^2$. Să se arate că propoziția $(\forall x)(\forall y)(f(x)=f(y) \Rightarrow x=y)$ este falsă.

4. Fie predicatele p(x,y): "$x \geq 2$, $y \geq 2$", q(x,y): "$xy-2x-2y+4 \geq 0$" . Să se arate că $p(x,y) \to q(x,y)$.

5. Se consideră predicatele p(x,y): "$\sqrt{xy}=\frac{x+y}{2}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}_+$.", q(x,y): "$x=y$" . Să se arate că $p(x,y) \leftrightarrow q(x,y)$**.**

6. Se consideră predicatele p(x,y,z): "$x^2+y^2+z^2=xy+xz+yz$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$.", q(x,y,z): "$x=y=z$" . Să se arate că $p(x,y,z) \leftrightarrow q(x,y,z)$.

2.3 Tipuri de raţionament. Metoda inducţiei matematice

În logica matematică propoziţiile pot fi clasificate în propoziţii generale (cele care au un caracter general) şi în propoziţii particulare (cele care au un caracter particular).

Exemplu de propoziţii generale:

" Orice număr par este divizibil cu 2", " Produsul oricăror două numere naturale consecutive este divizibil cu 2",

$"1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Exemplu de propoziţii particulare:

" Numărul 16 este divizibil cu 2", " $1+2+3+4+5+6+7+8=\frac{8(8+1)}{2}=36$".

Definiţie: Procedeul prin care din propoziţii generale se obţin propoziţii particulare se numeşte **deducţie** – aceasta fiind una din trăsăturile caracteristice ale matematicii şi anume construcţia deductivă a teoriei.
Procedeul prin care de la propoziţii particulare se ajunge la o propoziţie generală se numeşte **inducţie**.

Exemplu: $1=1^2;\ 1+3=2^2;\ 1+3+5=3^2;....;1+3+5+...+2n-1=n^2$.

Inducţia este de două feluri:

Inducţia completă presupune să se studieze toate cazurile particulare;

Inducţia incompletă presupune să se verifice valoarea de adevăr a câtorva propoziţii particulare după care se trece la enunţul general.

Metoda inducţiei matematice (pentru o mulţime infinită de cazuri) constă în demonstrarea faptului că, dacă o propoziţie este adevărată într-un caz, atunci ea se dovedeşte a fi adevărată şi în cazul care succede acesteia.

Principiul inducţiei se referă la o propoziţie P(n), care depinde de un număr natural n, astfel că dacă P(n) este adevărată pentru n=0 şi dacă presupunem că ea este adevărată şi pentru numărul natural n= k+1, atunci P(n) este adevărată pentru orice număr natural.

Metoda inducţie matematice

Fie P(n) o propoziţie care depinde de numărul natural $n \geq m,\ m \in \mathbb{N}$, fixat.

Demonstraţia prin inducţie matematică a propoziţiei "$\forall n \geq m, P(n)$" are două etape:

Etapa de verificare: Se verifică faptul că P(m) este adevărată;

Etapa de demonstraţie: Se demonstrează implicaţia $P(k) \Rightarrow P(k+1),\ k \in \mathbb{N}, k \geq m$, adică , dacă presupunem că P(k) este adevărată, se demonstrează că P(k+1) este adevărată. Atunci, P(n) este adevărată pentru orice număr natural, $n \geq m$.

Exemplu: Să se demonstreze prin inducţie matematică că $1+3+5+...+2n-1=n^2, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Rezolvare:

Etapa de verificare: P(1)= 1= 1^2. (Adevărată).

Etapa de demonstraţie: Presupunem că P(n) este adevărată pentru n = k şi să demonstrăm că şi P(k+1) este adevărată.

Presupunem că P(k): " $1+3+5+...+2k-1=k^2,\ k \in \mathbb{N}.$" este adevărată şi să demonstrăm că şi

P(k+1) : " $1+3+5+.....2k-1+2k+1=(k+1)^2$" este adevărată.

P(k+1): $\underbrace{1+3+5+...+2k-1}_{P(k)}+2k+1=k^2+2k+1=(k+1)^2$,ceea ce s-a demonstrat.

Rezultă că P(n) este adevărată pentru orice număr natural n.

Activitate independentă		**Răspuns**
Să se demonstreze prin inducţie matematică suma $1^3+2^3+3^3+.....+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$;		

1. Să se calculeze sumele:

a). $S=1+2+3+...+n$, $n\in\mathbb{N}^*$.

b). $S=1+3+5+...+2n-1$, $n\in\mathbb{N}^*$.

c). $S=2+4+6+...+2n$, $n\in\mathbb{N}^*$.

d). $S=1^2+2^2+3^2+...+n^2$, $n\in\mathbb{N}^*$.

e). $S=1^3+2^3+3^3+...+n^3$, $n\in\mathbb{N}^*$.

f). $S=1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+...+n\cdot(n+1)$, $n\in\mathbb{N}^*$.

g). $S=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+.....+\frac{1}{n\cdot(n+1)}$, $n\in\mathbb{N}^*$.

h). $S=1+x+x^2+x^3+...+x^n$, $n\in\mathbb{N}$.

i). $S=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+...+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$, $n\in\mathbb{N}^*$.

Rezolvare:

1). a). Dacă $S=1+2+3+...+n$, atunci, tot $S=n+n-1+...+3+2+1$. Adunând cele două relații rezultă $2S=(n+1)\cdot n\Rightarrow S=\frac{n(n+1)}{2}$.

Altfel, se poate pleca de la dezvoltarea $(k+1)^2=k^2+2k+1$ și se dă valori lui k de la 1 la n.

b) Dacă $S=1+3+5+...+2n-3+2n-1$, atunci, tot $S=2n-1+2n-3+...+3+1$. Adunând cele două relații rezultă $2S=2n\cdot n\Rightarrow S=n^2$.

c). $S=2+4+6+...+2n=2(1+2+3+...+n)=2\cdot\frac{n(n+1)}{2}=n(n+1)$.

d). Se pleacă de la formula $(k+1)^3=k^3+3k^2+3k+1$, $k\in\mathbb{N}$ în care se dă valori lui k de la 1 la n și se adună relațiile obținute. Se obține că

$(n+1)^3=1+3(1^2+2^2+...+n^2)+3(1+2+..+n)+n\cdot 1$,

De aici scoatem suma cerută, $S=\frac{(n+1)^3-1-3\cdot\frac{n(n+1)}{2}-n}{3}=$

$\frac{n(2n^2+3n+1)}{6}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

e). Se poate pleca de la dezvoltarea $(k+1)^4=k^4+4k^3+6k^2+4k+1$ și se dă valori lui k de la 1 la n. Se obține suma $S=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

f). Suma $S=1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+...+n\cdot(n+1)$ se mai poate scrie restrâns și astfel $S=\sum_{k=1}^{n}k\cdot(k+1)$ care se descompune în două sume calculate deja,

$$S=\sum_{k=1}^{n}\left(k\cdot k+k\right)=\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}=$$

$$\frac{n(n+1)(2n+1+3)}{6}=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Altfel, se pleacă de la diferențele:

$$\cancel{1\cdot 2\cdot 3}\ -\ 0=1\cdot 2\cdot 3$$
$$\cancel{2\cdot 3\cdot 4}-\cancel{1\cdot 2\cdot 3}=2\cdot 3\cdot 3$$
$$3\cdot 4\cdot 5-\cancel{2\cdot 3\cdot 4}=3\cdot 4\cdot 3$$
$$.....$$
$$n\cdot(n+1)\cdot(n+2)-\cancel{(n-1)\cdot n\cdot(n+1)}=n\cdot(n+1)\cdot 3$$

Prin adunarea rândurilor se obține suma cerută,

$$n\cdot(n+1)\cdot(n+2)=3S\Rightarrow S=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}{3}.$$

g). Se pleacă de la expresia termenului general $\frac{1}{k\cdot(k+1)}=\frac{k+1-k}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$, în care se dă valori lui k de la 1 la n.

Astfel, $S=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+.....+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$.

h). Suma dată se înmulțește cu x după care a doua relație se scade din prima:

$$S=1+x+x^2+x^3+...+x^n\ \big|\cdot x\Rightarrow$$
$$S\cdot x=x+x^2+x^3+x^4+...+x^{n+1}\ \big|\cdot(-1)$$

(+) $\quad S(1-x)=1-x^{n+1}\Rightarrow\ S=\frac{x^{n+1}-1}{x-1}$.

i). Se pleacă de la termenul general

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{n+2-n}{2n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right).$$ Mai departe se dau valori lui n de la 1 la n și se obține suma: $S=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+1}\right)$.

2. Să se demonstreze prin inducție matematică următoarele sume:

a) $S=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+.....+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{n}{n+1}, n\in\mathbb{N}^*$.

b) $S=1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+...+n\cdot(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3},\ n\in\mathbb{N}^*$.

c) $S=1+x+x^2+x^3+...+x^n=\frac{x^{n+1}-1}{x-1},\ n\in\mathbb{N}$.

Rezolvare: a) . Etapa de verificare. Pentru n=1, $S=\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{2}$ iar $\frac{n}{n+1}=\frac{1}{2}$, așadar propoziția P(n) se verifică .

Presupunem că P(n) este adevărată pentru n fixat și să demonstrăm și că P(n+1)este adevărată.

unde P(n+1) este $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+.....+\frac{1}{n\cdot(n+1)}+\frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}=\frac{n+1}{n+2}$.

$P(n+1)$: $\underbrace{\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+.....+\frac{1}{n\cdot(n+1)}}_{\frac{n}{n+1}}+\frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}=\frac{n}{n+1}+\frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}=$

$=\frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)}=\frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}=\frac{n+1}{n+2}$, ceea ce este adevărat. Așadar, P(n) este o propoziție adevărată pentru orice număr natural nenul n.

b) . Etapa de verificare. Pentru n=1, S=2 iar $n(n+1)=1\cdot 2=2$, așadar propoziția P(n) se verifică .

Presupunem că P(n) este adevărată pentru n fixat și să demonstrăm și că P(n+1)este adevărată, unde P(n+1) este

$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+...+n\cdot(n+1)+(n+1)(n+2)=\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$.

$P(n+1)$: $\underbrace{1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+...+n\cdot(n+1)}_{\frac{n(n+1)(n+2)}{3}}+(n+1)(n+2)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}+(n+1)(n+2)=$

$\frac{n(n+1)(n+2)+3(n+1)(n+2)}{3}=\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$, ceea ce este adevărat. Așadar, P(n) este o propoziție adevărată pentru orice număr natural nenul n.

c) . Etapa de verificare. Pentru n=0, S=1 iar $x^n=x^0=1$, așadar propoziția P(n) se verifică .

Presupunem că P(n) este adevărată pentru n fixat și să demonstrăm și că P(n+1)este adevărată, unde P(n+1) este $1+x+x^2+x^3+...+x^n+x^{n+1}=\frac{x^{n+2}-1}{x-1}$.

$P(n+1)$: $\underbrace{1+x+x^2+x^3+...+x^n}_{\frac{x^{n+1}-1}{x-1}}+x^{n+1}=\frac{x^{n+1}-1}{x-1}+x^{n+1}=$

$\frac{x^{n+1}-1+(x-1)x^{n+1}}{x-1}=\frac{\cancel{x^{n+1}}-1+x^{n+2}-\cancel{x^{n+1}}}{x-1}=\frac{x^{n+2}-1}{x-1}$, ceea ce este adevărat. Așadar, P(n) este o propoziție adevărată pentru orice număr natural nenul n.

APLICAȚII PRACTICE

1. Un elev are de făcut pentru vacanța mare un număr de 210 probleme de matematică. Astfel, în prima zi el rezolvă o problemă, a doua zi rezolvă două probleme, în a treia zi rezolvă trei probleme și așa mai departe, în a n-a zi el rezolvă n probleme până când le termină pe toate. Să se afle în câte zile a terminat tema?

Rezolvare: 20 zile.

Suma celor 210 de probleme făcute în cele n zile este dată de formula $1+2+3+....+n=210 \Leftrightarrow$

$\frac{n(n+1)}{2}=210 \Rightarrow\ n(n+1)=420 \Rightarrow n=20$ zile.

2. La un stadion cu capacitatea de 10000 de locuri vin spectatorii. În primul minut vine 1 spectator, în al doilea minut vin 3 spectatori, în al treilea minut vin 5 spectatori , etc. După câte minute stadionul se va umple ?

Rezolvare: Numărul spectatorilor veniţi în primele n minute va fi $\underbrace{1+3+5+...+2n-1}_{n..\text{minute}}=\frac{(1+2n-1)\cdot n}{2}=n^2$.

Cum $n^2=10000 \Rightarrow n=100.$ După 100 de minute se va umple stadionul.

Exercitii propuse

1. Să se calculeze sumele:

a) . $S=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+...+\frac{1}{n(n+2)},\ n\in\mathbb{N}^*.$

b) . $S=\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 6}+...+\frac{1}{n(n+3)},\ n\in\mathbb{N}^*.$

c) . $S=\frac{3}{1^2\cdot 2^2}+\frac{5}{2^2\cdot 3^2}+\frac{7}{3^2\cdot 4^2}+...+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2},\ n\in\mathbb{N}^*.$ ț

d). $S=\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\ \cdot 5}+\frac{3^2}{5\cdot 7}+...+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)},\ n\in\mathbb{N}^*.$

e) . $S=1+(1+2)+(1+2+3)+...+(1+2+3+...+n),\ n\in\mathbb{N}^*.$

f). $S=1+2\cdot(1+2)+3\cdot(1+2+3)+...+n\cdot(1+2+3+...+n),\ n\in\mathbb{N}^*.$

2. Să se demonstreze prin inducţie matematică următoarele sume:

a) . $S=1+2+3+...+n=\ \frac{n(n+1)}{2}, n\in\mathbb{N}^*.$

b). $S=1+3+5+...+2n-1=n^2,\ n\in\mathbb{N}^*.$

c). $S=1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, n\in\mathbb{N}^*.$

3. Să se calculeze**: a)** $\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)$**; b)** $\prod_{k=1}^{n}\frac{k^2+k}{k^2+3k+2}$**; c)** $\prod_{k=1}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1}$**;**

3. PROGRESII

3.1 Șiruri de numere reale

Se cunosc deja şirul numerelor naturale 0,1,2,3,4,…….,şirul numerelor pare 2,4,6,…… Din observaţiile directe asupra acestor şiruri, un şir de numere reale este dat de forma $a_1, a_2, a_3, ...$ unde a_1, a_2, a_3 sunt termenii şirului iar indicii 1,2,3, reprezintă rangul sau poziţia pe care o ocupă termenii în şir.

Definiţie: Se numeşte **şir de numere reale** o funcţie f: N*→R , definită prin f(n)=a_n. Notăm $(a_n)_{n\in N^*}$ şirul de termen general , a_n

Observaţii:

1. Numerotarea termenilor unui şir se mai poate face începând cu zero:
$a_0, a_1, a_2, ...a_i, \ldots\ldots$

a_i , $i \geq 1$ se numeşte termenul de rang i.

2. Un şir constant este un şir în care toţi termenii şirului sunt constanţi : 5,5,5,5,…..

3. Două şiruri $(a_n)_n, (b_n)_n$ sunt egale dacă $a_n = b_n, \forall n \in N$

4. Orice şir are o infinitate de termeni.

Un şir poate fi definit prin:

a) descrierea elementelor mulţimii de termeni. 2,4,6,8,……..;

b) cu ajutorul unei formule $a_n = 2n$ sau

c) printr-o relaţie de recurenţă. $a_{n+1} = a_n + 2$

Exemplu: Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, definit prin formula termenului general $a_n = 4n + 2$. Să se determine primii cinci termeni ai şirului :

Rezolvare : $a_1 = 4\cdot 1 + 2 = 6$, $a_2 = 4\cdot 2 + 2 = 10$, $a_3 = 4\cdot 3 + 2 = 14$, $a_4 = 4\cdot 4 + 2 = 18$, $a_5 = 4\cdot 5 + 2 = 22$.

Activitate independentă	**Răspuns**
Se consideră şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $a_n = n^2 - 2n + 1$. Să se afle a_{2017}.	**4064256**



1. **Fie** $(x_n)_{n\geq 1}$ **un şir pentru care** $x_n = 4n - 8,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$. **Să se arate că** $x_8 - x_5 = x_7 - x_4$.

Rezolvare:

Se calculează $x_4 = 4\cdot 4 - 8 = 8$, $x_5 = 4\cdot 5 - 8 = 12$, $x_7 = 4\cdot 7 - 8 = 20$, $x_8 = 4\cdot 8 - 8 = 24$.

Atunci, se observă că $x_8 - x_5 = x_7 - x_4 = 12$.

2. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ **astfel încât** $x_n = \frac{3n+2}{n+1},\ \forall n \in \mathbb{N}^*$. **Demonstraţi că** $x_5 < x_8$.

Rezolvare: Se observă că $x_5 = \frac{3\cdot 5+2}{5+1} = \frac{17}{6} \langle x_8 = \frac{3\cdot 8+2}{8+1} = \frac{26}{9}$.

3. Se consideră șirul: 1; 7; 13; 19; ..... . Să se determine al 100 –lea termen al șirului.

Rezolvare: Fiecare termen al șirului se obține din regula: $a_1 = 1,\ a_2 = a_1 + 6 = 7,\ a_3 = a_1 + 2\cdot 6 = 13$,

$a_4 = a_1 + 3\cdot 6 = 1 + 19$. Atunci, $a_{100} = a_1 + 99\cdot 6 = 1 + 594 = 595$.

4. Pe o foaie de hârtie sunt scrise numerele naturale 2; 5; 8; 11; 14;..... .

a) Arătați că numărul 125 apare pe această foaie.

b) Verificați dacă numărul 2017 va apare pe această foaie.

Rezolvare:

a) Observăm că numerele sunt scrise de forma 3n+2.

Cum $125 = 3n+2 \Rightarrow 125-2 = 3n \Rightarrow 123 = 3n \Rightarrow n = 41$, aşadar pentru n = 41 , se obține că 125 aparține șirului de mai sus, fiind al 42-lea termen din șir.

b) Din $2017 = 3n+2 \Rightarrow 2017-2 = 3n \Rightarrow 2015 = 3n \Rightarrow n = \frac{2015}{3} \notin \mathbb{N}$, aşadar, 2017 nu apare în șir.

5. Se consideră șirul de numere reale $(x_n)_{n\geq 1}$ astfel încât $x_n = 5n-2,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$. Determinați al câtelea termen al șirului este numărul 88.

Rezolvare:

Din $5n-2 = 88$ rezultă că $5n = 90 \Rightarrow n = \frac{90}{5} = 18$, aşadar, 88 este al 18 –lea termen al șirului.

6. Se considră șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ cu $x_n = 4n+3,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$. Să se determine suma $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$. Cu cât este egală suma $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + ... + x_{2016}$?

Rezolvare:

Cum $x_1 = 4\cdot 1+3$, $x_2 = 4\cdot 2+3$, $x_3 = 4\cdot 3+3$, $x_4 = 4\cdot 4+3$, rezultă că suma este $S = 4\cdot 10 + 12 = 52$

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + ... + x_{2016} = 4(1+2+3+...2016) + 3\cdot 2016$.

7. Se consideră șirul 1;3;5; 7; 9; ..... . Să se calculeze suma primilor 50 de termeni ai șirului.

Rezolvare:

$S = 1+3+5+7+.....+?$. Al 50-lea termen al sumei este 99 deoarece până la 100 sunt 50 de termeni impari și 50 de termeni pari. Aşadar, suma $S = 1+3+5+7+.....+99$ este egală cu

$S = 1+3+5+7+.....+99 = 1+2+3+....+100-(2+4+6+....+98+100) =$

$= \frac{100\cdot 101}{2} - 2\cdot(1+2+3+4+...+50) = = 50\cdot 101 - 2\cdot\frac{50\cdot 51}{2} = 5050 - 2550 = 2500$.

8. Se consideră un șir de numere reale $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_1 = 2$ și $x_n = x_{n-1} + 3,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Demonstrați că expresia termenului general este $x_n = 3n-1,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Rezolvare:

Cum $x_n = 3n-1,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$, vom da valori lui n. Atunci,

$x_2 = x_1 + 3$,
$x_3 = x_2 + 3$,
$x_4 = x_3 + 3$,
.....,
$x_n = x_{n-1} + 3$. Prin adunarea relațiilor, rezultă că $x_n = x_1 + 3 \cdot (n-1) = 2 + 3n - 3 = 3n - 1$.

9. **Se consideră șirul** $(a_n)_{n \geq 1}$ **pentru care** $a_1 = 3$ **și** $a_n = a_{n-1} + \frac{1}{n(n+1)}$. **Să se calculeze** a_{10}**.**

Rezolvare :

Din $a_n - a_{n-1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)} \Rightarrow a_2 - a_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$, $a_3 - a_2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$, ……., $a_n - a_{n-1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. După adunarea relațiilor se obține $a_n = 3 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} = \frac{7n+5}{2n+4}$. Atunci, $a_{10} = \frac{75}{24}$.

Exercitii propuse

1. Se consideră șirul $(a_n)_{n \geq 1}$, definit prin formula termenului general $a_n = 6n - 3$. Să se determine primii cinci termeni ai șirului :

2. Se consideră șirul $(a_n)_{n \geq 1}$, definit prin formula termenului general $a_n = \frac{1}{n \cdot (n+1)}$. Să se determine primii cinci termeni ai șirului :

3. Se consideră șirul $(a_n)_{n \geq 1}$, definit prin formula termenului general $a_n = \frac{n+4}{n+3}$. Să se determine primii cinci termeni ai șirului.

4. Se consideră șirul 2;4;6; 8; 10; ..... . Să se calculeze suma primilor 40 de termeni ai șirului.

5. Se considră șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ cu $x_n = 5n - 2, \ \forall n \in \mathbb{N}^*$. Să se determine suma $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_{100}$.

6. Se consideră șirul: 3; 7; 11; 15; ..... . Să se determine al 100 –lea termen al șirului.

7. Fie șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ definit astfel: $1, \frac{3}{4}, \frac{5}{9}, \frac{7}{16}, ...$. Să se scrie formula termenului general.

8. Se consideră șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ cu termenul general $a_n = 3n - 5$. Să se determine termenii de rang 4, 5, 10.

9. Se consideră șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $a_n = n^2 - 2n + 1$. Să se afle a_{2014}.

10. Se consideră șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ definit prin relația de recurență $a_{n+1} = a_n + 10, \ n \geq 1$, cu $a_1 = 2$. Să se determine formula termenului general al șirului.

3.2 Progresii aritmetice

Definiţie: Se numeşte **progresie aritmetică** un şir în care diferenţa oricăror doi termeni consecutivi este un număr constant **r**, numit raţia progresiei aritmetice.

Exemplu de progresie aritmetică: 1; 5; 9; 13; …….

1. Relaţia de recurenţă între doi termeni consecutivi: $\boxed{a_{n+1}=a_n+r,\forall n\geq 1}$;

Exemplu : Să se găsească primii doi termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_n$:

$a_1,a_2,14,28,42,.....$;

Rezolvare : 28 – 14 = 14, ratia r = 14, atunci,

$a_2=a_3-r=14-14=0;\ a_1=a_2-r=0-14=14;$

2. a_{n-1},a_n,a_{n+1} **sunt termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice** $\Leftrightarrow$

$$\boxed{a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}}$$

Exemplu :

Determină $x\in\mathbb{R}$ astfel încât următoarele numere : $4x-3,6x+3,10x+5$ să fie în progresie aritmetică.

Rezolvare: Din $\frac{4x-3+10x+5}{2}=6x+3\Rightarrow x=2;$

3. Termenul general este dat de formula : $\boxed{a_n=a_1+(n-1)r}$

Exemplu : Fie $(a_n)_n$ o progresie aritmetică. Se dau : $a_1=-3,r=0,5$ se cere a_{12}.

Rezolvare : Conform formulei $a_n=a_1+(n-1)r$ rezultă $a_{12}=a_1+11r=-3+11\cdot 0,5=2,5.$

4. Suma oricăror doi termeni egal depărtaţi de extremi este egal cu suma termenilor extremi : $\boxed{a_k+a_{n-k+1}=a_1+a_n}$

5. Suma primilor n termeni : $\boxed{S_n=\frac{(a_1+a_n)\cdot n}{2}}$

Exemplu : Să se calculeze suma 1 + 5 + 9 + 13 + ….+ 101 ;

Rezolvare : Din faptul că 5 – 1 = 9 – 5 = 4 rezultă că raţia progresiei aritmetice este 4. Urmează să determinăm numărul n de termeni ai progresiei : Astfel, din

$101=1+(n-1)\cdot 4\Rightarrow$ n=26. Atunci, 1 + 5 + 9 + 13 + ….+ 101 = $\frac{(1+101)\cdot 26}{2}=1326;$

6. Şirul termenilor unei progresii aritmetice: $\boxed{a_1,a_1+r,a_1+2r,....,a_1+(n-1)r}$

$\boxed{a_m-a_n=(m-n)r}$

Exemplu:

Fie progresia aritmetică $(a_n)_n$ cu $a_{18}=122$, $a_{26}=178$. Să se calculeze a_1 şi r.

Rezolvare : $a_m-a_n=(m-n)\cdot r$ $\qquad a_{26}-a_{18}=(26-18)\cdot r\Leftrightarrow 178-122=8r\Rightarrow r=7$

$a_{18}-a_1=(18-1)\cdot r\Leftrightarrow 122-a_1=17\cdot 7\Rightarrow a_1=3$.

7. Trei numere $x_1,\ x_2,\ x_3$ **se scriu în progresie aritmetică de forma** :

$\boxed{x_1 = u - v,\ x_2 = u,\ x_3 = u + v}$, $u, v \in \mathbb{R}$;

8. Patru numere x_1, x_2, x_3, x_4 se scriu în progresie aritmetică astfel:

$\boxed{x_1 = u - 3v,\ x_2 = u - v,\ x_3 = u + v,\ x_4 = u + 3v}$ $u, v \in \mathbb{R}$;

9. Dacă $\boxed{\div a_i \Rightarrow \frac{a_k}{a_{k+1}} < \frac{a_{k+1}}{a_{k+2}}}$

Activitate independentă		**Răspuns**
Să se arate că numărul $A = \sqrt{1+3+5+7+.....+2017}$ este natural.		

Exercitii rezolvate

1. În progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ se cunosc primul termen $a_1 = 6$ şi raţia progresiei $r = 4$. Să se determine al zecelea termen al progresiei.

Rezolvare: Conform formulei termenului general al unei progresii aritmetice, $a_n = a_1 + (n-1)\cdot r$ rezultă $a_{10} = 6 + (10-1)\cdot 4 = 42$.

2. Fie $(a_n)_n$ o progresie aritmetică . Dacă se dau doi termeni ai progresiei să se afle ceilalţi :

$a_3 = 8, a_5 = 14, a_9 = ?, a_{15} = ?$

Rezolvare: . $a_n = a_1 + (n-1)r$, $a_5 = a_3 + 2r \Rightarrow r = 3$; Din $a_3 = a_1 + 2r \Rightarrow a_1 = 8 - 6 = 2;$

Atunci, $a_9 = a_1 + 8r \Rightarrow a_9 = 26$ şi $a_{15} = a_1 + 14r \Rightarrow a_{15} = 44;$

3. În progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ se cunosc $a_3 = 13,\ a_{10} = 27$. Să se determine primul termen și rația progresiei aritmetice.

Rezolvare: Din formula $a_m - a_n = (m-n)\cdot r \Rightarrow a_{10} - a_3 = (10-3)\cdot r \Rightarrow$

$27 - 13 = 7\cdot r \Rightarrow 14 = 7r \Rightarrow r = 2.$ Din formula termenului general, $a_n = a_1 + (n-1)\cdot r \Rightarrow$

$a_3 = a_1 + (3-1)\cdot 2 \Rightarrow\ a_1 = 9.$

4. Să se determine numărul real x știind că numerele $(x-2)^2$, $(2x-4)(x-1)$, $(x+2)^2$ sunt termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice.

Rezolvare: Din formula

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \Rightarrow (2x-4)(x-1) = \frac{(x-2)^2 + (x+2)}{2} \Rightarrow 2(2x^2 - 6x + 4) = 2x^2 + 8 \Rightarrow$$

$2x^2 - 12x = 0 \Rightarrow$ soluția este $x = 6$.

5. Să se calculeze suma $S = 1 + 17 + 27 + ... + 97$.

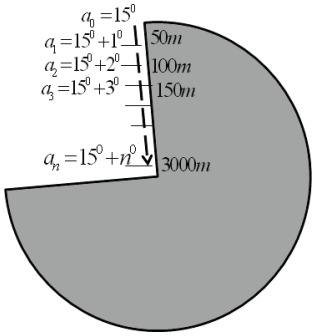
Rezolvare: Se observă că termenii sumei formează o progresie aritmetică de raţie 10, având un număr de 10 termeni. Atunci, $S = \frac{(7+97)\cdot 10}{2} = \frac{104\cdot 10}{2} = 520$.

6. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică în care se știe rația r=6 și $a_1 + a_2 + ... + a_{30} = 1170$. Să se calculeze produsul $a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_{30}$.

Rezolvare: $a_1+a_2+...+a_{30}=1170 \Leftrightarrow \frac{(a_1+a_{30})\cdot 30}{2}=1170 \Rightarrow \frac{(2a_1+29\cdot 6)\cdot 30}{2}=\frac{1170}{30} \Rightarrow$

$a_1=-48$. Atunci, $a_n=a_1+(n-1)\cdot r=6n-54$. Se observă că $a_9=0$ prin urmare produsul cerut este egal cu 0.

APLICAŢII PRACTICE



1. La cobărârea în interiorul Pământului, se consideră că la fiecare 50 m temperatura creşte cu 1^0. Dacă la suprafaţa Pământului temperatura este de 15^0, atunci să se determine ce temperatută va fi la adâncimea de 3000 m.

Rezolvare:

Notăm cu $a_0 = 15^0$ temperatura de la suprafaţa Pământului. Atunci, termenii $a_1 = 15^0+1^0$, $a_2 = 15^0+2^0$, $a_3 = 15^0+3^0$, $a_4 = 15^0+4^0$, ..., $a_n = 15^0+n^0$, reprezentând temperaturile în interiorul Pământului din 50 în 50 de metri formează o progresie aritmetică de raţie 1^0 cu un număr de n termeni. Numărul n se obţine împărţind adâncimea de 3000 de metri la 50 obţinându-se 60. Aşadar, n = 60. Atunci, $a_{60} = 15^0+60^0=75^0$ reprezintă temperatura la adâncimea de 3000 de metri.

2. Un camion asigură transportul de marfă la 10 magazine. Ştiind că distanţa dintre două magazine de pe traseu este cu 5 km mai mare faţă de distanţa precedentă şi că în total camionul a parcurs 500 km, să se determine distanţa dintre ultimele două magazine.

Rezolvare:

Notăm cu d distanţa dintre primele două magazine. Atunci, distanţele între celelalte magazine sunt:

$d+5,\ d+5\cdot 2,\ d+5\cdot 3,....,d+5\cdot 8$. Suma acestor distanţe este de 500 km .

În termeni de progresie aritmetică putem scrie:

$d_1=d,$

$d_2=d+5,$

$d_3=d+5\cdot 2,$

$d_4=d+5\cdot 3,$

.....,

$d_9=d+5\cdot 8$

unde d_9 este distanţa de la al 9-lea la al 10 – lea magazin.

De aici, rezultă $d_1+d_2+...+d_9=500 \Leftrightarrow \frac{(d_1+d_9)\cdot 9}{2}=500 \Leftrightarrow \frac{(d+d+5\cdot 8)\cdot 9}{2}=500 \Leftrightarrow$

$18d+360=1000 \Rightarrow d=35,5km.$ Aşadar, distanţa dintre ultimele două magazine este

$d_9=35,5+40=75,5\ km.$

Rezolvă singur

1. O sală de spectacole are 1700 de locuri care sunt dispuse pe rânduri în așa fel încât pe primul rând sunt 20 de locuri, iar începând cu al doilea rând sunt câte 4 locuri mai multe decât pe rândul precedent. Să se afle câte rânduri de scaune sunt în sală.

2. O sferă care este lăsată să cadă de pe o clădire înaltă parcurge în prima secundă 1 m și în fiecare secundă următoare cu 0,2 m mai mult decât în secunda precedentă. Ce distanță a parcurs sfera după 31 de secunde ?

3. Dintr-o carieră se scot blocuri de marmură având greutățile de 64, 67, 70, ..., 124 kg. Să se verifice dacă împreună, blocurile de marmură se pot transporta cu un camion având capacitatea de transport de două tone.

Exercitii propuse

1. Să se scrie primii patru termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_n$ dacă : $a_1 = -4$; $r = 5$;

2. Să se găsească primii doi termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_n$: $a_1, a_2, 14, 28, 42, ...$;

3. Să se determine al zecelea termen al şirului 1; 4; 7; 10,.....

4. Să se determine al zecelea termen al şirului 1, 7, 13, 19, ...;

5. Fie $(a_n)_n$ o progresie aritmetică. Se dau : $a_1 = -3, r = 0,5$ se cere a_{12}.

6. În progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ în care $a_1 = 6$ şi $a_2 = 5$, să se calculeze a_7.

7. Să se calculeze suma primilor trei termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_n$, ştiind că al doilea este $a_2 = 6$;

8. Să se calculeze suma primilor cinci termeni ai unei progresii aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ ştiind că $a_1 = 1$ şi $a_2 = 3$.

9. Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$, în care $a_1 = 2$ şi $a_2 = 4$. Să se calculeze suma primilor 10 termeni ai progresiei.

10. În progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ se cunosc primul termen $a_1 = -2$ şi raţia $r = 5$. Să se calculeze termenul de rang 10, a_{10}.

11. Să se calculeze al cincilea termen al unei progresii aritmetice ştiind că primul termen al progresiei este 7 şi al doilea este 9.

12. Să se determine primul termen al unei progresii aritmetice de raţie 4 dacă suma primilor doi termeni este 10.

13. Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ în care $a_3 = 5$ şi $a_6 = 11$. Să se calculeze a_9.

14. Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ în care $a_1 = 1$ şi $a_5 = 13$. Să se calculeze a_{2009}.

15. Să se determine raţia unei progresii aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, ştiind că $a_{10} - a_2 = 16$.

16. În progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ se cunosc $a_3 = 8$ şi $a_{12} = 53$. Să se determine a_{27}.

17. În progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ se cunoaşte că $a_{10} - a_6 = 16$ şi $a_1 = 3$. Să se afle a_{15}.

18. În progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ se cunosc relaţiile $a_4 + a_7 = 49$ şi $a_5 - a_2 = 15$. Să se afle a_1 şi raţia r.

19. În progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ se cunosc relaţiile $a_1+a_2+a_3+a_4=10$ şi $a_8=19a_2$. Să se afle a_1 şi raţia r.

20. Să se arate că numerele $\log_2 2$, C_3^1 şi 5 sunt termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice.

21. Să se arate că numerele 3^x-3, $5\cdot 3^x$, $3^{x+2}+3$ sunt termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice.

22. Să se determine numărul real x ştiind că numerele $x-4$, $x+3$, $6x$ sunt termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice.

23. Să se determine $x\in\mathbb{R}$, ştiind că $x-3$, 4, $x+3$ sunt termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice.

24. Să se determine $x\in\mathbb{R}$, ştiind că şirul $1,2x+1,9,13,....$ este progresie aritmetică.

25. Să se determine $x\in\mathbb{R}$ ştiind că numerele $x+1$, $2x-3$, $x-3$ sunt termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice.

26. Să se determine $x\in\mathbb{R}$ ştiind că şirul 1, x, $x+2$, $7,....$ este progresie aritmetică.

27. Să se determine $x\in\mathbb{R}$ ştiind că următoarele numere sunt termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice:

a) $3,\ 3x+1,\ 5x+1$ b) $x+1,1-x,4$; c) $2;7;x+13$;

d) $x-5;x-3;2x-15$; e) $2x-1;x+8;-x-7$; f) $5-x;2x+7;3x+11$.

28. Şirul $(x_n)_n$ este dat prin formula termenului general x_n=4n-6 . Să se arate că $(x_n)_n$ e o progresie aritmetică. Să se afle primul termen şi raţia.

29. Determină $x\in\mathbb{R}$ astfel încât următoarele numere : a) $x^2+2,(3x)^2,4-2x+x^2$;

b) $4x-3,6x+3,10x+5$; c) $x^2-6,3x,4x+3$ să fie în progresie aritmetică.

30. Fie progresia aritmetică $(a_n)_n$ cu a_{18} =122, a_{26}=178. Să se calculeze S_{26}.

31. Să se rezolve ecuaţia : x+(x+5)+(x+10)+……+(x+100) = 2100.

32. Să se calculeze sumele :

a) 1 + 5 + 9 + 13 + ….+ 101 ; b) 1 + 11 + 21 + 31 + 41 + ….+ 111 ;

c) $S=1+4+7+...+46$; d) $S=2+5+8+...+35$

33. Să se rezolve ecuaţia $1+4+7+10+.....+x=210$.

34. Să se calculeze suma 3 + 10 + 17 +….+ 192 ;

35. Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ în care $a_1=7$ şi $a_7=37$. Să se calculeze suma primilor zece termeni ai unei progresii.

36. În progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ cu $a_1=5$ şi $a_3-a_2-a_1=-2$ se cere să se determine raţia r şi suma primilor 10 termeni ai progresiei.

37. Să se afle suma primilor 20 de termeni ai unei progresii aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ pentru care $a_2=7$ şi $a_6=31$.

38. Să se găsească primul termen şi raţia progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ dacă $a_1+a_2+...+a_{19}+a_{20}=590$ şi $2a_4-a_7=1$.

39. Să se determine $n\in\mathbb{N}$ din egalitatea $1+5+9+...+n=231$;

40. Să se arate că numărul $A=\sqrt{1+3+5+...+99}$ este natural.

3.3 Progresii geometrice

Definiție: Se numeşte **progresie geometrică** un şir $(b_n)_{n\geq 1}$ în care raportul oricăror doi termeni consecutivi este un număr constant **q**, numit raţia progresiei geometrice.

$$q=\frac{b_2}{b_1}=\frac{b_3}{b_2}=\frac{b_4}{b_3}=.....=\frac{b_{n+1}}{b_n}=....$$

O altă definiție este dată sub următoarea formă:

Se numeşte **progresie geometrică** un şir $(b_n)_{n\geq 1}$ în care , începând cu al doilea termen, fiecare termen se obține din precedentul prin înmulțire cu un număr constant **q**, numit raţia progresiei geometrice.

Şirul termenilor unei progresii geometrice este de forma $b_1,\ b_1q,\ b_1q^2,....,\ b_1q^{n-1}$

Exemplu de progresie geometrică : 1, 5, 5^2, 5^3, 5^4..... Raţia sa este egală cu 5.

1. Relaţia de recurenţă între doi termeni consecutivi: $\boxed{b_{n+1}=b_n\cdot q,\forall n\geq 1}$

Exemplu:

Să se scrie primii cinci termeni ai progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$ dacă b_1=1 şi raţia q=5 .

Rezolvare : Din formula $b_{n+1}=b_n\cdot q,\forall n\geq 1$ rezultă termenii 1, 5, 5^2, 5^3, 5^4.

2. Formula termenului general al unei progresii geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$ este dat de :

$$\boxed{b_n=b_1\cdot q^{n-1},\ \forall n\geq 1}$$

Exemplu:

Să se determine al cincilea termen al unei progresii geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, ştiind că raţia este egală cu 3 şi primul termen este egal cu 2.

Rezolvare : Din formula $b_n=b_1\cdot q^{n-1}$ rezultă $b_5=b_1\cdot q^4=2\cdot 3^4=162$;

3. Formula de recurență pentru termenii unei progresii geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$ care au ranguri diferite este $\boxed{\frac{b_m}{b_n}=q^{m-n}}$**;**

Exemplu: Se consideră progresia geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$ în care b_3=6 şi b_5= 24. Să se determine b_9.

Rezolvare : Din formula $b_m=b_n\cdot q^{m-n}$ rezultă $b_9=b_5 4^4=6144$.

4. Numerele b_{n-1},b_n,b_{n+1} sunt termenii consecutivi ai unei progresii geometrice $\Leftrightarrow$

$$\boxed{b_n=\sqrt{b_{n-1}\cdot b_{n+1}}},\ b_n\rangle 0,\ \forall n\geq 1.$$

Exemplu: Să se determine $x\in\mathbb{R}$ştiind că 12, x+3 şi 27 sunt termenii consecutivi ai unei progresii geometrice ;

Rezolvare : Dacă 12, x+3 şi 27 sunt termenii consecutivi ai unei progresii geometrice atunci conform formulei $b_n=\sqrt{b_{n-1}\cdot b_{n+1}}$ rezultă $x+3=\sqrt{12\cdot 27}\Rightarrow x+3=18\Rightarrow x=15.$

Exemplu: Să se determine $x\in\mathbb{R}$ştiind că 3, x şi x+6 sunt termenii consecutivi ai unei progresii geometrice cu temeni pozitivi;

Rezolvare : Dacă 3, x şi x+6 sunt termenii consecutivi ai unei progresii geometrice atunci conform formulei $b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$ rezultă

$x = \sqrt{3 \cdot (x+6)} \Rightarrow x^2 = 3x+18 \Rightarrow x^2 - 3x - 18 = 0 \Rightarrow x \in \{-3; 6\}$. Cum termenii sunt pozitivi, rezultă x = 6.

5. Suma primilor n termeni ai unei progresii geometrice $(b_n)_{n \geq 1}$ este : $\boxed{S_n = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}}$ **,** $q \neq 1$.

Exemplu: Să se calculeze suma $S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{19}$ **.**

Rezolvare : Conform formulei $S_n = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \Rightarrow S_{20} = \frac{2^{20} - 1}{2 - 1} = 2^{20} - 1$;

6. Produsul oricaror doi termeni egal depărtaţi de extremi este egal cu produsul extremilor

$\boxed{b_k \cdot b_{n-k+1} = b_1 \cdot b_n}$

7. Trei numere $x_1,\ x_2,\ x_3$ se scriu în progresie geometrică de forma :

$\boxed{x_1 = \frac{u}{v},\ x_2 = u,\ x_3 = u \cdot v}$ $u, v \in \mathbb{R}$

8. Patru numere x_1, x_2, x_3, x_4 se scriu în progresie geometrică astfel :

$\boxed{x_1 = \frac{u}{v^3},\ x_2 = \frac{u}{v},\ x_3 = u \cdot v,\ x_4 = u \cdot v^3}$ $u, v \in \mathbb{R}$ **;**

Activitate independentă		**Răspuns**
Să se calculeze suma $1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n,\ x \in \mathbb{R}$**.**		

APLICAŢII PRACTICE

1. Fabrica Dacia a produs în anul 2015 în luna ianuarie 3000 de automobile urmând ca în fiecare lună să-şi crească producţia cu 10% faţă de luna precedentă. Câte automobile previzionează fabrica să producă în luna decembrie a aceluiaşi an şi care este numărul total de automobile pe care l-ar produce în tot anul ?

Rezolvare:

În luna ianuarie fabrica a produs 3000 de automobile;

În luna februarie se vor produce $3000\left(1 + \frac{10}{100}\right)$ automobile;

În luna martie se vor produce $3000\left(1 + \frac{10}{100}\right)^2$ automobile;

……..

În luna decembrie se previzionează a fi produse

$3000\left(1 + \frac{10}{100}\right)^{11} = 3000 \cdot 2,85 = 8559$ automobile.

În tot anul, fabrica o să producă

$3000+3000\left(1+\frac{10}{100}\right)+3000\left(1+\frac{10}{100}\right)^2+...+3000\left(1+\frac{10}{100}\right)^{11}$ care nu este altceva decât suma unei progresii geometrice cu primul termen 3000 şi de raţie $1+\frac{10}{100}$.

Suma este egală cu $3000\cdot\frac{\left(1+\frac{10}{100}\right)^{12}-1}{1+\frac{10}{100}-1}=3000\cdot\frac{(1,1)^{12}-1}{\frac{1}{10}}=3000\cdot(3,1-1)=64152$ automobile.

Rezolvă singur

Dintr-un recipient se scoate cu o seringă negradată a cincea parte din cantitatea de soluţie aflată acolo şi se continuă procedeul scoţând a cincea parte din cantitatea rămasă. Determinaţi ce volum de soluţie se scoate după 6 folosiri a seringii ştiind că volumul iniţial de soluţie era de 35 litri.

Exercitii rezolvate

1. În progresia geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$ se cunosc termenii $b_1=3$ şi $b_2=6$. Să se determine al optulea termen, b_8.

Rezolvare**:** Mai întâi se determină raţia progresiei, $q=\frac{b_2}{b_1}=\frac{6}{3}=2$ după care se aplică formula termenului general, $b_n=b_1\cdot q^{n-1}$ adică , $b_8=b_1\cdot 2^{8-1}=3\cdot 2^7=384$.

2. În progresia geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$ **se cunoaşte că** $b_2-b_1=6$ **şi** $b_4-b_3=24$. **Să se calculeze raţia q a progresiei.**

Rezolvare : $b_2-b_1=6\Rightarrow b_1(q-1)=6$ **,** $b_4-b_3=24\Rightarrow b_1q^2(q-1)=24$. Făcând raportul celor două relaţii se obţine $q^2=4\Rightarrow q\in\{-2;2\}$.

3. Să se determine $x\in\mathbb{R}$ **ştiind că 18, x+4 şi 162 sunt termenii consecutivi ai unei progresii geometrice ;**

Rezolvare : Dacă 18, x+4 şi 162 sunt termenii consecutivi ai unei progresii geometrice atunci conform formulei $b_n=\sqrt{b_{n-1}\cdot b_{n+1}}$ rezultă $x+4=\sqrt{18\cdot 162}\Rightarrow x+4=54\Rightarrow x=50$.

4. În progresia geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$ **se cunoaşte că** $b_1=5$ **şi** $b_2+b_3=280$. **Să se calculeze raţia q a progresiei.**

Rezolvare : Din $b_2+b_3=280\Rightarrow b_1\left(q+q^2\right)=5\cdot 56\Rightarrow q+q^2=56\Rightarrow q^2-q-56=0\Rightarrow$ $q\in\{-8;7\}$**.**

5. Să se determine $x\in\mathbb{R}$ **ştiind că 4, x - 2 şi 2x+1 sunt termenii consecutivi ai unei progresii geometrice ;**

Rezolvare : Dacă 4 , x-2 şi 2x+1 sunt termenii consecutivi ai unei progresii geometrice atunci conform formulei $b_n=\sqrt{b_{n-1}\cdot b_{n+1}}$, $\Leftrightarrow b_n^{\,2}=b_{n-1}\cdot b_{n+1}$, rezultă

$x-2=\sqrt{4(2x+1)} \Rightarrow x \geq 2$. Din

$(x-2)^2=4(2x+1) \Rightarrow x^2-4x+4=8x+4 \Rightarrow x^2-12x=0 \Rightarrow x=12.$

6. Să se determine $x \in \mathbb{R}$ știind că următoarele numere sunt termenii consecutivi ai unei progresii geometrice cu toți termenii pozitivi :

a) $2x-3;\ x+3;\ 2x+6$**.** **b)** $x-2;\ x+2;\ 3x+6$**.**

c) $x-1;\ \sqrt{4x+4};\ 3x-1$**.** **d)** $x-3;\ \sqrt{3x+4};\ 4x$**.**

e) $2;\ x+6;\ x^2+10x+8$**.** **f)** $x-3;\ \sqrt{x^2-7};\ |2x+1|$**.**

Rezolvare : a) Se aplică formula $b_n=\sqrt{b_{n-1}\cdot b_{n+1}} \quad \Leftrightarrow b_n^{\ 2}=b_{n-1}\cdot b_{n+1}$. Condițiile de existență care se pun sunt : $x+3\rangle 0,\ 2x-3\rangle 0,\ 2x+6\rangle 0$ rezultând $x\rangle \frac{3}{2}$.

Astfel, $(x+3)^2=(2x-3)(2x+6) \Rightarrow x^2+6x+9=4x^2+12x-6x-18 \Rightarrow\ x^2=9 \Rightarrow x=\pm 3$.

Convine doar $x=3$.

b) Cum $x+2=\sqrt{(x-2)(3x+6)}$, se pun condițiile $x+2\rangle 0,\ x-2\rangle 0,\ 3x+6\rangle 0$ rezultând $x\rangle 2$.

Din $(x+2)^2=(x-2)(3x+6) \Rightarrow\ x^2-2x-8=0 \Rightarrow x \in \{-2;4\}$. Convine x = 4.

c) Din $x-1\rangle 0,\ 4x+4\rangle 0,\ 3x-1\rangle 0$ rezultă $x\rangle 1$. Aplicând formula $b_n^{\ 2}=b_{n-1}\cdot b_{n+1}$ rezultă $\sqrt{4x+4}^2=(x-1)(3x-1) \Rightarrow 4x+4=3x^2-x-3x+1 \Rightarrow 3x^2-8x-3=0 \Rightarrow x \in \left\{-\frac{1}{3},3\right\}$. Convine x= 3.

d) $x-3\rangle 0 \Rightarrow x\rangle 3$. Din $\sqrt{3x+4}^2=(x-3)\cdot 4x \Rightarrow 4x^2-15x-4=0 \Rightarrow x \in \left\{-\frac{1}{4},4\right\}$. Convine x= 4 ;

e) Din $x+6\rangle 2 \Rightarrow x\rangle -4$; Cum $(x+6)^2=\ 2(x^2+10x+8) \Rightarrow x^2+8x-20=0 \Rightarrow x \in \{-10;2\}$. Convine, x= 2.

f) Din $x-3\rangle 0 \Rightarrow x\rangle 3 \Rightarrow |2x+1|=2x+1$. Cum $\sqrt{x^2-7}^2=(x-3)\cdot(2x+1) \Rightarrow x^2-5x+4=0$. $x \in \{1;4\}$. Convine x = 4.

7. Se consideră șirul $(b_n)_{n\geq 1}$ cu $b_n=2\cdot\sqrt{3}^n$. Să se arate că $(b_n)_{n\geq 1}$ este progresie geometrică și să se verifice dacă numărul 486 este termen al său.

Rezolvare : $(b_n)_{n\geq 1}$ este progresie geometrică

$\Leftrightarrow b_n^{\ 2}=b_{n-1}\cdot b_{n+1} \Rightarrow \left(2\sqrt{3}^n\right)^2=\left(2\sqrt{3}^{n-1}\right)\cdot\left(2\sqrt{3}^{n+1}\right) \Rightarrow 4\cdot 3^n=4\cdot 3^n$ ceea este adevărat.

$b_n=2\cdot\sqrt{3}^n=486 \Leftrightarrow 2\cdot 3^{\frac{n}{2}}=2\cdot 3^5 \Rightarrow \frac{n}{2}=5 \Rightarrow n=10 \Rightarrow$ termenul căutat este $b_{10}=486$**.**

8. Să se arate că numărul $A=\underbrace{99999...9}_{n\ de\ 9}\underbrace{333...3}_{n-1\ de\ 3}4-\frac{5}{9}$ se poate scrie ca $A=a^2$, unde $a \in \mathbb{Q}$.

Rezolvare : $A=\underbrace{99999...9}_{n\ de\ 9}\underbrace{333...3}_{n-1\ de\ 3}4-\frac{5}{9}=\underbrace{999...99}_{2n\ de\ 9}-\underbrace{6666...66}_{n\ de\ 6}+1-\frac{5}{9}=$

$=9(10^{2n-1}+10^{2n-2}+...+10+1)-6(10^{n-1}+10^{n-2}+...+10+1)+1-\frac{5}{9}=$

$=9\cdot\frac{10^{2n}-1}{9}-6\cdot\frac{10^{n}-1}{9}+\frac{9}{9}-\frac{5}{9}=\frac{9\cdot10^{2n}-6\cdot10^{n}-9+6+9-5}{9}=\frac{(3\cdot10^{n}-1)^2}{3^2}$. Aşadar, $A=a^2$, **unde** $a=\frac{3\cdot10^{n}-1}{3}$.

Exercitii propuse

1. În progresia geometrică 1, 3, 9, 27, ... se cere să se determine termenul de rang 6.

2. Să se scrie primii cinci termeni ai progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq1}$ dacă $b_1=1$ şi raţia $q=5$

3. Să se determine al cincilea termen al unei progresii geometrice $(b_n)_{n\geq1}$, ştiind că raţia este egală cu 3 şi primul termen este egal cu 2.

4. Se consideră progresia geometrică $(b_n)_{n\geq1}$ în care $b_1=3$ şi $b_2=12$. Să se calculeze al cincilea termen.

5. Se consideră progresia geometrică $(b_n)_{n\geq1}$ în care $b_3=6$ şi $b_5=24$. Să se determine b_9.

6. În progresia geometrică $(b_n)_{n\geq1}$ cu raţia $q=2$ iar $b_8=384$, să se calculeze b_4.

7. Să se determine produsul primilor trei termeni ai unei progresii geometrice $(b_n)_{n\geq1}$, ştiind că primul termen este egal cu 1 şi raţia este $q=-2$.

8. Să se determine al patrulea termen al unei progresii geometrice în care primul termen este egal cu 16, iar raţia este $\frac{1}{2}$.

9. Să se determine raţia progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq1}$, ştiind că $b_1=3$ şi $b_2-b_1=3$.

10. Să se determine suma primilor trei termeni ai unei progresii geometrice, ştiind că suma primilor doi termeni ai progresiei este egală cu 8, iar diferenţa dintre al doilea termen şi primul este egală cu patru.

11. Să se determine primul termen al unei progresii geometrice ştiind că raportul dintre primul termen şi al patrulea este $\frac{1}{8}$ şi că $b_2=3$.

12. Se consideră progresia geometrică $(b_n)_{n\geq1}$ în care $b_1=1$ şi $b_2=3$. Să se calculeze b_4.

13. Se consideră progresia geometrică $(b_n)_{n\geq1}$ în care $b_1=2$ şi $b_2=6$. Să se calculeze b_5.

14. Să se determine al patrulea termen al unei progresii geometrice, ştiind că raţia este egală cu $\frac{1}{3}$ şi primul termen este 27.

15. Se consideră progresia geometrică $(b_n)_{n\geq1}$ în care $b_1=1$ şi $b_2=6$. Să se calculeze b_5.

16. Se consideră progresia geometrică $(b_n)_{n\geq1}$ în care $b_2=6$ şi $b_5=162$. Să se calculeze b_9.

17. Se consideră progresia geometrică $(b_n)_{n\geq1}$ în care $b_3=2$ şi $b_5=16$. Să se calculeze b_8.

18. În progresia geometrică $(b_n)_{n\geq1}$ cu toţi termenii pozitivi se cunoaşte $b_3=18$ şi $b_5=162$. Să se determine primul termen b_1 şi raţia q.

19. În progresia geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$ cu toţi termenii pozitivi se cunosc relaţiile $b_6 = 9b_4$ şi $b_3 + b_4 = 72$. Să se determine primul termen b_1 şi raţia q.

20. Să se găsească primul termen b_1 şi raţia q a progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$ dacă $b_3 - b_2 = 12$, $b_4 - b_2 = 48$.

21. În progresia geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$ cu toţi termenii pozitivi se cunosc relaţiile: $b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 780$ şi $\frac{b_5}{b_3} = 25$. Să se determine primul şi al cincilea termen al progresiei geometrice.

22. Să se arate că numerele 1, $\log_3 9$ şi $\sqrt[3]{64}$ sunt termenii consecutivi ai unei progresii geometrice.

23. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 3x+1$. Să se arate că numerele f(0), f(1), f(5) sunt termenii consecutivi ai unei progresii geometrice.

24. Să se determine numărul real x ştiind că numerele 4; 6; $x+6$ sunt termenii consecutivi ai unei progresii geometrice.

25. Să se determine numărul real x ştiind că numerele 4, $x-2$ şi 9 sunt termenii consecutivi ai unei progresii geometrice.

26. Să se determine $x\in\mathbb{R}$ ştiind că : a) 27, x+5 şi 75 sunt termenii consecutivi ai unei progresii geometrice ;

b) x-1, 2x, 5x + 3 sunt termenii consecutivi ai unei progresii geometrice ;

27. În progresia geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$ cu toţi termenii pozitivi se ştie că numerele $x, 10, 25$ sunt termeni consecutivi. Aflaţi-l pe x.

28. Să se determine $x\in\mathbb{R}$, ştiind că $5-x$, $x+7$, $3x+11$ sunt termenii consecutivi ai unei progresii geometrice.

29. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$. Să se calculeze suma $S = f(1) + f(2) + f(3) + ... + f(2013)$.

30. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 2x+1$. Să se calculeze suma $S = f(1) + f(2) + f(2^2) + ... + f(2^{10})$.

31. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 3x+2$. Să se calculeze suma $S = f(1) + f(4) + f(4^2) + ... + f(4^{10})$

32. Se consideră progresia geometrică dată de formula termenului general $b_n = 2\cdot 7^n$. Se cere suma primilor 10 termeni ai progresiei.

33. Să se calculeze sumele : a) $S = 1+2+2^2+2^3+...+2^{19}$;

b) $S = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + ... + \frac{1}{3^{10}}$;

34. Se consideră progresia geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$ cu termenii pozitivi în care $b_3 = 2$ şi $b_5 = 8$. Să se calculeze suma primilor zece termeni.

35. Să se calculeze sumele:

a) $S = 1+2+2^2+2^3+...+2^{50}$;

b) $S = 3+3^2+3^3+...+3^{50}$

c) $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + ... + \frac{1}{2^{20}}$

d) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4}$

36. Fie funcția $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$. Să se calculeze $f(1)+f(2)+f(3)+...+f(2014)$.

37. Să se arate că numărul $a=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+....+\frac{1}{2^{10}}\in(1;2)$.

38. Să se calculeze suma : $S=3+33+333+...+\underbrace{333....3}_{n\ ori}$.

39. Să se determine $n\in\mathbb{N}$ astfel încât $1+3+9+....+3^n=1093$.

40. Să se calculeze suma $S=7+77+777+...+\underbrace{7777...7}_{2013\ de\ 7}$.

41. Să se scrie formula termenului al n-lea al progresiei geometrice date prin :

a) $b_1=2, b_{n+1}=3b_n$ b) $b_1=4, b_{n+1}=-3b_n$

c) $b_1=9, b_{n+1}=2b_n$ d) $b_1=10, b_{n+1}=\frac{1}{5}b_n$

42. Să se găsească primul termen b1 şi raţia q a progresiei geometrice $(b_n)_n$ dacă :

a) $\begin{cases} b_2-b_1=-4 \\ b_3-b_1=8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} b_3-b_2=12 \\ b_4-b_2=48 \end{cases}$ c) $\begin{cases} b_6=25 \\ b_8=9 \end{cases}$

43. Să se calculeze sumele :

a) $1-2+2^2-2^3+.....+2^{20}$; b) $\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}-.....-\frac{1}{2^{12}}$;

c) 1+11+111+1111+……111111…1 (de n ori 1) ;

d) $1+2\cdot 2+3\cdot 2^2+4\cdot 2^3+.....100\cdot 2^{99}$;

44. Să se verifice dacă un şir $(b_n)_{n\geq 1}$ este progresie geometrică dacă se ştie că suma primilor n termeni ai săi este $S_n=2^n-1$.

45. Să se calculeze sumele:

a) $S=1+x+x^2+x^3+....+x^n$;

b) $S=1+2x+3x^2+4x^3+....+nx^{n-1}$;

c) $S=1+2\cdot 2+3\cdot 2^2+4\cdot 2^3+....+100\cdot 2^{99}$;

d) $S=1+2\left(1+\frac{1}{n}\right)+3\left(1+\frac{1}{n}\right)^2+4\left(1+\frac{1}{n}\right)^3+....+n\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1}$;

e) $S=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2+....+\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)^2,\ x\neq 0;\pm 1;$

f) $S=\frac{x^1+y^1}{(x+y)^1}+\frac{x^2+y^2}{(x+y)^2}+.....+\frac{x^n+y^n}{(x+y)^n},\ x,y\rangle 0;$

g) $S=n+(n-1)\cdot x+(n-2)\cdot x^2+...+2\cdot x^{n-2}+x^{n-1}$;

46. Să se calculeze sumele:

a) $S=9+99+999+...+\underbrace{999...99}_{n\ de\ 9}$;

b) $S=1+12+112+1112+....+\underbrace{11....11}_{n-1\ de\ 1}2$;

c) $S=2+22+222+2222+....+\underbrace{22....22}_{n\ de\ 2}$;

47. Se consideră progresia geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$ în care $P_{20}=P_{30}$. Să se calculeze produsul primilor 50 de termeni ai progresiei, P_{50}.

48. În progresia geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$ se cunoaște rația $q = 4$. Să se determine $n \in \mathbb{N},\ n\rangle 3$ știiind că $b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_n = 1365$.

49. Să se determine $x \in \mathbb{R}$ astfel încât numerele $2^x - 7;\ 2^{x+1} - 5;\ 4 \cdot 2^x + 17$ să fie termenii consecutivi ai unei progresii geometrice.

50. Se consideră șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ cu $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = n^2 + 5n + 1,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că $(a_n)_{n\geq 1}$ e progresie aritmetică.

51. Se consideră șirurile $(a_n)_{n\geq 1}$ respectiv, $(b_n)_{n\geq 1}$ definite prin $a_n = 3n + 2$ respectiv, $b_n = 2^{a_n},\ n \in \mathbb{N}^*$.

a) Arătați că $(a_n)_{n\geq 1}$ este progresie aritmetică iar $(b_n)_{n\geq 1}$ este progresie geometrică.

b) Să se determine $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot .... \cdot b_n = 4^{19}$.

52. Să se determine patru numere în progresie geometrică știind că suma termenilor extremi este egală cu triplul mediei aritmetice a termenilor egal depărtați de extremi, iar primul termen este a.

4. FUNCȚII

4.1 Funcții. Definiție. Proprietăți

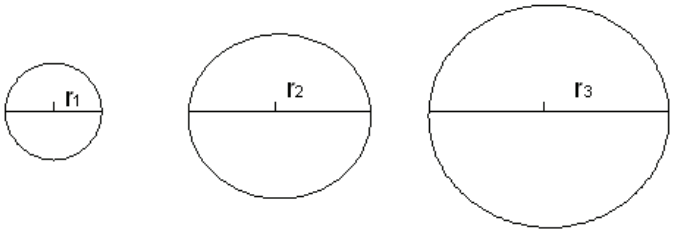
Una din noţiunile fundamentale ale matematicii o constituie noţiunea de **funcţie**, (de la latinescul functio = realizare) aceasta fiind rezultatul unui îndelungat proces de abstractizare, în dorinţa de a obţine o descriere cât mai riguroasă, ştiinţifică, a fenomenelor din natură.

În 1749, matematicianul **Leonhard Euler**(1701-1783) prezenta noţiunea de **funcţie** ca o mărime variabilă ce depinde de altă mărime variabilă, însă fundamentarea teoretică a acestei noţiuni la care au contribuit şi **Gottfried Leibniz**(1646-1716) şi **Isaac Newton**(1643-1727), a ţinut cont de corespondenţa ce se poate stabili între două mulţimi de obiecte, în cazul matematicii, mulţimi de numere, corespondenţă ce face ca unor elemente dintr-o mulţime A să le corespundă alte elemente dintr-o mulţime B.

Să considerăm un mobil care se deplasează rectiliniu şi uniform într-un singur sens pe o dreaptă începând dintr-un punct O şi să măsurăm cu t_1, t_2, t_3,….momentele la care ajunge parcurgând diferite distanţe d_1, d_2, d_3,…… Observăm că se cunoaşte mişcarea mobilului dacă în fiecare moment t se cunoaşte distanţa corespunzătoare d. Astfel, spunem că distanţa parcursă este în funcţie de timp adică depinde de timp sau că distanţa **este funcţie de timp**.

Curentul electric ce trece printr-o rezistenţă la diferite tensiuni U_1, U_2, U_3, ….U_n va avea diferite intensităţi I_1, I_2, I_3,…,I_n, iar modul în care variază curentul electric esta dat tocmai de corespondenţa dintre valorile pe care le ia tensiunea şi cele pe care le ia intensitatea. Spunem astfel, că variaţia intensităţii depinde de tensiune sau că **este funcţie de tensiune**.

De asemenea, cercurile de raze diferite au arii diferite, adică aria fiecărui cerc depinde de raza sa, conform formulei $A = \pi r^2$ adică aria unui cerc **este funcţie de raza sa**.



Cum $r_1 \langle r_2 \langle r_3 \Rightarrow A_1 \langle A_2 \langle A_3$ Fig. 1

Matematica nu se poate limita la studierea unor corespondenţe particulare, aşa cum apar în fizică, chimie şi în alte domenii, ci studiază aceste aspecte la un nivel general ca mai apoi, rezultatele obţinute să poată fi folosite de celelalte ştiinţe conform

specificului fiecăreia. Cercetarea acestor corespondenţe care se pot stabili între două mulţimi de numere este introdusă prin următoarea definiţie :

Definiţie : Fie A şi B două mulţimi nevide. Se numeşte **funcţie definită pe A cu valori în B** , un triplet de forma (**A,B,f**) în care, printr-un procedeu (lege, corespondenţă) notat cu **f**, fiecărui element **x** din A îi corespunde un singur element **y** din B.

Convenim să notăm o funcţie astfel, $f: A \to B$ sau $A \xrightarrow{f} B$, unde

A se numeşte **domeniul de definiţie** (**D_f**), adică mulţimea de unde **f** ia valori ,

B se numeşte **codomeniu** (**Cd_f**) sau mulţimea valorilor funcţiei, adică mulţimea în care funcţia ia valori, iar legătura pe care o stabileşte funcţia între elementele $x \in A$ şi valorile corespunzătoare $y \in B$ se numeşte **lege de corespondenţă.**

Dacă x este un element din A şi dacă lui x îi corespunde elementul y din B, se spune că y este imaginea lui x prin funcţia **f** sau că **y este valoarea funcţiei f în x** şi se notează cu **f**(x). Aşadar, y=**f**(x) adică, y este funcţie de x, în sensul că y depinde de x.

Exemplu :

Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f(x)= x^2-3x+4. Să se calculeze valoarea funcţiei f în punctele :

a) -1 ; b) 2 ; c) $\frac{1}{2}$; d) $\sqrt{2}$;

Rezolvare :

a) f(-1)= $(-1)^2$-3(-1)+4=1+3+4=8 ; b) f(2)=2^2-6+4=2;

c) f($\frac{1}{2}$)=$\frac{1}{4}$ - $\frac{3}{2}$ +4=$\frac{1-6+16}{4}=\frac{11}{4}$; d) f($\sqrt{2}$)=$\left(\sqrt{2}\right)^2 - 3\cdot\sqrt{2}+4 = 2-3\sqrt{2}+4 = 6-3\sqrt{2}$.

Definiţie: Fie $f: A \to B$. Se numeşte **imaginea funcţiei f** , mulţimea tuturor valorilor funcţiei f pe care o notăm cu **f(A) sau Im_f** .

Aşadar, pentru o funcţie $f: A \to B$, $f(A) = \{f(x) | x \in A, y = f(x) \in B\}$

Exemplu: Fie $f: \{-\sqrt{2}; -1; 0; 3;\} \to R$, f(x)= -2x+3. Să se determine imaginea funcţiei f.

Rezolvare : $\text{Im}_f = \{f(-\sqrt{2}); f(-1); f(0); f(3)\} = \{2\sqrt{2}+3; 5; 3; -3\}$.

Definiţie: Două funcţii **f şi g sunt egale** dacă şi numai dacă, au acelaşi domeniu de definiţie, acelaşi codomeniu şi stabilesc aceeaşi corespondenţă.

Exemplu: Fie funcţiile $f: \{-2; -1; 0; 1; 2\} \to Z$, f(x)=5x+6 şi $g: A \to Z$, g(x)=(a-4)x+2b.

Să se determine a şi b astfel încât funcţiile f şi g să fie egale.

Rezolvare: $f = g \Leftrightarrow A = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$ şi a – 4 = 5, a = 9 şi 2b = 6 adică b = .

Observaţie: Dacă două funcţii **f** şi **g** au acelaşi domeniu de definiţie A dar au valori diferite cel puţin pentru un element x din domeniul de definiţie, atunci **f** şi **g** nu sunt egale.

Modalităţi de a defini o funcţie

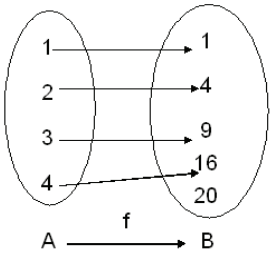
O funcţie poate fi definită în următoarele moduri:

1) Cu ajutorul unor diagrame: Fie $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{1, 4, 9, 16, 20\}$;

2) Cu ajutorul unui tabel de valori, numit tabelul de valori al funcţiei **f**.

3) Cu ajutorul unei formule: În cazul nostru, **f** este funcţia pătratică, **f**(x)=x^2.

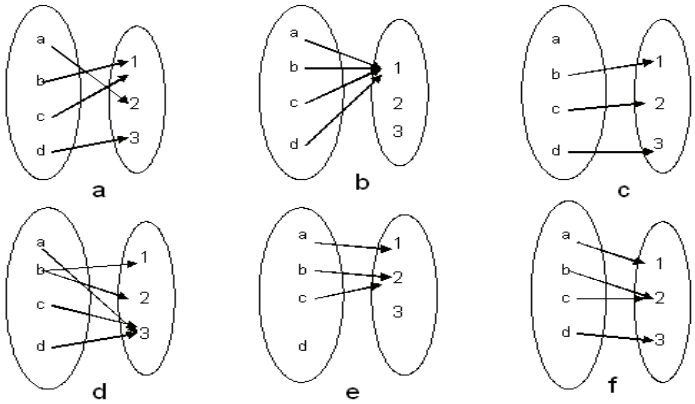
$f(1) = 1^2 = 1,\ f(2) = 2^2 = 4,\ f(3) = 3^2 = 9,\ f(4) = 4^2 = 16$.



x	1	2	3	4
f(x)	1	4	9	16

Exemple :

Care dintre diagramele de mai jos nu reprezintă funcţii şi de ce ?



Rezolvare: Diagrama c) nu reprezintă o funcţie deoarece lui a nu-i corespunde niciun element în codomeniu; Diagrama d) nu reprezintă o funcţie deoarece lui b îi corespunde două elemente în codomeniu; De asemenea diagrama e) nu reprezintă o funcţie deoarece lui d nu-i corespunde niciun element în codomeniu.

Observaţie : Fie $f : A \to B$ şi $x \in A$ un element arbitrar din A. Atunci, **x** se numeşte argumentul funcţiei **f** (sau variabila independentă a funcţiei **f**).

Dacă A şi B sunt mulţimi finite sau A,B=R şi $f : A \to B$, atunci, astfel de funcţii se numesc **funcţii reale** de o variabilă reală sau **funcţii numerice** şi au întodeauna valori finite.

Unele funcţii pot fi definite pe o reuniune de intervale, în moduri diferite pe fiecare interval în parte.

$f : I \cup J \to R,\ f(x) = \begin{cases} f_1(x), x \in I \\ f_2(x), x \in J \end{cases}$. În acest caz, $\mathbf{f_1}$ şi $\mathbf{f_2}$ se numesc **restricţiile funcţiei f.**

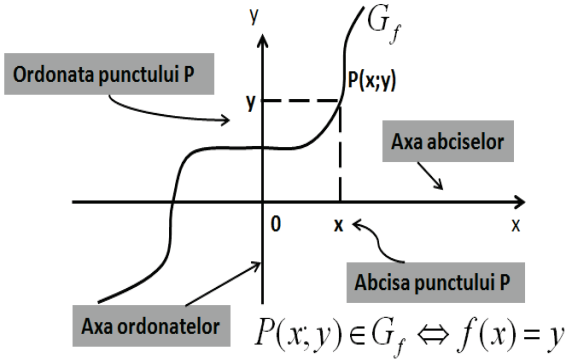
De exemplu,

$f : R \to R,\ f(x) = \begin{cases} -x+4, x \in (-\infty, 1] \\ 2x+1, x \in (1, +\infty) \end{cases}$. Restricţiile în acest caz sunt funcţiile, $f_1(x)= -x+4$ şi $f_2(x)=2x+1$.

Graficul unei funcţii

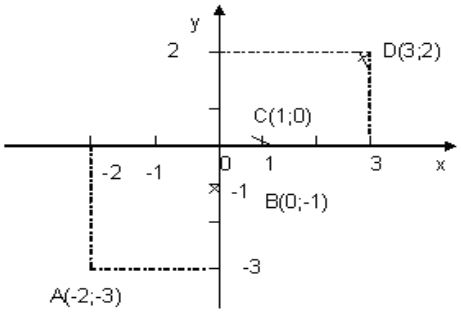
Definiţie : Fie A şi B două mulţimi (finite) de numere reale şi $f: A \to B$. **Graficul** funcţiei f reprezintă mulţimea tuturor punctelor de forma (x, f(x)) unde $x \in A$ iar f(x) este valoarea funcţiei f în punctul x. $G_f = \{(x, f(x)) | x \in A, f(x) \in B\} \subset A \times B$.

Ecuaţia **y=f(x)** se numeşte **ecuaţia graficului funcţiei f**. Reprezentarea grafică a unei funcţii se face într-un **sistem de axe de coordonate** sau sistem de axe ortogonale.



Exemplu: Să se reprezinte grafic funcţia $f: \{-2,0,1,3\} \to R$, f(x)= x-1 ;

Rezolvare: Se determină mulţimea valorilor funcţiei, astfel, f(-2)= -3, f(0)= -1, f(1)=0, f(3)=2 şi se reprezintă într-un sistem de axe de coordonate, punctele: A(-2 ;-3), B(0 ;-1), C(1 ;0), D(3 ;2).



Aşadar, dacă f(x) este definită pe o mulţime finită de puncte atunci graficul lui f(x) este format tot dintr-o mulţime finită de puncte.

Definiţie : Un punct M(a,b) aparţine graficului unei funcţii f, $M(a,b) \in G_f \Leftrightarrow f(a) = b$.

Exemplu: Să se determine $m \in R$ astfel încât punctul A(m;3) să aparţină graficului funcţiei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f(x)=5x-2.

Rezolvare : $A(m;3) \in G_f \Leftrightarrow f(m) = 3 \Rightarrow$ 5m-2=3, adică m=1.

Definiţie : Fie D o mulţime simetrică. O funcţie $f: D \to R$ se numeşte pară dacă $f(-x) = f(x), \ \forall x \in D$ şi se numeşte impară dacă $f(-x) = -f(x), \ \forall x \in D$.

Exemple: Să se studieze paritatea funcţiilor :

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=5x^6-3x^2$; b) $f:R\to R,\ f(x)=2x^3-x$;

Rezolvare : a) $f(-x)=5(-x)^6-3(-x)^2=5x^6-3x^2=f(x)\Rightarrow f$ este funcţie pară ;

b) $f(-x)=2(-x)^3-(-x)\ =-2x^3+x=-(2x^3-x)=-f(x)\Rightarrow f$ este funcţie impară ;

Activitate independentă		**Răspuns**
Să se arate că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x^{2016}+1}{x^2+9}$ este pară.		

Exercitii rezolvate

1. Să se determine $x\in\mathbb{R}$ astfel încât:

a) $A(x-4;6)\in Oy$ **;** **b)** $A(2x+6;1)\in Oy$ **;** **c)** $A(3;x+2)\in Ox$ **;** **d)** $A(-2;4x-8)\in Ox$.

Rezolvare:

a) Pentru ca A să aparţină axei ordonatelor trebui ca abcisa punctului A să fie 0 adică $x-4=0$, de unde rezultă că $x=4$; b) Analog, $2x+6=0\Rightarrow x=-3$; c) Pentru ca A să aparţină axei Ox trebuie ca ordonata punctului A să fie 0 adică $x+2=0\Rightarrow x=-2$; d) Analog, $4x-8=0\Rightarrow x=2$;

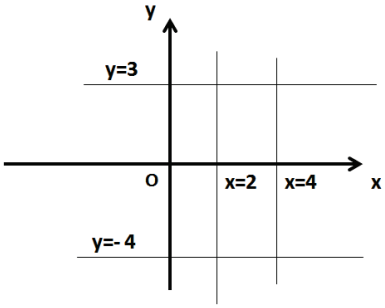
2. Să se reprezinte în plan dreptele de ecuații:

a) $x=4$; **b)** $y=3$; **c)** $x-2=0$; **d)** $y+4=0$; **e)** $2x-5=1$; **f)** $4x-3=2x+9$;

Rezolvare:

a) Dreptele de forma $x=a,\ a\in\mathbb{R}$ sunt drepte care trec prin punctul de abcisă a și sunt paralele cu axa Oy;

b) Dreptele de forma $y=a,\ a\in\mathbb{R}$ sunt drepte care trec prin punctul de ordonată a și sunt paralele cu axa Ox;



c) $x-2=0\Rightarrow x=2$; d) $y+4=0\Rightarrow y=-4$;

e) $2x-5=1\Rightarrow 2x=6\Rightarrow x=3$;

f) $4x-3=2x+9\Rightarrow 2x=12\Rightarrow x=6$.

3. Să se determine imaginea funcției $f:\{-3;-1;0;3\}\to\mathbb{R},\ f(x)=3x+1$;

Rezolvare: Imaginea funcției f sau mulțimea valorilor funcției f este egală cu mulțimea $\mathrm{Im}\,f=\{f(-3);f(-1);f(0);f(3)\}=\{-8;-2;1;10\}$;

4. Să se arate că $f(x)=g(x)$ unde:

a) $f(x)=(x-4)(x+2)$ **și** $g(x)=x^2-2x-8$ **;**

b) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x+2}$ **și** $g(x)=x-2$ **;**

c) $f(x)=\dfrac{x^3-8}{x-2}$ **și** $g(x)=x^2+2x+4$**.**

Rezolvare:

a) Se desfac parantezele rezultând

$f(x)=(x-4)(x+2)=x^2+2x-4x-8=x^2-2x-8=g(x)$**;**

b) Evident, $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x+2}=\dfrac{(x-2)(x+2)}{x+2}=x-2=g(x)$**;**

c) $f(x)=\dfrac{x^3-8}{x-2}=\dfrac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}=x^2+2x+4=g(x)$**;**

5. Să se determine $a,b,c\in\mathbb{R}$ **astfel încât** $f(x)=g(x)$**, unde** $f:[0;3a+8]\to\mathbb{R}$**,** $g:[2b+4;11]\to\mathbb{R}$**,** $f(x)=(4a-6)x+c-2$**,** $g(x)=(2c+4)x+2b-1$**.**

Rezolvare:

$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}0=2b+4\\3a+8=11\\4a-6=2c+4\\c-2=2b-1\end{cases}\Rightarrow b=-2;\ a=1;\ c=-3\text{.}$$

6. Să se arate că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x^6}{x^4+x^2}$ **este o funcție pară.**

Rezolvare:

$f(-x)=\dfrac{(-x)^6}{(-x)^4+(-x)^2}=\dfrac{x^6}{x^4+x^2}=f(x)$**,** rezultă că f(x) este pară pe $\mathbb{R}$.

Exercitii propuse

1. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, f(x)= x²-3x+4. Să se calculeze valoarea funcţiei f în punctele :

a) -1 ; b) 2 ; c) $\dfrac{1}{2}$; d) $\sqrt{2}$;

2. Fie $f:\left\{-\sqrt{2};-1;0;3;\right\}\to R$, f(x)= -2x+3. Să se determine imaginea funcţiei f.

3. Fie $f:\left\{-2;0;\dfrac{1}{2};\sqrt{2};\dfrac{1}{\sqrt{2}};\right\}\to R$, f(x)= x²-3x+2. Să se determine imaginea funcţiei f.

4. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3-1000$. Să se calculeze produsul

$P=f(1)\cdot f(2)\cdot f(3)\cdot....\cdot f(49)\cdot f(50)$

5. Fie $f:\mathbb{N}\to\mathbb{Z},\ f(x)=(-1)^{x+1}+(-2)^{x+2}$. Să se calculeze $f(-1)+f(0)+f(1)$;

6. Să se determine domeniile maxime de definiţie ale funcţiilor :

a) $f_1(x)=\dfrac{x-3}{x+5}$; b) $f_2(x)=\dfrac{x+1}{x^2+3x-4}$; c) $f_3(x)=x^2$; d) $f_4(x)=2x+6$;

7. Să se determine domeniile maxime de definiţie ale funcţiilor :

a) $f(x)=\frac{x+5}{x-4}$; b) $g(x)=\frac{3x}{x^2-8}$; c) $h(x)=\frac{x+2}{x^2-6x+8}$; d) $i(x)=7x-9$;
$j(x)=2\sin x+3\cos x$;

8. Să se determine domeniile maxime de definiţie ale funcţiilor:

a) $f(x)=-6x-3$; b) $f(x)=\sqrt{4x+16}$; c) $f(x)=\frac{2x+1}{x-5}$.

9. Să se determine domeniile maxime de definiţie ale funcţiilor Fie $f:D\to\mathbb{R}$, în următoarele cazuri:

a) $f(x)=\frac{1}{x+2}$; b) $f(x)=\frac{3x-1}{2x-8}$; c) $f(x)=\frac{1}{x^2-9}$; d) $f(x)=\frac{x-1}{x^2+x}$;

e) $f(x)=\frac{x}{x^2+4}$; f) $f(x)=\frac{1}{2x^2-8x}$;

10. Fie $f:D\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x+2}{x+1}$.

a) Să se determine domeniul de definiţie a lui f;

b) Să se calculeze produsul $P=f(0)\cdot f(1)\cdot f(2)\cdot....\cdot f(49)\cdot f(50)$.

c) Să se determine $a\in\mathbb{Z}$ astfel încât $f(a)\in\mathbb{Z}$.

11. Fie funcţiile $f:\{-2;-1;0;1;2\}\to Z$, f(x)=5x+6 şi $g:A\to Z$, g(x)=(a-4)x+2b. Să se determine a şi b astfel încât funcţiile f şi g să fie egale.

12. Fie $f,g:\mathbb{R}\setminus\{-2;2\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x-4}{x+2}$ şi $g(x)=\frac{x^2-6x+8}{x^2-4}$. Să se arate că $f(x)=g(x)$.

13. Să se determine intersecţiile graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\setminus\{4\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2x+8}{x-4}$ cu axele de coordonate.

14. Să se determine coordonatele punctelor de intersecție a graficului funcției f cu axele OX și OY în următoarele cazuri:

a) $f(x)=4x-8$; b) $f(x)=\frac{x-5}{x+1}$; c) $f(x)=\frac{x^2-16}{x+2}$; d) $f(x)=(x-2)(x-4)$;

e) $f(x)=\frac{x^2+4}{x-2}$; f) $f(x)=\frac{x^3-1}{x^2+1}$;

15. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-(a+2)x+a$. Determinați valoarea numărului real a, știind că punctul $A(-2;5)$ aparține graficului funcției f;

16. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^{10}+(1-a)x^2+5$. Să se arate că punctul $M(-1;6)$ aparține graficului funcției f, pentru orice număr real a;

17. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-2x+8$. Să se calculeze distanţa de la punctul O(0,0) la graficul funcţiei f.

18. Să se arate că graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^{2016}+4x^2+2015$ nu intersectează axa OX.

19. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x+4, & x\le a\\ -x+6, & x\rangle a\end{cases}$. Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(4)+a^2-4a+1=0$.

20. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^3}{x^2+1}$. Demonstrați că $f(-x)=-f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

21. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3+5x.$ Să se arate că $f(-x)=-f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}.$

22. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^{2015}+3x.$ Calculați

$f(-5)+f(-4)+f(-3)+....+f(0)+.....+f(5).$

23. Să se arate că următoarele funcții sunt impare:

a) $f(x)=x^3+8x;$ b) $f(x)=x^5+4x;$ c) $f(x)=\dfrac{x^{2015}}{x^2+9};$ d) $f(x)=x+\dfrac{1}{x};$

24. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^4+3x^2+2015$. Să se arate că $f(\sqrt{2})=f(-\sqrt{2})$.

25. Să se arate că funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{2x^{2013}-x}{x^3}$ este o funcție pară.

26. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}2x^2-4, & x\le 0\\ x+2, & x\rangle 0\end{cases}$.

a) Să se calculeze $f(0),\ f(2),\ f(4),\ f(\sqrt{2}),\ f(-2),\ f\left(\dfrac{1}{3}\right),\ f(-\dfrac{1}{2});$

b) Să se calculeze $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+.....+f(20);$

c) Să se calculeze $f(1)+f(2)+f(2^2)+f(2^3)+.....+f(2^{10});$

27. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=4x-12$. Să se calculeze $f(1)\cdot f(2)\cdot f(3)\cdot.....\cdot f(20)$.

28. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x+4$. Să se calculeze $f(1)+f(3)+f(3^2)+.....+f(3^{10})$.

29. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea $3f(x)-f(-x)=2x^4+6x^2$. Să se demonstreze că f este o funcție pară.

4.2 Funcții monotone

Definiţie : O **funcţie** $f:D\to\mathbb{R},\ D\subseteq\mathbb{R}$ **se numeşte strict crescătoare** pe D (respectiv **strict descrescătoare** pe D $\Leftrightarrow(\forall)x_1,x_2\in D, x_1\langle x_2\Rightarrow f(x_1)\langle f(x_2)$ (respectiv $f(x_1)\rangle f(x_2)$).
O funcţie care este strict crescătoare sau strict descrescătoare pe D se mai numeşte **strict monotonă**.

Definiţie : O **funcţie** $f:D\to\mathbb{R},\ D\subseteq\mathbb{R}$ **se numeşte crescătoare** pe D (respectiv **descrescătoare** pe D $\Leftrightarrow(\forall)x_1,x_2\in D, x_1\langle x_2\Rightarrow f(x_1)\le f(x_2)$ (respectiv $f(x_1)\ge f(x_2)$).
O funcţie care este crescătoare sau descrescătoare pe D se mai numeşte **monotonă.**

Exemplu: Funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=4x+5$ este crescătoare pe $\mathbb{R}$ deoarece din $x_1\le x_2\Rightarrow 4x_1\le 4x_2\Rightarrow 4x_1+5\le 4x_2+5\Rightarrow f(x_1)\le f(x_2)$;

Definiţie: O **funcţie** $f:D\to\mathbb{R},\ D\subseteq\mathbb{R}$ **se numeşte constantă** $\Leftrightarrow(\forall)x_1,x_2\in D\Rightarrow f(x_1)=f(x_2)$.

Exemplu : $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=5;$

În general, pentru a determina monotonia unei funcţii se utilizează semnul **‘’raportului de variaţie’’** aşa cum rezultă din următoarea teoremă:

Teoremă: O **funcţie** $f:D\to\mathbb{R}$, $D\subseteq R$ **se numeşte strict crescătoare** pe D (respectiv **strict descrescătoare** pe D $\Leftrightarrow(\forall)x_1,x_2\in D\Rightarrow\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\rangle 0$ (respectiv $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\langle 0$).

Exemplu: Să se studieze monotonia funcţiei $f:[2;+\infty)\to R$, $f(x)=\sqrt{2x-4}$;

Rezolvare : Fie $x_1,x_2\in[2;+\infty)$.

Din $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{\sqrt{2x_1-4}-\sqrt{2x_2-4}}{x_1-x_2}=\frac{2(x_1-x_2)}{(x_1-x_2)(\sqrt{2x_1-4}+\sqrt{2x_2-4})}=\frac{2}{\sqrt{2x_1-4}+\sqrt{2x_2-4}}\rangle 0\Rightarrow$

f este strict crescătoare ;

Observaţie: Dacă o funcţie $f:A\cup B\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}f_1(x),x\in A\\f_2(x),x\in B\end{cases}$ este monotonă şi pe A şi pe B, nu rezultă obligatoriu că f este monotonă şi pe $A\cup B$.

Exemplu: Să se studieze monotonia funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}3x+1,\ x\le 4\\x+4,\ x\rangle 4\end{cases}$.

Rezolvare : Se observă că restricţiile lui f sunt funcţii strict crescătoare. Restricţia $f_1(x)=3x+1$ este strict crescătoare pe $(-\infty;4]$, iar restricţia $f_2(x)=x+4$ este de asemenea strict crescătoare pe $(4;+\infty)$. Pentru a putea spune că f este strict crescătoare pe întreg domeniul de definiţie R, trebuie verificată definiţia, astfel

$\Leftrightarrow(\forall)x_1,x_2\in R,x_1\le 4\langle x_2\Rightarrow f(x_1)\le f(4)\langle f(x_2)$. În cazul nostru, $f(x_1)\le f(4)=13$ şi ar trebui ca $13=f(4)\langle f(5)=9$ ceea ce este fals, aşadar, f nu este strict crescătoare pe R.

Activitate independentă	**Răspuns**
Să se studieze monotonia funcţiei $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$.	

Exercitii rezolvate

1. Să se studieze monotonia funcţiei $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x^3}$;

Rezolvare : Fie $0\langle x_1\langle x_2$. Atunci, $\Rightarrow x_1^3\langle x_2^3\Rightarrow\frac{1}{x_1^3}\rangle\frac{1}{x_2^3}\Rightarrow$ f este strict descrescătoare ;

Analog şi pentru $x_1\langle x_2\langle 0$ sau $x_1\langle 0\langle x_2$. Funcţia f este strict descrescătoare pe $R\setminus\{0\}$.

2. Să se studieze monotonia funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **în situaţiile :**

a) $f(x)=4x-2$; **b)** $f(x)=-6x+2$; **c)** $f(x)=(a^2+3)x-4$;

Rezolvare:

a) Utilizând definiţia, fie $x_1,x_2\in R$ astfel încât $x_1\langle x_2$. Rezultă, $4x_1\langle 4x_2\Rightarrow 4x_1-2\langle 4x_2-2\Rightarrow$ f este strict crescătoare pe R; Se poate folosi semnul funcţiei de gradul întâi;

b) Analog, se observă că pentru x_1, x_2 fixaţi, astfel încât $x_1\langle x_2$ se obţine $-6x_1\rangle -6x_2\Rightarrow -6x_1+2\rangle -6x_2+2$

Rezultă că f este strict descrescătoare pe R.

c) Conform semnului funcţiei de gradul întâi, cum a^2+3 este pozitiv, rezultă că funcţia este strict crescătoare ;

3. Să se studieze monotonia funcţiilor:

a) $f:(1;+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1}{x-1}$; **b**) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3+2x+4$;

c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}2x+1,\ x\le 2\\ x+4,\ x\rangle 2\end{cases}$ **;** **d**) $f:R\to R,\ f(x)=\begin{cases}x-4,\ x\le 3\\ -2x+4,\ x\rangle 3\end{cases}$ **.**

Rezolvare**: a)** Fie $1\langle x_1\langle x_2\Rightarrow\dfrac{1}{x_1+1}\rangle\dfrac{1}{x_2+1}$, f este strict descrescătoare ;

b) $x_1\langle x_2\Rightarrow x_1^3\langle x_2^3\Rightarrow x_1^3+2x_1+4\langle x_2^3+2x_2+4\Rightarrow\ f(x_1)\langle f(x_2)\Rightarrow$ f este strict crescătoare ;

c) Se arată că f este strict crescătoare pe $(-\infty;2]$ şi $(2;+\infty]$ deoarece restricţiile $f_1(x) = 2x+1$ şi $f_2(x)= x+4$ sunt funcţii de gradul întâi ; Pentru a arăta că f este strict crescătoare pe întreg domeniul de definiţie mai trebuie verificată şi relaţia: $x_1\le 2\langle x_2\Rightarrow f(x_1)\le f(2)\langle f(x_2)$.

Fie $x_1\le 2\langle x_2\Rightarrow f(x_1)\le f(2)=5\langle 6\langle f(x_2)$ aşadar, f este strict crescătoare pe R.

d) Restricţiile funcţiei f sunt $f_1(x)= x - 4$ care este strict crescătoare pe $(-\infty;3]$ şi $f_2(x)= -2x + 4$ care este strict descrescătoare pe $(3;+\infty)$ prin urmare, **f** nu este monotonă pe **R**;

4. Să se determine monotonia funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=|x-4|$**.**

Rezolvare: Mai întâi se explicitează funcţia rezultând:

$|x-4|=\begin{cases}x-4,\ x-4\ge 0,\ x\ge 4\\ -x+4,\ x-4\langle 0,\ x\langle 4\end{cases}$;

Aşadar, $\forall x_1,x_2\in(-\infty;4),\ x_1\langle x_2\Rightarrow -x_1+4\rangle -x_2+4\Rightarrow f(x_1)\rangle f(x_2)$, f este descrescătoare pe $(-\infty;4)$.

Pentru $\forall x_1,x_2\in[4;\infty),\ x_1\langle x_2\Rightarrow x_1-4\langle x_2-4\Rightarrow f(x_1)\langle f(x_2)$, f este strict crescătoare pe $(4;\infty)$.

5. Să se studieze monotonia funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$**, cu proprietatea** $2f(x-2)+f(1-x)=x-15$**.**

Rezolvare:

Se fac notațiile $f(x-2)=u,\ f(1-x)=v$, rezultând $2u+v=x-15$. După ce facem transformarea $1-x\to x-2\Rightarrow x\to 3-x\Rightarrow\ \ 2v+u=-x-12$. Rezolvând sistemul $\begin{cases}2u+v=x-15\\ u+2v=-x-12\end{cases}$, se obține $u=x-6$, adică $f(x-2)=x-6$. Mai departe se face notația $x-2=t\Rightarrow x=t+2$ și se obține funcția $f(t)=t-4$. Cum argumentul unei funcții se ia cu x, obținem că funcția dată este $f(x)=x-4$ iar monotonia se face ușor rezultând că f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

Exercitii propuse

1. Fie $f:\{1;2;3\}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3-2x^2+x-3.$ Să se arate că f este crescătoare.

2. Să se arate că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=4x+5$ este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

3. Să se studieze monotonia funcţiei $f:[2;\infty)\to\mathbb{R}_+$, în cazurile:

a) $f(x)=\sqrt{2x-4}$; b) $f(x)=\sqrt{3x-6}$.

4. Să se studieze monotonia funcţiei $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{x^3}$;

5. Să se studieze monotonia funcţiilor:

a) $f:(1;+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{x-1}$; b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3+2x+4$;

c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}2x+1, & x\le 2\\ x+4, & x\rangle 2\end{cases}$; d) $f:R\to R,\ f(x)=\begin{cases}x-4, & x\le 3\\ -2x+4, & x\rangle 3\end{cases}$.

6. Să se studieze monotonia funcţiei $f:\mathbb{R}\setminus\{-2\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x-3}{2x+4}$.

7. Să se determine monotonia funcţiilor:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=|x+5|$. b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=|2x-4|$;

c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=|x+3|+|x+2|$;

8. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât f să fie monotonă, unde:

a) $f(x)=\begin{cases}x-3, & x\in(-\infty;1]\\ mx+4, & x\in(1;\infty)\end{cases}$; b) $f(x)=\begin{cases}-3x+2, & x\in(-\infty;2]\\ mx-5, & x\in(2;\infty)\end{cases}$.

Ştiaţi că ... ?

Matematicianul şi filozoful francez **Rene Descartes** (31.03.1596 – 11.02.1650) este considerat părintele geometriei analitice și reformatorul algebrei.

Încă de la vîrsta de 8 ani era poreclit „filozoful” căci dădea dovadă de o bună stăpânire a cunoștințelor iar de la 14 ani era preocupat de studii matematice.

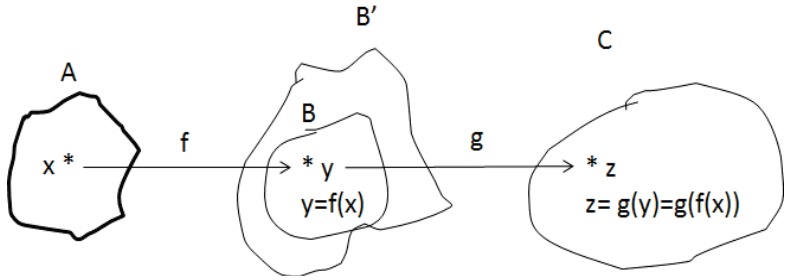
Cartea “La Geometrie”(1637) este fundamentală pentru geniul său matematic, căci aici, este primul matematician care introduce noțiunea de variabilă și folosește metoda coordonatelor prin care problemele de geometrie se reduc la probleme de algebră. A folosit literele alfabetului latin pentru notații , constantele cu primele litere iar variabilele cu ultimele litere. Astfel, geometria analitică pe care el a fondat-o este în strânsă legătură cu sistemul de coordonate carteziane - de la numele lui, pe care el l-a introdus și unde a notat axele cu Ox și Oy. Astfel, un punct din plan se reprezintă prin două coordonate, abcisa pe Ox și ordonata pe Oy. Luând un segment al dreptei ca fiind segment unitate, a descoperit că pentru orice punct de pe dreaptă se poate asocia un număr real, introducând astfel axa numerelor reale ceea ce era o noutate pentru acel timp. ([6], p.34)

4.3 Compunerea funcțiilor

Definiţie: Fie $f:A\to B$ şi $g:B\to C$ două funcţii. Prin **compunerea funcţiei g cu funcţia f** se înţelege funcţia $g\circ f:A\to C$ (şi citim g compus cu f) cu proprietatea că $(g\circ f)(x)=g(f(x)),\ \forall x\in A$.

Exemplu: Fie $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x+3,\ g(x)=x^2+4$. Atunci,
$(g\circ f)(x)=g(f(x))=f(x)^2+4=(2x+3)^2+4=4x^2+12x+13$ iar
$(f\circ g)(x)=f(g(x))=2g(x)+3=2(x^2+4)+3=2x^2+11$.

Observaţie:
Dacă $f:A\to B,\ g:B'\to C$ atunci , are sens $(g\circ f)(x)$ dacă şi numai dacă $B=B'$.



Proprietăți:
1. Compunerea funcțiilor nu este comutativă: $f\circ g\neq g\circ f$;
2. Compunerea funcțiilor este asociativă: $(f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h)$.

Activitate independentă		**Răspuns**
Fie funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{x+1}{x-1}$. Să se calculeze $(f\circ f)(x)$.		$(f\circ f)(x)=x$

Exercitii rezolvate

1. Se consideră funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x-1,\ g(x)=x^2-2x$. **Să se determine funcțiile:** $(f\circ g)(x),\ (g\circ f)(x),\ (f\circ f)(x),\ (g\circ g)(x)$.
Rezolvare:
$(f\circ g)(x)=f(g(x))=4g(x)-1=4(x^2-2x)-1=4x^2-8x-1$;
$(g\circ f)(x)=g(f(x))=f^2(x)-2f(x)=(4x-1)^2-2(4x-1)=16x^2-16x+3$;
$(f\circ f)(x)=f(f(x))=4f(x)-1=4(4x-1)-1=16x-5$;
$(g\circ g)(x)=g(g(x))=g^2(x)-2g(x)=(x^2-2x)^2-2(x^2-2x)=x^4-4x^3+2x^2+4x$.

2. Se **consideră funcția** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3-2x$. **Să se calculeze** $(f\circ f\circ f\circ f)(1)$.
Rezolvare:

Se calculează mai întâi $f(1)=-1$ iar $f(-1)=1$. Atunci,
$(f\circ f\circ f\circ f)(1)=(f\circ f\circ f)(f(1))=(f\circ f\circ f)(-1)=(f\circ f)(1)=f(-1)=1.$

3. Să se determine funcțiile $(f\circ g)(x),\ si\ (g\circ f)(x)$ **dacă** $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$**,**
$f(x)=-2x+6,\ g(x)=\begin{cases}x+4,\ x\le 0\\ 4x-2,\ x\rangle 0\end{cases}$.
Rezolvare:
$(g\circ f)(x)=g(f(x))=\begin{cases}f(x)+4,\ f(x)\le 0\\ 4f(x)-2,f(x)\rangle 0\end{cases}=\begin{cases}-2x+10,\ x\ge 3\\ -8x+22,\ x\langle 3\end{cases}$.
$(f\circ g)(x)=f(g(x))=-2g(x)+6=\begin{cases}-2(x+4)+6,\ x\le 0\\ -2(4x-2)+2,\ x\rangle 0\end{cases}=\begin{cases}-2x-2,\ x\le 0\\ -8x+10,\ x\rangle 0\end{cases}$.

4. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=3x-2.$ **Să se determine funcția** $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **astfel încât** $(g\circ f)(x)=3x-2$**.**
Rezolvare: Cum funcția $(g\circ f)(x)=x+4$ este de gradul întâi înseamnă că și funcția g este de gradul întâi, adică de forma $g(x)=ax+b$. Din
$g(f(x))=3x-2\Rightarrow a(3x-2)+b=3x-2\Rightarrow\ 3ax-2a+b=3x-2\Rightarrow$
$3a=3\Rightarrow a=1\Rightarrow -2+b=-2\Rightarrow b=0\Rightarrow f(x)=x$.

5. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x-8m.$ **Să se determine** $m\in\mathbb{R}$ **astfel încât să aibă loc egalitățile:**
$(f\circ f)(x)=x+16,\ \forall x\in\mathbb{R};$
Rezolvare: $f(f(x))=x+16\Leftrightarrow x-8m-8m=x+16\Rightarrow -16m=16\Rightarrow m=-1.$

6. Fie $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax+6,\ g(x)=x+2m,\ a,m\in\mathbb{R}.$ **Să se determine** $a,m\in\mathbb{R}$ **astfel încât** $(f\circ g)(-1)=18,\ (g\circ 1)(1)=-6.$
Rezolvare: $g(-1)=-1+2m\Rightarrow(f\circ g)(-1)=f(-1+2m)=a(-1+2m)+6=-a+2am+6$.
Din $(f\circ g)(-1)=18\Rightarrow -a+2am+6=18\Rightarrow -a+2am=12$. (1)
$f(1)=a+6\Rightarrow g(f(1))=g(a+6)=a+6+2m$. Din
$(g\circ 1)(1)=-6\Rightarrow a+2m=-12\Rightarrow m=-6-\frac{a}{2}$ și înlocuind în relația (1) se obține:
$-a-12a-a^2=12\Rightarrow a^2+13a+12=0$. Se obține $a\in\{-12;-1\}$.

Exercitii propuse

1. Fie $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^2-4x+5$ și $g(x)=x-3$. Să se calculeze $(f\circ g)(x)$, $(g\circ f)(x)$.

2. Fie $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x-1$ și $g(x)=\begin{cases}-2x+3, & x\le 0\\ x+2, & x\rangle 0\end{cases}$. Să se calculeze $(f\circ g)(2)$, $(g\circ f)(0)$.

3. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x-2$. Să se determine funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, astfel încât $f(g(x))=8x-10$.

4 . Fie $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x}$. Să se calculeze

$(f\circ f)(-4)+(f\circ f)(-3)+...(f\circ f)(-1)+(f\circ f)(1)+...+(f\circ f)(3)+(f\circ f)(4)$.

5. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x+m+2$ .Să se determine $m\in\mathbb{R}$, astfel încât $(f\circ f)(x)=9x+8$.

6. Fie $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=3x-2,\ g(x)=x^2+x+3$. Să se calculeze
$(f\circ g)(x),(g\circ f)(x),(f\circ g)(1),(g\circ f)(2)$.

7. Fie $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=4x+3,\ g(x)=x^2-3x+1$. Să se calculeze
$(f\circ g)(x),(g\circ f)(x),(f\circ g)(3),(g\circ f)(1)$.

8.Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=3x-2.$ Să se determine funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ astfel încât:

a) $(g\circ f)(x)=x+4,\ \forall x\in\mathbb{R};$; b) $(g\circ f)(x)=3x^2-8,\ \forall x\in\mathbb{R}.$

9. Fie $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Să se rezolve ecuația $(g\circ f)(x)=0$ în cazurile:

a) $f(x)=x+5,\ g(x)=x-3;$ b) $f(x)=2x-1,\ g(x)=4x+6;$

c) $f(x)=x^2+2x,\ g(x)=x-2;$ d) $f(x)=x-2,\ g(x)=x^2+3x+1;$

e) $f(x)=x^2-1,\ g(x)=x^2+2x;$

10. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Să se rezolve ecuația $(f\circ f)(x)=0$ în cazurile:

a) $f(x)=5x-10;$ b) $f(x)=4x+6;$ c) $f(x)=x^2-2x$.

11. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x-4m.$ Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât să aibă loc egalitățile:

$(f\circ f\circ f)(x)=x+2m-6,\ \forall x\in\mathbb{R};$

12. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Să se calculeze $(\underbrace{f\circ f\circ.....\circ f\circ f}_{n\ de\ f})(x)$, unde:

a) $f(x)=x+2;$ b) $f(x)=3x+1;$

13. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Dacă $(\underbrace{f\circ f\circ f\circ.....\circ f}_{n\ de\ f})(x)=8x-14,\ \forall x\in\mathbb{R},n\in\mathbb{N}.$ Să se calculeze

$f(1)$.

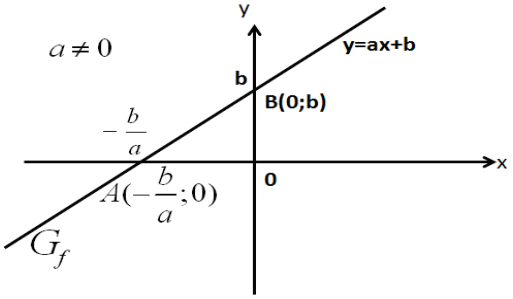
5. FUNCȚIA DE GRADUL I

5.1 Funcția de gradul I. Definiție. Graficul funcției

Definiție: Se numește **funcție de gradul întâi**, o funcție de forma $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax+b,\ a,b\in\mathbb{R}$. Dacă a = 0, atunci funcția se numește constantă.

Graficul funcției $f:A\to B$ **este mulțimea** $G_f=\{(x;y)\,|\,x\in A,\ y=f(x)\}\subset A\times B.$

Intersecția graficului funcției de gradul întâi cu axele de coordonate, OX, OY: y=ax+b



$\cap OX: y=0\Rightarrow x=-\frac{b}{a}\Rightarrow A(-\frac{b}{a},0)$

$\cap OY: x=0\Rightarrow y=b\Rightarrow B(0,b)$

$G_f\cap Ox=A(-\frac{b}{a};0)$,

$G_f\cap Oy=B(0;b)$

Exemplu. Să se reprezinte grafic funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$**, f(x)= x+3;**

Rezolvare : Graficul unei funcţii definite pe R este o dreaptă, de aceea pentru a trasa graficul unei astfel de funcţii este necesar sa determinăm doar două puncte prin care să treacă dreapta.

Asociem lui f(x), ecuaţia graficului lui f. $f(x)\ \underline{\underline{not}}\ y$, **y=ax+b**

Este suficient să se facă intersecţia cu axele de coordonate după modelul :

y=ax+b

$\cap OX: y=0\Rightarrow x=-\frac{b}{a}\Rightarrow A(-\frac{b}{a},0)$

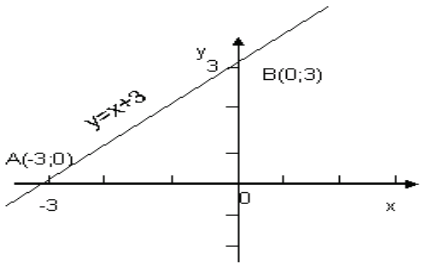
$\cap OY: x=0\Rightarrow y=b\Rightarrow B(0,b)$

y=x+3

$\cap OX: y=0\Rightarrow x=-3\Rightarrow A(-3,0)$

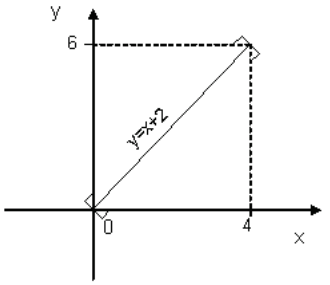
$\cap OY: x=0\Rightarrow y=3\Rightarrow B(0,3)$

Atunci , graficul este



Exemplu: Să se reprezinte grafic funcţia $f:[-2;4]\to\mathbb{R}$**, f(x)= x+2.**

Rezolvare : În situaţia în care funcţia f este definită pe un interval I, avem următoarele situaţii :
Dacă I este mărginit, atunci graficul este un segment iar dacă I este nemărginit la un capăt şi mărginit la celălalt atunci graficul este o semidreaptă.
În cazul exerciţiului nostru , graficul este un segment, de aceea este suficient să cunoaştem valorile funcţiei la capetele segmentului.



Condiţia ca trei puncte $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$ să fie coliniare:
se determină funcţia f(x)=ax+b, al cărui grafic este determinat de două puncte şi se verifică dacă şi cel de-al treilea punct aparţine graficului lui f;
cu ajutorul lungimilor distanţelor dintre puncte , se verifică dacă lungimea segmentului cel mai mare este egală cu suma lungimilor celorlalte două segmente.

Exemplu : Să se arate că punctele A(-3 ;-1), B(2 ;4), C(3 ;5) sunt coliniare.
Metoda I. Se determină funcţia de gradul întâi, f(x) = ax+b, al cărei grafic trece prin două puncte de exemplu, prin punctele A şi B.
$\begin{cases} A(-3;-1)\in G_f \\ B(2;4)\in G_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(-3)=-1 \\ f(2)=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3a+b=-1 \\ 2a+b=4 \end{cases} \Rightarrow a=1, b=2$**.** Rezultă, f(x)= x+2.
În continuare, se verifică dacă cel de-al treilea punct C(3 ;5) aparţine graficului funcţiei f. Cum f(3)=3+2=5, rezultă că A, B, C sunt coliniare.
Metoda a II-a. Dacă suma lungimilor a două segmente determinate de cele trei puncte este egală cu lungimea celui de-al treilea segment, atunci punctele sunt coliniare.
Să arătăm că AB+BC=AC. Se calculează fiecare segment cu formula distanţei dintre două puncte $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$: **AB=** $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$, $AB=\sqrt{5^2+5^2}=5\sqrt{2}$**,**
$BC=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$**,** $AC=\sqrt{6^2+6^2}=6\sqrt{2}$ **;**

Activitate independentă	**Răspuns**
Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(m-3)x+4m-5$. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ ştiind că punctul P(m+3; 7) aparţine graficului lui f;	$m\in\{-7;3\}$

Exercitii rezolvate

1. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=5x-30$**. Să se calculeze** $f(1)\cdot f(2)\cdot f(3)\cdot.....\cdot f(20)$**.**
Rezolvare: Deoarece $5x-30=0\Rightarrow x=6\Rightarrow f(1)\cdot f(2)\cdot f(3)\cdot.....\cdot f(20)=0$;

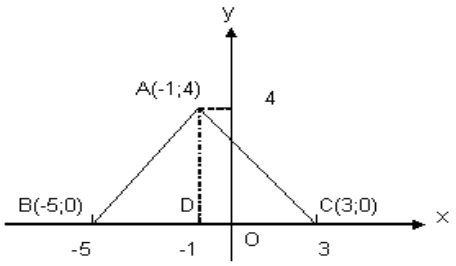
2. Să se determine $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax+b$ **ştiind că** $\frac{f(1)+f(2)}{2}=4$ **şi** $f(3)=10$**.**

Rezolvare: $3a+2b=8,\ b=-2\Rightarrow f(x)=4x-2$.

3. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$**,** $f(x)=2x+1$**. Să se determine** $a\in\mathbb{R}$ **astfel încât punctul** $P(a^2,4a+1)$ **să se afle pe graficul funcţiei f.**

Rezolvare: . $P(a^2,4a+1)\in G_f\Leftrightarrow f(a^2)=4a+1\Rightarrow 2a^2+1=4a+1\Rightarrow a\in\{0,2\}$.

4. Se dau punctele A(-1;4), B(-5;0), C(3 ;0). Se cere :
a) Să se reprezinte într-un sistem de axe de coordonate ;
b) Să se calculeze lungimea segmentului AB ;
c) Să se calculeze aria triunghiului ABC ;
d) Să se calculeze unghiul făcut de dreapta AB cu sensul pozitival axei OX ;
e) Să se determine funcţia f(x) =ax+b al cărei grafic trece prin punctele A şi B ;
f) Să se determine $m\in R$ astfel încât punctele A, B şi E(-7 ;m) să fie coliniare ;
g) Să se determine punctul de intersecţie al graficelor funcţiilor f(x) şi $g:R\to R$**,** g(x)= -2x+6, unde f(x) este funcţia determinată la punctul e) ;
h) Să se rezolve ecuaţia $f(\frac{3x-2}{4})+f(x+2)=0$ unde f(x) este funcţia determinată la punctul e);
i) Să se determine funcţia $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, h(x)=ax+b ştiind că h(x+3)=f(x+2)-3x+f(-1), unde f este funcţia determinată la punctul e) ;
Rezolvare : a)



b) $AB=\sqrt{(-1+5)^2+4^2}=\sqrt{16+16}=4\sqrt{2}$ **;** c) $A_{ABC}=\frac{BC\cdot h}{2}=\frac{8\cdot 4}{2}=16$ **;**

d) Se observă că triunghiul ABC este dreptunghic isoscel în A, atunci măsura unghiului ABC este 45^0 ;

e) $\begin{cases}A(-1;4)\in G_f\\ B(-5;0)\in G_f\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f(-1)=4\\ f(-5)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-a+b=4\\ -5a+b=0\end{cases}\Rightarrow a=1,b=5$. Rezultă, f(x)=x+5 ;

f) La punctul e) s-a găsit ecuaţia dreptei ce trece prin punctele A şi B, atunci ,
$E(-7;m)\in G_f\Leftrightarrow f(-7)=m\Rightarrow m=-2;$
Pentru m= -2, punctele A, B şi E sunt coliniare;

g) $\begin{cases} y = x+5 \\ y = -2x+6 \end{cases} \Rightarrow x+5 = -2x+6 \Rightarrow x = \frac{1}{3},\ y = \frac{16}{3}$; Punctul de intersecţie al graficelor funcţiilor f şi g este $P(\frac{1}{3};\frac{16}{3})$;

h) $\frac{3x-2}{4}+5+x+7=0$, 7x+46=0, $\Rightarrow x = -\frac{46}{7}$;

i) h(x+3)= -2x+11. Notăm x+3=t, atunci x=t-3 şi se obţine g(t)= -2t+17, sau g(x)= -2x+17.

5. Fie funcţiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b,\ g(x)=bx+a-3$. Determinaţi numerele reale a şi b astfel încât punctul A(2;3) să fie punctul de intersecţie a graficelor celor două funcţii.

Rezolvare: Cum $A = G_f \cap G_g$ rezultă $f(2)=3$ şi $g(2)=3$. Din cele două rezultă $2a+b=3,\ 2b+a-3=3$. Din $\begin{cases} 2a+b=3 \\ a+2b=6 \end{cases} \Rightarrow a=0, b=3$.

6. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-2)^2-(x-3)(x+3)-5$. Să se determine o funcţie $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ astfel încât $g(x+2)=f(x)+3$.

Rezolvare: Se aduce mai întâi f(x) la forma cea mai simplă.

$f(x)=x^2-4x+4-x^2+9-5=-4x+8.$

Cum $f(x)+3=-4x+8+3=-4x+11$ este o funcţie de gradul întâi rezultă că şi funcţia g(x) este de gradul întâi. Fie $g(x)=ax+b,\ a,b\in\mathbb{R}$. Atunci, $g(x+2)=a(x+2)+b$. Din $g(x+2)=f(x)+3$ rezultă $ax+2a+b=-4x+11 \Rightarrow a=-4$ şi din $2a+b=11 \Rightarrow b=19$. Aşadar, $g(x)=-4x+19$.

7. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} 4x-1, & x<-1 \\ ax+4, & x\geq -1 \end{cases}$.

a) Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât punctul $A(2,-8)$ să aparţină graficului lui f;

b) Pentru a = -6, să se determine mulţimea $M=\{x\in\mathbb{R}\,|\,f(x)\geq -2\}$.

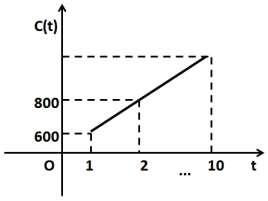
Rezolvare:

a) $A(2,-8)\in G_f \Leftrightarrow f(2)=-8 \Rightarrow 2a+4=-8 \Rightarrow 2a=-12 \Rightarrow a=-6;$

b) Pentru a = -6, $f(x)\geq -1 \Leftrightarrow -6x+4\geq -2 \Rightarrow -6x\geq -6 \Rightarrow x\leq 1$. Aşadar, $M=(-\infty;1]$.

APLICAŢII PRACTICE

O cultură de bacterii creşte după o lege liniară de forma $c(t)=at+b,\ a,b\in\mathbb{R}$, exprimată în funcţie de timpul t care este dat în ore. Astfel, după o oră sunt 600 de bacterii iar după două ore sunt 800 de bacterii. Să se determine câte bacterii sunt după 10 ore ?



Rezolvare:

Cum $c(t)=at+b,$ atunci cînd t = 1 h rezultă $600=a+b$, iar când t = 2 h rezultă $800=2a+b$. Scăzând ecuațiile se obține a = 200 iar din prima ecuație se obține b = 400. Așadar, legea de creștere este de forma
$c(t)=200t+400$. Peste 10 ore vor fi $c(10)=200\cdot 10+400=2400$ bacterii.

Exercitii propuse

1. Fie $f:\{-3;-2;-1;0;1;2\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-2x+3$. Să se determine imaginea lui f.

2. Fie $f:\{-2;-1;0;1;2\}\to\mathbb{Z}$, f(x)= -3x+2. Să se determine imaginea funcţiei f.

3. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1.$ Să se calculeze
$f(-2)+f(-1)+f(0)+f(1)$;

4. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}2x+1, & x\in(-\infty;1)\\ x^2-3x+5, x\in[1;+\infty)\end{cases}$. Să se calculeze f(-2) + f(2).

5. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-4$. Să se calculeze $f(-10)\cdot f(-9)\cdot\ldots\cdot f(0)\cdot\ldots f(9)\cdot f(10)$.

6. Se consideră funcţia, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $f(x)=x-3.$ Să se calculeze
$f(-4)\cdot f(-3)\cdot\ldots\cdot f(3)\cdot f(4)$;

7. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+10$. Să se determine
$f(-10)\cdot f(-9)\cdot\ldots\cdot f(0)\cdot\ldots\cdot f(9)\cdot f(10)$.

8. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x-1$. Să se calculeze $f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(50)$.

9. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+3$. Să se calculeze $f(1)+f(2)+f(2^2)+f(2^3)+\ldots+f(2^{30})$.

10. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+5$. Să se calculeze
$f(-5)+f(-4)+\ldots+f(0)+\ldots\cdot f(4)+f(5)$.

11. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}-5x+2, & x\le 0\\ 3x+4\ , & x\rangle 0\end{cases}$.

a) Să se calculeze $f(-3)+f(0)+f(3)$; b) Să se calculeze
$f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(20)$;

12. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}-x+3, & x\langle 1\\ 2x+5, & x\ge 1\end{cases}$. Să se calculeze :

a) $f(-\frac{1}{2})+f(\sqrt{3}-1)+f(\frac{3}{2})$; b) $f(1)+f(3)+f(3^2)+\ldots+f(3^{20})$.

13. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}2x-3, & x\in Q\\ \dfrac{1}{x-1}, & x\in R\setminus Q\end{cases}$. Să se calculeze $\dfrac{f(\frac{1}{2})+f(2)}{f(1+\sqrt{2})-f(1-\sqrt{2})}$;

14. Să se determine funcţia de gradul întâi $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$, ştiind că $f(1)=2$ şi $f(-2)=-7$.

15. Să se determine $a,b,m,n\in\mathbb{R}$ astfel încât funcţiile $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ definită prin f(x)=mx+4 şi $g:[0;1]\to\mathbb{R}$ definită prin g(x)=3x+n să fie egale.

16. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$. Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ ştiind că graficul lui f intersectează axa OX în -2 şi axa OY în 2.

17. Să se determine punctele de intersecţie ale graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x-6$ cu axele de coordonate.

18. Să se determine $m\in R$ astfel încât punctul A(m;3) să aparţină graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, f(x)=5x-2.

19. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(m+2)x+2m-3$. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ ştiind că punctul A(-1; 4) aparţine graficului lui f;

20. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x+8$. Să se determine numărul real $m\in\mathbb{R}$ astfel încât punctul $P(m+4,16)$ să aparţină graficului funcţiei f.

21. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=mx-2$. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ ştiind că punctul A(m+1; 0) aparţine graficului lui f.

22. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(m+4)x-4m+3$; Să se determine $m\in R$ astfel încât $(2;2-m^2)\in G_f$;

23. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1$. Să se determine punctul care aparţine graficului funcţiei f şi are abcisa egală cu ordonata.

24. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât punctul $A(-1;\sqrt{2})$ să aparţină graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(a-3)x+4$.

25. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x-6$. Să se determine punctul de pe graficul funcţiei f care are abcisa egală cu ordonata.

26. Să se determine punctele de intersecţie ale graficului funcţiei f(x) cu axele de coordonate Ox, Oy, în cazurile:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-6$;
b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x(2-x)+x(x+4)$;
c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=|x-3|$;
d) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4$;
e) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x+2)^2$;
f) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-6x$;
g) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-5)^2+(x-5)$.

27. Să se determine punctele de intersecţie dintre graficele funcţiilor $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, în cazurile:

a) $f(x)=3x-7$, $g(x)=x+3$;
b) $f(x)=2x-1$, $g(x)=3x+6$;
c) $f(x)=x-2$, $g(x)=x^2-4x+8$;
d) $f(x)=x+3$, $g(x)=x^2+x$;

28. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(2m-4)x+m-3$. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât graficul lui f să fie paralel cu axa OX.

29. Să se determine numărul real $a\in\mathbb{R}$ astfel încât punctele $A(a-3;-4)$, $B(1;a)$, $C(2;a+3)$ să fie coliniare.

5.2 Ecuaţii reductibile la ecuaţii de gradul întâi

Reactualizăm o serie de cunoştinţe anterioare:

Definiţie: Se numeşte **ecuaţie**, o expresie algebrică cu una sau mai multe necunoscute şi în care apare o singură dată semnul egal.

Exemplu: (x-2)(y+1)=2 este o ecuație cu necunoascutele x și y;

Definiție: Un număr " a „ este **soluţie** a unei ecuaţii dacă înlocuind pe x cu „ a " , obţinem o propoziţie adevărată.

Exemplu: Ecuația 4x+12=8 are soluția -1 deoarece punând în loc de x pe -1 se obține -4+12 = 8.

Definiție: Se numesc **ecuaţii echivalente**, ecuaţiile care admit aceeaşi mulţime de soluţii.

Exemplu: Ecuațiile 2x+6=0 și $(x+3)^2=0$ sunt echivalente deoarece au aceeași soluție și anume **x= - 3**;

Definiție: Se numeşte **domeniu al unei ecuaţii** , mulţimea în care ecuaţia admite soluţii.

Dacă soluţiile unei ecuaţii nu sunt din domeniu, atunci spunem că **ecuaţia nu are soluţii** în acel domeniu. De exemplu, ecuaţia 3x+8=2, având soluţia x= **-2**, spunem că nu are soluţii în mulţimea $\mathbb{N}$, deoarece -2 nu aparţine lui $\mathbb{N}$ **,** dar are soluţie în $\mathbb{Z}$.

Definiție: A rezolva o ecuație înseamnă a determina mulțimea soluțiilor acesteia dintr-o mulțime dată.

Activitate independentă		**Răspuns**
Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(x-3)^2-(x+4)^2$. Să se rezolve ecuația f(x)=0.		$S=\left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

Exercitii rezolvate

1. Determinaţi $m\in\mathbb{R}$ astfel încât ecuaţia $(3m+5)x-6(m+1)=0$ să admită soluţia $x=3$.

Rezolvare:

$x=3$ este soluţia ecuaţiei $(3m+5)x-6(m+1)=0$, aceasta înseamnă că 3 verifică ecuaţia dată: $(3m+5)\cdot 3-6(m+1)=0\Rightarrow 3m=-9\Rightarrow m=-3$.

2. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $4x+8=24$; **b)** $3(x-4)-2=x+6$; **c)** $\frac{x-4}{2}-\frac{x}{3}+1=\frac{2x-1}{6}$;

d) $\frac{x+2}{x-3}=\frac{x+4}{x-2}$; **e)** $|x|=6$; **f)** $|2x-5|=3$;

g) $2\sqrt{3}x-\sqrt{12}=\sqrt{3}x+3\sqrt{3}$; **h)** $3\sqrt{2}(x-\sqrt{2})-2\sqrt{2}=x-3\sqrt{2}$;

i) $(x-4)^2+2(x+1)^2-3(x-2)(x+2)=0$; **j)** $\frac{x+9}{x^2-9}-\frac{x+1}{x+3}+\frac{x}{x-3}=0$;

Rezolvare:

a) $4x+8=24\Rightarrow 4x=24-8\Rightarrow 4x=16\,|:4\Rightarrow x=4$; $S=\{4\}$.

b) $3(x-4)-2=x+6\Rightarrow 3x-12-2=x+6\Rightarrow 3x-x=6+12+2\Rightarrow 2x=20\,|:2\Rightarrow x=10$;

$S=\{10\}$

c) $\overset{3)}{\frac{x-4}{2}}-\overset{2)}{\frac{x}{3}}+\overset{6)}{1}=\frac{2x-1}{6}\Rightarrow 3(x-4)-2x+6=2x-1\Rightarrow 2x=20\Rightarrow x=10;\quad S=\{10\}$

d) $\frac{x+2}{x-3}=\frac{x+4}{x-2}\Rightarrow (x+2)(x-2)=(x-3)(x+4)\Rightarrow\ x^2-4=x^2+4x-3x-12\Rightarrow\ x=8;\ S=\{8\}$

e) $|x|=6\Rightarrow x=\pm 6;\ \ S=\{-6;6\}$.

f) $|2x-5|=3\Rightarrow 2x-5=3\Rightarrow x=4$ *sau* $2x-5=-3\Rightarrow x=1;\ S=\{1;4\}$

g) $2\sqrt{3}x-\sqrt{12}=\sqrt{3}x+3\sqrt{3}\Rightarrow 2\sqrt{3}x-\sqrt{3}x=3\sqrt{3}+2\sqrt{3}\Rightarrow -\sqrt{3}x=5\sqrt{3}\Rightarrow x=-5;\ S=\{-5\}$.

h)

$3\sqrt{2}(x-\sqrt{2})-2\sqrt{2}=x-3\sqrt{2}\Rightarrow x(3\sqrt{2}-1)=6-\sqrt{2}\Rightarrow x=\frac{6-\sqrt{2}}{3\sqrt{2}-1}=\frac{(6-\sqrt{2})(3\sqrt{3}+1)}{17}=\sqrt{2}$.

i) $(x-4)^2+2(x+1)^2-3(x-2)(x+2)=0\Rightarrow x^2-8x+16+2x^2+4x+2-3x^2+12=0\Rightarrow$

$-4x+30=0\Rightarrow x=\frac{30}{4}=\frac{15}{2}.\quad S=\left\{\frac{15}{2}\right\}$.

j) $\frac{x+9}{x^2-9}-\frac{x+1}{x+3}+\frac{x}{x-3}=0\Rightarrow x+9-(x+1)(x-3)+x(x+3)=0\Rightarrow\ 6x=-12\Rightarrow x=-2;$

$S=\{-2\}$.

3. Fie funcţiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x+4,\ g(x)=3x-2.$ **Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei** $3f(x)-2g(x)=7.$

Rezolvare: $3f(x)-2g(x)=7\Leftrightarrow 3x+12-6x+4=7\Rightarrow\ -3x=-9\Rightarrow x=3$**.** $S=\{3\}$

4. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ **ecuația** $\frac{2x+1}{3x}=\frac{4x+2}{6x-1}$**.**

Rezolvare: Din $(2x+1)(6x-1)=3x(4x+2)\Rightarrow\ 12x^2-2x+6x-1=12x^2+6x\Rightarrow\ x=-\frac{1}{2}.$

$S=\left\{-\frac{1}{2}\right\}$**.**

5. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ **ecuația** $\frac{x+1}{3x-12}-\frac{1}{2}=\frac{x+3}{2x-8}$**.**

Rezolvare: După aducerea la acelaşi numitor (numitorul comun este 6(x-4)) rezultă $2x+2-3x+12=3x+9\Rightarrow\ -4x=-5\Rightarrow x=\frac{5}{4}$**.** $S=\left\{\frac{5}{4}\right\}$.

6. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=|3x+6|+|4-x|$**. Să se rezolve ecuația** $f(x)=10,\ \forall x\in\mathbb{R}$**.**

Rezolvare: $f(x)=10\Leftrightarrow|3x+6|+|4-x|=10$. După explicitarea modulelor care se poate vedea direct pe tabel, se rezovă ecuația pe fiecare interval obținut.

x		**- 2**		**4**	
3x+6	**-3x-6**	**0**	**3x+6**		**3x+6**
4-x	**x- 4**		**x -4**	**0**	**4- x**

Pentru $x\in(-\infty;-2)\Rightarrow -3x-6+x-4=10\Rightarrow -2x=20\Rightarrow x=-10$.

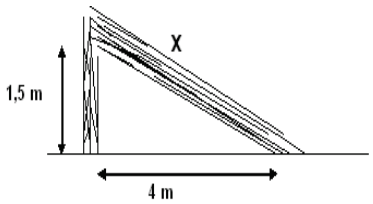
Pentru $x\in[-2;4)\Rightarrow 3x+6+x-4=10\Rightarrow 4x=8\Rightarrow x=2$.

Pentru $x \in [4;\infty) \Rightarrow 3x+6+4-x=10 \Rightarrow 2x=0 \Rightarrow x=0 \notin [4;\infty)$.

Aşadar, singurele soluţii sunt -10 şi 2. $S=\{-10;2\}$

APLICAŢII PRACTICE

1. Un stâlp a fost rupt în timpul unei furtuni la o înălţime de 1,5 m faţă de sol. Vârful său atinge acum pământul la o distanţă de 4 m faţă de baza stâlpului. Care a fost înălţimea stâlpului ?



Rezolvare:

Dacă notăm cu x porţiunea din stâlp a cărei lungime nu o cunoaştem , atunci, conform teoremei lui Pitagorase obţine:

$x^2=1,5^2+4^2 \Rightarrow x=\sqrt{18,25} \approx 4,27m$. Înălţimea stâlpului era h = 1,5 + x = 5,67 m.

2. Un vas cu capacitatea de 48 litri este plin cu apă la temperatura de 50^0. Câtă apă din vas trebuie înlocuită cu apă la temparatura de 80^0 pentru a obţine un vas plin cu apă la temperatura de 70^0 ?

Rezolvare: Se realizează următorul tabel în care se pun în evidenţă cantităţile de apă şi temperatura corespunzătoare lor precum şi a amestecului final. Notăm cu x cantitatea de apă având temperatura de 80^0 care trebuie înlocuită.

			Amestec
temperatura	80^0	50^0	70^0
Cantitatea	X litri	48 – X litri	48 litri

$70^0=\dfrac{80^0\cdot x+50^0\cdot(48-x)}{48} \Rightarrow 70\cdot 48=80x+2400-50x \Rightarrow 960=30x \Rightarrow x=32$ litri de apă la temperatura de 80^0 care trebuie înlocuită.

Exercitii propuse

1. Determinaţi $m \in \mathbb{R}$ astfel încât ecuaţiile de mai jos să admită soluţiile indicate în dreapta:

a) $4mx-2+m=8$; $x=1$;

b) $(m-3)(x+3)-2(x+1)=6$; $x=-2$;

c) $mx^2+3x^2=(2m+6)x^2$; $x=2$;

d) $|mx+2|=4$; $x=1$;

e) $x^2-mx+6=0$; $x=6$;

2. Să se arate că următoarele ecuaţii sunt echivalente:

a) $3x-6=x+4$ și $\frac{2x-2}{4}=2$;

b) $(x-4)(x-2)=0$ și $|x-3|=1$;

c) $x^2=25$ și $(x-5)(x+5)=0$;

3. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât următoarele ecuații să fie echivalente:

a) $2(x-5)-m=x+6$ și $3x+8=x-10$; b) $x^2=m$ și $(x-4)(x+4)=0$;

4. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $6x-2=16$; b) $4(x-3)-5=x+16$; c) $\frac{x-3}{2}-\frac{x-1}{4}+2=\frac{x+1}{8}$;

d) $\frac{x-4}{x+2}=\frac{x-3}{x+1}$; e) $|x|=10$; f) $|7x-2|=12$;

g) $2\sqrt{2}x-\sqrt{8}=\sqrt{2}x+5\sqrt{2}$; h) $(x-3)^2+2(x+2)^2-3(x+4)(x-4)=0$;

j) $\frac{x+6}{x^2-4}-\frac{x-2}{x-2}+\frac{x+1}{x+2}=0$;

5. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $4(2+x)-3(2x-3)=2(8-x)$.

6. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x-4$. Să se rezolve ecuația $\left[f(x)\right]^2+2=x$;

7. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x-1$. Să se determine funcția $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, știind că $h(x+3)=f(x+1)-3x+f(-1)$.

8. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=(x-2)^2-(x-3)(x+3)-5$.

a) Să se rezolve ecuația: $f(x+3)+f(2x+1)=f(2)$;

b) Să se determine o funcție $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ știind că $g(x+2)=f(x)+3$;

c) Să se determine funcția $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ astfel încât $g(f(x))=2x-6$.

9. Se consideră punctele $A(-3;0),\ B(4;4)$.

a) Să se determine funcția al cărei grafic trece prin punctele A și B;

b) Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât punctele $A,\ B,\ M(12;m)$ să fie coliniare;

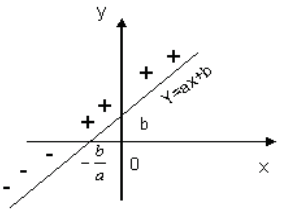
c) Să se determine funcția $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ știind că $h(x+4)=f(x+1)-2x+f(-1)$.

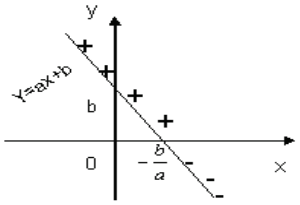
10. Să se arate că ecuația $\frac{x-3}{x+1}+\frac{2}{x^2-1}-\frac{x}{x-1}=0$ nu are soluții în $\mathbb{R}$.

5.3 Monotonia și semnul funcției de gradul întâi

Monotonia funcției de gradul întâi

Definiție: Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax+b,\ a,b\in\mathbb{R}$. Dacă $a\rangle 0$, atunci f(x) este **crescătoare** în sensul că atunci când x parcurge mulțimea numerelor reale, valorile funcției cresc. Dacă $a\langle 0$, atunci f(x) este **descrescătoare**.





Exemplu: Să se determine monotonia următoarelor funcții:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=5x-6$**;** **b)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-6x+10$**.**

Rezolvare:

a) funcția este crescătoare deoarece $a=5\ \rangle\ 0$; b) funcția este strict descrescătoare deoarece $a=-6\ \langle\ 0$.

Teoremă: Fie $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ **o funcție de gradul întâi.**

Dacă f este crescătoare atunci $f(a)\ \le\ f(x)\ \le\ f(b)$**;**

Dacă f este descrescătoare atunci $f(b)\ \le\ f(x)\ \le\ f(a)$**.**

Semnul funcției de gradul întâi

Definiție: A studia **semnul unei funcții** înseamnă a indica mulțimea de puncte în care funcția este pozitivă sau negativă.

f(x)= ax+b	$-\infty$				$-\frac{b}{a}$					$+\infty$
$a\rangle 0$	-	-	-	-	0	+	+	+	+	+
$a\langle 0$	-	+	+	+	0	-	-	-	-	-

În concluzie, semnul funcției de gradul întâi este:

f(x)= ax+b	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
	Semn contrar semnului lui a		0	semnul lui a	

Așadar, pentru $x\in\left(-\infty;-\frac{b}{a}\right)$**, dacă** $a\rangle 0$ atunci funcția are valori negative $(ax+b\langle 0)$ iar dacă $a\langle 0$ atunci funcția are valori positive $(ax+b\rangle 0)$

Exemplu: Să se determine semnul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=4x-20$**;**

Rezolvare: Se rezolvă mai întâi ecuația f(x)=0, adică 4x-20=0 de unde rezultă x=5.

Așadar, $f(x)\ge 0\Leftrightarrow x\in[5;\infty)$ **și** $f(x)\langle 0\Leftrightarrow x\in(-\infty;5)$**.**

Activitate independentă		**Răspuns**
Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(5-a)x+8$. Să se studieze monotonia lui f în funcție de a.		

1. Să se studieze monotonia funcției $f:R\to R$ în raport cu parametrul m :

a) f(x) = (m+2)x +1; **b) f(x) = (5-m)x + 4;** **c)f(x) = (m+2)x+m;**

Rezolvare: a) Dacă $m+2\rangle 0$ adică $m\rangle -2\Rightarrow$ f este strict crescătoare;

Dacă $m\langle -2\Rightarrow$ f este strict descrescătoare ;

b) Dacă $5-m\rangle 0$ adică $m\langle 5\Rightarrow$ f este strict crescătoare;

Dacă $m\rangle 5\Rightarrow$ f este strict descrescătoare ;

c) La fel ca la a) deoarece contează doar coeficientul lui x în studiul monotoniei funcției de gradul întâi ;

2. Să se determine semnul funcțiilor: a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-2x-8$ **; b)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=4x-12$ **;**

Rezolvare: a)

x	$-\infty$				-4								$+\infty$
f(x)= -2x-8	+	+	+	+	+	0	-	-	-	-	-	-	-

b)

x	$-\infty$				3							$+\infty$
f(x)= 4x-12	-	-	-	-	-	0	+	+	+	+	+	+

3. Se consideră funcția $f:[-3;2]\to\mathbb{R},\ f(x)=4x-2$. Să se determine minimul funcției.

Rezolvare: Cum funcția este strict crescătoar, atunci, minimul funcției este egal cu $f(-3)=4\cdot(-3)-2=-14.$

4. Se consideră funcția $f:[-1;4]\to\mathbb{R},\ f(x)=-3x+4$. Să se determine maximul funcției.

Rezolvare : Cum funcția este strict descrescătoare, atunci, maximul funcției este egal cu $f(-1)=(-3)\cdot(-1)+4=7.$

5. Să se rezolve inecuațiile:

a) $\frac{4-x}{x+2}\geq 0$**;** **b)** $(x-3)(2-x)\leq 0$**;** **c)** $\frac{6+x}{x}\langle 2$**;** **d)** $\frac{x^2-4x}{x^2-9}\geq 0$**;**

Rezolvare:

a) Fie $f:\mathbb{R}\setminus\{-2\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{4-x}{x+2}$. A rezolva inecuația dată este echivalent cu a determina semnul funcției. Pentru aceasta realizăm tabelul de mai jos, unde pe fiecare rînd se stabilește semnul funcției de la numărător și numitor iar pe ultimul rînd se găsește semnul funcției. Așadar, $\frac{4-x}{x+2}\geq 0\Leftrightarrow x\in(-2;4]$

X	$-\infty$			-2				4			$+\infty$
4-X	+	+	+	+	+	+	+	0	-	-	-
X+2	-	-	-	-	-	0	+	+	+	+	+
f(x)	-	-	-	|	+	+	+	0	-	-	-

b) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=(x-3)(2-x)$.

X	$-\infty$	2	3	$+\infty$
X-3	- - - - - - - - - - - - -	0	+ + + + +	
2-X	+ + + + +	0	- - - - - - - - - - - - -	
f(x)	- - - - -	0	+ + + + +	0 - - - - -

Conform semnelor din tabel se obține că $(x-3)(2-x)\le 0\Leftrightarrow x\in(-\infty;-2]\cup[3;\infty)$.

c) $\frac{6+x}{x}\langle 2\Leftrightarrow\frac{6+x}{x}-2\langle 0\Leftrightarrow\frac{6+x-2x}{x}\langle 0\Leftrightarrow\frac{6-x}{x}\langle 0$. Mai departe se obține că $x\in(-\infty;0)\cup(6;\infty)$.

d) $\frac{x^2-4x}{x^2-9}\ge 0\Leftrightarrow\frac{x(x-4)}{(x-3)(x+3)}\ge 0.$ După ce se stabilește semnele de la numărător și numitor, din semnul funcției $f(x)=\frac{x^2-4x}{x^2-9}$ se obține că $x\in(-\infty;-3)\cup[0;3)\cup[4;\infty)$.

6. Să se determine semnul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=|2x-4|-|x+3|$**.**

Rezolvare: Se explicitează mai întâi modulele, $|2x-4|=\begin{cases}-2x+4, x\langle 2\\ 2x-4,\ x\ge 2\end{cases}$,

$|x+3|=\begin{cases}-x-3, x\langle -3\\ x+3,\ x\ge -3\end{cases}$. Aşadar, $f(x)=|2x-4|-|x+3|=\begin{cases}-x+7, x\langle -3\\ -3x+1, x\in[-3;2)\\ x-7, x\ge 2\end{cases}$

Semnul funcţiei înseamnă să studiem semnul fiecărei restricţii pe domeniul ei de definiţie : $-x+7\rangle 0,\forall x\in(-\infty;-3)$, $-3x+1\rangle 0,\forall x\in\left[-3;\frac{1}{3}\right)$şi $-3x+1\langle 0,\forall x\in\left[\frac{1}{3};2\right)$, $x-7\langle 0,\forall x\in[2;7)$ şi $x-7\rangle 0,\forall x\in[7;\infty)$

Exercitii propuse

1. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel înt funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=(3m-6)x-2m+8$ să fie constantă.

2. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=(m-3)x+6$. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât f să fie crescătoare pe $\mathbb{R}$

3. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=(2m+4)x+3$. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât f să fie crescătoare pe $\mathbb{R}$.

4. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=(-3m+9)x-m+2$. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât f să fie crescătoare pe $\mathbb{R}$.

5. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=(2m-4)x+2$. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât f să fie descrescătoare pe $\mathbb{R}$.

6. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=(-6m+12)x-3$. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât f să fie descrescătoare pe $\mathbb{R}$.

7. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(8m-4)x+m+1$. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât f să fie descrescătoare pe $\mathbb{R}$.

8. Fie $f:[-3;3]\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1$. Să se arate că $-5\le f(x)\le 7$.

9. Fie $f:[-2;4]\to\mathbb{R}$, $f(x)=-3x+2$. Să se arate că $-10\le f(x)\le 8$.

10. Se consideră funcţia $f:[-2;7]\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x-2$. Să se determine mulţimea valorilor funcţiei f.

11. Să se studieze monotonia funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ în situaţiile :

a) f(x) = 4x – 2 ; b) f(x) = – 6x+2 ; c) f(x) = (a^2+3)x – 4 ;

12. Să se studieze monotonia funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ în raport cu parametrul m :

a) f(x) = (m+2)x +1; b) f(x) = (5-m)x + 4; c) f(x) = (m+2)x+m;

13. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(m+5)x+3$. Pentru m = - 8, să se studieze monotonia şi semnul funcţiei f.

14. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(m-3)x+2m-5$ să fie:

a) strict crescătoare; b) strict descrescătoare; c) constantă.

15. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(3-9m)x+6$. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât f să fie crescătoare

16. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât funcţia $f(x)=\dfrac{m+3}{4-2m}\cdot x+7$ să fie strict crescătoare.

17. Să se determine semnul funcţiei, $f:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{3x-6}{x+1}$

18. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuaţiile: a) $4x-7\le -5x+11$; b) $3(2x-4)-8\ge x+10$;

c) $\dfrac{x-3}{6}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{x}{3}\rangle\dfrac{2x+1}{3}$; d) $|7-8x|\le 9$; e) $\dfrac{4}{x+2}\le\dfrac{6}{3-x}$;

19. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x-1$. Să se rezolve inecuaţia:

$f(x)\le 3\cdot f(x+1)-5$;

20. Să se stabilească semnul funcţiilor:

a) $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x}$;

b) $f:\mathbb{R}\setminus\{3\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$;

c) $f:\mathbb{R}\setminus\{1;2\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)(x-2)}$;

d) $f:\mathbb{R}\setminus\{5\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x+3}{x-5}$;

e) $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{(x+2)(x+4)}{x-1}$;

f) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-4)(x+2)$.

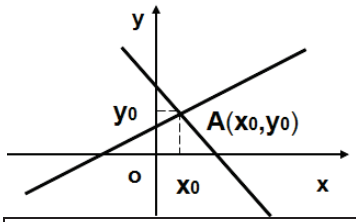
5.4 Sisteme de ecuații

Definiţie: Forma generală a unui sistem de două ecuaţii liniare cu două necunoscute este $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$, $a,a',b,b',c,c' \in \mathbb{R}$;
Geometric, fiecare ecuaţie a sistemului reprezintă ecuaţia unei drepte.

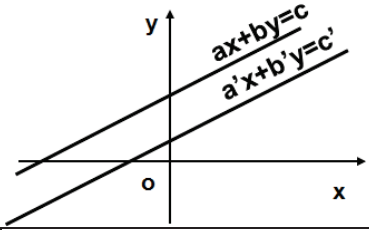
Definiţie: Perechea ordonată (x_0, y_0) este o **soluţie** a sistemului, dacă punând în loc de x, respectiv y pe x_0 respectiv y_0 se obţin propoziţii adevărate în cadrul sistemului:
$\begin{cases} ax_0+by_0=c \\ a'x_0+b'y_0=c' \end{cases}$

Exemplu: Perechea (1;2) este o soluţie a sistemului $\begin{cases} 3x-y=1 \\ 2x+3y=8 \end{cases}$ deoarece $\begin{cases} 3\cdot 1-2=1 \\ 2\cdot 1+3\cdot 2=8 \end{cases}$

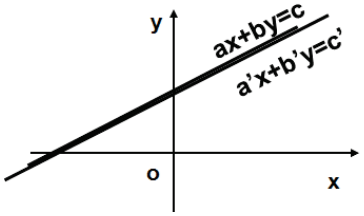
Definiţie: Un sistem admite **soluţie unică** dacă între coeficienţii sistemului există relaţia $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$. Geometric, soluţia sistemului este dată de punctul de intersecţie al celor două drepte ce caracterizează sistemul.



Definiţie: Un sistem nu admite **nicio soluţie** dacă între coeficienţii sistemului există relaţia $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$. Geometric, ecuaţiile sistemului reprezintă ecuaţiile a două drepte paralele.



Definiţie: Un sistem admite o **infinitate de soluţii** dacă între coeficienţii sistemului există relaţia $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$. Geometric, ecuaţiile sistemului reprezintă două drepte confundate adică ce se suprapun.



Rezolvarea în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ a sistemelor de două ecuaţii liniare cu două necunoscute

Sisteme de forma $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$, $a,a',b,b',c,c'\in\mathbb{R}$;

Pentru a rezolva un sistem de două ecuaţii liniare cu două necunoscute înseamnă a determina necunoscutele care apar în cadrul sistemului.

Se pot folosi metoda substituţiei, metoda reducerii sau metoda grafică.

Metoda substituţiei

$$\begin{cases} x+y=4 \\ 5x-2y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4-x \\ 5x-2(4-x)=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4-x \\ 5x-8+2x=-1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=4-x \\ 7x=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4-x \\ x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases} \Rightarrow S=\{(1;3)\}.$$

Metoda substituţiei presupune rezolvarea unui sistem de două ecuaţii liniare cu două necunoscute procedând astfel:

1. Se scoate o necunoscută dintr-o ecuaţie în funcţie de cealaltă;

2.Se înlocuieşte necunoscuta scoasă în cealaltă ecuaţie obţinându-se o componentă a soluţiei sistemului;

3. Cealaltă componentă se obţine după ce se revine la substituţia făcută.

Metoda reducerii

$$\begin{cases} x-3y=2 \\ 2x+y=11 \end{cases} \Big|\cdot 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3y=2 \\ 6x+3y=33 \end{cases}$$

(+) $7x=35\Rightarrow x=5$

Din prima ecuaţie rezultă,

$$5-3y=2\Rightarrow -3y=-3\Rightarrow y=1\Rightarrow S=\{(5;1)\}.$$

A rezolva un sistem prin metoda reducerii presupune :

1. Înmulţirea convenabilă a fiecărui termen dintr-o ecuaţie sau din ambele ecuaţii cu acelaşi număr; 2. Adunarea sau scăderea membru cu membru a celor două ecuaţii pentru a elimina una din necunoscute; 3. După ce se determină una din necunoscute, se înlocuieşte în cealaltă ecuaţie.

Activitate independentă	**Răspuns**
Să se determine $m,n\in\mathbb{R}$ astfel încât sistemul $\begin{cases} 2x-(m+3)y=0 \\ 4x+ny=10 \end{cases}$ să admită soluţia $(-2;2)$	$m=-5,$ $n=9$

Exercitii rezolvate

1. Să se rezolve sistemele de ecuaţii: a) $\begin{cases} 2x+y=3 \\ 4x-2y=-2 \end{cases}$ **; b)** $\begin{cases} x+2y=1 \\ 2x+5y=4 \end{cases}$

Rezolvare: a) Se foloseşte metoda reducerii: $\begin{cases} 2x+y=3 \quad \mid \cdot 2 \\ 4x-2y=-2 \end{cases}$; $S=\left\{\left(\frac{1}{2};2\right)\right\}$

$(+) \quad 8x=4 \Rightarrow x=\frac{1}{2} \Rightarrow y=2$

b) Se foloseşte metoda substituţiei: Din x + 2y = 1 rezultă x = 1- 2y şi înlocuind în a doua ecuaţie se obţine: y = 2 după care se află x = -3; $S=\{(-3;2)\}$.

2. Să se determine coordonatele punctului de intersecţie a dreptelor de ecuaţii :
$(d_1): \ 2x+3y+7=0$ **şi** $(d_2): \ 3x-4y+2=0$ **;**

Rezolvare: A determina coordonatele punctului de intersectie a dreptelor înseamnă să rezolvăm sistemul $\begin{cases} 2x+3y+7=0 \\ 3x-4y+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3y=-7 \mid \cdot 4 \\ 3x-4y=-2 \mid \cdot 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x+12y=-28 \\ 9x-12y=-6 \end{cases} \Rightarrow$

$17x=-34 \Rightarrow \ x=-2 \ \Rightarrow y=-1$. Aşadar, punctul de intersecţie este $A(-2;-1)$.

3. Să se determine numărul real m ştiind că dreptele de ecuaţii $(d_1): \ 5x+4y-2=0$ **şi** $(d_2): \ mx+2y+3=0$ **sunt paralele.**

Rezolvare:

Dreptele sunt paralele dacă şi numai dacă $\frac{5}{m}=\frac{4}{2}\neq\frac{-2}{3} \Rightarrow m=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$.

4. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ **astfel încât sistemul** $\begin{cases} (m-2)x+2y=3 \\ 6x+(m+2)y=1 \end{cases}$**, să aibă soluţie unică**

Rezolvare:

Sistemul are soluţie unică dacă şi numai dacă dreptele de ecuaţii date se intersectează într-un singur punct adică $\frac{m-2}{6}\neq\frac{2}{m+2}$. Pentru a determina pe m, rezolvăm mai întâi ecuaţia $\frac{m-2}{6}=\frac{2}{m+2} \Rightarrow m^2-4=12 \Rightarrow m^2=16 \Rightarrow m=\pm 4$. Soluţia ca sistemul să aibă soluţie unică este $m\in\mathbb{R}-\{-4;4\}$.

5. *Să se rezolve sistemul: $\begin{cases} xy=12^2 \\ yz=6^2 \\ zx=4^2 \end{cases}$ **.**

Rezolvare: Din $(xyz)^2=12^2\cdot 6^2\cdot 4^2 \Rightarrow xyz=\pm 12\cdot 6\cdot 4$. Din aceasta şi din fiecare ecuaţie a sistemului rezultă $S=\{(8;18;2),(-8;-18;-2)\}$

6. *Să se rezolve sistemul: $\begin{cases} x^2-y^2=3 \\ x^2+y^2=15^2 \end{cases}$ **.**

Rezolvare: Prin adunarea ecuațiilor rezultă

$2x^2 = 18 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3 \Rightarrow y^2 = 6 \Rightarrow y = \pm\sqrt{6}.$

$S = \left\{\left(3;\sqrt{6}\right),\left(3;-\sqrt{6}\right),\left(-3;\sqrt{6}\right),\left(-3;-\sqrt{6}\right)\right\}.$

APLICAȚII PRACTICE

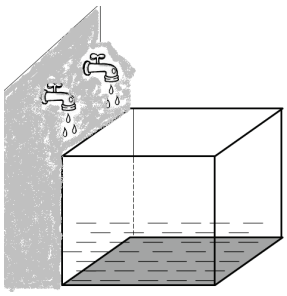
1. Un bazin este umplut de la două robinete, unul cu apă rece și altul cu apă caldă. În timp ce robinetul cu apă caldă este deschis 5 minute, cel de apă rece este deschis 6 minute iar în bazin se strâng 120 l. Dacă apa caldă curge 2 minute și apa rece curge 3 minute, atunci în bazin se strâng 54 l. Câți litri de apă curg într-un minut din fiecare robinet.

Rezolvare:

Pentru a rezolva problema se notează necunoscutele problemei cu x – debitul în litri pe minut al robinetului de apă caldă și cu y debitul robinetului de apă rece (în l/min). Se obține astfel un sistem de două ecuații liniare cu două necunoscute.

$$\begin{cases} 5x+6y=120 \\ 2x+3y=54 \end{cases}\Big|\bullet(-2) \Leftrightarrow \begin{cases} 5x+6y=120 \\ -4x-6y=-108 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x+6y=120 \\ x=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=12\ l/\min \\ y=10\ l/\min \end{cases}.$$

2. Pentru sitemul de răcire al unui autovehicul pentru a evita înghețul apei în blocul motor se folosește un amestec de apă distilată cu antigel cu densitatea 1,6 g /cm^3 . Dacă aceasta are densitatea de 1,1 g/cm^3, atunci se evită înghețarea până la temperatura de -10^0 C. Câți litri de antigel sunt necesari la această temperatură pentru a obține 30 litri de amestec ?



Rezolvare.

Această problemă presupune notarea celor două necunoscute care se cer și anume, notăm cu x cantitatea (în litri) de antigel și cu y cantitatea (în litri) de apă distilată, obținându-se sitemul:

$$\begin{cases} x+y=30 \\ 1,6x+y=1,1\bullet 30 \end{cases}\Big|\bullet(-1) \Leftrightarrow \begin{cases} -x-y=-30 \\ 1,6x+y=33 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ 1,6x+y=33 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=5\ l \\ y=25\ l \end{cases}.$$

Rezolvă singur

Un amestec de metan (CH_4) și etilenă (C_2H_4) ocupă un volum de 100 cm^3. Combustia completă a celor două gaze dă 180 cm^3 de $CO2$. Care este compoziția amestecului în volume ?

Exercitii propuse

1. Să se determine numărul real m astfel încât sistemul $\begin{cases} 2x+4y=-8 \\ x+my=1 \end{cases}$ să admită soluția $(-2;-1)$.

2. Să se rezolve sistemele de ecuații:

a) $\begin{cases} x+3y=-1 \\ 2x+4y=-4 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x+y=2 \\ 3x+2y=5 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 2x+3y=-1 \\ x+4y=2 \end{cases}$; d) $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ x-2y=6 \end{cases}$;

e) $\begin{cases} 2x+3y=-4 \\ 3x-y=8 \end{cases}$; f) $\begin{cases} 4x+y=-1 \\ 2x+3y=7 \end{cases}$; g) $\begin{cases} x+3y=5 \\ 3x-2y=-7 \end{cases}$; h) $\begin{cases} 2x-y=-2 \\ 3x-2y=-1 \end{cases}$;

i) $\begin{cases} x-2y=5 \\ 3x+4y=-5 \end{cases}$; j) $\begin{cases} 2x+4y=2 \\ x-2y=-7 \end{cases}$; k) $\begin{cases} 3x+y=-3 \\ x+2y=4 \end{cases}$; l) $\begin{cases} x+2y=-1 \\ 2x-4y=14 \end{cases}$.

3. Să se determine coordonatele punctului de intersecție a dreptelor de ecuații :

a) $(d_1)\colon\ 2x-y-8=0$ și $(d_2)\colon\ 3x+2y+2=0$;

b) $(d_1)\colon\ 2x+y+2=0$ și $(d_2)\colon\ 3x+4y-7=0$;

c) $(d_1)\colon\ 2x+y+4=0$ și $(d_2)\colon\ x-2y+7=0$;

d) $(d_1)\colon\ 2x+4y+2=0$ și $(d_2)\colon\ x+2y+1=0$;

4. Să se determine funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax+b$ al cărei grafic trece prin punctele :

a) $A(1;-1),\ B(2;1)$; b) $A(1;5),\ B(-2;-1)$; c) $A(1;-1),\ B(-1;5)$;

d) $A(2;4),\ B(-1;-5)$; e) $A(-2;8),\ B(1;2)$;

5. Să se determine funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=(3a+2)x+2b-1,\ a,b\in\mathbb{R},$ știind că punctele $A(-1;-2),\ B(1;8)$ aparțin graficului funcției f(x).

6. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=(a+1)x+b\ -a^2,\ a,b\in\mathbb{R}$. Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$, știind că f intersectează axa Oy în punctul A(0;1) iar punctul $B(3;10)\in G_f$.

7.Să se determine numărul real m știind că dreptele de ecuații $(d_1)\colon\ 3x+2y-4=0$ și $(d_2)\colon\ 9x+my+2=0$ sunt paralele.

8. Să se determine numărul real m știind că dreptele de ecuații $(d_1)\colon\ 3x-2y+4=0$ și $(d_2)\colon\ mx+4y+5=0$ sunt paralele.

9. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât sistemul $\begin{cases} 3x-2y=4 \\ (m+1)x+(m+2)y=1 \end{cases}$, să nu admită nicio soluție;

10. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât sistemul $\begin{cases} mx-3y=4 \\ (m+2)x-2y=6 \end{cases}$, să aibă soluție unică ;

11. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât sistemul $\begin{cases} (2m-1)x+(3m+4)y=8 \\ 2x-y=-2 \end{cases}$, să nu admită nicio soluție;

12. Se consideră dreptele de ecuații $(d_1)\colon\ (m-3)x+4y-5=0$ și $(d_2)\colon\ (2m+1)x+2y+3=0$; Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât dreptele să fie paralele.

13. Să se determine valorile parametrilor a și b astfel încât sistemul $\begin{cases}(a+b)x+(2a+b)y=2\\(a-b)x-(a+2b)y=-10\end{cases}$ să admită soluția $(-2;2)$.

14. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât sistemul $\begin{cases}mx-3y=9\\(m+2)x-2y=6\end{cases}$ să aibă soluție unică.

15. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât sistemul $\begin{cases}(m-2)x+4y=2\\3x+(m+2)y=1\end{cases}$ să aibă soluție unică.

16. *Să se rezolve sistemul: $\begin{cases}x^2+2y^2=9\\2x^2+y^2=6\end{cases}$.

17. *Să se rezolve sistemul: $\begin{cases}\dfrac{2x+y+2}{x-y+1}=1\\\dfrac{x+2y+2}{2x+y+1}=\dfrac{1}{2}\end{cases}$.

18. *Să se rezolve sistemul: $\begin{cases}\dfrac{2(x-y)-3}{x+y+2}=-\dfrac{1}{5}\\\dfrac{3x-2(x+y)+1}{x-y}=1\end{cases}$.

6. FUNCȚIA DE GRADUL AL DOILEA

6.1 Funcția de gradul al doilea. Definiție. Graficul funcției

Definiție: Forma generală a funcției de gradul al doilea este $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$f(x)=ax^2+bx+c,\quad a,b,c\in R, a\neq 0$.

Exemplu: Să se aducă la forma generală următoarea funcție de gradul al doilea:
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=(x-4)^2-3(x+2)^2+(x-5)(x+5)$.
Rezolvare:
Cum $(x-4)^2=x^2-8x+16$, $(x+2)^2=x^2+4x+4$, $(x-5)(x+5)=x^2-25$, atunci, f(x) este egal cu $f(x)=x^2-8x+16-3x^2-12x-12+x^2-25=-x^2-20x-21$.

Definiție: Forma canonică a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

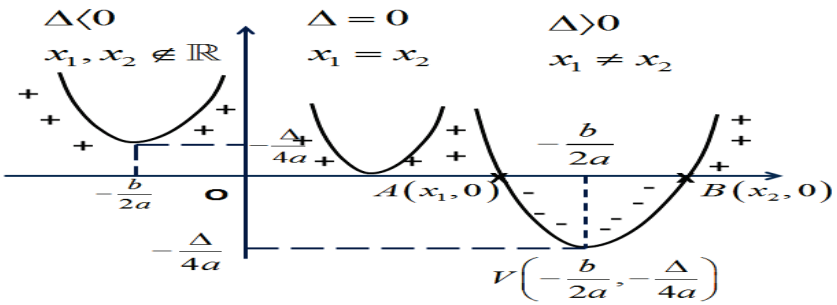
$f(x)=ax^2+bx+c,\quad a,b,c\in R, a\neq 0$ este $f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a},\forall x\in R$;

Exemplu: Forma canonică a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-4x-12,$ este

$f(x)=\left(x-\frac{4}{2}\right)^2-\frac{64}{4}=(x-2)^2-16$;

Graficul funcției este o parabolă de vârf $V\left(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a}\right)$, unde $\Delta=b^2-4ac$.

Pentru $a\rangle 0$ f este convexă;



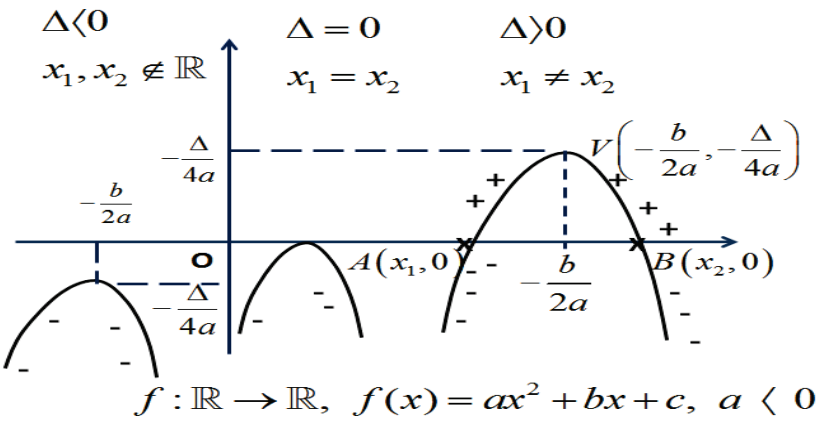
$\Delta\langle 0$; $x_1,x_2\in \mathbf{C}$ $\qquad$ $\Delta=0$, $x_1=x_2\in\mathbf{R}$ $\qquad$ $\Delta\rangle 0, x_1\neq x_2\in R$

f(x) >0, $\forall x\in R$; $\qquad$ f(x) ≥ 0, $\forall x\in R$; $\qquad$ f(x) ≥ 0,

$\forall x\in(-\infty,x_1]\cup[x_2,+\infty)$;

$V\left(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a}\right)$ - punct de minim; $\qquad$ f(x)=0 $\Leftrightarrow x=-\frac{b}{2a}$ $\qquad$ f(x)<0, $\forall x\in(x_1,x_2)$

Pentru a < 0 funcţia este concavă



$\Delta\langle 0$; $x_1, x_2 \in \mathbf{C}$ $\quad$ $\Delta = 0$, $x_1 = x_2 \in \mathbf{R}$ $\quad$ $\Delta\rangle 0, x_1 \neq x_2 \in R$

$f(x) < 0,\ \forall x \in R$; $\quad$ $f(x) \leq 0,\ \forall x \in R$; $\quad$ $f(x) \geq 0,\ \forall x \in [x_1, x_2]$;

$V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ - punct de maxim; $\quad f(x)=0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a}$ $\quad f(x)<0$,

$\forall x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$

Definiție: Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax^2 + bx + c,\ a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0.$

Dacă $a\rangle 0$ atunci, funcția admite un **minim** egal cu $-\frac{\Delta}{4a}$, iar dacă $a\langle 0$, funcția admite un **maxim** egal cu $-\frac{\Delta}{4a}$.

Aşadar, valoarea minimă sau maximă este $-\frac{\Delta}{4a}$ şi se realizează în punctul $-\frac{b}{2a}$.

Exemple :

1. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - 6x - 10$. Să se determine minimul funcţiei.

Rezolvare: Minimul funcţiei de gradul al doilea este dat de valoarea lui $-\frac{\Delta}{4a} = 1$;

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = -x^2 + 4x + 6$. Să se determine maximul funcţiei.

Rezolvare: Maximul funcţiei de gradul al doilea este dat de valoarea lui $-\frac{\Delta}{4a} = 10$;

Activitate independentă		**Răspuns**
Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - 7x + 6$. Să se reprezinte grafic funcția indicând minimul funcției, punctul de minim și punctele de intersecție ale graficului funcției cu axele de coordonate.		

Exercitii rezolvate

1. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2+(2m+1)x+m^2-m-1$. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât f(x) să admită un minim egal cu $-\frac{1}{4}$;

Rezolvare:

Minimul funcției de gradul al doilea este

$$\frac{-\Delta}{4a}=-\frac{1}{4}\Leftrightarrow-\frac{8m+5}{4}=-\frac{1}{4}\Rightarrow 8m+5=1\Rightarrow m=-\frac{1}{2}.$$

2. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2+(m-3)x+n+4$. Să se determine $m,n\in\mathbb{R}$ astfel încât punctul de minim să fie 2 și minimul lui f să fie 10.

Rezolvare:

Punctul de minim este $\frac{-b}{2a}=2\Leftrightarrow-\frac{(m-3)}{2}=2\Rightarrow -m+3=4\Rightarrow m=-1.$

Minimul funcției este $\frac{-\Delta}{4a}=10\Leftrightarrow-\frac{(m-3)^2-4(n+4)}{4}=10\Rightarrow n=10$.

3. Fie funcția $f:[-1;1]\to\mathbb{R},\ f(x)=2x^2-3x+1$. Să se determine mulțimea valorilor funcției f.

Rezolvare: Mulțimea valorilor unei funcții de gradul al doilea este identică cu imaginea funcției, iar în cazul nostru, $\operatorname{Im} f=f\left([-1;1]\right)=\left[-\frac{\Delta}{4a},0\right)=\left[-\frac{1}{8},0\right)$.

4. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât punctul $A(m;2)$ să aparțină graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3x+4$

Rezolvare:.

$A(m;2)\in G_f\Leftrightarrow f(m)=2\Leftrightarrow m^2-3m+4=2\Rightarrow\ m^2-3m+2=0\ \Rightarrow m_1=1,\ m_2=2;$

5. Să se determine funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax^2+bx+c,\ a,b,c\in\mathbb{R},a\neq 0$ în cazurile:

a) punctele $A(-1;9),B(0;4),C(1;1)$ să aparțină graficului funcției f;

b) graficul taie axa OX în punctele de abcisă 1 și 4 și axa OY în punctul de ordonată 4;

c) graficul este tangent axei OX în punctul de abcisă 2 și trece prin punctul A(-1;9);

d) graficul trece prin punctele $A(1;2),B(2;0)$ și are ca axă de simetrie dreapta $x=\frac{5}{2}$;

e) graficul trece prin punctual $A(0;1)$ și are vârful $V(\frac{3}{4};-\frac{1}{8})$;

Rezolvare: . a) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax^2+bx+c,\ a,b,c\in\mathbb{R},a\neq 0$;

$$\begin{cases}A(-1;9)\in G_f\\ B(0;4)\in G_f\\ C(1;1)\in G_f\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f(-1)=9\\ f(0)=4\\ f(1)=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a-b+c=9\\ c=4\\ a+b+c=1\end{cases}\Rightarrow a=1,b=-4,c=4;\Rightarrow f(x)=x^2-4x+4;$$

b) Dacă graficul lui f taie axa OX în punctele de abcisă 1 şi 4 aceasta înseamnă că punctele $A(1;0), B(4;0)$ aparţin graficului funcţiei adică $f(1)=0,\ f(4)=0$ şi din faptul că graficul intersectează axa OY în punctul de ordonată 4 adică în punctul $C(0;4)$ rezultă

$$\begin{cases} A(1;0)\in G_f \\ B(4;0)\in G_f \\ C(0;4)\in G_f \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(1)=0 \\ f(4)=0 \\ f(0)=4 \end{cases} \Rightarrow \left\{\begin{array}{r} a+b+c=0 \\ 16a+4b+c=0 \\ c=4 \end{array}\right| \Rightarrow a=1, b=-5, c=4;\ \Rightarrow f(x)=x^2-5x+4$$

c) $G_f \cap OX = \left\{\left(-\frac{b}{2a};0\right)\right\};\ \Rightarrow -\frac{b}{2a}=2;$ Cum $A(-1;9)\in G_f \Rightarrow f(-1)=9$.

Cum vârful parabolei este situat pe axa OX rezultă $f(-\frac{b}{2a})=-\frac{\Delta}{4a} \Leftrightarrow f(2)=0$. Din cele trei condiţii rezultă: $\left\{\begin{array}{r} a-b+c=9 \\ 4a+2b+c=0 \\ -b=4a \end{array}\right| \Rightarrow a=1, b=-4, c=4;\ \Rightarrow f(x)=x^2-4x+4;$

d) $\begin{cases} A(1;2)\in G_f \\ B(2;0)\in G_f \\ -\frac{b}{2a}=\frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(1)=2 \\ f(2)=0 \\ b=-5a \end{cases} \Rightarrow \left\{\begin{array}{r} a+b+c=2 \\ 4a+2b+c=0 \\ b=-5a \end{array}\right| \Rightarrow a=1, b=-5, c=6;$

$\Rightarrow f(x)=x^2-5x+6;$

e) $\begin{cases} f(0)=1 \\ -\frac{b}{2a}=\frac{3}{4} \\ f(\frac{3}{4})=-\frac{1}{8} \end{cases} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} c=1 \\ b=-\frac{3}{2}a \\ \frac{9}{16}a+\frac{3}{4}b+1=0 \end{array}\right| \Rightarrow a=\frac{16}{9}, b=-\frac{8}{3}, c=1;$

APLICAŢII PRACTICE

1. În figura alăturată, în punctul A este poziţionat un tun a cărui obuz descrie o traiectorie dată de funcţia $f(x)=-x^2+8x$, unde x reprezintă distanţa în linie dreaptă faţă de punctul A.

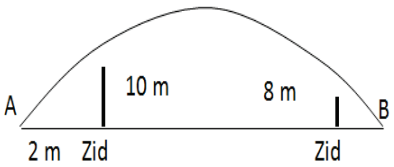
a) Să se arate că obuzul trece peste zid de 10m aflat la 2 m de punctul A şi să se verifice dacă obuzul ar putea depăşi un zid înalt de 8 m aflat la o distanţă de 1 m faţă de B;

b) la ce înălţime maximă ajunge obuzul ?

Rezolvare:

a) f(2)= 12m si este mai mare decât cei 10 metri ai zidului, aşadar, obuzul trece peste zid.

Dacă zidul ar fi la 1 m faţă de B atunci este la o distanţă de 7 m faţă de A. Întrucât f(8)= 0 atunci



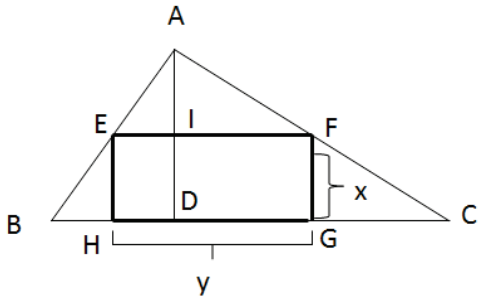
distanţa între A si B este de 8 iar f(7)= 7 care este mai mică decât lungimea zidului, prin urmare obuzul nu trece.

b) Înălţimea maximă la care ajunge obuzul este $-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{64}{-4}=16m$.

2. Dintr-o bucată de tablă triunghiulară ca în figura alăturată având baza BC = 4 m şi înălţimea AD= 2 m se doreşte obţinerea unei suprafeţe dreptunghiulare de arie maximă. Cum trebuie realizată tăierea astfel încât să se piardă cât mai puţină tablă.

Rezolvare:

Notăm $HG=EF=y$, $EH=FG=x$.



Cum $\Delta ABC\sim\Delta AEF\Rightarrow\frac{EF}{BC}=\frac{AF}{AC}$ şi

$\Delta AIF\sim\Delta ADC\Rightarrow\frac{AI}{AD}=\frac{AF}{AC}$. De aici, rezultă

$\frac{EF}{BC}=\frac{AI}{AD},\Rightarrow\frac{y}{4}=\frac{2-x}{2}\Rightarrow y=4-2x.$

Atunci, aria suprafeţei dreptunghiulare

$A=x\cdot y=x(4-2x)=4x-2x^2$,

devine o funcţie de gradul al doilea în x, $A(x)=-2x^2+4x$ având maximul

$-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{b^2-4ac}{4a}=-\frac{16}{4\cdot(-2)}=2$ care se realizează pentru $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{4}{2\cdot(-2)}=1$.

Aşadar, pentru a se obţine un dreptunghi de arie maximă ca să se piardă astfel cât mai puţină tablă trebuie ca dimensiunile dreptunghiului să fie de 1m şi respectiv 2 m.

Rezolv□singur

Funcţia $f(x)=\frac{1}{4}x^2-2x+68$ reprezintă costul în mii de euro pentru producerea unui număr x (exprimat în sute) de telefoane mobile. Care este numărul minim de produse pentru a minimaliza costurile de producţie ?

Exercitii propuse

1. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-9$. Să se calculeze $f(-3)\cdot f(-2)\cdot....f(0)\cdot....f(2)\cdot f(3)$.

2. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=25-x^2$. Să se calculeze $f(0)\cdot f(1)\cdot f(2)\cdot....\cdot f(10)$.

3. Fie f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-x-6$. Să se calculeze $f(0)\cdot f(1)\cdot f(2)\cdot....\cdot f(2012)$;

4. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-5x-6$. Să se calculeze $f(0)\cdot f(1)\cdot f(2)\cdot....\cdot f(100)$.

5. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-7x+10$.

Să se calculeze $f(1)\cdot f(2)\cdot .....\cdot f(2009)\cdot f(2010)$

6. Fie f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4x-5$. Să se calculeze $f(0)\cdot f(1)\cdot f(2)\cdot ....\cdot f(2012)$;

7. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-4x+1$. Să se calculeze $f(2-\sqrt{3})$;

8. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-3x-10$. Să se calculeze $f(-1)+f(-\frac{1}{2})$;

9. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-2x+5$. Să se calculeze $(f\circ f)(1)-f(4)$;

10. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, f(x)= $3x^2$-2x+1. Să se calculeze valoarea funcţiei f în punctele :

a) -2 ; b) 3 ; c) $\frac{1}{4}$; d) $\sqrt{3}$;

11. Se considera funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-3x+1$. Sa se calculeze:

$a) f(-2)+f(2);\quad b) f\left(\frac{-1}{2}\right)+f(-1);\quad c) f\left(3\sqrt{2}\right)+f\left(\sqrt{2}\right).$

12. Să se determine imaginea funcţiei $f:\left\{-3;-1;1;\sqrt{2};2\sqrt{3}\right\}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-3x+1$.

13. Să se determine forma canonică a funcţiilor:

a) f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-6x+8$; b) f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x^2+4x+1$;

c) f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^2-x+1$;

14. Să se determine forma canonică a funcţiilor:

a) f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2(x-1)^2+(3-x)(2+x)$; b) f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(2x-3)(x+1)$;

15. Să se determine intersecţiile cu axele de coordonate şi vârful parabolei graficului funcţiei:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^2-5x-3$; b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3x-10$;

c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-6x+8$; d) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(1-x)^2-x(3-x)$

16. Să se determine intersecţiile cu axele de coordonate şi vârful parabolei graficului funcţiei:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-6x+9$; b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4x+3$;

c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+10x+25$; d) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4x-12$;

e) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+6x-7$; f) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4x$;

g) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x+2)^2-2(x+3)(x-3)$

h) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x+1)(x-2)+(x+2)(x-1)$;

i) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2x-1$; j) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x(x-2)-6$;

17. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=-x^2+7x-10$. Să se determine distanţa dintre punctele de intersecţie ale graficului funcţiei f cu axa Ox.

18. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ ştiind că punctul de abcisă a vârfului parabolei funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=mx^2-(m+3)x+1$ este egal cu 5.

19. Să se determine mulţimea valorilor funcţiei f(x) (imaginea funcţiei f) şi coordonatele vârfului parabolei asociate funcţiei:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4x-12$; b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x^2+4x-3$

20. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(2x-6)=x^2-x+2$; Să se calculeze f(-4), f(0), f(2), f(x).

21. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+x-6$. Să se determine distanţa dintre punctele de intersecţie ale graficului funcţiei f cu axa Ox.

22. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=-x^2+3x+4$. Să se determine distanţa dintre punctele de intersecţie ale graficului funcţiei f cu axa Ox.

23. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-4x-1$. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât punctul A(m; - 4) să aparţină graficului lui f.

24. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-mx+3$. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ ştiind ca $A(1;5)\in$ graficului lui f .

25. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+4x+m.$ Sa se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încat, punctul $A(-3;2)$ să aparţină graficului lui f.

26. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-2x+5$. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încat $A(m;4)$ să aparţină graficului lui f.

27. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât punctul $A(m;2)$ să aparţină graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-2x+3$

28. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât punctul $A(-1;4)$ să aparţină graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=mx^2-3x+2$

29. Să se determine funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax^2+bx+c,\ a,b,c\in\mathbb{R}, a\neq 0$ astfel încât:

a) punctele $A(-2;2), B(0;-2), C(1;-1)$ să aparţină graficului funcţiei f;

b) punctele $A(-1;6), B(1;0), C(2;0)$ să aparţină graficului funcţiei f;

c) punctele $A(-1;5), B(0;1), C(2;5)$ să aparţină graficului funcţiei f;

d) graficul taie axa OX în punctele de abcisă - 2 şi 5 şi axa OY în punctul de ordonată -10;

e) graficul taie axa OX în punctele de abcisă - 3 şi 1 şi axa OY în punctul de ordonată 3;

f) graficul este tangent axei OX în punctul de abcisă -3 şi trece prin punctul A(-2;1);

g) graficul este tangent axei OX în punctul de abcisă 4 şi trece prin punctul A(2;4);

h) graficul trece prin punctele $A(0;8), B(1;3)$ şi are ca axă de simetrie dreapta $x=3;$

i) graficul trece prin punctul $A(0;-4)$ şi are vârful $V\left(\frac{5}{2};-\frac{11}{4}\right);$

30. Să se determine mulţimea valorilor funcţiei f(x) (imaginea funcţiei f) şi coordonatele vârfului parabolei asociate funcţiei:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-6x+8;$ b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-x^2+3x-4;$

c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-4x-5$ d) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=(3x-1)(x-2);$

e) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2(x-1)^2+(2-3x)(1-x)$; f) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=(x-2)^2-3(x-1)(x+1)$;

g) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=8+x(2x-1)-(x+2)^2$;

h) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=(x+3)^2-7-4x+x(2x+3)$;

i) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=(3x-1)(x+2)-2(x+1)^2-x-5$;

31. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-6x-10$. Să se determine minimul funcţiei.

32. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-x^2+4x+6$. Să se determine maximul funcţiei.

33. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=mx^2-5x+6$. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ ştiind că valoarea minimă a funcţiei f este egală cu 5;

34. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ ştiind că valoarea maxima a funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},$

$f(x)=-2x^2-(m+1)x+m+2$ este egală cu $\frac{5}{2}$;

35. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=4x^2-8x+1$. Să se determine valoarea minimă a funcției f.

36. Să se determine valoarea maximă a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-x^2+6x-9$.

37. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=mx^2-5x+3$. Să se determine $m\in\mathbb{R}-\{0\}$ știind că valoarea minimă a lui f este egală cu $-\frac{1}{8}$.

38. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ știind că minimul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2+(2m-1)x-2$ este -4;

39. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x^2-4x+3$. Să se determine minimul funcţiei.

40. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-x^2+7x+8$. Să se determine maximul funcției.

41. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2+(2m+1)x+m+2$. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ ştiind că valoarea minimă a funcţiei f este egală cu $-\frac{9}{4}$;

42. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=3x^2-(m+2)x+m$. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ ştiind că valoarea minimă a funcţiei f este egală cu $\frac{11}{12}$;

43. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ ştiind că minimul funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=3x^2-(m-3)x+m+1$ se realizează în punctul 1.

44. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x^2-mx+m+2$. Să se determine $m\in\mathbb{R}$, astfel încât minimul lui f să fie egal cu 4.

45. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ ştiind că maximul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-x^2+(m+2)x-3$ este egală cu 1;

6.2 Ecuația de gradul al doilea

Teoremă: Formula de rezolvare a ecuației de gradul al doilea $ax^2+bx+c=0,\ a,b,c\in\mathbb{R},a\neq 0$ este $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$, unde $\Delta=b^2-4ac$, se numește discriminantul ecuației de gradul al doilea.

Demonstrație:

$$ax^2+bx+c=0\,|:a\Rightarrow x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0\Rightarrow$$

$$x^2+2\cdot\frac{b}{2a}+\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}=0\Rightarrow\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0\Rightarrow$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}\Rightarrow x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Exemplu: Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $x^2-7x+6=0$.

Rezolvare: Mai întâui se identifică coeficienții ecuației după care se calculează $\Delta = b^2 - 4ac$ și se înlocuiește în formula de rezolvare.

$a = 1,\ b = -7,\ c = 6,\ \Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 49 - 24 = 25$. Atunci,

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{7 \pm 5}{2} \Rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = 6.$$

Definiție: Un număr $\alpha \in \mathbb{R}$ este soluție a ecuației $ax^2 + bx + c = 0$ dacă și numai dacă $a \cdot \alpha^2 + b \cdot \alpha + c = 0$.

Exemplu: Să se determine $m \in \mathbb{R}$ știind că ecuația $2x^2 - 3mx + 4 = 0$ admite soluția x=2.

Rezolvare: Vom înlocui pe x cu 2 rezultând: $2 \cdot 2^2 - 3m \cdot 2 + 4 = 0 \Rightarrow -6m = -12 \Rightarrow m = 2.$

Numărul de soluții ale ecuației $ax^2 + bx + c = 0,\ a,b,c \in \mathbb{R}, a \neq 0$, este dat de discriminantul ecuației:

- Dacă $\Delta = b^2 - 4a \cdot c \ \rangle\ 0$, atunci, ecuația are două soluții reale distincte. Altfel spus, graficul funcției are două puncte de intersecție cu axa Ox.
- Dacă $\Delta = b^2 - 4a \cdot c\ = 0$, atunci, ecuația are o singură soluție. Altfel spus, graficul funcției este tangent la axa Ox.
- Dacă $\Delta = b^2 - 4a \cdot c \ \langle\ 0$, atunci, ecuația nu are soluții reale. Altfel spus, graficul funcției nu are niciun punct de intersecție cu axa Ox.

Dacă $\Delta \langle 0 \Rightarrow$	$S = \varnothing$	**Ecuația nu are soluții reale**
Dacă $\Delta = 0 \Rightarrow$	$S = \left\{ -\frac{b}{2a} \right\}$	**Ecuația are soluție dublă** $x_1 = x_2$
Dacă $\Delta \geq 0 \Rightarrow$	$S = \left\{ \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right\}$	**Ecuația are două soluții reale diferite**

Activitate independentă		**Răspuns**
Să se arate că ecuația $x^2 - mx + m^2 + 3 = 0$ nu are soluții reale.		

Exercitii rezolvate

1. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ știind că ecuația $mx^2 - (m-3)x + 9 = 0$ admite soluția 3.

Rezolvare: . Deoarece 3 este soluție a ecuației date , se înlocuiește x cu 3 și rezultă: $9m - 3m + 9 + 9 = 0 \Rightarrow\ 6m = -18 \Rightarrow m = -3$.

2. Să se rezolve ecuațiile:

a) $x^2 - 7x + 10 = 0$; **b)** $-x^2 + x + 12 = 0$;

c) $(x-3)^2 + (x+1)^2 = (x+2)(x-2) + 10$; **d)** $\frac{x(x-3)}{4} - 1 = \frac{-3x}{2} + \frac{x^2 - 1}{3}$;

e) $x^4 - 7x^2 + 10 = 0$;

Rezolvare: a) $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7 \pm \sqrt{9}}{2} \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = 5$;

b) $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1\pm\sqrt{49}}{-2}\Rightarrow x_1=-3, x_2=4$;

c) $x^2-6x+9+x^2+2x+1=x^2-4+10 \qquad 2x^2-4x+10-x^2-6=0 \Rightarrow x^2-4x+4=0\Rightarrow x=2;$

d) $\frac{x^2-3x-4}{4}=\frac{-9x+2x^2-2}{6}\Rightarrow 6x^2-18x-24=-36x+8x^2-8\Rightarrow x^2-9x+8=0$.

$x_1=\frac{9+7}{2}=8,\ x_2=\frac{9-7}{2}=1.$

e) Observăm că ecuaţia dată este una bipătrată. Ea se poate scrie de forma $\left(x^2\right)^2-7x^2+10=0$ prin urmare putem face substituţia $x^2=t\rangle 0$ de unde rezultă ecuaţia în t: $t^2-7t+10=0$ cu soluţiile $t_1=2\Rightarrow x^2=2\Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$ şi $t_2=5\Rightarrow x^2=5\Rightarrow x=\pm\sqrt{5}$. Aşadar, soluţiile ecuaţiei sunt: $x\in\left\{-\sqrt{5};-\sqrt{2},\sqrt{2};\sqrt{5}\right\}$.

3. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2+(2m+1)x+m^2-m-1$. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât ecuaţia f(x)=0 să admită rădăcini reale şi distincte;

Rezolvare: Ecuaţia $x^2+(2m+1)x+m^2-m-1=0$ admite rădăcini reale distincte dacă şi numai dacă discriminantul ecuaţiei este pozitiv.

$\Delta\ \rangle\ 0\Leftrightarrow(2m+1)^2-4(m^2-m-1)\rangle 0\Rightarrow m\rangle-\frac{5}{8}.$

4. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-7x+2$. Să se determine punctele de intersecţie a dreptei de ecuaţie $y=-8$ cu reprezentarea grafică a funcţiei f.

Rezolvare: Punctele de intersectie se află rezolvând ecuaţia $f(x)=y$,

$x^2-7x+10=0\Rightarrow x\in\{2;5\}$. Aşadar, punctele de intersecţie sunt $A(2;-8),\ B(4;-10)$.

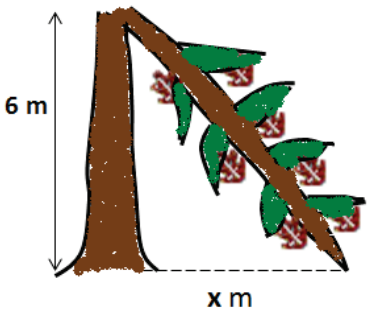
APLICAŢII PRACTICE

1. Fie *h* înălţimea (in metri) pe care o parcurge o minge aruncată în sus, *t* – timpul (în secunde) în care mingea s-a aflat în zbor. Dependenţa variabilei *h* de variabila *t* se exprimă prin formula $h=8t-2t^2$.

Peste cîte secunde, după ce a fost aruncată în sus, mingea va cădea pe pământ.

Rezolvare: Din $f(x)=0\Rightarrow -2x^2+8x=0\Rightarrow x_1=0\ si\ x_2=4$. Aceasta înseamnă că mingea va cădea jos după 4 secunde.

2. Un plop înalt se rupe la o distanţă de 6 m de la pământ ca în figura alăturată. Ştiind că partea căzută atinge cu vârful pământul şi formează un unghi de 60 ^{0} să se determine lungimea iniţială a plopului.



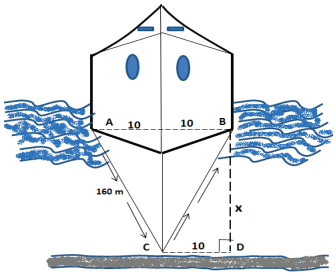
Rezolvare. Notăm cu x lungimea dintre baza copacului şi punctul unde vârful său atinge pământul.

Atunci, lungimea părţii rupte este 2x deoarece devine ipotenuză într-un triunghi dreptunghic cu un

unghi de 30^0. Aplicând teorem alui Pitagora, putem forma o ecuaţie de gradul al doilea în x. Din $(2x)^2 = x^2 + 6^2 \Rightarrow x^2 = 12 \Rightarrow x = \sqrt{12} \approx 3,4$ *m.*
Aşadar, înălţimea iniţială a plopului era 9,4 m.

Rezolvă singur

Pentru a măsura adâncimea unei mări se foloseşte ecoul cu ajutorul ecolotului. Astfel, un vapor este dotat cu un emiţător de sunet (A) şi un receptor (B) puse simetric la extremităţile vasului ca în figura alăturată, măsurarea făcânduse când vaporul stă. Dacă lăţimea unui vas este de 20 m iar viteza sunetului în apă este de 1600 m/s, să se determine adâncimea apei (BD) când timpul între emitere şi recepţie este de 0,2 s.



Exercitii propuse

1. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ ştiind că ecuaţia următoare $x^2 - mx + 6 = 0$ are soluţia $x = 3$.
2. Se consideră ecuaţia $x^2 - (m^2+1)x + 10m + 2 = 0$. Să se determine valorile reale ale lui m ştiind că ecuaţia admite soluţia $x = -2$.
3. Determinati $m \in \mathbb{R}$ astfel încât ecuaţia x^2-2(m-1)x+m-1=0 să aibă soluţii egale.
4. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât ecuaţia de gradul al doilea $x^2 + (m-3)x + m - 4 = 0$ să admită două soluţii egale.
5. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ ştiind că reprezentarea grafică a funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - mx + m + 3$ este tangentă axei OX.
6. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 6x + 3$. Să se determine punctele de intersecţie a dreptei de ecuaţie $y = -5$ cu reprezentarea grafică a funcţiei f.
7. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $3x^2 - x - 10 = 0$;
b) $2x^2 - 6x - 8 = 0$;
c) $-10x^2 + 4x - 1 = 0$;
d) $x^2 - 3\sqrt{2}x + 4 = 0$;
e) $(x+3)^2 - 11 = 4x - x(2x+3)$;
f) $(3x-1)(x+2) - 2(x+1)^2 = x + 5$;
g) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$;
h) $x^4 - 9x^2 + 8 = 0$;
i) $x^4 - 2x^2 - 8 = 0$;
j) $4x^4 - 25x^2 + 6 = 0$;
k) $(x^2+1)^2 - 6(x^2+1) + 5 = 0$;
l) $(x^2-3)^2 - 7(x^2-3) + 6 = 0$;

8. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţiile:

a) $x^2 + 6x = 0$;
b) $x^2 + 8x = 0$;
c) $\frac{x}{5\sqrt{32}} = \frac{2\sqrt{50}}{x}$;
d) $\frac{2\sqrt{3}}{x} = \frac{x}{\sqrt{108}}$;
e) $(x+4)^2 + (x-2)^2 - (x+3)(x-3) = 25$;
f) $(x-3)^2 + (x+2)^2 - (x-5)(x+5) = 37$

g) $\frac{x-2}{2x+1}=\frac{x-3}{x+3}$; h) $\frac{2x-1}{x+1}=\frac{3x+2}{x-4}$; i) $x^4-9x^2+20=0$; j) $x^4-10x^2+9=0$;
k) $(x^2+4x+4)^2-18(x^2+4x+4)+81=0$; l) $(x^2+x-8)(x^2+x-4)+4=0$;
9. Să se arate că ecuaţia x^2-(m+1)x+m=0 are două rădăcini reale.
10. Să se arate că ecuaţia x^2+2x+1-m^2=0 are rădăcini reale.
11. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-mx+2$ să intersecteze axa OX în două puncte .
12. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=mx^2-(2m+1)x+m+1$. Să se arate că pentru orice $m\in\mathbb{R}-\{0\}$, graficul lui f intersectează axa OX în două puncte distincte.

6.3 Monotonia și semnul funcției de gradul al doilea

M**onotonia** funcţiei de gradul al doilea este caracterizată de următoarea teoremă :

Teoremă: Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^2+bx+c$, $a,b,c\in\mathbb{R},a\neq 0$.

Dacă $a\rangle 0$**, funcţia f este strict descrescătoare** pe $(-\infty,-\frac{b}{2a}]$ şi **strict crescătoare** pe $[-\frac{b}{2a},+\infty)$.

Dacă $a\langle 0$**, funcţia f este strict crescătoare** pe $(-\infty,-\frac{b}{2a}]$ şi **strict descrescătoare** pe $[-\frac{b}{2a},+\infty)$.

Observaţie: Intervalele $(-\infty,-\frac{b}{2a}]$, $[-\frac{b}{2a},+\infty)$ se numesc **intervale de monotonie**.

În concluzie, se poate realiza următoarea sinteză cu ajutorul tabelului de variaţie:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$	
$a\rangle 0$ f(x)	$+\infty$	↘	$-\frac{\Delta}{4a}$	↗	$+\infty$	$V\left(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a}\right)$ - **punct de minim**
$a\langle 0$ f(x)	$-\infty$	↗	$-\frac{\Delta}{4a}$	↘	$-\infty$	$V\left(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a}\right)$ - **punct de maxim**

Exemplu: Monotonia funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4x-12$ este:
f este strict descrescătoare pe $(-\infty,2]$ şi strict crescătoare pe $[2,+\infty)$.

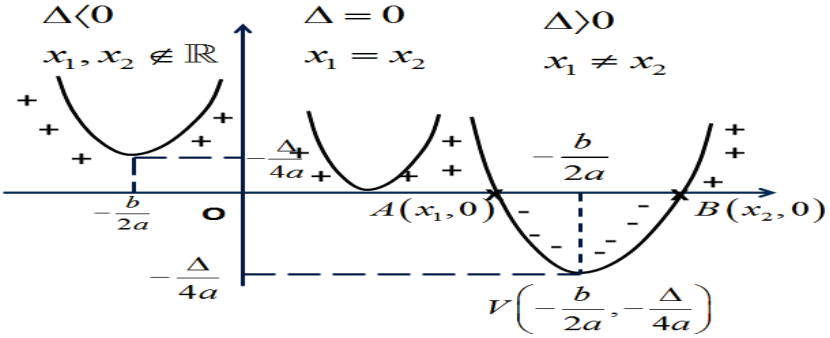
Semnul funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^2+bx+c$, $a,b,c\in\mathbb{R},a\neq 0$.

	x	$-\infty$	x_1	$-\frac{b}{2a}$	x_2	$+\infty$
$\Delta>0$	f(x)	semnul lui **a**	**0**	semn contrar semnului lui **a**	**0**	semnul lui **a**
$\Delta=0$		semnul lui **a**	**0**	semnul lui **a**		
$\Delta<0$		semnul lui **a**				

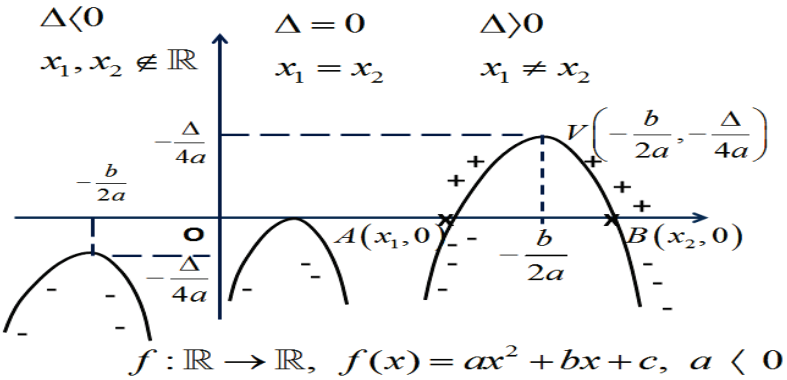
Exemplu: Semnul funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-4x-12$ este:

$f(x)\geq 0,\forall x\in(-\infty,-2]\cup[6;+\infty)$ şi $f(x)<0,\forall x\in(-2;6)$ deoarece în cazul nostru

$\Delta=64>0,\ a=1>0$ iar soluţiile ecuaţiei sunt $x_1=-2,\ x_2=6$;



$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax^2+bx+c,\ a>0$



$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax^2+bx+c,\ a<0$

Activitate independentă		**Răspuns**
Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=(m^2-3m-10)x+2$**. Să se determine** $m\in\mathbb{R}$ **astfel încât f să fie descrescătoare pe** $\mathbb{R}$**;**		$m\in(-2;5)$

Exercitii rezolvate

1. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ **astfel încât funcția**
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=(m-1)x^2+2mx+m\le 0,\ \forall x\in\mathbb{R}.$

Rezolvare: $f(x)\le 0\Leftrightarrow\begin{cases}m-1<0\Leftrightarrow m<1\\ \Delta\le 0\Leftrightarrow 4m^2-4m^2+4m\le 0\Rightarrow m\le 0\end{cases}\Rightarrow m\le 0.$

2. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ **astfel încât funcția**
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2+(m-3)x+m\ge 0,\ \forall x\in\mathbb{R}.$

Rezolvare: Pentru ca $f(x)\ge 0,\ \forall x\in\mathbb{R},$ trebuie ca
$\Delta\le 0\Leftrightarrow(m-3)^2-4m\le 0\Leftrightarrow m^2-10m+9\le 0\Rightarrow m\in[1;9].$

3. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=(m-4)x^2-2x+1.$ **Să se determine** $m\in\mathbb{R}$ **astfel încât** $f(x)\ge 0,\ \forall x\in\mathbb{R}.$

Rezolvare: $f(x)\ge 0\Leftrightarrow\begin{cases}m-4>0\Leftrightarrow m>4\\ \Delta\le 0\Leftrightarrow 4-4(m-4)\le 0\Rightarrow m\ge 5\end{cases}\Rightarrow m\ge 5.$

4. **Se consideră funcția** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=(m-1)x^2+(m-2)x+(m-2).$ **Să se determine** $m\in\mathbb{R}$ **astfel încât** $f(x)\ge 0,\ \forall x\in\mathbb{R}.$

Rezolvare: $f(x)\ge 0\Leftrightarrow\begin{cases}m-1>0\Leftrightarrow m>1\\ \Delta\le 0\Leftrightarrow(m-2)(-3m+2)\le 0\Rightarrow m\in\left(-\infty;\frac{2}{3}\right]\cup[2;\infty)\end{cases}$. Așadar, $m\ge 2.$

5. **Se consideră funcția** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x^2+(m-3)x+m.$ **Să se determine** $m\in\mathbb{R}$ **astfel încât** $f(x)\ge 0,\ \forall x\in\mathbb{R}.$

Rezolvare: $f(x)\ge 0\Leftrightarrow\Delta\le 0\Leftrightarrow(m-3)^2-4\cdot 2\cdot m\le 0\Rightarrow m\in\left[7-2\sqrt{10};7+2\sqrt{10}\right].$

6. Să se rezolve inecuațiile:

a) $(x-2)(x^2-9)\ge 0;$ **b)** $\frac{x+3}{x-2}\ge 0;$ **c)** $\frac{x^2-4}{x^2+1}<0;$ **d)** $\frac{x^2-7x+10}{x^2+x+1}\le 0;$

e) $\left(x^2-4x\right)\left(x^2-3x+4\right)\le 0.$ **f)** $\frac{x^2-2x-2}{x+2}\le 1;$ **g)** $(2x+1)^2-x(x+2)\le(x-2)^2+5;$

h) $\frac{x^2-x+10}{3x+6}\ge 1;$

Rezolvare: a)

x	$-\infty$	**-3**	**2**	**3** ∞
$x-2$	_ _ _ _ _ _	_ _ _ _	0 + + + +	+ + + + +
x^2-9	+ + + + +	0 _ _ _ _ _	_ _ _ _ _	0 + + + +
$(x-2)(x^2-9)$	_ _ _ _ _	0 + + + +	0 _ _ _ _	0 + + + +

Din tabelul semnelor, rezultă $x\in[-3;2]\cup[3;\infty).$

b) $\frac{x+3}{x-2}\geq 0\Leftrightarrow\frac{(x+3)(x-2)}{(x-2)^2}\geq 0\Leftrightarrow(x+3)(x-2)\geq 0$; De aici rezultă, $x\in(-\infty;-3]\cup[2;\infty)$.

c) $\frac{x^2-4}{x^2+1}\langle 0\Leftrightarrow x^2-4\langle 0\Leftrightarrow(x-2)(x+2)\langle 0\Leftrightarrow x\in(-2;2)$. Se ştie că $x^2+1\rangle 0,\forall x\in\mathbb{R}$.

d) Cum $x^2+x+1\rangle 0,\forall x\in\mathbb{R}$, deoarece discriminantul ecuației asociate este negativ, atunci,

$\frac{x^2-7x+10}{x^2+x+1}\leq 0\Leftrightarrow x^2-7x+10\leq 0\Leftrightarrow(x-2)(x-5)\leq 0\Rightarrow x\in[2;5]$.

e) $(x^2-4x)(x^2-3x+4)\leq 0\Leftrightarrow x^2-4x\leq 0\Leftrightarrow x\in[0;4]$, deoarece $x^2-3x+4\rangle 0,\forall x\in\mathbb{R}$.

f) $\frac{x^2-2x-2}{x+2}\leq 1\Leftrightarrow\frac{x^2-2x-2-x-2}{x+2}\leq 0\Leftrightarrow\frac{x^2-3x-4}{x+2}\leq 0$.

x	$-\infty$	**-2**	**-1**	**4** ∞
x^2-3x-4	+ + + + +	+ + + + +	**0** _ _ _ _ _	**0** + + + +
$x+2$	_ _ _ _ _	**0** _ _ _ _ _	_ _ _ _ _	+ + + + +
$(x-2)(x^2-9)$	_ _ _ _ _	/ + + + +	**0** _ _ _ _	**0** + + + +

Conform tabelului, observăm că $\frac{x^2-3x-4}{x+2}\leq 0\Rightarrow x\in(-\infty;-2)\cup[-1;4]$.

g) $(2x+1)^2-x(x+2)\leq(x-2)^2+5\Leftrightarrow 4x^2+4x+1-x^2-2x-x^2+4x-4-5\leq 0$

$2x^2+6x-8\leq 0\Rightarrow x\in[-4;1]$.

h) $\frac{x^2-x+10}{3x+6}\geq 1\Leftrightarrow\frac{x^2-x+10}{3x+6}-1\geq 0\Leftrightarrow\frac{(x-2)^2}{3(x+2)}\geq 0\Rightarrow x\rangle -2$.

Exercitii propuse

1. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(m^2+m-6)x+5$. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât f să fie crescătoare pe $\mathbb{R}$;

2. Să se arate că funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(m^2-m+2)x+m-3$ este crescătoare pe $\mathbb{R}$ pentru orice m real;

3. Să se arate că funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(-m^2+3m-4)x+6$ este descrescătoare pe $\mathbb{R}$ pentru orice m real;

4. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(m^2-25)x+m+2$. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât f să fie crescătoare pe $\mathbb{R}$;

5. Să se arate că funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(2m^2-4m+3)x+16$ este crescătoare pe $\mathbb{R}$ pentru orice m real;

6. Să se arate că funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(-m^2+m-3)x+4m+3$ este descrescătoare pe $\mathbb{R}$ pentru orice m real;

7. Să se determine intervalele de monotonie şi semnul funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+3x-10$.

8. Să se studieze monotonia funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ în situaţiile :

a) f(x) = $x^2 - 9$; b) f(x) = $x^2 - 3x$; c) f(x)= x^2+x-6; d) f(x) = $-x^2-2x+8$.

9. Să se studieze monotonia funcţiei $f:R\to R$ în raport cu parametrul m :

a) f(x) = mx^2+2x+3; b) f(x) = $(m^2+1)x^2+2mx+1$; c) f(x) = $(m^2-1)x^2+(m+1)x+2$.

10. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=mx^2+2(m-1)x+m-1\rangle 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

11. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=(m+2)x^2-(m-1)x+m-1\le 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

12. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât $x^2+(2m-1)x+m^2-2m\rangle 0, \forall x\in\mathbb{R}$.

13. Să se arate că funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=(2m^2-4m+3)\cdot x+16$ e crescătoare pe $\mathbb{R}$ pentru orice număr real m.

14. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât ecuaţia $x^2+mx+m+3=0$ să aibă soluţii reale.

15. Să se rezolve inecuaţiile pe $\mathbb{R}$.

a) $x^2-7x+10\ge 0$; b) $-x^2-4x+5\langle 0$;

c) $(2x+1)^2-x(x+1)\le x^2+10$ d) $\dfrac{x-3}{2x+8}\ge 0$;

e) $\dfrac{x^2-x+2}{x^2-4x-5}\le 0$; f) $\dfrac{2}{x+3}-\dfrac{3}{x-2}\langle 1$;

16. Să se rezolve pe $\mathbb{R}$ inecuaţia $f(x)\ge 0$ în situaţiile:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-8x+12$; b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-x^2+4x+5$;

c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x^2+8x+6$;

17. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuaţia: $\dfrac{x^2-4x+9}{2x+1}\ge 1$.

18. Să se rezolve inecuaţiile pe $\mathbb{R}$.

a) $x^2-4x+5\rangle 0$; b) $-x^2-x-1\ge 0$; c) $3(x-1)^2+4(x+3)-16\rangle 0$;

d) $(x-1)^2+3(x+3)^2\ge(x+5)^2$ e) $2(x+2)^2-3(x+1)^2\le 1+(x-3)(2-3x)$;

f) $\dfrac{3x-6}{x+4}\langle 0$; g) $\dfrac{x^2-1}{9-x^2}\ge 0$; h) $\dfrac{2x^2-6x+6}{x^2-x}\le 1$; i) $\dfrac{x^2+x-6}{x^2-3x+3}\ge 0$;

j) $\dfrac{x^2-16}{4-x^2}\langle 0$; k) $\dfrac{3}{x-1}-\dfrac{4}{x+2}+1\rangle 0$; l) $\dfrac{3x^2+3x-6}{x^2-3x}\ge 0$; m) $\dfrac{x^{2012}}{(x-1)(x^2-4)}\ge 0$;

19. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuaţia $(x-4)(x-1)\le 2(x-1)$.

20. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuaţia $(x-2)^2+(x-2)(x-3)\langle 1$.

21. Să se rezolve pe $\mathbb{R}$ inecuaţia $f(x)\ge 0$ în situaţiile:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-8x+12$; b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-x^2+4x+5$;

c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x^2+8x+6$; d) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-4x+3$.

22. Să se rezolve inecuaţiile în $\mathbb{R}$:

a) $2x^2-5x+3\ge 0$; b) $(x-2)(x-1)\le 3(x-1)$; c) $\dfrac{x-2}{x^2+x-2}\rangle 1$; d) $\dfrac{x^2+5x}{x-1}\le 2$;

6.4 Relațiile lui Viete

Definiție: Fie ecuația de gradul al doilea $ax^2+bx+c=0,\ a,b,c,\ a\neq 0,$ cu soluțiile x_1, x_2.
Relațiile lui Viete fac legătura dintre coeficienții ecuației de gradul doi și soluțiile acesteia:

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a} \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a} \end{cases};$$

Demonstrație: $ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow a(x-x_1)(x-x_2)=0 \Leftrightarrow a\left(x^2-(x_1+x_2)x+x_1\cdot x_2\right)=0 \vdots a \Rightarrow$

$x^2-Sx+P=0$, unde $\begin{cases} S=x_1+x_2=-\dfrac{b}{a} \\ P=x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a} \end{cases}$.

Exemplu: Să se determine relațiile lui Viete pentru ecuația: $2x^2-6x+4=0$.

Rezolvare: $\begin{cases} S=x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}=-\dfrac{-6}{2}=3 \\ P=x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}=\dfrac{4}{2}=2 \end{cases}$;

Exemplu: Să se determine ecuația de gradul al doilea care are soluțiile $x_1=4,\ x_2=5$.

Rezolvare: Ecuația care are soluțiile x_1, x_2, se scrie sub forma $x^2-Sx+P=0$, unde $S=x_1+x_2=4+5=9$ iar $P=x_1\cdot x_2=4\cdot 5=20 \Rightarrow$ ecuația este $x^2-9x+20=0$.

Alte formule utile:

$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1\cdot x_2;$

$x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)$

$x_1^4+x_2^4=(x_1^2+x_2^2)^2-2x_1^2\cdot x_2^2$

Activitate independentă	**Răspuns**
Se consideră ecuația $x^2-5x+2=0$ cu soluțiile x_1, x_2. Fără a determina soluțiile, să se calculeze: *a*) $x_1^2+x_2^2$; *b*) $x_1^3+x_2^3$; *c*) $x_1^4+x_2^4$.	a) 21; b) 95; c) 433;

Exercitii rezolvate

1. Se consideră ecuația $x^2-(m+4)x+3=0$ cu soluțiile x_1, x_2. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât $2(x_1+x_2)-5x_1x_2=7$.

Rezolvare: Se scriu relațiile lui Viete: $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$, $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$, de unde

$x_1+x_2=m+4,\ x_1x_2=3$ și le

înlocuim: $2(m+4)-5\cdot 3=7\Rightarrow 2m+8-15=7\Rightarrow 2m=14\Rightarrow m=7$.

2. Se consideră ecuaţia x^2-3x+7=0 cu soluţiile $x_1, x_2\notin\mathbb{R}$. Fără a determina soluţiile, să se calculeze: a) $x_1^2+x_2^2$; b) $x_1^3+x_2^3$; c) $x_1^4+x_2^4$; d) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$;

e) $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}$; f) $\frac{x_1^3}{x_2}+\frac{x_2^3}{x_1}$; g) $\frac{x_1+1}{x_2+2}+\frac{x_2+1}{x_1+2}$;

Rezolvare: Se vor utiliza relaţiile lui Viete: $ax^2+bx+c=0$, $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$, $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$;

În cazul nostru, $x_1+x_2=3$; $x_1\cdot x_2=7$.

a) $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1\cdot x_2=3^2-2\cdot 7=-5$;

b) $x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^2-3x_1\cdot x_2(x_1+x_2)=(3)^2-3\cdot 7\cdot 3=-36$;

c) $x_1^4+x_2^4=(x_1^2+x_2^2)^2-2x_1^2\cdot x_2^2=(-5)^2-2\cdot 49=-73$

d) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1\cdot x_2}=\frac{3}{7}$; **e)** $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}=-\frac{5}{7}$;

f) $\frac{x_1^3}{x_2}+\frac{x_2^3}{x_1}=\frac{x_1^4+x_2^4}{x_1\cdot x_2}=-\frac{73}{7}$; **g)** $\frac{x_1+1}{x_2+2}+\frac{x_2+1}{x_1+2}=\frac{x_1^2+x_2^2+x_1+x_2+4}{x_1x_2+2(x_1+x_2)+4}=\frac{-5+3+4}{7+6+4}=\frac{2}{17}$;

3. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ ştiind că soluţiile ecuaţiei $x^2-mx+m+2=0$ verifică relaţia $x_1^2+x_2^2+x_1\cdot x_2=4$.

Rezolvare: Se scriu mai întâi relaţiile lui Viete, $\begin{cases}x_1+x_2=-\frac{b}{a}\\ x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+x_2=m\\ x_1\cdot x_2=m+2\end{cases}$, după

care, relaţia dată este echivalentă cu $(x_1+x_2)^2-2x_1x_2+x_1x_2=4\Rightarrow$

$m^2-m-6=0\Rightarrow m\in\{-2;3\}$.

4. Pentru ce valori ale lui $m\in\mathbb{R}$, ecuația $x^2+(3-4m-m^2)x-m-2016=0$, are suma rădăcinilor ecuației, minimă, și care este valoarea minimă?

Rezolvare:

Suma rădăcinilor $x_1+x_2=-\frac{b}{a}=m^2+4m-3$ este minimă pentru $m=-\frac{b}{2a}=-2$, iar

valoarea minimă este egală cu $-\frac{\Delta}{4a}$ sau $f(-2)=-7$.

Exercitii propuse

1. Să se scrie relaţiile lui Viete pentru ecuaţia $x^2-7x+8=0$.

2. Să se scrie relaţiile lui Viete pentru ecuaţia $x^2-x-3=0$ şi să se calculeze $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}$, ştiind că x_1, x_2 sunt soluţiile ecuaţiei date.

3. Se consideră ecuaţia $x^2+3(m-1)x+m=0$. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ ştiind că $x_1^2+x_2^2=10$.

4. Se consideră ecuaţia $x^2-(2m+1)x+m=0$. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ ştiind că $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=3$.

5. Se consideră ecuaţia $x^2-(m+1)x+5=0$ cu soluţiile x_1, x_2. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât $x_1\cdot x_2+3x_1+3x_2=10$.

6. Determină $m\in\mathbb{R}$ dacă soluţiile $x_1, x_2\in\mathbb{R}$ ale ecuaţiei $x^2-4x+m=0$ satisfac relaţia:

a) $x_1^2+x_2^2=10$; b) $x_1^3+x_2^3=16$; c) $x_1^2-x_2^2=8$;

7. Se consideră ecuaţia $x^2-3x+1=0$ cu soluţiile $x_1, x_2\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$. Fără a determina soluţiile, să se calculeze: a) $x_1^2+x_2^2$; b) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$; c) $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}$; d) $x_1^4+x_2^4$; e) $x_1^3+x_2^3$;

f) $x_1^5+x_2^5$; g) $x_1^6+x_2^6$; h) $\frac{1}{x_1-1}+\frac{1}{x_2-1}$;

8. Se consideră ecuaţia $x^2-2x+3=0$ cu soluţiile $x_1, x_2\notin\mathbb{R}$. Fără a determina soluţiile, să se calculeze: a) $x_1^2+x_2^2$; b) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$; c) $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}$; d) $x_1^4+x_2^4$; e) $x_1^3+x_2^3$;

f) $x_1^5+x_2^5$; g) $x_1^6+x_2^6$; h) $\frac{1}{x_1-1}+\frac{1}{x_2-1}$;

9. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ dacă soluţiile $x_1, x_2\in\mathbb{R}$ ale ecuaţiei $x^2-6x+m=0$ verifică relaţia $x_1^2-x_2^2=12$.

10. Să se calculeze $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}$, ştiind că x_1, x_2 sunt soluţiile ecuaţiei $x^2-5x+3=0$.

11. Se consideră ecuaţia $x^2-7x+8=0$ cu soluţiile $x_1, x_2\in\mathbb{R}$. Să se calculeze $x_1^3+x_2^3$.

12. Se consideră ecuaţia $x^2-mx+2=0$ cu soluţiile $x_1, x_2\in\mathbb{R}$. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ pentru care $\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1}=3$.

6.5 Sisteme de ecuații

1. Sisteme simetrice de forma $\begin{cases} x+y=S \\ x\cdot y=P \end{cases}$

Pentru a rezolva un astfel de sistem se asociază sistemului, ecuaţia de gradul al doilea $x^2-Sx+P=0$, soluţiile ecuaţiei x_1, x_2 fiind chiar necunoscutele sistemului.

Exemplu: Să se rezolve sistemele de ecuaţii:

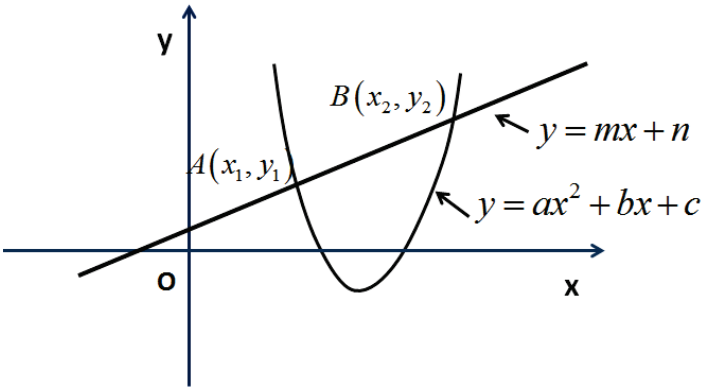
a) $\begin{cases} x+y=8 \\ x\cdot y=12 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x+y=-5 \\ x^2+y^2=13 \end{cases}$.

Rezolvare:

a) Necunoscutele sistemului x, y sunt soluţiile ecuaţiei $x^2-8x+12=0$. Se rezolvă ecuaţia, calculând $\Delta=b^2-4ac=16$, $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{8\pm4}{2}\Rightarrow x_1=2,\ x_2=6$. Cum sistemul este simetric în x şi y rezultă că soluţiile sistemului sunt $S=\{(2;6),(6;2)\}$.

b) Cum $x^2+y^2=13\Leftrightarrow(x+y)^2-2xy=13\Leftrightarrow(-5)^2-2\cdot xy=13\Rightarrow xy=6$. Aşadar, avem de rezolvat sistemul $\begin{cases} x+y=-5 \\ x\cdot y=6 \end{cases}$, de unde rezultă $x=-2,\ y=-3$ sau $x=-3,\ y=-2$.

2. Sisteme de ecuații de forma $\begin{cases} y=mx+n \\ y=ax^2+bx+c \end{cases}, m,n,a,b,c\in\mathbb{R}$**;**



Interpretarea geometrică

Sistemul are două soluții diferite dacă dreapta (de ecuație $y=mx+n$) este secantă parabolei;
Sistemul are o singură soluție dacă dreapta este tangentă parabolei;
Sistemul nu are nicio soluție dacă dreapta nu intersectează parabola.

Exemplu: Să se rezolve sistemul de ecuații: $\begin{cases} y = 2x + 4 \\ y = 2x^2 + 7x + 1 \end{cases}$.

Rezolvare: Din $2x^2 + 7x + 1 = 2x + 4$, rezultă $2x^2 + 7x + 1 - 2x - 4 = 0 \Rightarrow 2x^2 + 5x - 3 = 0$, se obțin soluțiile: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 \pm 7}{4} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow y_1 = 2 \cdot \frac{1}{2} + 4 = 5$ și $x_2 = -3 \Rightarrow y_2 = 2 \cdot (-3) + 4 = -2$. Așadar, soluțiile sunt $S = \left\{ \left(\frac{1}{2}; 5 \right), (-3; -2) \right\}$.

3. Sisteme de forma $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ mx^2 + nxy + py^2 = 0 \end{cases}$; $a, b, c, m, n, p \in \mathbb{R}$.

Exemplu: Să se rezolve sistemul de ecuaţii: $\begin{cases} x + y = 2 \\ x^2 + y^2 + xy = 7 \end{cases}$;

Rezolvare: Din prima ecuaţie se scoate y = 2 – x şi se înlocuieşte în a doua ecuaţie rezultând:
$x^2 + (2 - x)^2 + x(2 - x) = 7 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$. Rezultă, $x_1 = -1, x_2 = 3$. Mai departe se află y: $y_1 = 3, y_2 = -1$. Soluţiile sistemului sunt: $S = \{(-1; 3), (3; -1)\}$.

Activitate independentă		**Răspuns**
Să se rezolve sistemul de ecuații:	$\begin{cases} y = 3x - 2 \\ y = x^2 - 9x + 6 \end{cases}$.	$S = \{(1;1), (8;22)\}$

Exercitii rezolvate

1. Să se rezolve sistemele de ecuaţii: a) $\begin{cases} x + y = 2 \\ x \cdot y = -15 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 5 \\ x \cdot y = \frac{1}{6} \end{cases}$;

Rezolvare: a) Sistemului dat i se asociază ecuaţia $x^2 - 2x - 15 = 0$. Soluţiile ei sunt chiar soluţiile sistemului: $x_1 = -3,\ x_2 = 5;\ S = \{(-3; 5), (5; -3)\}$.

b) Sistemul dat este echivalent cu $\begin{cases} x + y = 5xy \\ x \cdot y = \frac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \frac{5}{6} \\ x \cdot y = \frac{1}{6} \end{cases} \Rightarrow x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{6} = 0$.

Rezultă,

$x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = \frac{1}{3};\ S = \left\{ \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3} \right), \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2} \right) \right\}$;

2. Să se rezolve în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sistemele:

a) $\begin{cases} x+y=3 \\ x\cdot y=-10 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} x+y=5 \\ x^2+y^2=53 \end{cases}$; **c)** $\begin{cases} 3(x+y)+xy=9 \\ x+y+2xy=-7 \end{cases}$;

Rezolvare: a) . Asociem sistemului de ecuaţii liniare ecuaţia de gradul doi de forma $x^2-Sx+P=0$ unde $S=x_1+x_2, P=x_1\cdot x_2$. În cazul nostru, necunoscutele x şi y ale sistemului sunt soluţiile x_1, x_2 ecuaţiei $x^2-3x-10=0$. Rezolvând ecuaţia se obţine $x_1=-2, x_2=5$. Aşadar, cum sistemul este simetric rezultă $S=\{(-2;5),(5;-2)\}$.

b) . Ecuaţia a doua a sistemului se mai scrie astfel $x^2+y^2=53\Rightarrow (x+y)^2-2xy=53$ .Cum $x+y=5$ rezultă $xy=-14\Rightarrow \begin{cases} x+y=5 \\ x\cdot y=-14 \end{cases}\Rightarrow (x;y)\in\{(-2;7),(7;-2)\}$.

c) . Notăm cu $S=x+y$ **şi** $P=x\cdot y$**.**

Sistemul dat este echivalent cu $\begin{cases} 3S+P=9 \,|\cdot(-2) \\ S+2P=-7 \end{cases}$

$(+)\ -5S\ /=-25\Rightarrow S=5\Rightarrow P=-6.$

Din rezolvarea sistemului $\begin{cases} x+y=5 \\ x\cdot y=-6 \end{cases}\Rightarrow (x;y)\in\{(-1;6),(6;-1)\}$**.**

3. Să se rezolve sistemele de ecuații: a) $\begin{cases} y=x+4 \\ y=x^2+7x-12 \end{cases}$**; b)** $\begin{cases} 3x-y=2 \\ x^2+2xy-y^2=4 \end{cases}$;

Rezolvare:

a) Din $x^2+7x-12=x+4$, rezultă $x^2+7x-12-x-4=0\Rightarrow x^2+6x-16=0$, se obțin soluțiile: $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-6\pm 10}{2}\Rightarrow\ x_1=-8\Rightarrow y_1=-4$ și $x_2=2\Rightarrow y_2=6$.

Aşadar, soluțiile sunt $S=\{(-8;-4),(2;6)\}$.

b) Din prima ecuație se scoate $y=3x-2$ și se înlocuiește în a doua ecuație,

$x^2+2x(3x-2)-(3x-2)^2=4$, de unde se obține $-2x^2+8x-8=0\,|:(-2)\Rightarrow$

$x^2-4x+4=0$ cu soluțiile $x_1=x_2=2$. Aşadar, din $y=3x-2$ se obține că $y=3\cdot 2-2=4$.

Soluția sistemului este $S=\{(2;4)\}$.

4. Să se precizeze poziția dreptei $y=2x+1$ față de parabola $y=x^2-6x+17$;

Rezolvare:

Din $x^2-6x+17=2x+1\Rightarrow (x-4)^2=0\Rightarrow x=4\Rightarrow y=9$. Aşadar, dreapta va avea un singur punct de tangență cu parabola dată.

5. Să se rezolve sistemele de ecuații:

a) $\begin{cases} x^3+y^3=-56 \\ x+y=-2 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} x^3-y^3=28 \\ x^2+xy+y^2=7 \end{cases}$; **c)** $\begin{cases} x+y=-3 \\ \frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}=-\frac{9}{2} \end{cases}$; **d)** $\begin{cases} x+y=1 \\ x^4+y^4=17 \end{cases}$

Rezolvare:

a) Din $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$ rezultă $-56=-8+6xy \Rightarrow 6xy=-48 \Rightarrow xy=-8$. Așadar, rămâne de rezolvat sistemul: $\begin{cases} x+y=-2 \\ x\cdot y=-8 \end{cases}$. Se obțin soluțiile: $S=\{(-4;2),(2;-4)\}$.

b) Din $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$ obținem $(x-y)\cdot 7=28 \Rightarrow x-y=4 \Rightarrow y=x-4$ și îl inlocuim pe y în a doua ecuație: $x^2+x(x-4)+(x-4)^2=7$ de unde, obținem că

$3x^2-12x+9=0 \,|:3 \Rightarrow$

$x^2-4x+3=0$ cu soluțiile $x_1=1$ și $x_2=3$. Mai departe, din $y=x-4$ se află $y_1=1-4=-3$ și $y_2=3-4=-1$. Așadar, soluțiile sistemului sunt: $S=\{(1;-3),(3;-1)\}$.

c) Din a doua ecuație obținem: $\frac{x^3+y^3}{xy}=-\frac{9}{2} \Leftrightarrow \frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{xy}=-\frac{9}{2} \Rightarrow$

$6\left[(x+y)^2-3xy\right]=9xy \Rightarrow \; 2(9-3xy)=3xy \Rightarrow 18-6xy=3xy \Rightarrow xy=2$.

Așadar, $\begin{cases} x+y=-3 \\ x\cdot y=2 \end{cases} \Rightarrow x_1=-2,\; y_1=-1$ sau $x_2=-1,\; y_2=-2$.

Soluțiile sunt, $S=\{(-2;-1),(-1;-2)\}$.

d) A doua ecuație este echivalentă cu $(x^2+y^2)^2-2x^2y^2=17$ și mai departe,

$\left[(x+y)^2-2xy\right]^2-2x^2y^2=17 \Rightarrow \; (1-2xy)^2-2x^2y^2=17$. Făcând notația $xy=t$, obținem ecuația

$t^2-2t-8=0$ cu soluțiile $t_1=-2$, $t_2=4$. De aici, se obține că $xy=-2$ sau $xy=4$. Așadar, se obțin sistemele:

$\begin{cases} x+y=1 \\ xy=-2 \end{cases}$, cu soluțiile: $S=\{(-1;2),(2;-1)\}$ și $\begin{cases} x+y=1 \\ xy=4 \end{cases}$ care nu are soluții reale.

6. Să se rezolve sitemele de ecuații:

a) $\begin{cases} x^4+y^4=21 \\ x\cdot y=2 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} x+y=26 \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=6 \end{cases}$;

Rezolvare:

a) $x^4+y^4=21 \Leftrightarrow \left[(x+y)^2-2xy\right]^2-2x^2y^2=21$. Cum $x\cdot y=2$, rezultă

$\left[(x+y)^2-4\right]^2-4=2 \Rightarrow (x+y)^2-4=\pm\sqrt{25} \Rightarrow$

$(x+y)^2=9 \Rightarrow x+y=\pm 3 \Rightarrow$ $\begin{cases} x+y=3 \\ x\cdot y=2 \end{cases}$ și $\begin{cases} x+y=-3 \\ x\cdot y=2 \end{cases}$. Soluțiile sunt

$S=\{(1;2),(2;1),(-1;-2),(-2;-1)\}$.

b) Din $\sqrt{x}+\sqrt{y}=6 \,|()^2 \Rightarrow x+y+2\sqrt{xy}=36 \Rightarrow \sqrt{xy}=5 \Rightarrow xy=25$.

Aşadar, $\begin{cases} x+y=26 \\ x\cdot y=25 \end{cases} \Rightarrow (x;y)\in\{(1;25),(25;1)\}$.

Exercitii propuse

1. Să se rezolve sistemele:

a) $\begin{cases} x+y=-4 \\ x\cdot y=-5 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} x+y=-3\sqrt{3} \\ x\cdot y=6 \end{cases}$; **c)** $\begin{cases} x+y=\dfrac{5}{2} \\ x\cdot y=1 \end{cases}$; **d)** $\begin{cases} x+y=2\sqrt{2} \\ x\cdot y=2 \end{cases}$;

2. Să se rezolve sistemele:

a) $\begin{cases} x+y+x\cdot y7 \\ 2(x+y)-3x\cdot y=-1 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} 2(x+y)-x\cdot y=-2 \\ (x+y)\cdot(x\cdot y)=12 \end{cases}$; **c)** $\begin{cases} 3(x+y)-x\cdot y=1 \\ 2x+2y-xy=4 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{xy}=1 \\ 2(x+y)=-xy \end{cases}$;

e) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=1 \\ x+y+2xy=4 \end{cases}$; **f)** $\begin{cases} x^2+y^2=10 \\ x\cdot y=-3 \end{cases}$; **g)** $\begin{cases} \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=2 \\ x+y=6 \end{cases}$; **h)** $\begin{cases} \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=2 \\ x\cdot y=9 \end{cases}$; **i)** $\begin{cases} x^2+y^2=10 \\ x\cdot y=4 \end{cases}$

3. Să se rezolve sistemele de ecuaţii:

a) $\begin{cases} x+y=7 \\ x\cdot y=-8 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} x+y=\dfrac{9}{4} \\ x\cdot y=\dfrac{1}{2} \end{cases}$; **c)** $\begin{cases} x+y=3\sqrt{3} \\ x\cdot y=6 \end{cases}$; **d)** $\begin{cases} x+y=\dfrac{1}{3} \\ x\cdot y=-\dfrac{2}{9} \end{cases}$;

e) $\begin{cases} 2(x+y)+xy=17 \\ x+y-3xy=-9 \end{cases}$;

4. a) $\begin{cases} x+y=3 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=2 \\ x\cdot y=4 \end{cases}$; **c)** $\begin{cases} x^2+y^2+xy=7 \\ x+y+4xy=-10 \end{cases}$; **d)** $\begin{cases} x+y=15 \\ x^2+y^2=13 \end{cases}$;

5. Să se rezolve sistemele:

a) $\begin{cases} x^3+y^3=9 \\ x+y=3 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} x^3+y^3=7 \\ x\cdot y=-2 \end{cases}$; **c)** $\begin{cases} x^3+y^3=7 \\ x+y=1 \end{cases}$; **d)** $\begin{cases} x^3+y^3=0 \\ x^2-xy+y^2=12 \end{cases}$;

e) $\begin{cases} x^3+y^3=-26 \\ x^2-xy+y^2=13 \end{cases}$

6. Să se rezolve sistemele:

a) $\begin{cases} y=x+4 \\ y=x^2-2x \end{cases}$; b) $\begin{cases} y=x-2 \\ y=x^2-3x+2 \end{cases}$; c) $\begin{cases} y=2 \\ y=x^2-4x+5 \end{cases}$; d) $\begin{cases} y=x \\ y=x^2-7x+7 \end{cases}$;

e) $\begin{cases} x+y=0 \\ y=x^2+5x+9 \end{cases}$; f) $\begin{cases} x+y=2 \\ y^2+5x-x^2=0 \end{cases}$; g) $\begin{cases} x-y=3 \\ x^2+3xy+y^2=-1 \end{cases}$; h) $\begin{cases} 2x-y=1 \\ x^2+xy-2=0 \end{cases}$;

i) $\begin{cases} y=x+8 \\ y=2x^2-6x+4 \end{cases}$; j) $\begin{cases} y=x+1 \\ y=3x^2-4x+3 \end{cases}$; k) $\begin{cases} y=2x-1 \\ y=2x^2-7x+3 \end{cases}$; l) $\begin{cases} y=x-1 \\ y=3x^2-7x+4 \end{cases}$.

7. Să se rezolve sistemele de ecuaţii:

b) $\begin{cases} y=2x+3 \\ y=x^2+4x+4 \end{cases}$; **c)** $\begin{cases} x+y=1 \\ y^2+xy+y=4 \end{cases}$; **d)** $\begin{cases} 2x+y=4 \\ x^2-3xy+y=-3 \end{cases}$;

e) $\begin{cases} x+y=2 \\ x^2+y^2+xy=7 \end{cases}$; **f)** $\begin{cases} x^2-xy+y^2=3 \\ y=x+1 \end{cases}$; **i)** $\begin{cases} x+y-5=0 \\ x^2-xy+2=0 \end{cases}$; **j)** $\begin{cases} x+2y=1 \\ x^2-6y^2=1 \end{cases}$.

8. Fie funcţiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4x+6$, $g(x)=2x+1$. Să se determine coordonatele punctelor de intersecţie a graficelor funcţiilor f şi g.

9. Fie funcţiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-x+1$, şi $g(x)=x+4$. Să se calculeze coordonatele punctelor de intersecţie a graficelor funcţiilor f şi g.

10. Să se determine coordonatele punctelor de intersecție dintre graficele funcțiilor $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^2-4x+3$, $g(x)=-x+2$.

11. Să se rezolve: a) $\begin{cases} x-y-5=0 \\ y=3x^2+5x-4 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x-y=-3 \\ x\cdot y=10 \end{cases}$;

12. Să se precizeze poziția dreptei $y=mx+n$ față de parabola $y=ax^2+bx+c$ în cazurile:

a) $y=3x-2$, $y=x^2-4x+8$
b) $y=x+2$, $y=x^2+3x-6$
c) $y=x-3$, $y=x^2-3x+3$
d) $y=3x-3$, $y=x^2-2x+4$
e) $y+5=0$, $y=x^2-9x+13$
f) $y+x+1=0$, $y=x^2+4x+3$

PARTEA a II-a .
ELEMENTE DE GEOMETRIE PLANĂ

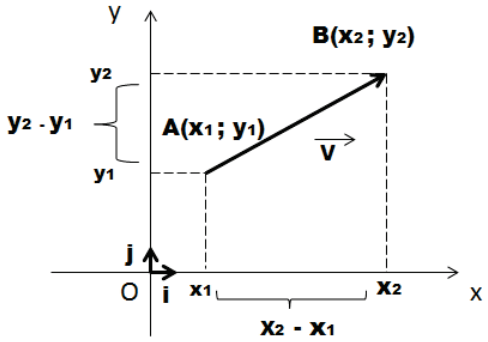
1. CALCUL VECTORIAL

1.1 Vectori sub formă algebrică. Vectori egali

Definiţie: O pereche ordonată de puncte din plan (A;B) se numeşte **segment orientat**. A se numeşte originea şi B extremitatea segmentului orientatat (AB).
Lungimea segmentului [AB] se numeşte lungimea, **modulul** sau **norma** segmentului orientat;
Dreapta AB se numeşte dreapta suport a segmentului orientat;

Definiţie: Se numeşte **vector** mulţimea tuturor segmentelor orientate din plan care au aceeaşi direcţie, sens şi lungime.

Un vector $\overrightarrow{AB}$ se caracterizează prin **modul** (sau normă adică lungimea sa, $|\overrightarrow{AB}|$), prin **direcţie** definită de dreapta suport a vectorului, AB şi de **sens** care este indicat de săgeată, de la A spre B;
Vectorul nul $\vec{0}$ are lungimea zero şi reprezintă orice punct din spaţiu;



Scrierea vectorului $\vec{v}$ (sau $\overrightarrow{AB}$)

Sub formă algebrică : $\vec{v}(x_2-x_1;y_2-y_1)$ sau

Sub formă de descompunere după versorii $\vec{i}$ şi $\vec{j}$ ai axelor Ox şi Oy:

$\vec{v}=pr_{OX}\vec{v}\cdot\vec{i}+pr_{OY}\vec{v}\cdot\vec{j}=(x_2-x_1)\vec{i}+(y_2-y_1)\vec{j}$)
Baza $(\vec{i},\vec{j})$ se numeşte bază ortonormată.

Versorii axelor de coordonate au modulul egal cu 1, direcţiile axelor şi sensurile semiaxelor pozitive OX şi OY.

Vectori egali

Definiţie: Se numesc **vectori egali**, vectorii care au aceeaşi direcţie, acelaşi sens şi acelaşi modul. Doi vectori se numesc **opuşi** dacă au aceeaşi direcţie, acelaşi modul şi sensuri contrare: - $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$.
Pentru vectorii $\vec{u}(x_1;y_1),\vec{v}(x_2;y_2)$ sau $\vec{u}=x_1\cdot\vec{i}+y_1\cdot\vec{j}$, $\vec{v}=x_2\cdot\vec{i}+y_2\cdot\vec{j}$,
$\vec{u}=\vec{v}\Leftrightarrow x_1=x_2\ si\ y_1=y_2$

Exemplu: Să se determine $m,n\in\mathbb{R}$ astfel încât vectorii $\vec{u}=(5-m)\vec{i}+4\vec{j}$ *si* $\vec{v}=8\vec{i}+(n-6)\vec{j}$ să fie egali.

Rezolvare: $\vec{u}=\vec{v}\Leftrightarrow 5-m=8$ *si* $4=n-6\Rightarrow m=-3,\ n=10$

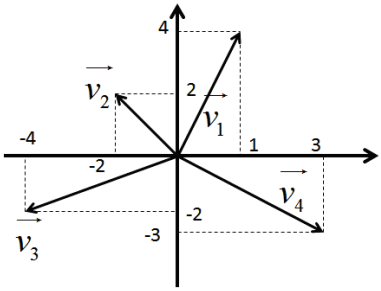
Activitate independentă		**Răspuns**
Să se determine $m,n\in\mathbb{R}$ astfel încât vectorii $\vec{u}=(m^2-6)\vec{i}+4\vec{j}$, $\vec{v}=3\vec{i}-(n+5)\vec{j}$; să fie egali.		m = -3, m=3 n= -9

Exercitii rezolvate

1. Să se reprezinte într-un sistem de axe XOY următorii vectori:

a) $\vec{v_1}(1;4)$**;** **b)** $\vec{v_2}(-2;2)$**;** **c)** $\vec{v_3}(-4;-2)$**;** **d)** $\vec{v_4}(3;-3)$**.**

Rezolvare:



2. Să se determine $m,n\in\mathbb{R}$ astfel încât vectorii următori să fie egali:

a) $\vec{u}(m;4),\ \vec{v}(3;n)$; **b)** $\vec{u}(m+2;n-5),\ \vec{v}(4;6)$; **c)** $\vec{u}(8;-5),\ \vec{v}(m+6;n-3)$;

Rezolvare:

a) $\vec{u}=\vec{v}\Leftrightarrow m=3$ *si* $n=4$;

b) $\vec{u}=\vec{v}\Leftrightarrow m+2=4\Rightarrow m=2$ *si* $n-5=6\Rightarrow n=11$;

c) $\vec{u}=\vec{v}\Leftrightarrow 8=m+6\Rightarrow m=2$ *si* $-5=n-3\Rightarrow n=-2$;

3. Să se determine $m,n\in\mathbb{R}$ astfel încât vectorii următori să fie egali:

a) $\vec{u}=4m\vec{i}+(n-2)\vec{j},\ \vec{v}=12\vec{i}+3\vec{j}$; **b)** $\vec{u}=6\vec{i}+4\vec{j},\ \vec{v}=(m+2)\vec{i}+n\vec{j}$;

c) $\vec{u}=(m^2-9)\vec{i}+(4-n)\vec{j},\ \vec{v}=16\vec{i}+2\vec{j}$;

Rezolvare:

a) $\vec{u}=\vec{v}\Leftrightarrow 4m=12\Rightarrow m=3$ *si* $n-2=3\Rightarrow n=5$;

b) $\vec{u}=\vec{v}\Leftrightarrow 6=m+2\Rightarrow m=4$ *si* $4=n\Rightarrow n=4$;

c) $\vec{u}=\vec{v}\Leftrightarrow m^2-9=16\Rightarrow m^2=25\Rightarrow m\in\{-5;5\}$ *si* $4-n=2\Rightarrow n=2$;

Exercitii propuse

1. Să se reprezinte într-un sistem de axe XOY următorii vectori:

a) $\vec{v_1}(2;6)$; b) $\vec{v_2}(-3;4)$; c) $\vec{v_3}(-5;-1)$; d) $\vec{v_4}(4;-2)$.

2. Să se reprezinte într-un sistem de axe XOY următorii vectori:

a) $\vec{v_1}=2\vec{i}+5\vec{j}$; b) $\vec{v_2}=-3\vec{i}+2\vec{j}$; c) $\vec{v_3}=-4\vec{i}-3\vec{j}$; d) $\vec{v_4}=5\vec{i}-4\vec{j}$.

3. Să se determine $m,n\in\mathbb{R}$ astfel încât vectorii următori să fie egali:

a) $\vec{u}(m;6)$, $\vec{v}(-2;n)$; b) $\vec{u}(m-4;n+3)$, $\vec{v}(5;2)$; c) $\vec{u}(2m+6;8)$, $\vec{v}(10;n-2)$;

4. Să se determine $m,n\in\mathbb{R}$ astfel încât vectorii următori să fie egali:

a) $\vec{u}=(m-3)\vec{i}+2\vec{j}$, $\vec{v}=3\vec{i}-(n+1)\vec{j}$; b) $\vec{u}=(2m+8)\vec{i}+6\vec{j}$, $\vec{v}=(m-4)\vec{i}+(n-2)\vec{j}$;

c) $\vec{u}=4\vec{i}+3\vec{j}$, $\vec{v}=(3m-8)\vec{i}-(2n+9)\vec{j}$; d) $\vec{u}=(m^2+2m)\vec{i}+(n-4)\vec{j}$, $\vec{v}=3\vec{i}+5\vec{j}$;

5. Să se determine $m,n\in\mathbb{R}$ astfel încât vectorii $\vec{u}=6\vec{i}+(n-4)\vec{j}$ *si* $\vec{v}=(m+4)\vec{i}+10\vec{j}$ să fie egali.

1.2 Operaţii cu vectori

Adunarea vectorilor

Definiţie: Pentru vectorii $\vec{u}(x_1;y_1),\vec{v}(x_2;y_2)$ **suma** lor este vectorul $\vec{u}+\vec{v}(x_1+x_2;y_1+y_2)$ sau pentru vectorii $\vec{u}=x_1\cdot\vec{i}+y_1\cdot\vec{j}$, $\vec{v}=x_2\cdot\vec{i}+y_2\cdot\vec{j}$, suma lor este $\vec{u}+\vec{v}=(x_1+x_2)\cdot\vec{i}+(y_1+y_2)\cdot\vec{j}$;

Înmulţirea cu scalari

Definiţie: Produsul dintre un scalar $\lambda\in\mathbb{R}$ şi un vector $\vec{v}(x_1,y_1)$ este un vector de coordonate $(\lambda x_1,\lambda y_1)$ sau $\lambda\cdot\vec{u}=\lambda\cdot x_1\cdot\vec{i}+\lambda\cdot y_1\cdot\vec{j}$, $\forall\lambda\in\mathbb{R}$. De asemenea, $\lambda\cdot\vec{v}=\vec{0}\Leftrightarrow\lambda=0$ *sau* $\vec{v}=\vec{0},\forall\lambda\in\mathbb{R}$;

Daca $\lambda\neq 0,\vec{v}\neq\vec{0}\Rightarrow\left|\lambda\cdot\vec{v}\right|=|\lambda|\cdot\left|\vec{v}\right|,\lambda\cdot\vec{v}$ are direcţia şi sensul vectorului $\vec{v}$ dacă $\lambda\rangle 0$ şi sens opus lui $\vec{v}$ dacă $\lambda\langle 0$.

Exemplu: Se dau vectorii $\vec{u}=5\vec{i}-3\vec{j}$, $\vec{v}=-4\vec{i}+7\vec{j}$. Să se calculeze $2\vec{u}+3\vec{v}$;

Rezolvare: $2\vec{u}+3\vec{v}=2(5\vec{i}-3\vec{j})+3(-4\vec{i}+7\vec{j})=10\vec{i}-6\vec{j}-12\vec{i}+21\vec{j}=-2\vec{i}+15\vec{j}$;

Produsul scalar a doi vectori nenuli

Definiţie: Produsul scalar a doi vectori $\vec{u}(x_1;y_1),\vec{v}(x_2;y_2)$ sau $\vec{u}=x_1\cdot\vec{i}+y_1\cdot\vec{j}$, $\vec{v}=x_2\cdot\vec{i}+y_2\cdot\vec{j}$, este egal cu $\vec{u}\bullet\vec{v}=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2$

Exemplu: Să se calculeze produsul scalar al vectorilor $\vec{u}=4\vec{i}-3\vec{j}$, $\vec{v}=3\vec{i}+2\vec{j}$.

Rezolvare: $\vec{u}\bullet\vec{v}=4\cdot 3+(-3)\cdot 2=12-6=6$;

Teorema cosinusului:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|\cdot\cos\alpha\ \Rightarrow\cos\alpha=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^{\,2}+y_1^{\,2}}\cdot\sqrt{x_2^{\,2}+y_2^{\,2}}},\ unde\,\alpha=m(\vec{u},\vec{v}),\alpha\in[0,\pi].$$

Activitate independentă	**Răspuns**
Să se determine cosinusul unghiului făcut de dreptele suport ale vectorilor $\vec{u}=2\vec{i}+6\vec{j}$, $\vec{v}=\vec{i}+3\vec{j}$.	1

Exercitii rezolvate

1. Se consideră vectorii $\vec{u}=5\vec{i}+4\vec{j},\ \vec{v}=3\vec{i}-2\vec{j}$**. Să se calculeze:**

a) $\vec{u}-\vec{v}$**;** **b)** $2\vec{u}+4\vec{v}$**;** **c)** $3\vec{u}-2\vec{v}$**;**

Rezolvare:

a) $\vec{u}-\vec{v}=5\vec{i}+4\vec{j}-(3\vec{i}-2\vec{j})=5\vec{i}-3\vec{i}+4\vec{j}+2\vec{j}=9\vec{i}-\vec{j}$;

b) $2\vec{u}+4\vec{v}=2(5\vec{i}+4\vec{j})+4(3\vec{i}-2\vec{j})=10\vec{i}+8\vec{j}+12\vec{i}-8\vec{j}=22\vec{i}$;

c) $3\vec{u}-2\vec{v}=3(5\vec{i}+4\vec{j})-2(3\vec{i}-2\vec{j})=15\vec{i}+12\vec{j}-6\vec{i}+4\vec{j}=9\vec{i}+16\vec{j}$;

2. Se consideră vectorii $\vec{u}(-3;2),\ \vec{v}(4;1),$ **. Să se calculeze:**

a) $\vec{u}+\vec{v}$**;** **b)** $2\vec{u}+\vec{v}$**;** **c)** $3\vec{u}-4\vec{v}$**;**

Rezolvare:

a) $\vec{u}+\vec{v}=(-3;2)+(4;1)=(-3+4;2+1)=(1;3)$**;**

b) $2\vec{u}+\vec{v}=2(-3;2)+(4;1)=(-6;4)+(4;1)=(-2;5)$**;**

c) $3\vec{u}-4\vec{v}=3(-3;2)-4(4;1)=(-9;6)-(16;4)=(-25;2)$**.**

3. Să se calculeze produsul scalar al vectorilor:

a) $\vec{u}(4;2),\ \vec{v}(3;5)$; **b)** $\vec{u}(-3;5),\ \vec{v}(2;4)$; **c)** $\vec{u}=2\vec{i}+3\vec{j},\ \vec{v}=4\vec{i}+5\vec{j}$**;** **d)** $\vec{u}=6\vec{i}-4\vec{j},\ \vec{v}=3\vec{i}-2\vec{j}$**.**

Rezolvare:

a) $\vec{u}\bullet\vec{v}=4\cdot3+2\cdot5=12+10=22$**;** **b)** $\vec{u}\bullet\vec{v}=-3\cdot2+5\cdot4=-6+20=14$**;**

c) $\vec{u}\bullet\vec{v}=2\cdot4+3\cdot5=8+15=23$**;** **d)** $\vec{u}\bullet\vec{v}=6\cdot3+(-4)\cdot(-2)=18+8=26$**.**

Exercitii propuse

1. Se consideră vectorii $\vec{u}=2\vec{i}-3\vec{j},\ \vec{v}=4\vec{i}+3\vec{j}$. Să se calculeze:

a) $\vec{u}+\vec{v}$; b) $\vec{u}-2\vec{v}$; c) $3\vec{u}+4\vec{v}$; d) $2\vec{u}-5\vec{v}$.

2. Se consideră vectorii $\vec{u}(2;4),\ \vec{v}(-2;3),$. Să se calculeze:

a) $\vec{u}+\vec{v}$; b) $2\vec{u}+3\vec{v}$; c) $3\vec{u}-2\vec{v}$;

3. În reperul $(O;\vec{i};\vec{j})$ se consideră vectorii $\vec{u}=5\vec{i}-2\vec{j}$ şi $\vec{v}=2\vec{i}+4\vec{j}$. Să se determine coordonatele vectorului $3\vec{u}+4\vec{v}$.

4. În reperul $(O;\vec{i};\vec{j})$ se consideră vectorii $\vec{u}=-3\vec{i}+5\vec{j}$ şi $\vec{v}=3\vec{i}+2\vec{j}$. Să se determine coordonatele vectorului $4\vec{u}+2\vec{v}$.

5. În reperul $(O,\vec{i},\vec{j})$ se consideră vectorii $\vec{u}=6\vec{i}-2\vec{j}$ şi $\vec{v}=4\vec{i}+3\vec{j}$. Să se determine coordonatele vectorului $3\vec{u}-2\vec{v}$.

6. Se consideră vectorii $\vec{u}=5\vec{i}-3\vec{j},\ \vec{v}=-4\vec{i}+7\vec{j}$. Să se calculeze : a) $3\vec{u}-2\vec{v}$; b) $-4\vec{u}+5\vec{v}$;

7. Să se calculeze produsul scalar al vectorilor: a) $\vec{u}(5;-4),\ \vec{v}(3;-2)$;

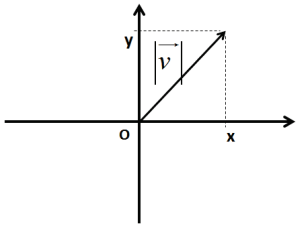
b) $\vec{u}=-3\vec{i}-2\vec{j},\ \vec{v}=2\vec{i}+4\vec{j}$.

8. Să se determine cosinusul unghiului făcut de dreptele suport ale vectorilor $\vec{u}=3\vec{i}+4\vec{j},\ \vec{v}=12\vec{i}+5\vec{j}$.

1.3 Modulul unui vector

Modulul unui vector

Definiţie: Pentru vectorul $\overrightarrow{AB} = x\vec{i} + y\vec{j}$ (sau $\overrightarrow{AB}(x;y)$) **modulul** (sau **norma**) vectorului $\overrightarrow{AB}$ este $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Dacă $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ atunci $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.



Modulul sau norma unui vector reprezintă lungimea vectorului.

Exemple. Să se calculeze modulul (norma) vectorilor:

a) $\vec{u_1}(2;3)$; b) $\vec{u_2} = -2\vec{i} + 6\vec{j}$;

Rezolvare:

a) $\left|\vec{u_1}\right| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$;

b) $\left|\vec{u_2}\right| = \sqrt{(-2)^2 + 6^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$;

Activitate independentă	**Răspuns**
Se consideră vectorul $\vec{u} = (m-4)\vec{i} + 3\vec{j}$. Ştiind că norma sa este egală cu 5, să se determine m.	m = 0, m = 8.

Exercitii rezolvate

1. Să se calculeze modulul vectorilor:

a) $\vec{v_1} = 6\vec{i} + 8\vec{j}$; **b)** $\vec{v_2}(-5; 2\sqrt{6})$**;**

Rezolvare:

a) $\left|\vec{v_1}\right| = \left|6\vec{i} + 8\vec{j}\right| = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$;

b) $\left|\vec{v_2}\right| = \sqrt{(-5)^2 + (2\sqrt{6})^2} = \sqrt{25 + 24} = \sqrt{49} = 7$;

2. Se consideră vectorii $\vec{u}(5;-2)$ **şi** $\vec{v}(3;-1)$**. Să se determine modulul vectorului** $2\vec{u} - 3\vec{v}$**.**

Rezolvare: $2 \cdot \vec{u}(5;-2) = (10;-4)$ **şi** $-3 \cdot \vec{v}(3;-1) = (-9;3)$**.** Atunci,

$(2\vec{u} - 3\vec{v})(10-9; -4+3) = (1;-1)$**.**

$\left|2\vec{u} - 3\vec{v}\right| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$**.**

3. Se consideră vectorul $\vec{v} = m \cdot \vec{i} + 3\vec{j}$**. Să se determine** $m \in \mathbb{R}$ **astfel încât modulul vectorului să fie egal cu 3.**

Rezolvare:

$\left|\vec{v}\right| = \left|m \cdot \vec{i} + 3\vec{j}\right| = \sqrt{m^2 + 3^2} = 3$. Prin ridicare la puterea a doua rezultă $m^2 + 9 = 9 \Rightarrow m = 0$;

Exercitii propuse

1. Se consideră vectorii $\vec{u}=\vec{i}+3\vec{j}$ şi $\vec{v}=-2\vec{i}+2\vec{j}$. Să se determine modulul vectorului $3\vec{u}-\vec{v}$.

2. Se consideră vectorii $\vec{a}(2;3),\vec{b}(3;5)$. Să se calculeze modulul vectorului $2\vec{a}+3\vec{b}$.

3.Să se calculeze norma vectorilor: a) $\overrightarrow{u}(6;8)$; b) $\vec{u}=-3\vec{i}+5\vec{j}$; c) $\vec{u}=\frac{1}{2}\vec{i}+\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$;

d) $\vec{u}=4\vec{i}-5\vec{j}$;

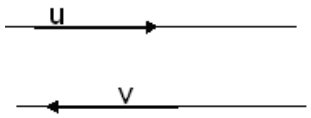
4. Fie vectorii $\vec{a}(2;3),\vec{b}(3;5)$. Să se calculeze modulul vectorului $2\vec{a}+3\vec{b}$.

5. Se consideră vectorii $\vec{u}=3\vec{i}-\vec{j}$ şi $\vec{v}=2\cdot\vec{i}-a\vec{j}$. Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât modulul vectorului $\vec{u}-3\vec{v}$ să fie egal cu 3.

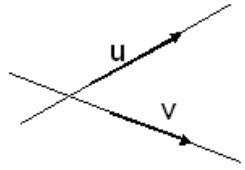
6. Se consideră vectorii $\vec{u}(8;-2)$ şi $\vec{v}(3;a)$. Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât modulul vectorului $3\vec{u}-2\vec{v}$ să fie egal cu 30.

1.4 Vectori coliniari. Vectori necoliniari

Definiţie: Doi vectori se numesc **coliniari** dacă cel puţin unul este nul sau dacă amândoi sunt nenuli şi au aceeaşi direcţie (indiferent de modul şi de sens). În caz contrar se numesc necoliniari.



vectori coliniari



vectori necoliniari

Definiţie: Fie $\vec{u}(x_1;y_1)\neq\vec{0}$ şi $\vec{v}(x_2;y_2)$ un vector oarecare.

Vectorii $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ sunt **coliniari** $\Leftrightarrow\exists\lambda\in\mathbb{R}$ *a.i.* $\vec{v}=\lambda\cdot\vec{u}$ sau

$$\Leftrightarrow\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=k, x_2, y_2\neq 0.\Leftrightarrow x_1y_2-x_2y_1=0.$$

Exemple: Verificaţi dacă următorii vectori sunt coliniari a) $\vec{u}(1;1),\ \vec{v}(3;-1)$; b) $\vec{u}=2\vec{i}+3\vec{j},\ \vec{v}=4\vec{i}+6\vec{j}$

Rezolvare: a) Deoarece $\frac{1}{3}\neq\frac{1}{-1}\Rightarrow\vec{u}\ si\ \vec{v}$ nu sunt coliniari;

b) Cum $\frac{2}{4}=\frac{3}{6}\Leftrightarrow 12=12\Rightarrow\vec{u}\ si\ \vec{v}$ sunt coliniari;

Vectori ortogonali

Definiţie: Vectorii $\vec{u}(x_1;y_1),\vec{v}(x_2;y_2)$ sau $\vec{u}=x_1\cdot\vec{i}+y_1\cdot\vec{j},\ \vec{v}=x_2\cdot\vec{i}+y_2\cdot\vec{j},$ sunt **ortogonali**, $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\ x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2=0$.

Exemplu: Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât vectorii $\vec{u}=2\vec{i}+4\vec{j},\ \vec{v}=-3\vec{i}+m\vec{j}$ să fie ortogonali.

Rezolvare: $\vec{u}\perp\vec{v}\ \Leftrightarrow\ 2\cdot(-3)+4\cdot m=0\Rightarrow 4m=6\Rightarrow m=\frac{3}{2}$;

Descompunerea unui vector după două direcţii date

Definiţie: Fie $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ doi vectori necoliniari. Oricare ar fi vectorul $\vec{v}$, există $\alpha,\beta\in\mathbb{R}(unice)$ astfel încât $\vec{v}=\alpha\cdot\vec{a}+\beta\cdot\vec{b}$ adică vectorul $\vec{v}$ se scrie ca o **combinaţie liniară** a vectorilor $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ care formează o bază. α,β se numesc coordonatele vectorului $\vec{v}$ în baza $\left(\vec{a},\vec{b}\right)$.

Exemplu: Să se scrie vectorul $\vec{v}=4\vec{i}-3\vec{j}$ ca o combinaţie liniară a vectorilor $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}$ şi $\vec{b}=\vec{i}-2\vec{j}$.

Rezolvare: $\vec{v}=\alpha\cdot\vec{a}+\beta\cdot\vec{b}\Leftrightarrow 4\vec{i}-3\vec{j}=\alpha(2\vec{i}+\vec{j})+\beta(\vec{i}-2\vec{j})\Leftrightarrow 4\vec{i}-3\vec{j}=(2\alpha+\beta)\vec{i}+(\alpha-2\beta)\vec{j}$.

De aici rezultă $\alpha=1,\ \beta=2\Rightarrow\vec{u}=\vec{a}+2\vec{b}$;

Vectori liniari independenţi

Definiţie: Vectorii $\vec{u}=x_1\cdot\vec{i}+y_1\cdot\vec{j},\ \vec{v}=x_2\cdot\vec{i}+y_2\cdot\vec{j}$ sunt **liniar independenţi** adică necoliniari $\Leftrightarrow\exists x,y\in\mathbb{R}\ a.î.\ \ x\cdot\vec{u}+y\cdot\vec{v}=\vec{0}\Leftrightarrow x=y=0$.

Exemplu: Să se arate că vectorii $\vec{u}=2\vec{i}-3\vec{j},\ \vec{v}=\vec{i}+2\vec{j}$ sunt liniar independenţi.

Rezolvare: $x\cdot\vec{u}+y\cdot\vec{v}=\vec{0}\Leftrightarrow x\cdot(2\vec{i}-3\vec{j})+y(\vec{i}+2\vec{j})=\vec{0}\Leftrightarrow(2x+y)\cdot\vec{i}+(-3x+2y)\cdot\vec{j}=\vec{0}\Rightarrow$ $\vec{0}=0\cdot\vec{i}+0\cdot\vec{j}\Rightarrow 2x+y=0$ şi $-3x+2y=0$, aşadar x = 0, y = 0 deci $\vec{u},\ \vec{v}$ sunt liniar independenţi;

Activitate independentă		**Răspuns**
Se consideră vectorii $\vec{u}=(m-2)\vec{i}+(m+5)\vec{j}$ şi $\vec{u}=3\vec{i}+4\vec{j}$. Să se determine m astfel încât vectorii să fie coliniari.		m=23

Exercitii rezolvate

1. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât vectorii $\vec{u}(4;-2)$ şi $\vec{v}(m+1;3)$ să fie:

a) coliniari; **b) ortogonali;**

Rezolvare:

a) $\vec{u}(4;-2)$ şi $\vec{v}(m+1;3)$ sunt coliniari dacă şi numai dacă $\frac{4}{m+1}=\frac{-2}{3}\Rightarrow 4\cdot 3=(m+1)\cdot(-2)$ $\Rightarrow 14=-2m\Rightarrow m=-7;$

b) $\vec{u}(4;-2)$ şi $\vec{v}(m+1;3)$ sunt ortogonali dacă şi numai dacă $4\cdot(m+1)+(-2)\cdot 3=0$ $\Rightarrow 4m+4-6=0\Rightarrow 4m=2\Rightarrow m=\frac{1}{2}$;

2. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât vectorii $\vec{u}(m+3;m-1)$ și $\vec{v}(4;3)$ să fie:
a) coliniari; b) ortogonali;
Rezolvare:
a) $\vec{u}(m+3;m-1)$ și $\vec{v}(4;3)$ sunt coliniari dacă și numai dacă
$\frac{m+3}{4}=\frac{m-1}{3} \Rightarrow 3\cdot(m+3)=(m-1)\cdot 4 \Rightarrow 3m+9=4m-4 \Rightarrow m=13;$
b) $\vec{u}(m+3;m-1)$ și $\vec{v}(4;3)$ sunt ortogonali dacă și numai dacă
$4\cdot(m+3)+3\cdot(m-1)=0 \Rightarrow 4m+12+3m-3=0 \Rightarrow 7m=-9 \Rightarrow m=\frac{-9}{7}$;
3. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât vectorii $\vec{u}(m^2-4;m+2)$ și $\vec{v}(3;1)$ să fie:
a) coliniari; b) ortogonali;
Rezolvare:
a) Vectorii $\vec{u}(m^2-4;m+2)$ și $\vec{v}(3;1)$ sunt coliniari dacă și numai dacă
$\frac{m^2-4}{3}=\frac{m+2}{1} \Rightarrow m^2-4=3(m+2) \Rightarrow m^2-3m-10=0 \Rightarrow m \in \{-2;5\}$;
b) Vectorii $\vec{u}(m^2-4;m+2)$ și $\vec{v}(3;1)$ sunt ortogonali dacă și numai dacă
$\left(m^2-4\right)\cdot 3+(m+2)\cdot 1=0 \Rightarrow 3m^2+m-10=0 \Rightarrow m \in \left\{-2;\frac{5}{3}\right\}$;
4. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât vectorii $\vec{u}=5\cdot\vec{i}+3\cdot\vec{j}$ și $\vec{v}=(m-4)\cdot\vec{i}+2\cdot\vec{j}$ să fie:
a) coliniari; b) ortogonali;
Rezolvare:
a) Vectorii $\vec{u}=5\cdot\vec{i}+3\cdot\vec{j}$ **și** $\vec{v}=(m-4)\cdot\vec{i}+2\cdot\vec{j}$ sunt coliniari dacă și numai dacă
$\frac{5}{m-4}=\frac{3}{2} \Rightarrow 10=3m-12 \Rightarrow 3m=22 \Rightarrow m=\frac{22}{3}$;
b) Vectorii $\vec{u}=5\cdot\vec{i}+3\cdot\vec{j}$ **și** $\vec{v}=(m-4)\cdot\vec{i}+2\cdot\vec{j}$ sunt ortogonali dacă și numai dacă
$5\cdot(m-4)+3\cdot 2=0 \Rightarrow 5m=14 \Rightarrow m=\frac{14}{5}$;

Exercitii propuse

1. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât vectorii $\vec{u}=2\cdot\vec{i}-m\cdot\vec{j}$ și $\vec{v}=m\cdot\vec{i}-8\cdot\vec{j}$ să fie:
a) coliniari; b) ortogonali;
2. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât vectorii $\vec{u}=(m^2-9)\cdot\vec{i}+(m+3)\cdot\vec{j}$ și $\vec{v}=4\cdot\vec{i}+2\cdot\vec{j}$ să fie:
a) coliniari; b) ortogonali;
3. În reperul cartezian XOY se consideră vectorii $\overrightarrow{OA}=(a+2)\vec{i}+3\vec{j}$ și $\overrightarrow{OB}=-2\ \vec{i}+\vec{j}$. Să se determine numărul real „ a” astfel încât vectorii să fie coliniari.
4. În reperul cartezian XOY se consideră vectorii $\vec{u}=3\vec{i}+2\vec{j}$ și $\vec{v}=(a-2)\ \vec{i}+3\vec{j}$. Să se determine numărul real „ a” astfel încât vectorii să fie coliniari.
5. În reperul cartezian XOY se consideră vectorii $\vec{u}=2\vec{i}-4\vec{j}$ și $\vec{v}=3\ \vec{i}-(a-1)\vec{j}$. Să se determine numărul real „ a” astfel încât vectorii să fie coliniari.

6. În reperul cartezian XOY se consideră vectorii $\vec{u}=(2a-1)\vec{i}+5\vec{j}$ şi $\vec{v}=\vec{i}+(1+a)\vec{j}$. Să se determine numărul real „ a” astfel încât vectorii să fie coliniari.

7. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât vectorii $\vec{u}=(3-m)\vec{i}-(2+m)\vec{j}$ şi $\vec{v}=4\vec{i}+4\vec{j}$ să fie ortogonali.

8. Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât vectorii $\vec{u}=(1-a)\vec{i}-a\vec{j}$ şi $\vec{v}=3\vec{i}+2\vec{j}$ să fie ortogonali.

9. Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât următorii vectori să fie coliniari:

a) $\vec{u}(a-2;4)$ *si* $\vec{v}(2;3)$; b) $\vec{u}=(2a+4)\vec{i}+3\vec{j}$ *si* $\vec{v}=4\vec{i}+2\vec{j}$;

c) $\vec{u}=(a-6)\vec{i}+(2a+4)\vec{j}$ *si* $\vec{v}=4\vec{i}+6\vec{j}$;

10. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ pentru care vectorii $\vec{u}=2\vec{i}+3\vec{j}$ şi $\vec{v}=-3\vec{i}+m\vec{j}$ sunt coliniari.

11. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât următorii vectori să fie ortogonali:

a) $\vec{u}(3;-5)$, $\vec{v}(6;2m)$; b) $\vec{u}=4\vec{i}+m\vec{j}$, $\vec{v}=3\vec{i}-2\vec{j}$;

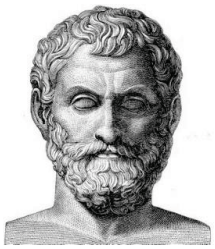
12. Să se scrie vectorul $\vec{v}=4\vec{i}-3\vec{j}$ ca o combinaţie liniară a vectorilor $\vec{a}=4\vec{i}-6\vec{j}$ şi $\vec{b}=3\vec{i}+2\vec{j}$.

13. Să se verifice dacă următorii vectori sunt liniar independenţi:

a) $\vec{u}=4\vec{i}+3\vec{j}$, $\vec{v}=-3\vec{i}+5\vec{j}$; b) $\vec{u}=2\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{v}=-4\vec{i}+8\vec{j}$;

14. Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care vectorii $\vec{u}=5\vec{i}+3\vec{j}$ şi $\vec{v}=(a+2)\vec{i}+a\vec{j}$ să aibă acelaşi suport.

Ştiaţi că ... ?



Thales din Milet (c. 624 – 576 î.e.n), considerat primul dintre Cei Şapte Înţelepţi ai Antichităţii, este întemeietorul celei mai vechi şcoli filozofice din Milet, şcoala ioniană care a dezvoltat ideea de materialism în filozofie, reprezentând primii paşi în constituirea unei culturi ştiinţifice.

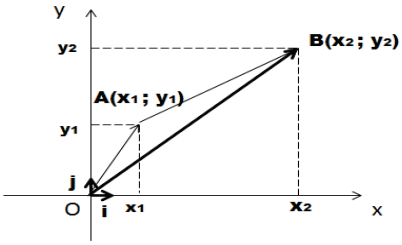
Thales cunoştea că diametrul împarte cercul în două părţi congruente sau că unghiul înscris într-un semicerc este drept. De asemenea, ştia că suma măsurilor unghiurilor unui triunghi este cât măsura a două unghiuri drepte, precum şi congruenţa triunghiurilor precum şi teoria figurilor asemenea, teorie dezvoltată de el şi în care o teoremă îi poartă numele(*teorema lui Thales*). A măsurat înălţimea unei piramide prin lungimea umbrei ei şi distanţa dintre două puncte din care unul inaccesibil cu ajutorul proporţionalităţii laturilor în triunghiuri asemenea. Însuşi faraonul Amasis rămăsese uimit de felul cum **Thales** măsurase înălţimile piramidelor, ajutându-se doar de o vergea înfiptă în pământ şi de câteva măsurători simple.

Este primul care a afirmat că Luna primeşte lumină de la Soare şi a prezis eclipsa de Soare din anul 585 î.e.n. ([6], p.7)

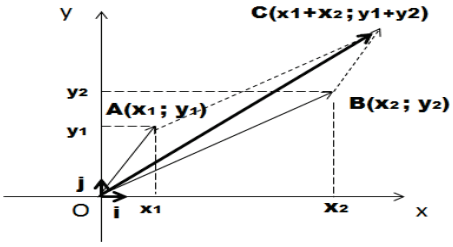
2. APLICAȚII ALE VECTORILOR ÎN GEOMETRIE

1. Operaţii cu vectori

Adunarea vectorilor se poate face după **regula triunghiului** sau după **regula paralelogramului**:



$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$



$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$

Descompunerea unui vector după doi vectori necoliniari

$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\Rightarrow\overrightarrow{OC}=(x_1+x_2)\vec{i}+(y_1+y_2)\vec{j}$;

Coordonatele unui vector $\overrightarrow{AB}$, unde $A(x_A;y_A),\ B(x_B;y_B),$ sunt date de formula

$\overrightarrow{AB}\left(x_B-x_A,y_B-y_A\right)$.

Modulul unui vector $\overrightarrow{AB}$ unde $A(x_A;y_A),\ B(x_B;y_B),$ este egal cu

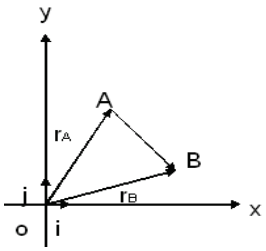
$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$.

2. Condiţii de coliniaritate

Definiţie: Două drepte sunt paralele, $AB\big|\ \big|CD$ dacă şi numai dacă ele sunt suporturile a doi vectori coliniari. $AB\big|\ \big|CD\ \Leftrightarrow\overrightarrow{AB}\ \ si\ \ \overrightarrow{CD}\ \ sunt\ coliniari\Leftrightarrow\exists\ k\in\mathbb{R}\ \ a.i.\ \overrightarrow{AB}=k\cdot\overrightarrow{CD}$;

3. Vectori de poziţie.

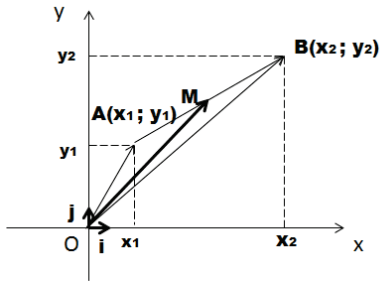
Dacă $\overrightarrow{r_A},\overrightarrow{r_B}$ sunt vectori de poziţie, atunci: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{r_B}-\overrightarrow{r_A}$



Vectorul de poziţie al unui punct care împarte un segment într-un raport dat

Definiţie: Dacă punctul $M\in[A;B]$ astfel încât $\dfrac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{MB}}=k\rangle0\Rightarrow\overrightarrow{OM}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+k\cdot\overrightarrow{OB}}{1+k}$ (*)

Relaţia (*) se mai poate scrie cu ajutorul vectorilor de poziţie astfel: $\vec{r}=\frac{\overrightarrow{r_A}+k\cdot\overrightarrow{r_B}}{1+k}$ unde $\vec{r}$ este vectorul de poziţie al vectorului $\overrightarrow{OM}$.



Exemplu: În reperul cartezian XOY se consideră punctele $A(-1;2)$, $B(3;6)$. Determinaţi coordonatele punctului $M\in[AB]$ astfel încât $\frac{MA}{MB}=2$.

Rezolvare:

$\frac{MA}{MB}=2\Leftrightarrow\frac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{MB}}=2\Leftrightarrow\overrightarrow{r_M}=\frac{\overrightarrow{r_A}+k\cdot\overrightarrow{r_B}}{1+k}$ unde k = 2.

$x_M=\frac{x_A+k\cdot x_B}{1+k}=\frac{-1+2\cdot3}{1+2}=\frac{5}{3}$, $y_M=\frac{y_A+k\cdot y_B}{1+k}=\frac{2+2\cdot6}{1+2}=\frac{14}{3}$, aşadar se obţine $M\left(\frac{5}{3};\frac{14}{3}\right)$.

4. Mijlocul unui segment/ vector

Definiţie: Fie $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ puncte într-un reper cartezian XOY.

Vectorul corespunzător mijlocului M al segmentului [AB] este $\overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}$

Vectorul de poziţie corespunzător mijlocului vectorului $\overrightarrow{AB}$ este $\overrightarrow{r_M}=\frac{\overrightarrow{r_A}+\overrightarrow{r_B}}{2}$.

Coordonatele vectorului de poziţie corespunzător mijlocului M al segmentului [AB] sunt $\overrightarrow{OM}\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$, ;

Exemplu: În reperul cartezian xOy se consideră vectorii $\overrightarrow{OA}(2;6)$ şi $\overrightarrow{OB}(4;8)$. Să se determine coordonatele vectorului $\overrightarrow{OM}$ unde M este mijlocul segmentului $[AB]$.

Rezolvare: Cum $\overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}\Rightarrow x_M=\frac{2+4}{2}=3$, $y_M=\frac{6+8}{2}=7\Rightarrow\overrightarrow{OM}(3;7)$.

5. Centrul de greutate al unui triunghi

Definiţie: Fie $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$ puncte în plan.

Vectorul c orespunzător centrului de greutate al triunghiului este $\overrightarrow{OG}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}$;

Vectorul de poziţie corespunzător centrului de greutate al triunghiului ABC este

$\overrightarrow{r_G}=\dfrac{\overrightarrow{r_A}+\overrightarrow{r_B}+\overrightarrow{r_C}}{3}$

Coordonatele vectorului centrului de greutate al triunghiului ABC sunt

$\overrightarrow{OG}\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3},\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right);$

Exemplu: În reperul cartezian xOy se consideră vectorii $\overrightarrow{OA}(2;6)$ şi $\overrightarrow{OB}(4;8)$ şi $\overrightarrow{OC}(10;-5)$. Să se determine coordonatele vectorului $\overrightarrow{OG}$ unde G este centrul de greutate al triunghiului ABC.

Rezolvare: Cum $\overrightarrow{OM}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}\Rightarrow x_G=\dfrac{2+4+10}{3}=6,\ y_M=\dfrac{6+8-5}{3}=3\Rightarrow\overrightarrow{OG}(6;3).$

Exemplu: Fie $A(1,2),\ B(3,6),\ C(5,-2)$. Să se determine coordonatele vectorului centrului de greutate al triunghiului ABC.

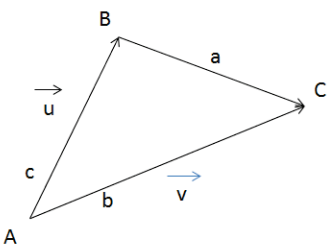
Rezolvare: $\overrightarrow{OG}\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3},\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)=\overrightarrow{OG}\left(\dfrac{1+3+5}{3},\dfrac{2+6-2}{3}\right)=\overrightarrow{OG}(3,2);$

6. Teorema cosinusului

$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha\ \Rightarrow\cos\alpha=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}},\ unde\,\alpha=m(\vec{u},\vec{v}),\alpha\in[0,\pi].$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot\cos A\ \Rightarrow\cos A=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|};$

$\vec{u}\cdot\vec{u}=|\vec{u}|^2;\qquad \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2}.$



Exemplu: Se consideră în plan punctele $A(1,2),\ B(3,6),\ C(5,-2)$; Să se calculeze cos A;

Rezolvare: $\overrightarrow{AB}(2;4),\ \overrightarrow{AC}(4;-4)$

$\Rightarrow\cos A=\dfrac{2\cdot4+4\cdot(-4)}{\sqrt{20}\cdot\sqrt{32}}=\dfrac{-8}{8\sqrt{10}}=-\dfrac{1}{\sqrt{10}};$

Activitate independentă		**Răspuns**
Fie ABCDEF un hexagon regulat. Să se arate că: a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FA}=\vec{0};$ b) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{AD};$		b) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD};$ $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AD};$

Exercitii rezolvate

1. Fie $A(3;-2),\ B(-1;1),\ C(2;4)$ **puncte în plan. Să se determine coordonatele punctului** $D(a;b)$ **astfel încât** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\vec{0}.$

Rezolvare: Cum $\overrightarrow{AB}(-4;3);\overrightarrow{CD}(a-2;b-4)\Rightarrow$

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\vec{0}\Leftrightarrow(a-6;b-1)=(0;0)\Rightarrow a=6,b=1.$

2. Se consideră în plan punctele $A(-2;1)$, $B(2;3)$, $C(a;b)$**. Să se determine** $a,b\in\mathbb{R}$ **astfel încât** $2\cdot\overrightarrow{OA}-4\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$, **unde** $O(0;0)$.

Rezolvare: Din $(-4;2)-(8;24)=(a;b)\Rightarrow a=-12,\ b=-22.$

3. În triunghiul ABC, punctele D, E și respectiv F sunt mijloacele segmentelor $[BC],[AC]$ **și respectiv** $[AB]$. **Să se calculeze:** $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BF}$**;**

Rezolvare: Evident $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BF}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}\right)=\vec{0}$;

4. În triunghiul ABC se cunoaște că $2\overrightarrow{AB}+8\overrightarrow{CB}=\vec{0}$. **Să se determine valoarea raportului** $\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}}$.

Rezolvare:

Din regula triunghiului $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}$ rezultă că $2\overrightarrow{AB}+8\overrightarrow{CB}=\vec{0}\Leftrightarrow 2(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})+8\overrightarrow{CB}=\vec{0}\Rightarrow$

$2\overrightarrow{AC}+10\overrightarrow{CB}=\vec{0}\Rightarrow 2\overrightarrow{AC}=-10\overrightarrow{CB}\Rightarrow 2\overrightarrow{AC}=10\overrightarrow{BC}\Rightarrow\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}}=\frac{10}{2}=5.$

5**. În pătratul ABCD de centru O să se calculeze** $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}.$

Rezolvare: Cum vectorii sunt opuși doi câte doi rezultă: $\overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OD}\Rightarrow$

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\vec{0}.$

6. În triunghiul ABC se consideră M, respectiv N, mijloacele laturilor $[AB]$**, respectiv** $[AC]$**.**

Să se calculeze în funcție de $\overrightarrow{AB}$ **și** $\overrightarrow{AC}$ **vectorii:**

a) $\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{BC}-4\overrightarrow{BA}$**;** **b)** $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}$**;** **c)** $\overrightarrow{MN}$**;**

Rezolvare:

a) $\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{BC}-4\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AC}+3(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})+4\overrightarrow{AB}=4\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}.$

b) $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AN})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

c) $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$

7. Se consideră triunghiul ABC. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ **știind că** $\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+m\overrightarrow{BC}$**.**

Rezolvare:

Cum $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ atunci, $\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+m\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=\overrightarrow{AB}+m\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow$

$\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+m\overrightarrow{BC}\Rightarrow m=\frac{1}{3}.$

8. Fie ABCD un patrulater în plan. Să se demonstreze că că:

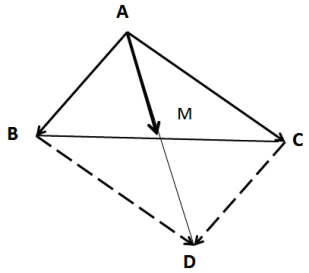
a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}.$ **b)** $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}.$

Rezolvare:

a) Aplicînd regula triunghiului se obține: $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DB}.$ Din cele două relații rezultă că $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DB}\Rightarrow\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}.$

b) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BD}\Leftrightarrow\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}$. De aici rezultă că $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}$ aşadar relaţia iniţială este adevărată.

9. În triunghiul ABC fie M mijlocul lui $[BC]$. Atunci, $\overrightarrow{AM}=\dfrac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}$.



Rezolvare:

ABCD este paralelogram $\Rightarrow\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\Rightarrow$

$\overrightarrow{AM}=\dfrac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}$.

Altfel, se poate exprima $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ în funcţie de $\overrightarrow{AM}$.

10. În reperul cartezian xOy se consideră vectorii $\overrightarrow{OA}(-4;2)$ şi $\overrightarrow{OB}(6;4)$. Să se determine coordonatele vectorului $\overrightarrow{OM}$ unde M este mijlocul segmentului $[AB]$.

Rezolvare: Cum $\overrightarrow{OM}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}\Rightarrow x_M=\dfrac{-4+6}{2}=1,\ y_M=\dfrac{2+4}{2}=3\Rightarrow\overrightarrow{OM}(1;3).$

11. Fie E şi respectiv F, mijloacele laturilor $[AB]$ şi respectiv $[CD]$ ale patrulaterului ABCD şi I mijlocul segmentului $[EF]$. Să se arate că $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}$.

Rezolvare: În triunghiul ABI rezultă : $\overrightarrow{IE}=\dfrac{\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}}{2}$; În triunghiul CID rezultă: $\overrightarrow{IF}=\dfrac{\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{IC}}{2}$.

Cum I este mijlocul segmentului $[EF]$, rezultă că

$\overrightarrow{IE}=-\overrightarrow{IF}\Rightarrow\overrightarrow{IE}+\overrightarrow{IF}=\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}$.

12. a) Fie ABC un triunghi oarecare. Să se arate că $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$.

b) Fie M, N, P mijloacele laturilor $[BC],[CA],[AB]$ ale triunghiului ABC. Arătaţi că $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}=\vec{0}$.

Rezolvare: a) Din regula triunghiului , rezultă $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$, atunci

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$.

b) Cum M, N, P sunt mijloacele laturilor $[BC],[CA],[AB]$ rezultă

$\overrightarrow{AM}=\dfrac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}$, $\overrightarrow{BN}=\dfrac{\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}}{2}$, $\overrightarrow{CP}=\dfrac{\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}}{2}$. Adunând cele trei relaţii rezultă

$\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB}\right)=\vec{0}$ deoarece

$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA},\ \overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{CA},\ \overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{CB}$

13. Fie triunghiul ABC echilateral de latură AB=10. Fie M mijlocul laturii $[BC]$. Calculaţi modulul vectorului $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$.

Rezolvare: Cum $\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{MC}\Rightarrow\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$ iar $MA=\dfrac{l\sqrt{3}}{2}=\dfrac{10\sqrt{3}}{2}=5\sqrt{3}\Rightarrow\left|\overrightarrow{MA}\right|=5\sqrt{3}.$

14. Fie ABCD un pătrat de latură 3. Determinaţi modulul vectorului $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.

Rezolvare: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$. Cum $AC=l\sqrt{2}=3\sqrt{2}\Rightarrow\left|\overrightarrow{AC}\right|=3\sqrt{2}.$

15. În triunghiul ABC se consideră $M \in [AB]$, $N \in [AC]$ **astfel încât**

$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

Să se arate că vectorii $\overrightarrow{MN}$ **și** $\overrightarrow{BC}$ **sunt coliniari.**

Rezolvare:

Conform cu regula triunghiului rezultă $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$.

16. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ **astfel încât punctele** $A(1;1)$, $B(2;4)$, $C(m+1,2m)$ **să fie coliniare:**

Rezolvare. Punctele A, B, C sunt coliniare este echivalent cu faptul că vectorii $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ sunt coliniari.

Cum $\overrightarrow{AB}(1;3)$, $\overrightarrow{AC}(m;2m-1) \Rightarrow \frac{1}{m} = \frac{3}{2m-1} \Rightarrow m = -1$.

17. Se consideră în plan punctele $A(-2;4)$, $B(3;5)$, $C(4;-3)$, $D(1;x)$. **Să se determine** $x \in \mathbb{R}$ **astfel încât:**

a) vectorii $\overrightarrow{AC}$ **și** $\overrightarrow{BD}$ **să fie ortogonali;** **b) vectorii** $\overrightarrow{AB}$ **și** $\overrightarrow{CD}$ **să fie coliniari;**

Rezolvare:

a) Cum $\overrightarrow{AC}(6;-3)$, $\overrightarrow{BD}(-2;x-5) \Rightarrow \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD} \Leftrightarrow 6\cdot(-2) + (-3)\cdot(x-5) = 0 \Rightarrow x = \frac{23}{7}$.

b) Cum $\overrightarrow{AB}(5;1)$, $\overrightarrow{CD}(-3;x+3) \Rightarrow$ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ sunt coliniari $\Leftrightarrow \frac{5}{-3} = \frac{1}{x+3} \Rightarrow x = -\frac{18}{5}$.

18. Se consideră punctele $A(a;3), B(1;-1), C(4;1), D(-3;2)$ **. Să se determine** $a \in \mathbb{R}$ **știind că dreptele AB și CD sunt paralele.**

Rezolvare: Dreptele AB și CD sunt paralele dacă și numai dacă vectorii lor asociați sunt coliniari. În cazul nostru,

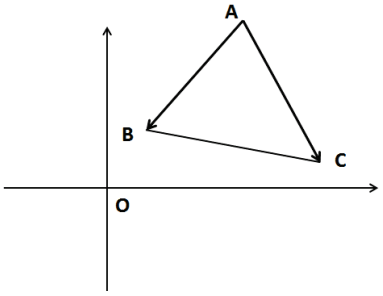
$\overrightarrow{AB}(1-a,-1-3) = \overrightarrow{AB}(1-a,-4)$ și $\overrightarrow{CD}(-3-4,2-1) = \overrightarrow{CD}(-7,1)$. Rezultă

$AB \parallel CD \Rightarrow \frac{1-a}{-7} = \frac{-4}{1} \Rightarrow a = -27$.

19. Dacă A, B, C sunt trei puncte în plan, să se arate că $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2}$.

Rezolvare:

Metoda I.



$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$.

Cum

$BC^2 = \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC} = \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)^2 = AC^2 + AB^2 - 2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB} \Rightarrow$

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB} = \frac{AC^2 + AB^2 - BC^2}{2}$.

Metoda II. Se știe că $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\cos A = \cancel{AB}\cdot\cancel{AC}\cdot\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2\cancel{AB}\cdot\cancel{AC}} \Rightarrow$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2}$.

20. Să se arate că în orice triunghi ABC în care $BC=a, AC=b, AB=c$ are loc relația

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = \dfrac{a^2+b^2+c^2}{2}$.

Rezolvare: Se aplică formula de la exercițiul precedent pentru fiecare produs.

21. În triunghiul ABC, se dau $AB=3, BC=5, CA=6$. Să se calculeze
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$.

Rezolvare: Se aplică formula $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = \dfrac{1}{2}\left(AB^2+BC^2+CA^2\right)$.

În cazul nostru, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = \dfrac{1}{2}\left(5^2+6^2+3^2\right) = 35$.

22. În triunghiul ABC, M este mijlocul lui $[BC]$. Să se arate că $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{BC} = \dfrac{AB^2-AC^2}{2}$.

Rezolvare:

Cum $\overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{AM}$ și $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$ iar vectorul mediană este egal cu $\overrightarrow{AM} = \dfrac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}$ rezultă

$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AM}\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}) = -\dfrac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}\cdot\left[-(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})\right] = \dfrac{AB^2-AC^2}{2}$.

23. În paralelogramul ABCD se consideră M mijlocul laturii $[AB]$, iar $N\in[MD]$ astfel încât $MN=\dfrac{1}{2}ND$.

a) Să se arate că $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AM}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{MD}.$;

b) $\overrightarrow{AN} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AM}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}.$

c) Să se arate că vectorii $\overrightarrow{AN}$ și $\overrightarrow{AC}$ sunt coliniari.

Rezolvare:

a) Cum $MN=\dfrac{1}{2}ND \Rightarrow \dfrac{\overrightarrow{MN}}{\overrightarrow{ND}} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{\overrightarrow{MN}}{\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{ND}} = \dfrac{1}{1+2} \Rightarrow \dfrac{\overrightarrow{MN}}{\overrightarrow{MD}} = \dfrac{1}{3}$, (*)

Atunci, din (*) rezultă $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AM}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{MD}.$

b) $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AM}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{AM}+\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}) = \dfrac{3\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AD}}{3} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AM}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}.$

c) Din punctul b) rezultă $\overrightarrow{AN} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AM}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD} = \dfrac{2\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AD}}{3} = \dfrac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}}{3} = \dfrac{1}{3}\cdot\overrightarrow{AC}.$ Așadar, vectorii $\overrightarrow{AN}$ și $\overrightarrow{AC}$ sunt coliniari.

24. Dacă G este centrul de greutate al triunghiului ABC atunci $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

Rezolvare: Se știe că $\frac{GA}{AM}=\frac{2}{3}\Rightarrow \overrightarrow{GA}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$. Analog, $\overrightarrow{GB}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{BN}$, $\overrightarrow{GC}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{CP}$. Rezultă $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=-\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}\right)=\vec{0}$. (vezi exercițiul 15 b).)

25. Fie triunghiul ABC și G, centrul său de greutate. Să se arate că oricare ar fi P un punct din planul triunghiului, rezultă $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=3\cdot\overrightarrow{PG}$.

Rezolvare: Cum G este centru de greutate rezultă $\frac{AG}{GM}=2\Rightarrow\frac{\overrightarrow{AG}}{\overrightarrow{GM}}=2$ și conform formulei $\overrightarrow{PM}=\frac{\overrightarrow{PB}+k\overrightarrow{PC}}{1+k}$ dacă $\frac{BM}{MC}=k\rangle 0$, obținem în cazul nostru în triunghiul PAM:

$$\overrightarrow{PG}=\frac{\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PM}}{3}=\frac{\overrightarrow{PA}+2\cdot\frac{\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}}{2}}{3}\Rightarrow\ 3\overrightarrow{PG}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}.$$

26. Se dă patrulaterul ABCD oarecare și E mijlocul lui $[AC]$ și F mijlocul lui $[BD]$. Să se arate că $2\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AD}$.

Rezolvare: $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AF}=-\frac{\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}}{2}+\overrightarrow{BA}+\frac{\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}}{2}=$

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{2}-\frac{\overrightarrow{BC}}{2}+\overrightarrow{BA}+\frac{\overrightarrow{AD}}{2}+\frac{\overrightarrow{AB}}{2}=\left(\underbrace{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}}_{=\vec{0}}\right)+\frac{\overrightarrow{CB}}{2}+\frac{\overrightarrow{AD}}{2}\Rightarrow\ 2\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AD}.$$

27. În triunghiul ABC, se consideră punctul $M\in[AB]$ astfel încât $\overrightarrow{AM}=5\overrightarrow{MB}$, $N\in[AC]$ astfel încât $MN\,||\,BC$. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât $\overrightarrow{NC}=m\cdot\overrightarrow{AC}$.

Rezolvare:

Din $\frac{MB}{AM}=\frac{1}{5}\Leftrightarrow\frac{MB}{MB+AM}=\frac{1}{1+5}\Rightarrow\frac{MB}{AB}=\frac{1}{6}$. Cum $MN\,||\,BC$, din teorema lui Thales rezultă $\frac{NC}{AC}=\frac{1}{6}\Rightarrow\frac{\overrightarrow{NC}}{\overrightarrow{AC}}=\frac{1}{6}\Rightarrow m=\frac{1}{6}$.

28. Se consideră triunghiurile ABC și $A'B'C'$ având centrele de greutate G și respectiv G'. Să se arate că $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=3\overrightarrow{GG'}$.

Rezolvare: În exercițiile anterioare s-a arătat că $\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}=\vec{0}$, $\overrightarrow{G'A'}+\overrightarrow{G'B'}+\overrightarrow{G'C'}=\vec{0}$. Atunci,

$$\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'A'}\right)+\left(\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'B'}\right)+\left(\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'C'}\right)=3\overrightarrow{GG'}.$$

29. Se consideră în plan punctele $A(-1;3)$, $B(-4;-1)$, $C(7;-3)$. Să se determine coordonatele punctului $E\in[BC]$ unde [AE este bisectoarea unghiului A .

Rezolvare: Conform Teoremei bisectoarei rezultă $\frac{BE}{EC}=\frac{AB}{AC}$. Cum AB= 5 şi AC= 10 şi din $\overrightarrow{AE}=\frac{\overrightarrow{AC}+k\cdot\overrightarrow{AB}}{1+k}$, cu $k=\frac{AB}{AC}=\frac{1}{2}$ rezultă $x_E=\frac{x_C+kx_B}{1+k}=-\frac{1}{3}$, $y_E=\frac{y_C+ky_B}{1+k}=1$. Aşadar, coordonatele lui E sunt $E\left(-\frac{1}{3};1\right)$.

30 . În plan se consideră punctele $A(1;-3),\ B(2;4),\ C(7;5),\ D(6;-2)$ **Se cere:**

a) Să se scrie vectorul $\overrightarrow{AC}$ **în funcţie de componentele sale;**

b) Să se calculeze lungimea vectorului $\overrightarrow{AC}$ **;**

c) Să se calculeze $2\cdot\overrightarrow{AC}-3\cdot\overrightarrow{AC}$**;**

d) Să se calculeze $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$**;**

e) Să se arate că vectorii $\overrightarrow{BC}$ *si* $\overrightarrow{AD}$ **sunt coliniari;**
f) Să se calculeze perimetrul patrulaterului ABCD;
g) Să se arate că ABCD este paralelogram;
h) Să se calculeze cos A;
i) Fie $M(a;-3)$ **un punct în plan. Să se determine** $a\in\mathbb{R}$ **astfel încât** $BM\perp AD$**;**

Rezolvare. a) $\overrightarrow{AC}(7-1;5-(-3))=\overrightarrow{AC}(6;8)$; b) $\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{6^2+8^2}=\sqrt{100}=10$;

c) $2\cdot\overrightarrow{AC}-3\cdot\overrightarrow{AC}=2\cdot(1;7)-3\cdot(6;8)=(2;14)-(18;24)=(-16;-10)$;

d) Cum $\overrightarrow{AB}(1;7)$ şi $\overrightarrow{AD}(5;1)$ rezultă $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=1\cdot5+7\cdot1=12$;

e) Cum $\overrightarrow{BC}(5;1)$ şi $\overrightarrow{AD}(5;1)$ rezultă evident că vectorii sunt coliniari;

f) $P_{ABCD}=AB+BC+CD+AD=\sqrt{1^2+7^2}+\sqrt{5^2+1^2}+\sqrt{7^2+1^2}+\sqrt{1^2+5^2}=2\sqrt{50}+2\sqrt{26}$;
g) Patrulaterul ABCD este parallelogram dacă şi numai dacă diagonalele sale se înjumătăţesc adică au acelaşi mijloc; Din $x_A+x_C=x_B+x_D$ şi $y_A+y_C=y_B+y_D$ rezultă 1+7=2+6, -3+5 = 4-2 ceea ce este

adevărat, rezultă astfel cerinţa; h) $\cos A=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AD}\right|}=\dfrac{12}{\sqrt{50}\cdot\sqrt{26}}=\dfrac{6}{5\sqrt{13}}$;

i) $\overrightarrow{BM}(a-2,-3-4)\perp\overrightarrow{AD}(5;1)\Leftrightarrow\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{AD}=\vec{0}\Leftrightarrow(a-2)\cdot5+(-7)\cdot1=0\Rightarrow a=\dfrac{17}{5}$;

Exercitii propuse

1. În triunghiul ABC se cunoaşte că $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{CB}=\vec{0}$. Să se determine valoarea raportului $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{BC}}$.

2. În triunghiul ABC se cunosc că M, N, P sunt mijloacele laturilor $[AB]$, $[BC]$, $[AC]$. Să se arate că $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AN}$.

3. Dacă în triunghiul ABC avem $\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+m\overrightarrow{BC}$, să se afle $m\in\mathbb{R}$.

4. Fie triunghiul ABC dreptunghic cu ipotenuza BC=18. Dacă M este mijlocul ipotenuzei $[BC]$, calculaţi modulul vectorilor: a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$; b) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$;

5. Fie ABCD un deptunghi în care AB=3, şi AD= 4. Să se calculeze modulul vectorului $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$.

6. Să se verifice dacă dreptele AB şi CD sunt paralele, unde A(2;1), B(3;5), C(-2;3), D(-4;-5).

7. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât punctele A(-4;2), B(-1;3), C(m; m+3) să fie coliniare.

8. Să se verifice dacă vectorii $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{CD}$ sunt coliniari, unde $A(-3;2)$, $B(3;4)$, $C(6;-2)$, $D(-4;3)$;

9. În triunghiul ABC fie $P \in [BC]$ astfel încât $\overrightarrow{BP} = 2\overrightarrow{PC}$. Să se arate că vectorii $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$ şi $\overrightarrow{AP}$ sunt coliniari.

10. Se consideră triunghiul echilateral ABC înscris într-un cerc de centru O. Să se arate că:

a) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$. b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{AO} = \vec{0}$.

11. Se dau în plan punctele $A(-5;-1)$, $B(2;4)$, $C(6;2)$.

a) Să se determine punctul D astfel încât dreptele BD şi AC să fie perpendiculare, $BD \perp AC$.

b) Să se determine punctul D astfel încât ABCD să fie paralelogram.

12. În reperul cartezian XOY se consideră vectorii $\overrightarrow{OA}(-3;2)$ şi $\overrightarrow{OB}(5;6)$. Determinaţi coordonatele vectorului $\overrightarrow{OM}$ unde $\frac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{MB}} = \frac{1}{2}$.

13. În reperul cartezian XOY se consideră punctele $A(2;4)$, $B(-6;8)$. Determinaţi coordonatele punctului $M \in [AB]$ astfel încât $\frac{MA}{MB} = 3$.

14. Se consideră în plan punctele $A(-2;3)$, $B(1;5)$, $C(-1;-4)$.

a) Să se calculeze lungimea vectorului $2 \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$;

b) Să se calculeze produsul scalar $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$;

c) Să se determine coordonatele centrului de greutate al triunghiului;

d) Să se determine coordonatele vectorului mediană $\overrightarrow{AM}$, unde $M \in [BC]$;

e) Să se determine coordonatele punctului $D \in Ox$ astfel încât $AB \| CD$;

f) Să se determine coordonatele punctului $D \in Ox$ astfel încât $AC \perp BD$;

15. Se consideră în plan punctele $A(-4;1)$, $B(0;4)$, $C(3;-2)$.

a) Să se determine modulele vectorilor $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$.

b) Să se calculeze $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC}$.

c) Să se calculeze $\cos A$.

16. Se consideră în plan punctele $A(1;4)$, $B(3;6)$, $C(8;1)$.

a) Să se determine coordonatele vectorului $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$;

b) Să se calculeze lungimea vectorului $\overrightarrow{AB}$;

c) Să se calculeze $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{BC}$;

d) Să se determine punctul $D(2;a)$ astfel încât $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ să fie coliniari;

e) Să se determine coordonatele vectorului mediană $\overrightarrow{AM}$, unde $M \in [BC]$ este mijlocul;

f) Să se determine coordonatele centrului de greutate al triunghiului ABC.

17. Se consideră punctele A(2; 1), B(4;7), C(6;3). Să se determine coordonatele punctului D(a;b) astfel încât patrulaterul ABCD să fie paralelogram.

18. Se consideră punctele A(- 4;- 2), B(1;3), C(6;4). Să se determine coordonatele punctului D astfel încât patrulaterul ABCD să fie paralelogram.

19. În triunghiul ABC, se consideră M, N, respectiv P, mijloacele laturilor $[BC]$, $[AC]$, $[AB]$. Să se calculeze:

a) $\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}$; b) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$; c) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$; d) $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}$;

20. Se consideră rombul ABCD iar O punctul de intersecție a diagonalelor. Să se calculeze:

a) $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{CO}$; b) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$; c) $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD}$; d) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$;

21. Se consideră hexagonul regulat ABCDEF iar O punctul de intersecțiea diagonalelor. Să se calculeze:

a) $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DC}$; b) $\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{ED}$; c) $\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{AB}$; d) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{EF}$;

22. Se consideră paralelogramul ABCD, cu O punctul de intersecție a diagonalelor. Să se calculeze:

a) $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BC}$; b) $\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{OC}$; c) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}$; d) $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BD}$;

23. Se consideră pătratul ABCD. Să se arate că $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$;

24. Să se arate că pentru orice punct P din planul paralelogramului ABCD are loc relația: $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}$;

25. Să se determine coordonatele mijlocului vectorului $\overrightarrow{AB}$ unde:

a) $A(3;4)$, $B(1;6)$; b) $A(-6;0)$, $B(-2;4)$; c) $A(1;-2)$, $B(5;-8)$;

d) $A(0;-7)$, $B(10;-3)$.

26. Să se determine coordonatele vectorului $\overrightarrow{AB}$ unde:

a) $A(3;4)$, $B(1;6)$; b) $A(-6;0)$, $B(-2;4)$; c) $A(1;-2)$, $B(5;-8)$;

d) $A(0;-7)$, $B(10;-3)$.

27. Se consideră în plan punctele $A(1;2)$; $B(3;6)$; $C(-2;-4)$. Să se determine coordonatele vectorilor:

a) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$; b) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$; c) $2\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{CA}$.

28. Să se determine modulul vectorilor $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ unde:

a) $A(3;4)$, $B(1;6)$, $C(5;8)$; b) $A(-6;0)$, $B(-2;4)$, $C(1;1)$;

c) $A(1;-2)$, $B(5;-8)$, $D(7;-4)$; d) $A(0;-7)$, $B(10;-3)$, $C(8;1)$.

29. Se consideră punctele $A(1;4)$, $B(2;-4)$. Să se determine coordonatele punctului M astfel încât $\overrightarrow{AM}+2\overrightarrow{BM}=\vec{0}$.

30. Fie punctele $A(3;1)$, $B(5;7)$ într-un reper cartezian $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Să se determine vectorii de poziție ai punctelor A, B și ai mijlocului segmentului $[AB]$.

31. În reperul cartezian $(O, \vec{i}, \vec{j})$ se consideră punctele $A(2;4)$, $B(-3;1)$, $C(6;2)$. Să se determine coordonatele vectorilor de poziție al mijloacelor segmentelor $[AB]$, $[BC]$, $[CA]$.

32. Fie $A(-3;4)$, $B(2;6)$, $C(4;2)$. Să se determine coordonatele vectorului corespunzător centrului de greutate al triunghiului ABC.

33. Fie $A(3;2)$, $B(2;6)$, $C(-6;1)$. Să se determine vectorul de poziție al centrului de greutate al triunghiului ABC.

34. Se consideră punctele A, B și G având vectorii de poziție $\overrightarrow{r_A}=3\vec{i}+6\vec{j}$, $\overrightarrow{r_B}=4\vec{i}-2\vec{j}$, și $\overrightarrow{r_G}=5\vec{i}+4\vec{j}$;

Să se determine vectorul de poziție al punctului C astfel încât G să fie centrul de greutate al triunghiului ABC.

35. Se consideră triunghiul ABC având vectorii de poziție corespunzători $\overrightarrow{r_A}=5\vec{i}-4\vec{j}$, $\overrightarrow{r_B}=8\vec{i}-3\vec{j}, \overrightarrow{r_C}=2\vec{i}+\vec{j}$. Să se determine vectorul de poziție al centrului de greutate al triunghiului ABC.

36. Să se determine vectorul de poziție al centrului de greutate al patrulaterului ABCD unde $A(4;2)$, $B(-3;3)$, $C(-6;-2)$, $D(6;-3)$.

37. Fie $A(m;m+2)$, $B(7;2n)$, $C(m-3;m+5)$. Să se determine $m,n\in\mathbb{R}$ astfel încât vectorul de poziție al centrului de greutate al triunghiului ABC să fie vectorul nul.

38. Se consideră triunghiul ABC cu vârfurile $A(1;1)$, $B(4;-2)$, $C(-6;-1)$ în reperul cartezian $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Să se determine vectorul de poziție al punctului D astfel încât ABCD să fie paralelogram.

39. Fie triunghiul ABC și G este centrul său de greutate. Să se determine $m,n\in\mathbb{R}$ astfel încât $\overrightarrow{GA}=m\cdot\overrightarrow{BG}+n\cdot\overrightarrow{CG}$.

40. Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC și D mijlocul laturii $[BC]$. Dacă A(4;4) și M(6;-2), să se determine coordonatele punctului G.

41. Se consideră punctele A(- 5; - 1), B(2;4), C(6;2). Să se determine coordonatele punctului D astfel încât: a) [BD] și [AC] să fie perpendiculare; b) ABCD să fie paralelogram;

42. Fie ABCD un paralelogram. Să se arate că $\overrightarrow{r_A}+\overrightarrow{r_C}=\overrightarrow{r_B}+\overrightarrow{r_D}$. unde O este punctul de intesecție a diagonalelor.

Știați că ... ?



În secolul al 15-lea, unul dintre cei mai mari reprezentanți ai științei musulmane, matematicianul și astronomul persan **Ghiyath al-Kashi** (1380-1429), a calculat valoarea lui π pâna la a 16-a zecimală și a introdus tabele pentru valorile lui sinus cu o acuratețe deosebită plecând de la determinarea lui sin 1^0 cu o precizie uimitoare.

De asemenea, a determinat formula pentru sin3x , formulă atribuită însă, lui Viete în sec. 16. Și în algebră s-a preocupat de găsirea unor metode iterative de rezolvare a ecuațiilor cubice sau a unor ecuații de forma $x^p-N=0$.

Se pare că **al- Kashi** cunoștea o serie din formulele pe care europenii aveau să le descopere mult mai târziu, și anume: $C_n^m=C_{n-1}^m+C_{n-1}^{m-1}$, $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$, $a^m:a^n=a^{m-n}$, $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[m]{b}=\sqrt[n\cdot m]{a^m\cdot b^n}$. Și de asemenea, din manuscrisele sale s-a descoperit că el calculase cu cinci zecimale exacte radicalii $\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{5},\sqrt{6}$ după formula $\sqrt[n]{a^n+r}\approx a+\frac{r}{(a+1)^n-a^n}$. ([6], p.24)

3. ELEMENTE DE TRIGONOMETRIE

3.1 Măsura unghiurilor

În geometrie, măsura unghiurilor se exprimă cu ajutorul gradelor sexagesimale, a gradelor centisemale sau cu ajutorul radianilor;

Definiţie: Gradul sexagesimal reprezintă măsura unghiului unui sector de cerc determinat de două puncte consecutive de pe cerc, puncte obţinute în urma împărţirii cercului în 360 de părţi egale;

$1^0 = 60' = 3600''$;

Se numeşte **radian** (1 rad) măsura unghiului la centru care subîntinde un arc de cerc egal cu raza cercului: 1 $rad = \frac{\pi rad}{180}$; Lungimea cercului este 2π rad.

Un cerc de centru O şi rază R, notat $\mathcal{C}(O,R)$ are măsura de 360^0 (grade sexagesimale) sau $2\pi\ rad$;

Formula de transformare a gradelor sexagesimale în radiani sau invers:

$180^0 \ldots\ldots \pi\ rad$

$n^0 \ldots\ldots x\ rad$

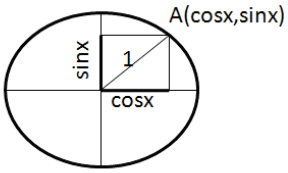
$n = \left(\frac{180 \cdot x}{\pi}\right)^0$ *sau* $x = \left(\frac{n \cdot \pi}{180}\right) rad$

Exemplu: $60^0 \ldots\ldots x\ rad$

$x = \frac{60 \cdot \pi}{180} = \frac{\pi}{3}$

Cercul trigonometric este cercul $\mathcal{C}(O,1)$ de centru O şi rază 1 unde O este originea sistemului de axe de coordonate, XOY. $C = \left\{(x;y) \middle| x^2 + y^2 = 1\right\}$

Cercul trigonometric este



împărţit în patru cadrane.

Cadranul I	Cadranul II	Cadranul III	Cadranul IV
$x \in [0;90^0]$	$x \in [90^0;180^0]$	$x \in [180^0;270^0]$	$x \in [270^0;360^0]$

Sensul pozitiv de măsurare a unghiurilor pe cerc este sensul invers acelor de ceas;

Funcţii trigonometrice. Semnul funcţiilor trigonometrice

Definiţie: O funcţie $f: D \to \mathbb{R}$ se numeşte **periodică** $\Leftrightarrow \exists\, T \in \mathbb{R}$ astfel încât $\forall x \in D \Rightarrow f(x+T) = f(x)$. T se numeşte perioada funcţiei;

Dacă $f(-x) = f(x), \forall x \in D$, f se numeşte **funcţie pară**;

Dacă $f(-x) = -f(x), \forall x \in D$, f se numeşte **funcţie impară**;

Funcţiile trigonometrice studiate sunt $\sin: \mathbb{R} \to [-1,1]$, $\cos: \mathbb{R} \to [-1,1]$,

$tg: \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{(2k+1)\pi}{2}\right\} \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$, $\quad ctg: \mathbb{R} \setminus \{k\pi\} \to \mathbb{R}; k \in \mathbb{Z}$;

α^0	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0	150^0	180^0	225^0	270^0	315^0	360^0
α *rad*	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	**0**	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	-1	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	0
$\cos\alpha$	**1**	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	**0**	$-\frac{1}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	**-1**	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	**0**	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	**1**
$tg\alpha$	**0**	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	**1**	$\sqrt{3}$	|	$-\sqrt{3}$	**-1**	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$	**0**	**1**	|	**-1**	**0**

Activitate independentă	**Răspuns**
Se consideră expresia $E(x)=\cos 4x+\sin 2x$. Să se calculeze $E(\frac{\pi}{4})$.	**0**

Exercitii rezolvate

1. Să se transforme din grade sexagesimale în radiani:

a) 12^0; b) 15^0; c) $22^030'$; **d)** 120^0; **e)** 315^0; **f)** 780^0;

Rezolvare:

Cu ajutorul formulei de transformare obținem:

a) $\frac{12}{180}=\frac{x}{\pi}\Rightarrow x=\frac{12\pi}{180}=\frac{\pi}{15}$; b) $\frac{15}{180}=\frac{x}{\pi}\Rightarrow x=\frac{15\pi}{180}=\frac{\pi}{12}$;

c) $\frac{22^030'}{180^0}=\frac{x}{\pi}\Rightarrow\frac{45^0}{360^0}=\frac{x}{\pi}\Rightarrow x=\frac{45\pi}{360}=\frac{\pi}{8}$;

d) $x=\frac{120\cdot\pi}{180}=\frac{2\pi}{3}$; e) $x=\frac{315\cdot\pi}{180}=\frac{7\pi}{4}$; f) $x=\frac{780\cdot\pi}{180}=\frac{13\pi}{3}$;

2. Să se transforme din radiani în grade sexagesimale:

a) $\frac{5\pi}{3}$; **b)** $\frac{18\pi}{4}$; **c)** $\frac{16\pi}{6}$;

Rezolvare: a) $\frac{5\pi}{3}=\frac{5\cdot180^0}{3}=5\cdot60^0=300^0$; b) $\frac{18\pi}{4}=\frac{18\cdot180^0}{4}=18\cdot45^0=810^0$;

c) $\frac{16\pi}{6}=\frac{16\cdot180^0}{6}=16\cdot30^0=480^0$.

3. Se consideră expresia $E(x)=\sin x+\sin\frac{x}{2}$, unde $x\in\mathbb{R}$. Să se calculeze:

a) $E(0)$; **b)** $E(\pi)$; **c)** $E(\frac{\pi}{2})$; **d)** $E(\frac{\pi}{3})$.

Rezolvare: a) $E(0)=\sin 0+\sin 0=0$; b) $E(\pi)=\sin\pi+\sin\frac{\pi}{2}=0+1=1$;

c) $E(\frac{\pi}{2})=\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{4}=1+\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{2+\sqrt{2}}{2}$; d) $E(\frac{\pi}{3})=\sin\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$;

APLICAȚII PRACTICE

Elicea unui ventilator face 2400 de rotații pe minut. Calculați în radiani și în grade arcul descris de un punct al elicei în: a) 1 s; b) 20 s; c) 2 min;
Rezolvare:

a) $\frac{2400\ rot}{1\min}=\frac{2400\ rot}{60\,\text{s}}=40\frac{rot}{s}=40\cdot 2\pi=80\pi\ \ sau\ \ 40\cdot 360^0=14400^0.$

b) $14400^0\cdot 20s=288000^0$;

c) $\frac{2400\ rot}{1\min}\cdot 2=2\cdot 80\pi=160\pi\ \ sau\ \ 2\cdot 14400^0=28800^0.$

Rezolvă singur

Viteza unghiulară a unei pietre de șlefuit este de 300 de rotații pe secundă. Câte rotații face piatra într-un minut ?

Exercitii propuse

1. Să se calculeze:

a) $\sin 30^0-\sin 45^0+\sin 60^0$; b) $\cos 60^0-2\cdot\cos 45^0+\cos 30^0$; c) $3\cdot tg30^0-tg60^0+tg45^0$;

2. Să se transforme din grade sexagesimale în radiani:

a) 80^0; b) 150^0; c) 330^0; d) 750^0; e) 765^0;

3. Să se transforme din radiani în grade sexagesimale:

a) $\frac{10\pi}{3}$; b) $\frac{15\pi}{4}$; c) $\frac{17\pi}{6}$; d) $\frac{7\pi}{12}$; e) $\frac{2\pi}{5}$;

4. Să se calculeze:

a) $12^0 45'36''+18^0 15'24''$; b) $43^0 52'35''-21^0 43'25''$;

c) $\frac{2\pi}{3}+\frac{5\pi}{2}-\frac{\pi}{6}$; d) $\frac{5\pi}{2}-\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{5}$; e) $3\pi-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}$.

5. Se consideră expresia $E(x)=\cos x+\cos\frac{x}{3}$, unde $x\in\mathbb{R}$. Să se calculeze:

a) $E(0)$; b) $E(\pi)$; c) $E(\frac{\pi}{2})$; d) $E(2\pi)$.

6. Se consideră expresia $E(x)=\sin 2x+\cos\frac{x}{2}$, unde $x\in\mathbb{R}$. Să se calculeze:

a) $E(0)$; b) $E(\pi)$; c) $E(\frac{\pi}{2})$; d) $E(\frac{\pi}{3})$.

7. Precizați în ce cadran se află unghiurile a căror măsură sunt date mai jos:

a) 67^0; b) 135^0; c) 190^0; d) 320^0; e) 80^0; f) 1420^0;

g) $\frac{\pi}{5}$; h) $\frac{2\pi}{3}$; i) $\frac{9\pi}{5}$; j) $\frac{11\pi}{4}$; k) $\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{6}$.

8. Determinați $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ știind că $\frac{\sin x-3\cos x}{\cos x}=1$

3.2 Reducerea la un unghi ascuţit

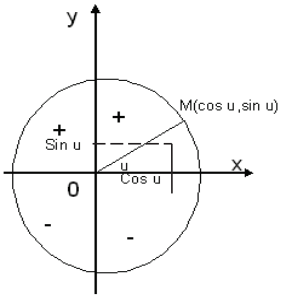
Funcţiile trigonometrice studiate sunt $\sin:\mathbb{R}\to[-1,1]$, $\cos:\mathbb{R}\to[-1,1]$,

$tg:\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{(2k+1)\pi}{2}\right\}\to\mathbb{R}$, $k\in\mathbb{Z}$, $\quad ctg:\mathbb{R}\setminus\{k\pi\}\to\mathbb{R}; k\in\mathbb{Z}^*;$

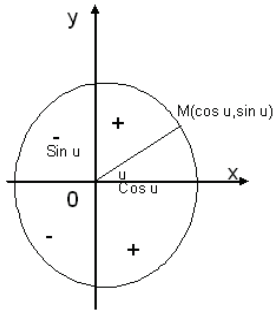
În general, se lucrează cu aceste funcţii pe restricţii:

Sin: $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to[-1,1]$ **Cos:** $[0,\pi]\to[-1,1]$ **Tg:** $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$

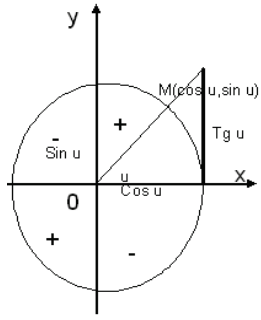
Semnul funcţiilor trigonometrice/ cadrane					**Paritatea**
Funcţia	**I**	**II**	**III**	**IV**	
Sin	+	+	-	-	**Impară**
Cos	+	-	-	+	**Pară**
Tg	+	-	+	-	**Impară**
Ctg	+	-	+	-	**impară**



Sinus



Cosinus



Tangenta

Fie $u\in(0,\frac{\pi}{2})$ Notăm sgn f= semnul funcţiei f; cof = cofuncţia lui f

$$\sin\left(k\frac{\pi}{2}\pm u\right)=\begin{cases}\operatorname{sgn} f(k\frac{\pi}{2}\pm u)\cdot\sin u, k=par\\ \operatorname{sgn} f(k\frac{\pi}{2}\pm u)\cdot\cos u, k=impar\end{cases}$$ În general,

$$f(k\frac{\pi}{2}\pm u)=\begin{cases}\operatorname{sgn} f(k\frac{\pi}{2}\pm u)\cdot f(u), k=par\\ \operatorname{sgn} f(k\frac{\pi}{2}\pm u)\cdot cof(u), k=impar\end{cases}$$

Din formula generală se deduc cazurile:

$\sin\left(\frac{\pi}{2}\pm u\right)=\cos u,$ $\quad\cos\left(\frac{\pi}{2}-u\right)=\sin u,$ $\quad\cos\left(\frac{\pi}{2}+u\right)=-\sin u,$

$\sin(\pi-u)=\sin u,$ $\quad\sin(\pi+u)=-\sin u,$ $\quad\cos(\pi\pm u)=-\cos u,$ etc.

Exercitii rezolvate

1. Fie $x \in \left[0^0; 90^0\right]$**. Să se arate că** $\sin x \cdot \sin(180^0 - x) \geq 0$**.**

Rezolvare: $\sin x \cdot \sin(180^0 - x) = \sin x \cdot \sin x = \left(\sin x\right)^2 \geq 0$**;**

2. a) Calculați sinusul complementului unghiului de 60^0**;**
b) Calculați sinusul suplementului unghiului de 150^0**;**
c) Calculați cosinusul complementului unghiului de 30^0**;**
d) Calculați cosinusul suplementului unghiului de 120^0**;**
Rezolvare:

a) $\sin(90^0 - 60^0) = \sin 30^0 = \frac{1}{2}$; **b)** $\sin(180^0 - 150^0) = \sin 30^0 = \frac{1}{2}$;

c) $\cos(90^0 - 300^0) = \cos 60^0 = \frac{1}{2}$; **d)** $\cos(180^0 - 120^0) = \cos 60^0 = \frac{1}{2}$;

3. Să se arate că $\cos 1^0 + \cos 2^0 + \cos 3^0 + ... + \cos 179^0 = 0, \ \forall x \in (0^0; 90^0)$**.**

Rezolvare: Se știe că $\cos(180^0 - x) = -\cos x, \ \forall x \in \left(0^0; 90^0\right)$. Atunci,

$\cos 179^0 = \cos(180^0 - 1^0) = -\cos 1^0, ..., \ \cos 91^0 = \cos(180^0 - 89^0) = -\cos 89^0$. Suma va fi egală cu zero, deoarece cos $90^0 = 0$;

4. Să se arate că $\sin 1^0 + \sin 2^0 + ... + \sin 90^0 - \sin 91^0 - \sin 92^0 - ... - \sin 180^0 = 1$**.**

Rezolvare: Se folosește faptul că $\sin(180^0 + x) = -\sin x$.

Exercitii propuse

1. Fie $x \in \left(0^0; 90^0\right)$**. Știind că** $\sin(180^0 - x) = \sin x$, $\cos(180^0 - x) = -\cos x$, $tg(180^0 - x) = -tgx$.

Să se calculeze:

a) $\sin 150^0$; b) $\sin 135^0$; c) $\sin 120^0$; d) $\cos 150^0$; e) $\cos 135^0$; f) $\cos 120^0$;

g) $tg150^0$; h) $tg135^0$; i) $tg120^0$;

2. Fie $x \in \left(0^0; 90^0\right)$**. Știind că** $\sin(180^0 + x) = -\sin x$, $\cos(180^0 + x) = \cos x$, $tg(180^0 + x) = tgx$.

Să se calculeze:

a) $\sin 210^0$; b) $\sin 225^0$; c) $\sin 240^0$; d) $\cos 210^0$; e) $\cos 225^0$; f) $\cos 240^0$;

g) $tg210^0$; h) $tg225^0$; i) $tg240^0$;

3. Să se arate că au loc egalitățile:

a) $\sin 10^0 - \cos 80^0 = 0$; **b)** $\sin 40^0 + \cos 130^0 = 0$; **c)** $\sin 15^0 - \cos 75^0 = 0$;

4. Să se calculeze:

a) $\sin 25^0 - \cos 65^0$; **b)** $\cos 30^0 + \cos 150^0$; **c)** $\cos 45^0 + \cos 135^0$;

5. Să se arate că $\sin 20^0 + \sin 90^0 - \sin 160^0 = 1$**.**

6. Să se arate că $\cos 10^0 + \cos 30^0 + \cos 50^0 + ... + \cos 170^0 = 0$.

7. Să se reducă la un unghi ascuțit și să se determine semnul funcțiilor:

a). $\sin 600^0$ **;** **b).** $\sin 170^0$; **c).** $\sin 210^0$; **d).** $\sin 380^0$;

e). $\sin 1200^0$; **f).** $\cos 780^0$; **g).** $\cos 800^0$; **h).** $\cos 1500^0$;

i). $tg\,400^0$; **j).** $tg\,900^0$; **k).** $tg\,1000^0$; **l).** $\sin\frac{5\pi}{3}$;

m). $\sin\frac{4\pi}{3}$; **n).** $\cos\frac{16\pi}{3}$; **o).** $tg\frac{10\pi}{3}$; **p).** $\sin\frac{5\pi}{6}$;

q). $\cos\frac{7\pi}{6}$; **r).** $tg\frac{32\pi}{6}$; **s).** $\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)-\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)$;

t). $\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{4}\right)$; **u).** $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{5\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$;

v). $\cos\left(\frac{7\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)$

Ştiaţi că ... ?

Matematicianul şi geograful grec **Claudiu Ptolemeu**(~87-167) a avut ideea împărţirii cercului în 360 de părţi congruente şi exprimarea acestora în fracţii sexagesimale.

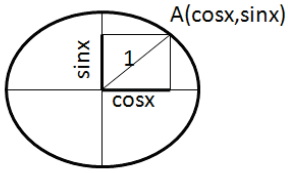
El a construit şi o serie de instrumente geodezice şi a obţinut o serie de cunoştinţe trigonometrice.

A calculat paralaxa Lunii, și a întocmit o serie de cataloage cu stele, și a folosit pentru prima dată coordonatele geografice. El a realizat și o hartă a Daciei romane fiind cea mai veche hartă care ni s-a păstrat. ([6], p.14)

3.3 Formule trigonometrice

Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic de catete sin x şi cos x din cercul trigonometric de rază 1 se obţine :

1. Formula fundamentală a trigonometriei



$\boxed{\sin^2 x+\cos^2 x=1,\ \forall x\in\mathbb{R}.}$ $\boxed{\Rightarrow \sin x=\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}$

$\boxed{\Rightarrow \cos x=\pm\sqrt{1-\sin^2 x}}$;

Exemple: a) $\sin^2 35^0+\cos^2 35^0=1$, b) $\sin^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{\pi}{8}=1$;

c) Dacă $\sin x=\frac{2}{3},\ x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ să se calculeze $\cos x,\ tgx,\ ctgx$;

Rezolvare:

a) $\sin^2 34^0+\cos^2 34^0=1$, deoarece, pentru $x=34^0$ se verifică formula $\sin^2 x+\cos^2 x=1,\ \forall x\in\mathbb{R}.$

c) Pentru $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow\ \cos x\rangle 0,\ tgx\rangle 0,\ ctgx\rangle 0$; Din $\cos x=\sqrt{1-\sin^2 x}\ \Rightarrow$

$\cos x=\sqrt{1-\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$; $tgx=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$; $ctgx=\frac{1}{tgx}=\frac{\sqrt{5}}{2}$;

2. $\boxed{\sin 2a=2\sin a\cos a;}$, $a\in\mathbb{R}$

Exemplu: $\sin 120^0=2\sin 60^0\cdot\cos 60^0=2\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$;

3. $\boxed{\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a=2\cos^2 a-1=1-2\sin^2 a}$, $a\in\mathbb{R}$

Exemplu: $\cos 120^0=2\cos^2 60^0-1=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2-1=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$;

4. $\boxed{\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a}$, $a,b\in\mathbb{R}$

Exemple: $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2}$;

$\sin 75^0=\sin(45^0+30^0)=\sin 45^0\cos 30^0+\sin 30^0\cos 45^0=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$;

5. $\boxed{\sin(a-b)=\sin a\cos b-\sin b\cos a}$, $a,b\in\mathbb{R}$

Exemplu: $\sin\frac{5\pi}{6}=\sin\left(\frac{6\pi-\pi}{6}\right)=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\pi\cos\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{6}\cos\pi=\frac{1}{2}$;

6. $\boxed{\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b}$, $a,b\in\mathbb{R}$

Exemplu:

$\cos 75^0=\cos(45^0+30^0)=\cos 45^0\cos 30^0-\sin 30^0\sin 45^0=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$;

7. $\boxed{\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b}$, $a,b\in\mathbb{R}$

Exemplu: $\cos\frac{3\pi}{4}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\pi\cos\frac{\pi}{4}+\sin\pi\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$;

8. $\boxed{tg(a+b)=\frac{tga+tgb}{1-tga\cdot tgb};\quad tg(a-b)=\frac{tga-tgb}{1+tga\cdot tgb};}\quad a,b\in\mathbb{R}\setminus\left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\right\}$

Exemplu: $tg75^0=tg(45^0+30^0)=\frac{tg45^0+tg30^0}{1-tg45^0\cdot tg30^0}=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}=\frac{12+6\sqrt{3}}{6}=2+\sqrt{3}$;

9. $\boxed{\sin a=\pm\frac{tga}{\sqrt{1+tg^2a}}}$ $\boxed{\cos a=\pm\frac{1}{\sqrt{1+tg^2a}}}$, $a\in\mathbb{R}\setminus\left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\right\}$.

Exemplu: Dacă $tgx=2$, $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ să se calculeze sin x şi cos x;

Rezolvare: $\sin x=\frac{2}{\sqrt{1+4}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos x=\frac{1}{\sqrt{1+4}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$;

Alte formule trigonometrice

$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos2\alpha}{2}$; $\sin^2\alpha=\frac{1-\cos2\alpha}{2}$; $\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$; $\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$;

$tg\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$; $ctg\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$ $tg2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$; $ctg2\alpha=\frac{ctg^2\alpha-1}{2ctg\alpha}$;

$tg\alpha=\frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}$; $ctg\alpha=\frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{2tg\frac{\alpha}{2}}$; $\sin3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$;

$\cos3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$; $tg\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{1}{ctg\frac{\alpha}{2}}$;

$\sin\alpha=\frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}$; $\cos\alpha=\frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}$;

$\sin a+\sin b=2\sin\frac{a+b}{2}\cdot\cos\frac{a-b}{2}$ $\sin a-\sin b=2\sin\frac{a-b}{2}\cdot\cos\frac{a+b}{2}$

$\cos a-\cos b=-2\sin\frac{a+b}{2}\cdot\sin\frac{a-b}{2}$ $\cos a+\cos b=2\sin\frac{a-b}{2}\cdot\cos\frac{a+b}{2}$

$tga+tgb=\frac{\sin(a+b)}{\cos a\cdot\cos b}$ $tga-tgb=\frac{\sin(a-b)}{\cos a\cdot\cos b}$

Activitate independentă		**Răspuns**
Să se arate că au loc relaţiile $tg3\alpha=\frac{3tg\alpha-tg^3\alpha}{1-3tg^2\alpha}$; $ctg3\alpha=\frac{ctg^3\alpha-3ctg\alpha}{3ctg^2\alpha-1}$;		

Exercitii rezolvate

1. Dacă $\cos x=-\frac{1}{4},\ x\in\left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)$ **să se calculeze** $\sin x,\ tgx,\ ctgx$**;**

Rezolvare: Pentru $x\in\left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)\Rightarrow\ \sin x\langle 0,\ tgx\rangle 0,\ ctgx\rangle 0$; Din $\sin x=-\sqrt{1-\cos^2 x}\ \Rightarrow$

$\sin x=-\sqrt{1-\frac{1}{16}}=-\frac{\sqrt{15}}{4};\ tgx=\frac{\sin x}{\cos x}=\sqrt{15};\ ctgx=\frac{1}{tgx}=\frac{\sqrt{15}}{15};$

2. Dacă $\sin x+\cos x=\frac{4}{3}$ **să se calculeze** $\sin x\cdot\cos x$**.**

Rezolvare: Se ridică la pătrat relaţia data rezultând $\sin^2 x+2\sin x\cdot\cos x+\cos^2 x=\frac{16}{9}\Rightarrow$

$2\sin x\cdot\cos x=\frac{16}{9}-1\Rightarrow\sin x\cdot\cos x=\frac{7}{18};$

3. Dacă $a,b\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ **şi** $\sin a=\frac{2}{5},\ \cos b=\frac{3}{5}$ **să se calculeze** $\sin(a+b)$**,** $\sin(a-b)$**,** $\cos(a+b)$**,** $\cos(a-b)$**,** $\sin 2a$**,** $\sin 2b$**,** $\cos 2a$**,** $\cos 2b$**;**

Rezolvare: Din $\sin a=\frac{2}{5}\Rightarrow\cos a=\sqrt{1-\frac{4}{25}}=\frac{\sqrt{21}}{5}$ şi din $\cos b=\frac{3}{5}\Rightarrow\sin b=\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\frac{4}{5};$

$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a=\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}+\frac{4}{5}\cdot\frac{\sqrt{21}}{5}=\frac{6+4\sqrt{21}}{25};$

$\sin(a-b)=\sin a\cos b-\sin b\cos a=\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}-\frac{4}{5}\cdot\frac{\sqrt{21}}{5}=\frac{6-4\sqrt{21}}{25};$

$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b=\frac{\sqrt{21}}{5}\cdot\frac{3}{5}-\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{5}=\frac{3\sqrt{21}-8}{25};$

$\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b=\frac{\sqrt{21}}{5}\cdot\frac{3}{5}+\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{5}=\frac{3\sqrt{21}+8}{25};$

$\sin 2a=2\sin a\cdot\cos a=2\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{\sqrt{21}}{5}=\frac{4\sqrt{21}}{25};\quad\sin 2b=2\sin b\cdot\cos b=2\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{24}{25};$

$\cos 2a=1-2\sin^2 a=1-2\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^2=1-\frac{8}{25}=\frac{17}{25};\quad\cos 2b=1-2\sin^2 b=1-2\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^2=1-\frac{32}{25}=\frac{-7}{25};$

4. Dacă $f(x)=\cos\frac{x}{2}$**, să se calculeze** $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$**.**

Rezolvare: Cum $\cos\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$, pentru

$x=\frac{\pi}{4}\Rightarrow\cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$

5. Să se arate că $\frac{\cos 2x}{1+\sin 2x}=tg\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$, $\forall x\neq(4k+3)\frac{\pi}{2}$ **şi** $x\neq(4k+3)\frac{\pi}{4}$**;**

Rezolvare :

$\frac{\cos 2x}{1+\sin 2x}=\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin^2 x+\cos^2+\sin 2x}=\frac{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}{(\sin x+\cos x)^2}=\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}$ iar

$tg\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x-\sin x)}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x+\sin x)}$, c.c.t.d.

Exercitii propuse

1. Să se calculeze:

a) $\sin^2 50^0+\cos^2 50^0$; b) $\sin^2 44^0+\sin^2 46^0$;

c) $\cos^2 15^0+\cos^2 75^0$; d) $\sin^2 20^0+\sin^2 70^0$;

2. Să se arate că: a) $\sin^2 125^0+\sin^2 35^0=1$; b) $\cos^2 50^0+\sin^2 135^0=1$;

3. Să se calculeze $(\cos 15^0+\cos 165^0)^{2012}$.

4. Să se calculeze cu ajutorul formulelor trigonometrice:

a). $\sin 15^0$; b). $\sin 75^0$; c). $\sin 105^0$; d). $\sin 135^0$; e). $\sin\frac{45^0}{2}$;

f). $\cos 15^0$; g). $\cos 75^0$; h). $\cos 105^0$; i). $\cos 135^0$; j). $\cos\frac{45^0}{2}$;

k). $tg15^0$; l). $tg75^0$; m). $tg105^0$; n). $tg135^0$; o). $tg\frac{45^0}{2}$;

5. Să se calculeze:

a) $\sin 35^0\cdot\cos 55^0+\sin 55^0\cdot\cos 35^0$; b) $\sin 72^0\cdot\cos 27^0-\sin 27^0\cdot\cos 72^0$;

c) $\cos 28^0\cdot\cos 32^0-\sin 28^0\cdot\cos 32^0$ d) $\cos 43^0\cdot\cos 13^0+\sin 43^0\cdot\sin 13^0$;

6. Dacă $\cos x=\frac{1}{3}$, $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ să se calculeze $\sin x$, tgx, $ctgx$;

7. Dacă $\sin x=\frac{2}{5}$, $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ să se calculeze $\cos x$, tgx, $ctgx$;

8. Se dă $\cos A=\frac{1}{4}$, $A\in(0;\frac{\pi}{2})$. Să se calculeze sin A şi tg A.

9. Se dă $\sin A=\frac{2}{3}$, $A\in(0;\frac{\pi}{2})$. Să se calculeze sin 2A .

10. Să se calculeze $\sin(180^0-x)$ ştiind că $\cos x=\frac{1}{3}$ şi $x\in(0^0;90^0)$.

11. Dacă $a,b\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ şi $\sin a=\frac{1}{5}$, $\cos b=\frac{4}{5}$ să se calculeze $\sin(a+b)$, $\sin(a-b)$, $\cos(a+b)$, $\cos(a-b)$, $\sin 2a$, $\sin 2b$, $\cos 2a$, $\cos 2b$;

12. Dacă $a,b\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ și $\sin a=\frac{1}{4}$, $\sin b=\frac{1}{2}$ să se calculeze $\sin(a+b)$, $\sin(a-b)$, $\cos(a+b)$, $\cos(a-b)$, $\sin 2a$, $\sin 2b$, $\cos 2a$, $\cos 2b$;

13. În triunghiul dreptunghic ABC, $m(A)=90^0$ se știe $\sin B=\frac{2}{3}$. Să se calculeze $\cos C$;

14. Dacă $\sin 2a=\frac{4}{5}$, $a\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, să se calculeze sina.

15. Dacă $\sin a=\frac{1}{3}$ să se calculeze $\sin 3a$.

16. Să se arate că $tg25^0\cdot tg45^0\cdot tg65^0=1$.

17. Să se arate că $tg1^0\cdot tg2^0\cdot tg3^0\cdot.....\cdot tg88^0\cdot tg89^0=1$.

18. Să se aducă la o formă mai simplă expresiile :

a) $\frac{\cos^2 x}{1-\sin x}$; b) $\frac{\sin^2 x}{1+\cos x}$; c) $\sin x(1+ctg^2 x)$.

19. Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A. Să se arate că $\sin B\cdot\cos C+\sin C\cdot\cos B=1$;

20. Să se demonstreze că $\sin(90^0-x)\cdot\cos x+\cos(90^0-x)\cdot\sin x=1,\ \forall x\in\left(0^0;90^0\right)$.

21. Să se calculeze valoarea expresiei $E(x)=\sin x\cdot\cos x+tgx\cdot ctgx$, pentru $x=15^0$.

22. Să se demonstreze relațiile :

a) $(\cos x-\sin x)^2=1-\sin 2x,\ \forall x\in\mathbb{R}$;

b) $1-2\sin^2 x=2\cos^2 x-1,\ \forall x\in\mathbb{R}$;

c) $\sin^4 x-\cos^4 x=\sin^2 x-\cos^2 x,\ \forall x\in\mathbb{R}$;

d) $\cos^4 x-\sin^4 x=\cos 2x,\ \forall x\in\mathbb{R}$;

e) $\sin^4 x+\cos^4 x=1-2\sin^2 x\cdot\cos^2 x,\ \forall x\in\mathbb{R}$;

f) $\cos 2x+2\sin^2 x=1,\ \forall x\in\mathbb{R}$;

g) $\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x,\ \forall x\in\mathbb{R}$;

h) $\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x,\ \forall x\in\mathbb{R}$;

i) $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{4}-\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\sin\frac{\pi}{4}=\sin x,\ \forall x\in\mathbb{R}$;

j) $\cos x+\cos(\frac{2\pi}{3}-x)+\cos(\frac{2\pi}{3}+x)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$;

23. Să se arate că în orice triunghi ABC are loc relația : $tgA+tgB+tgC=tgA\cdot tgB\cdot tgC$.

24. Să se arate că în orice triunghi ABC are loc relația : $tg\frac{A}{2}\cdot tg\frac{B}{2}+tg\frac{B}{2}\cdot tg\frac{C}{2}+tg\frac{C}{2}\cdot tg\frac{A}{2}=1$.

25. Să se arate că în orice triunghi ABC are loc relația : $tg^2\frac{A}{2}+tg^2\frac{B}{2}+tg^2\frac{C}{2}\geq 1$.

26. Arătați că dacă $a\neq(2k+1)\frac{\pi}{4}$ și $a\neq(2k+1)\frac{\pi}{6}$, $k\in\mathbb{Z}$, atunci,

$tg3a-tg2a-tga=tg3a\cdot tg2a\cdot tga$.

27. Știind că $tg\ a=-1$, $tg\ b=-2$, $tg\ c=3$, să se calculeze $tg(a+b+c)$.

Ştiaţi că ... ?



Francezul **François Vièt**e (1540 – 23.02.1603) este considerat unul dintre cei mai mari matematicieni ai secolului al XVI-lea care a dus ştiinţa franceză la un nivel ridicat pentru contemporanii săi.

Deşi jurist, **Viete** a avut preocupări în astronomie şi trigonometrie determinând prin calcule valoarea lui π cu nouă zecimale exacte, sau a formulelor pentru $\sin a - \sin b, \sin a + \sin b$, $\cos a - \cos b, \cos a + \cos b$, $\sin na, \cos na$ în funcţie de $\sin a, \cos a$.

Cel mai mult, este cunoscut pentru scrierea literală pentru prima dată, a formulei $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

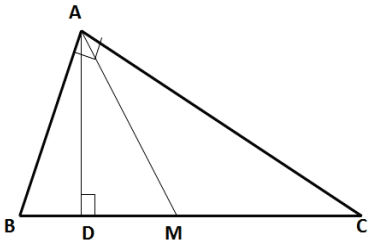
Tot **Viete** scoate în evidenţă formula tangentelor $tg\dfrac{B-C}{2} = \dfrac{b-c}{b+c} ctg\dfrac{A}{2}$, formulă care este stabilită în 1583 de către Thomas Finck. Acesta din urmă, introdusese abrevierele pentru "sin", „tan", „sec", şi denumirile secant şi tangent în cartea sa „Geometria rotundi".

În 1591, în lucrarea „ In artem analyticam isagoge „ **Viete** stabileşte o serie de proprietăţi, numite mai târziu după numele lui, şi anume, " formulele lui Viete", relaţii ce se referă la legătura dintre coeficienţii unei ecuaţii şi soluţiile acesteia. ([6], p.26)

4. APLICAȚII ALE TRIGONOMETRIEI ÎN GEOMETRIE

4.1 Relații metrice în triunghiul dreptunghic

Fie ABC un triunghi dreptunghic cu $m(\sphericalangle A)=90^0$. Atunci, au loc relațiile:



Teorema lui Pitagora: $BC^2=AB^2+AC^2$.
Teorema catetei: $AC^2=DC\cdot BC$, $AB^2=BD\cdot BC$.
Teorema înălțimii 1: $AD^2=BD\cdot DC$.
Teorema înălțimii 2: $AD=\dfrac{AB\cdot AC}{BC}$.
AM mediană în triunghiul dreptunghic ABC.
Rezultă $AM=\dfrac{BC}{2}$.

Teorema unghiului de 30^0 : Dacă $m(\sphericalangle B)=30^0\Rightarrow AC=\dfrac{BC}{2}$.

Rapoarte constante în triunghiul dreptunghic:

$\sin B=\dfrac{AC}{BC}$, $\cos B=\dfrac{AB}{BC}$, $tgB=\dfrac{AC}{AB}$, $ctgB=\dfrac{AB}{AC}$, $ctgB=\dfrac{1}{tgC}$, $tgB=\dfrac{\sin B}{\cos B}$.

Unghiuri complementare:
Deoarece $m(\sphericalangle B)=90^0-m(\sphericalangle C)$, obținem:
$\sin B=\cos(90^0-C)$, $\cos B=\sin(90^0-C)$, $tgB=\mathrm{c}tg(90^0-C)$.

Relații între sin x și cos x:
$\sin^2 x+\cos^2 x=1$, $\sin x=\sqrt{1-\cos^2 x}$, $\cos x=\sqrt{1-\sin^2 x}$, $\forall x\in\left[0^0;90^0\right]$.

Teorema reciprocă a lui Pitagora:
Într-un triunghi oarecare ABC, dacă are loc relația $BC^2=AB^2+AC^2$, atunci triunghiul este dreptunghic în A.

Aria unui triunghi dreptunghic: $A_{ABC}=\dfrac{BC\cdot AD}{2}$ sau $A_{ABC}=\dfrac{AB\cdot AC}{2}$.

Definiție: Distanța dintre punctele $A(x_A,y_A)$, $B(x_B,y_B)$ este dată de formula

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

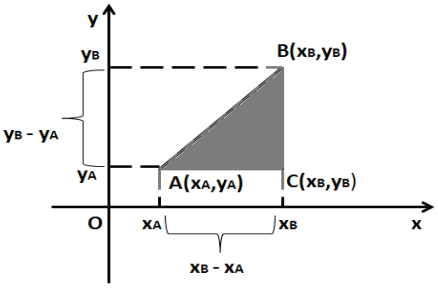
Exemplu: Se consideră punctele $A(-4;-6)$, $B(2;2)$, $C(-12;0)$. Să se arate că triunghiul ABC este isoscel.
Rezolvare:

$AB=\sqrt{(2+4)^2+(2+6)^2}=\sqrt{36+64}=\sqrt{100}=10;$

$BC=\sqrt{(-12-2)^2+2^2}=\sqrt{196+4}=\sqrt{200}=10\sqrt{2};$

$AC=\sqrt{(-12+4)^2+(+6)^2}=\sqrt{64+36}=\sqrt{100}=10;$

Rezultă că triunghiul este isoscel;



Activitate independentă		Răspuns
Se consideră triunghiul isoscel ABC cu AB=AC=8 și BC = 12. Să se determine lungimile înălțimilor.		

Exercitii rezolvate

1. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\sphericalangle A)=90^0$. Dacă $AB=3\sqrt{3}$ și AC = 9, se cere: BC, sin B, sin C, cosB, cosC, tgB, tgC, înălțimea AD, mediana AM, $m(\sphericalangle B)$, $m(\sphericalangle C)$.

Rezolvare:

Aplicând teorema lui Pitagora, obținem:

$BC^2=AB^2+AC^2\Rightarrow BC^2=(3\sqrt{3})^2+9^2=108\Rightarrow BC=\sqrt{108}=6\sqrt{3}$.

$\sin B=\frac{AC}{BC}=\frac{9}{6\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow m(\sphericalangle B)=60^0$;

$\sin C=\frac{AB}{BC}=\frac{3\sqrt{3}}{6\sqrt{3}}=\frac{1}{2}\Rightarrow m(\sphericalangle C)=30^0$;

Cum triunghiul e dreptunghic iar Bși C sunt unghiuri complementare, rezultă că

$\cos B=\frac{AB}{BC}=\sin C$, $\cos C=\frac{AC}{BC}=\sin B$;

$tg\ B=\frac{AC}{AB}=\frac{9}{3\sqrt{3}}=\sqrt{3}$, sau $tg\ B=\frac{\sin B}{\cos B}$;

$tg\ C=\frac{AB}{AC}=\frac{3\sqrt{3}}{9}=\frac{\sqrt{3}}{3}$, sau $tg\ C=\frac{\sin C}{\cos C}=\frac{1}{tg\ B}$;

2. În triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\sphericalangle A)=90^0$, se cunoaște că $\sin B=\frac{2}{5}$. Să se calculeze: sin C,
cos B, cos C, tg B, tg C.

Rezolvare:

$\cos B=\sqrt{1-\sin^2 B}=\sqrt{1-\left(\frac{2}{5}\right)^2}=\sqrt{\frac{21}{25}}=\frac{\sqrt{21}}{5}$;

Cum $\cos C=\frac{AC}{BC}=\sin B\Rightarrow\cos C=\frac{2}{5}$; $\sin C=\frac{AB}{BC}=\cos B\Rightarrow\sin C=\frac{\sqrt{21}}{5}$;

$tg\ B=\frac{\sin B}{\cos B}=\frac{2}{\sqrt{21}}$, $tg\ C=\frac{\sin C}{\cos C}=\frac{\sqrt{21}}{2}$.

3. Să se arate că triunghiul ABC cu laturile $AB=3\sqrt{2}$, $AC=3\sqrt{6}$, $BC=6\sqrt{2}$ este dreptunghic;

Rezolvare:

Se verifică relația $BC^2=AB^2+AC^2$.

$AB^2+AC^2=(3\sqrt{2})^2+(3\sqrt{6})^2=18+54=72=(6\sqrt{2})^2=BC\Rightarrow\Delta ABC$ este dreptunghic în A.

4. În triunghiul ABC dreptunghic în A se știe că tg B = 3. Să se calculeze sin C, cos C, sin B, cos B.

Rezolvare: Cum $tgC = \frac{1}{tgB} \Rightarrow tgC = \frac{1}{3}$; $\sin x = \frac{tgx}{\sqrt{1+tg^2 x}} \Rightarrow \sin C = \frac{tgC}{\sqrt{1+tg^2 C}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$,

$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2 x}} \Rightarrow \cos C = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2 C}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$. Evident, $\sin B = \cos C$, $\cos B = \sin C$.

5. În triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\sphericalangle A) = 90^0$, se cunosc $BC = 18\ cm$ și $m(\sphericalangle C) = 30^0$. Să se determine lungimile medianelor, sin B, cosB, aria triunghiului ABC.
Rezolvare:

Conform teoremei unghiului de 30^0 rezultă că $m(\sphericalangle C) = 30^0 \Rightarrow AB = \frac{BC}{2} = \frac{18}{2} = 9.$

Mediana $AM = \frac{BC}{2} = 9.$ $\sin B = \sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos B = \cos 60^0 = \frac{1}{2}$;

Cum $\sin B = \frac{AC}{BC} \Rightarrow AC = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 18 = 9\sqrt{3}$; $BN^2 = AB^2 + AN^2 \Rightarrow BN = \frac{9}{2}\sqrt{7}$,

$CP^2 = AC^2 + AP^2 \Rightarrow CP = \frac{9}{2}\sqrt{13}$. $A_{ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{81\sqrt{3}}{2}$.

6. În triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\sphericalangle A) = 90^0$ și $AD \perp BC$ se cunosc $BC = 20\ cm$ și relația $AC = AB + 4$. Se cere: AB, AC, AD și aria triunghiului ABC;
Rezolvare:
Se aplică teorema lui Pitagora.
$AB^2 + (AB+4)^2 = 20^2 \Rightarrow\ x^2 + x^2 + 8x + 16 = 400 \Rightarrow\ x(x+4) = 192 \Rightarrow x = 12$, unde am notat $AB = x$.

Atunci, AC= 16 iar aria triunghiului ABC este $A_{ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{12 \cdot 16}{2} = 96$ iar

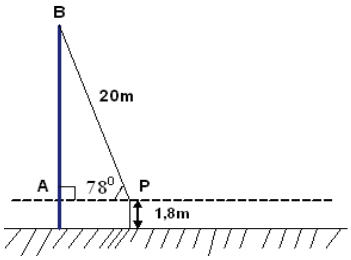
$AD = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{12 \cdot 16}{20} = \frac{48}{5}$.

7. În triunghiul ABC dreptunghic în A, având notațiile $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ se știe că $\sqrt{b^2 - 4\sqrt{3}b + 13} + \sqrt{c^2 - 8\sqrt{3} + 49} \le 2$. Să se determine AB, AC, BC.
Rezolvare.
Observăm că $\sqrt{b^2 - 4\sqrt{3}b + 13} + \sqrt{c^2 - 8\sqrt{3} + 49} = \sqrt{(b - 2\sqrt{3})^2 + 1} + \sqrt{(c - 4\sqrt{3})^2 + 1} \ge 2$, atunci din cele două relații rezultă egalitate în relația din enunț, așadar, $b - 2\sqrt{3} = 0 \Rightarrow b = 2\sqrt{3}$ și $c - 4\sqrt{3} = 0 \Rightarrow c = 4\sqrt{3}$. Mai departe se obține, $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 3\sqrt{5}$.

APLICAȚII PRACTICE

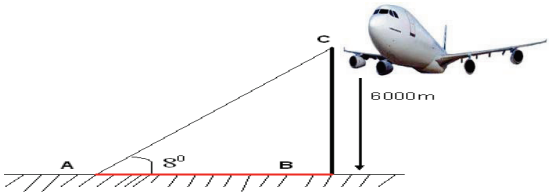
1. Scara unei maşini de pompieri se extinde la o lungime maximă de 20 m când este ridicată la un unghi maxim de 78^0, ca în figura alăturată. Dacă baza scării este montată pe o platformă aflată la 1,8 m de sol, să se afle distanţa maximă de la pământ până unde poate să ajungă scara, ştiind că $\sin 78^0 = 0{,}978$.

Rezolvare : În triunghiul dreptunghic BAP, $\sin 78^0 = \frac{AB}{20} \Rightarrow AB = 20 \cdot \sin 78^0 = 20 \cdot 0,978 = 19,56$.
Aşadar, distanţa maximă la care poate să ajungă scara este 19,56 + 1,8= 21,36 m.



Rezolvă singur

Un avion se apropie de un aeroport la o înălţimede 6000 m (Presupunem că aeroportul este situat la o înălţime apropiată de nivelul mării). Avionul coboară cu un unghi constant de 8^0 faţă de orizontală. La ce distanţă de pistă, în km, trebuie să înceapă avionul să coboare?
(Se ştie, tg $8^0 \approx 0,141$)



Exercitii propuse

1. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\sphericalangle A) = 90^0$. Dacă $AB = 12$ şi AC = 5, se cere: BC,
sin B, sin C, cosB, cosC, tgB, tgC, înălţimea AD, mediana AM, $m(\sphericalangle B)$, $m(\sphericalangle C)$.

2. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\sphericalangle A) = 90^0$. Dacă $AB = 1$ şi AC = 7, se cere: BC,
sin B, sin C, cosB, cosC, tgB, tgC, înălţimea AD, mediana AM, $m(\sphericalangle B)$, $m(\sphericalangle C)$.

3. În triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\sphericalangle A) = 90^0$, se cunoaşte că $\sin B = \frac{1}{3}$. Să se calculeze: sin C, cos B, cos C, tg B, tg C.

4. În triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\sphericalangle A) = 90^0$, se cunoaşte că $\sin B = \frac{2}{3}$. Să se calculeze: sin C, cos B, cos C, tg B, tg C.

5. În triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\sphericalangle A) = 90^0$, se cunoaşte că $\cos B = \frac{3}{4}$. Să se calculeze: sin B, cos C, sinC, tg B, tg C.

6. Să se arate că triunghiul ABC cu catetele AB, AC şi ipotenuza BC este dreptunghic în A, în cazurile:

a) AB = 3, AC = 4, BC = 5 ;
b) AB = 9, AC = 12, BC = 15;
c) AB = 12, AC = 16, BC = 20 ;
d) $AB = \sqrt{2}$, $AC = 2\sqrt{2}$, $BC = \sqrt{10}$;

e) $AB=2\sqrt{5},\ AC=4\sqrt{5},\ BC=10$;

7. În triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\sphericalangle A)=90^0$ și $AD\perp BC$ se cunosc $m(\sphericalangle B)=30^0$ și AC = 6 cm. Se cere: AB, BC, AD, aria triunghiului ABC;

8. În triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\sphericalangle A)=90^0$ și $AD\perp BC$ se cunosc $AB=10$ și mediana AM = 6 cm. Se cere: AC, BC, AD, tg B, tg C, aria triunghiului ABC;

9. În triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\sphericalangle A)=90^0$ și $AD\perp BC$ se cunosc $m(\sphericalangle C)=60^0$ și $BC=12\sqrt{2}\ cm$. Se cere: AB, AC, AD, aria triunghiului ABC;

10. În triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\sphericalangle A)=90^0$ și $AD\perp BC$ se cunosc $AB=5\ cm$ și $AC=10\sqrt{2}\ cm$. Se cere: BC, AD, mediana AM, sin B, cos B, tg B, aria triunghiului ABC;

11. În triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\sphericalangle A)=90^0$ și $AD\perp BC$ se cunosc $AD=4\sqrt{3}\ cm$ și $m(\sphericalangle B)=30^0$. Se cere: AB, AC, BC, cosC, cos B, aria triunghiului ABC;

12. În triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\sphericalangle A)=90^0$ și $AD\perp BC$ se cunosc $AB=10\ cm$ și $tgC=\frac{2}{3}$. Se cere: AC, BC, AD, aria triunghiului ABC;

13. În triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\sphericalangle A)=90^0$ și $AD\perp BC$ se cunoaște că $BC=12\sqrt{3}$ și relația $3\cdot m(\sphericalangle B)+m(\sphericalangle C)=150^0$. Se cere: AB, AC, AD, aria triunghiului ABC;

14. În triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\sphericalangle A)=90^0$ și $AD\perp BC$ se cunosc $AB=6\ cm$ și $AC=6\sqrt{3}$. Se cere: BC, AD, sin B, cos B, tg B, aria triunghiului ABC;

15. În triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\sphericalangle A)=90^0$ și $AD\perp BC$ se cunosc $BC=12\ cm$ și $m(\sphericalangle C)=45^0$. Se cere: AB, AC, AD, aria triunghiului ABC;

16. În triunghiul ABC dreptunghic în A, se cunoaște că aria triunghiului este 80 iar $m(\sphericalangle B)=45^0$. Se cere să se determine AB, BC, AD.

17. În triunghiul ABC dreptunghic în A, având notațiile $BC=a,\ AC=b,\ AB=c$ se cunosc relațiile $b+c=35$ iar $2b-c=10$. Să se determine AB, AC, BC.

18. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A, cu notațiile uzuale. Să se demonstreze relațiile:

a) $\cos^2 B+\cos^2 C=1$;

b) $\sin B+\cos B=\frac{AB+AC}{BC}$;

c) $\frac{\sin B+\sin C}{\cos B+\cos C}=1$;

d) $\frac{1}{tg^2 B}+\sin^2 B=\frac{\cos^2 B}{tg^2 B}+1$;

e) $\sin^2 B+\cos^2 B=\cos^2 B+\cos^2 C$;

f) $tgB+tgB=ctgB+ctgC$;

g) $tg^3 B+ctg^3 B=tg^3 B+ctg^3 C$;

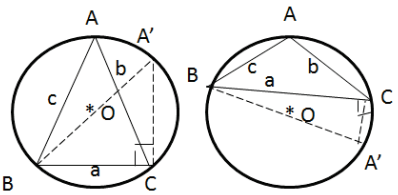
h) $\frac{b^2}{tgB}+\frac{c^2}{tgC}=2bc$;

i) $\cos^2 B+\sin^2 C=2\cos B\cdot\sin C$.

19. Să se arate că în orice triunghi ABC dreptunghic în A are loc relația $\sin^2 B+\sin^2 C=1$.

4.2 Teorema sinusurilor. Teorema cosinusului

1. Teorema sinusurilor



În orice triunghi ABC are loc relația: $\boxed{\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R}$**, unde R este raza cercului circumscris triunghiului ABC.**

Demonstrație :

Dacă ΔABC este ascuțit unghic $\Rightarrow$ centrul cercului, O este în interiorul triunghiului iar dacă BA' este diametru atunci $\Delta BCA'$ este dreptunghic adică $a=2R\sin A'$, unde R este raza cercului circumscris triunghiului. Cum $\sphericalangle A'\equiv\sphericalangle A\Rightarrow a=2R\sin A\Rightarrow\frac{a}{\sin A}=2R.$ Analog pentru celelalte.

Dacă ΔABC este obtuz unghic $\Rightarrow$centrul cercului, O este în exteriorul triunghiului iar dacă BA' este diametru atunci $\Delta BCA'$ este dreptunghic adică $a=2R\sin A'$. Cum A şi A' sunt suplementare, rezultă sinA=sinA', rezultând ceea ce trebuia demonstrat.

Exemplu : În triunghiul ABC se cunosc $BC=6, m(\sphericalangle A)=30^0$. Să se afle raza cercului circumscris triunghiului;

Rezolvare: Din $\frac{a}{\sin A}=2R\Rightarrow R=\frac{a}{2\sin 60^0}=\frac{6}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}=2\sqrt{3}$;

2. Teorema cosinusului

În orice triunghi ABC are loc relațiile

$$\boxed{a^2=b^2+c^2-2bc\cos A\Rightarrow\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}$$

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B\Rightarrow\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C\Rightarrow\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

Demonstrație : În triunghiul ABC fie $BD\perp AC$, atunci $BC^2=BD^2+DC^2\Rightarrow$ $a^2=(c\sin A)^2+(b-c\cos A)^2\Rightarrow a^2=c^2\sin^2 A+b^2-2bc\cos A+c^2\cos^2 A$.

De aici, rezultă $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$. Analog şi pentru celelalte laturi.

Exemplu: În triunghiul ABC se cunosc $AB=\sqrt{50},\ BC=10,\ AC=5$. Să se afle $\cos A,\cos B,\cos C$

Rezolvare:

$$\cos A=\frac{25+50-100}{10\sqrt{50}}=-\frac{\sqrt{2}}{4},\quad \cos B=\frac{50+100-25}{20\sqrt{50}}=\frac{5\sqrt{2}}{8},\quad \cos C=\frac{100+25-50}{100}=\frac{3}{4};$$

3. Teorema lui Pitagora generalizată :

Dacă $m(\sphericalangle A)\langle 90^0\Rightarrow a^2=b^2+c^2-2bAD$; Dacă $m(\sphericalangle A)\rangle 90^0\Rightarrow a^2=b^2+c^2+2bAD$.

unde D este piciorul înălțimii din A pe BC.

Activitate independentă		Răspuns
În triunghiul ABC se cunosc $AB=6,\ BC=10,\ AC=8$. Să se calculeze $\cos B$;		

Exercitii rezolvate

1. În triunghiul ABC se cunoaște că $\sin A=\frac{1}{\sqrt{6}}$ **și** $\sin B=\frac{1}{\sqrt{3}}$ **iar** $AC=6$**. Să se calculeze lungimea laturii** $[BC]$**.**

Rezolvare: Aplicând teorema sinusurilor, $\frac{BC}{\sin A}=\frac{AC}{\sin B}\Rightarrow BC=\frac{1}{\sqrt{6}}\cdot\frac{6}{\frac{1}{\sqrt{3}}}=3\sqrt{2}$.

2. Să se calculeze lungimea diagonalei $[AC]$ **a rombului ABCD în care AB = 4 și** $m(\sphericalangle ABC)=120^0$.

Rezolvare: Din teorema sinusurilor aplicată în triunghiul ABC obținem: $\frac{AC}{\sin B}=\frac{AB}{\sin(ACB)}\Rightarrow\frac{AC}{\sin 120^0}=\frac{4}{\sin 30^0}\Rightarrow AC=4\cdot\frac{\sin 120^0}{\sin 30^0}=4\sqrt{3}$, unde $\sin 120^0=\cos 30^0=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Altfel, $AC=2AO=2\cdot\frac{l\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$.

3. Se determine raza cercului circumscris triunghiului ABC dacă se cunosc :

a) $BC=8,\ m(\sphericalangle A)=45^0$; **b)** $AB=10,\ m(\sphericalangle A)=105^0, m(\sphericalangle B)=45^0$;

Rezolvare:

a) $\frac{BC}{\sin 45^0}=2R\Rightarrow R=4\sqrt{2}$; b) $\frac{AB}{\sin C}=2R\Rightarrow R=10$;

4. În triunghiul ABC se cunosc $AB=3,\ AC=4$ **și** $m(\sphericalangle A)=120^0$. **Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC.**

Rezolvare: Cum $\cos 120^0=\cos(90^0+30^0)=-\sin 30^0=-\frac{1}{2}$, aplicând teorema cosinusului $BC^2=AB^2+AC^2-2\cdot AB\cdot AC\cdot\cos A$, $BC^2=3^2+5^2-2\cdot 3\cdot 5\cdot\cos 120^0$ se obține $BC=7$.

5. Să se demonstreze că în orice triunghi ABC are loc relația: $\frac{a+b}{a-b}=\frac{tg\frac{A+B}{2}}{tg\frac{A-B}{2}}$

(Teorema tangentelor).

Rezolvare: Demonstraţia provine din faptul că $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$ de unde

$$\frac{a+b}{\sin A+\sin B}=\frac{a-b}{\sin A-\sin B}\Rightarrow \frac{a+b}{a-b}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin A-\sin B}=\frac{tg\frac{A+B}{2}}{tg\frac{A-B}{2}}.$$

6. Să se arate că lungimea bisectoarei interioare în orice triunghi ABC este dată de formula $l_a=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}$, unde l_a este lungimea bisectoarei [AD].

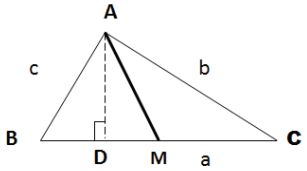
Rezolvare : Pentru demonstraţie , se aplică teorema sinusurilor în $\Delta ABD, \frac{AD}{\sin B}=\frac{BD}{\sin\frac{A}{2}}$,

şi în $\Delta ABC, \frac{b}{\sin B}=2R$ iar din teorema bisectoarei, $BD=\frac{ac}{b+c}$ rezultă

$$AD=\frac{ac\sin B}{(b+c)\sin\frac{A}{2}}=\frac{ac\cdot\frac{b}{2R}\cos\frac{A}{2}}{(b+c)\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}=\frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}.$$

7. În orice triunghi ABC are loc relația: $4m_a^2=2(b^2+c^2)-a^2$ (Lungimea medianei unui triunghi).

Rezolvare: Se aplică teorema cosinusului în triunghiul ACM, unde M este mijlocul lui BC:



$$m_a^2=b^2+\frac{a^2}{4}-2b\cdot\frac{a}{2}\cos C=b^2+\frac{a^2}{4}-ba\cdot\left(\frac{b^2+a^2-c^2}{2ab}\right).$$

După aducerea la acelaşi numitor, rezultă relația din enunț.

8. Să se arate că în orice triunghi are loc relația $\sin\frac{A}{2}\le\frac{a}{2\sqrt{bc}}$, $\cos\frac{A}{2}\le\frac{b+c}{2\sqrt{bc}}$.

Rezolvare :

$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1-cosA}{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc})}=\sqrt{\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}}\le\frac{a}{2\sqrt{bc}}$. Analog, pentru $\cos\frac{A}{2}$.

9. Să se arate că în orice triunghi există relația $\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}\le\frac{1}{8}$.

Rezolvare: Se folosesc inegalitățile $\sin\frac{A}{2}\le\frac{a}{2\sqrt{bc}}$, $\sin\frac{B}{2}\le\frac{b}{2\sqrt{ac}}$, $\sin\frac{C}{2}\le\frac{c}{2\sqrt{ab}}$.

10. Să se determine lungimile laturilor unui triunghi ABC ştiind că acestea sunt în progresie aritmetică , triunghiul are perimetrul egal cu 15 şi are loc relația $BC=AB+AC-1$.

Rezolvare:

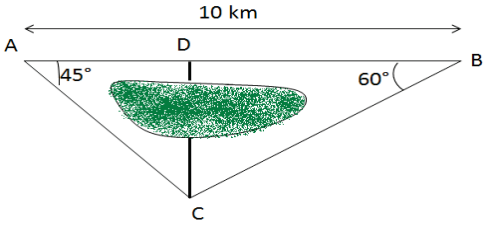
Fie $AB\langle AC\langle BC$. Cum $2AC=AB+BC$ şi $AB+AC+BC=15$ împreună cu relația din ipoteză rezultă

$$\begin{cases}2AB-AC=1\\AB+AC=8\end{cases}\Rightarrow AB=3, AC=5, BC=7.$$

APLICAŢII PRACTICE

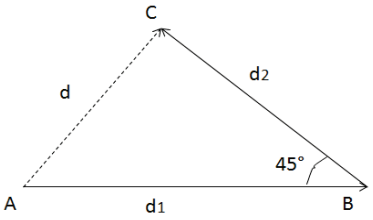
1. În figura de mai jos, A şi B sunt două localităţi prin care tranzitează o conductă de ţiţei iar dintr-o altă localitate C se doreşte construcţia unei conducte de lungime minimă care să se alimenteze din prima conductă. Între localitatea C şi celelalte două există o pădure ce nu permite să se vizualizeze locul D unde ar trebui să ajungă conducta perpendiculară pe cea principală, dar se cunosc unghiurile formate de AB cu AC de 45^0 şi de AB cu BC de 60^0 iar lungimea între A şi B este de 10 km. Să se determine lungimea distanţei de la C la AB.

Rezolvare :



Fie D punctul în care se duce perpendiculara din C pe AB. Atunci CD este distanţa minimă şi este egală cu lungimea AD deoarece triunghiul ADC este dreptunghic isoscel. Atunci, $tgA = \frac{CD}{AD}$. În triunghiul BDC, $tgB = \frac{CD}{10 - AD}$. Din cele două relaţii rezultă $AD \cdot tg45^0 = (10 - AD) \cdot tg60^0 \Rightarrow AD = (10 - AD) \cdot \sqrt{3} \Rightarrow AD \approx 6,35km$.

2. Dacă un vapor se deplasează în mod rectiliniu din portul A în portul B, (neglijându-se curbura Pământului) pe o distanţă de 8 km şi apoi din portul B se deplasează $6\sqrt{2}$ km sub un unghi de 45^0 până în portul C. Să se determine ce distanţă ar fi parcurs vaporul dacă s-ar fi deplasat direct de la portul A la portul C.



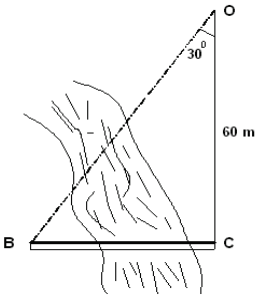
Rezolvare: Conform figurii alăturate se poate aplica Teorema cosinusului în triunghiul ABC :

$d^2 = d_1^2 + d_2^2 - 2d_1d_2 \cos 45^0 \Rightarrow$

$d^2 = 8^2 + (6\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 8 \cdot 6\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$

$d^2 = 40 \Rightarrow d = 2\sqrt{10} \approx 6,32km$

Rezolvă singur



Un observator O situat perpendicular pe axul unui pod BC, la o distanţă de 60 m , doreşte să măsoare lungimea podului. Din punctul în care se află, el vede capătul B al podului sub un unghi de 30^0. Care este lungimea podului ?

Exercitii propuse

1. În triunghiul ABC se cunosc $AB=10,\ BC=6,\ \sin C=\frac{1}{4}$. Să se calculeze $\sin A$;

2. În triunghiul ABC se cunosc $AC=6,\ BC=8,\ \sin A=\frac{2}{3}$. Să se calculeze $\sin B$;

3. În triunghiul ABC oarecare se cunosc:

a) $AB=12,\ \sin C=\frac{1}{4},\ m(\sphericalangle B)=45^0$. Se cere AC.

b) $AC=8,\ \ m(\sphericalangle B)=60^0,\ \ m(\sphericalangle C)=45^0$. Se cere AB;

c) $BC=10,\ AC=18,\ \sin A=\frac{1}{5}$. Se cere sinB;

d) $BC=15,\ AB=6,\ \cos A=\frac{1}{9}$. Se cere sinC;

e) $AB=9,\ BC=8,\ \sin(A+B)=\frac{3}{5}$. Se cere sinA.

4. În triunghiul dreptunghic ABC, $m(\sphericalangle A)=90^0$ se ştie $AB=6,\ AC=8$. Să se afle raza cercului circumscris triunghiului ABC;

5. În triunghiul oarecare ABC se cunosc BC= 4 şi raza cercului circumscris triunghiului egală cu R=3. Să se calculeze cos A;

6. În triunghiul oarecare ABC se cunosc AC= 9 şi raza cercului circumscris triunghiului egală cu R=5. Să se calculeze cos B;

7. Să se determine raza cercului circumscris triunghiului ABC în situațiile:

a) $AB=4,\ \ m(\sphericalangle C)=60^0$;

b) $BC=10,\ \ m(\sphericalangle A)=45^0$;

c) $AC=6,\ \ m(\sphericalangle B)=30^0$;

d) $AB=2\sqrt{2},\ \ AC=4\sqrt{2},\ \ BC=2\sqrt{10}$;

e) $AB=6\sqrt{2},\ \ AC=4\sqrt{3},\ \ BC=2\sqrt{30}$.

8. În triunghiul ABC să se calculeze cos A, cos B, cos C dacă:

a) $AB=2,\ \ AC=7,\ \ BC=6$;

b) $AB=4,\ \ AC=11,\ \ BC=8$.

7. În triunghiul oarecare ABC, se cunosc $AB=3,\ BC=7,\ AC=6$. Să se arate că $m(\sphericalangle A)\rangle\ 90^0$;

8. În plan se consideră punctele $A(1;6),\ B(-2;1),\ C(8;3)$. Să se calculeze lungimea medianei [AM].

9. În triunghiul ABC se cunosc $AB=9,\ BC=8,\ AC=12$. Să se calculeze $\cos B$;

10. În triunghiul dreptunghic ABC, $m(\sphericalangle A)=90^0$ se ştie $AB=6$ şi $\sin B=\frac{1}{3}$. Să se calculeze BC.

11. În triunghiul oarecare ABC se cunosc $\sin B=\frac{1}{2},\ \ \sin C=\frac{1}{3}$. Să se calculeze cos A.

12. În triunghiul ABC se cunosc $AB=6,\ BC=6,\ AC=8$. Să se afle lungimea medianei AM;

4.3 Aria triunghiului

Formule pentru aria triunghiului

1. $\boxed{S=\frac{a\cdot h_a}{2}=\frac{b\cdot h_b}{2}=\frac{c\cdot h_c}{2}}$.

Exemplu: În triunghiul ABC se cunoaşte lungimea bazei BC=10 şi înălţimea corespunzătoare bazei, AD=6. Se cere aria triunghiului.

Rezolvare: $S=\frac{a\cdot h_a}{2}=\frac{BC\cdot AD}{2}=\frac{10\cdot 6}{2}=30$.

2. $\boxed{S=\frac{b\cdot c\cdot \sin A}{2}=\frac{a\cdot c\cdot \sin B}{2}=\frac{a\cdot b\cdot \sin C}{2}}$.

Demonstraţie: Demonstraţia rezultă din formula 1) şi din faptul că

$h_a=b\sin C,\ h_b=c\sin A,\ h_c=a\sin B$.

Exemplu: În triunghiul ABC se cunosc $AB=8,\ AC=6,\ m(A)=30^0$. Să se calculeze aria A_{ABC}.

Rezolvare:

$A_{ABC}=\frac{b\cdot c\cdot \sin A}{2}=\frac{AB\cdot AC\cdot \sin A}{2}=\frac{8\cdot 6\cdot \sin 30^0}{2}=12$.

3. $\boxed{S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$**, unde** $p=\frac{a+b+c}{2}$**. (Formula lui Heron).**

Demonstraţie: Folosind formula $S=a\cdot b\cdot \sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$ şi ştiind faptul că

$\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-a)}{ab}}$ şi $\cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$, prin înlocuire rezultă formula lui Heron.

Exemplu: În triunghiul ABC se cunosc $AB=8,\ BC=4,\ AC=6.$. Să se calculeze aria triunghiului ABC şi raza cercului circumscris acestuia;

Rezolvare: $A_{ABC}=\sqrt{9(9-4)(9-6)(9-8)}=3\sqrt{15}$; Din $S=\frac{abc}{4R}$ rezultă $R=\frac{4\cdot 6\cdot 8}{4\cdot 3\sqrt{15}}=\frac{\sqrt{15}}{3}$;

4 . $S=\frac{abc}{4R}$**, unde R este raza cercului circumscis triunghiului ABC.**

Demonstraţie: Din teorema sinusurilor şi din formula $S=\frac{b\cdot c\cdot \sin A}{2}$ rezultă ,

$R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{abc}{2bc\sin A}=\frac{abc}{4}\cdot\frac{2}{bc\sin A}=\frac{abc}{4S}$.

5. Rezolvarea triunghiului oarecare

Cazul L.U.L Se dau C, a, b.

A şi B se află din $tg\frac{A-B}{2}=\frac{a-b}{a+b}ctg\frac{C}{2}$, şi $A+B=\pi-C,$ iar c se află din $c=\frac{a\sin C}{\sin A}$.

Cazul L.L.U. Se dau A, a, b

B se află din $\sin B=\frac{b\sin A}{a}$, c se află din $c=\frac{b\sin C}{\sin B}$ iar C din $C=\pi-(A+B).$

Cazul L.L.L. Se dau a, b, c.

A, b, c se pot afla cu ajutorul Teoremei cosinusului sau cu ajutorul formulelor

$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$, $\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$; (*)

Cazul U.L.U. Se dau B, C, a.

A se află din $A=\pi-(A+C)$, b din $b=\frac{a\sin B}{\sin A}$, $c=\frac{a\sin C}{\sin A}$.

Activitate independentă		**Răspuns**
Să se calculeze aria triunghiului ABC ştiind că AB=18, AC= 10 şi $m(\hat{A})=30^0$;		45

Exercitii rezolvate

1. Aria triunghiului ABC este 16cm² iar $AB=AC=8\ cm$. Să se calculeze sin A.

Rezolvare:

Din formula ariei, $A_{ABC}=\frac{AB\cdot AC\cdot\sin A}{2}\Rightarrow\sin A=\frac{2\cdot16}{64}=\frac{1}{2}$.

2. În triunghiul ABC se cunosc $AB=10,\ AC=8,\ BC=12$. Să se determine înălțimea din A.

Rezolvare:

$A_{ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, unde

$p=\frac{a+b+c}{2}=\frac{12+8+10}{2}=15\Rightarrow A_{ABC}=\sqrt{15\cdot5\cdot7\cdot3}=15\sqrt{7}$.

Pe de altă parte, aria triunghiului este $A_{ABC}=\frac{BC\cdot AD}{2}\Rightarrow\frac{12\cdot AD}{2}=15\sqrt{7}$. Aşadar,

$AD=\frac{15\sqrt{7}}{6}=\frac{5\sqrt{7}}{2}$.

3. În triunghiul ABC se cunosc $AB=11,\ AC=8,\ BC=13$. Să se determine sin A.

Rezolvare:

Se calculează mai întâi aria triunghiului:

$p=\frac{a+b+c}{2}=\frac{13+8+11}{2}=16\Rightarrow A_{ABC}=\sqrt{16\cdot5\cdot8\cdot3}=8\sqrt{30}$.

Cum $A_{ABC}=\frac{AB\cdot AC\cdot\sin A}{2}\Rightarrow8\sqrt{30}=\frac{11\cdot8\cdot\sin A}{2}\Rightarrow\sin A=\frac{2\sqrt{30}}{11}$.

4. În triunghiul ABC isoscel cu AB=AC, BC=8 cm şi $m(A)=60^0$ se cere să se calculeze aria triunghiului ABC.

Rezolvare:

Cum orice triunghi isoscel având un unghi de 60^0 este echilateral, rezultă

$A_{ABC}=\frac{l^2\sqrt{3}}{4}=\frac{8^2\sqrt{3}}{4}=16\sqrt{3}.$

5. Să se determine raza cercului circumscris triunghiului ABC pentru care $AB=6$, $BC=10$, $AC=14$.

Rezolvare:

Se calculează mai întâi aria triunghiului: $A_{ABC}=\sqrt{16\cdot 5\cdot 1\cdot 9}=15\sqrt{3}$. Atunci, raza cercului circumscris triunghiului este $R=\dfrac{a\cdot b\cdot c}{4\cdot A_{ABC}}=\dfrac{6\cdot 10\cdot 14}{4\cdot 15\sqrt{3}}=\dfrac{14\sqrt{3}}{3}$.

6. În triunghiul dreptunghic ABC, cu $m(\sphericalangle A)=90^0$ **se știe că** $m(\sphericalangle B)=30^0$ **iar lungimea înălțimii AD= 3 cm. Să se determine aria triunghiului ABC.**

Rezolvare:

Cum $m(\sphericalangle B)=30^0\Rightarrow AD=\dfrac{AB}{2}\Rightarrow AB=6$ *iar* $AC=\dfrac{BC}{2}\Rightarrow$ notăm $AC=x$ iar $BC=2x$.

Se aplică teorema lui Pitagora în triunghiul ABC rezultând $4x^2=x^2+6^2\Rightarrow x=2\sqrt{3}$.

$A_{ABC}=\dfrac{AB\cdot AC}{2}=\dfrac{6\cdot 2\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$.

7. În triunghiul isoscel ABC cu AB=AC= 10 cm și AD= 8 cm să se calculeze aria triunghiului ABC.

Rezolvare:

$CD^2=AC^2-AD^2\Rightarrow CD=6\Rightarrow BC=12\Rightarrow A_{ABC}=\dfrac{BC\cdot AD}{2}=48$.

8. În triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\sphericalangle A)=90^0$ **și** $AB=8, BC=17$**, să se calculeze aria triunghiului ABC.**

Rezolvare:

$AC^2=BC^2-AB^2\Rightarrow AC=\sqrt{17^2-8^2}\Rightarrow AC=\sqrt{225}=15$. Atunci, $A_{ABC}=\dfrac{AB\cdot AC}{2}=60$.

9. În triunghiul oarecare ABC se cunosc $AB=4,\ AC=6$ **și** $\sin(B+C)=\dfrac{2}{3}$**. Să se determine:**

a) sin A; b) cos A; c) BC; d) R- raza cercului circumscris triunghiului ABC; e) aria triunghiului ABC;

Rezolvare:

a) $\sin A=\sin\left[\pi-(B+C)\right]=\sin(B+C)=\dfrac{2}{3}$.

b) $\sin^2 A+\cos^2 A=1\Rightarrow\cos A=\sqrt{1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{5}{9}}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$;

c) $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos A=16+36-16\sqrt{5}=52-16\sqrt{5}\Rightarrow BC=\sqrt{52-16\sqrt{5}}$;

d) $\dfrac{BC}{\sin A}=2R\Rightarrow R=\dfrac{\sqrt{52-16\sqrt{3}}}{2\cdot\dfrac{2}{3}}$; e) $A_{ABC}=\dfrac{6\cdot 4\cdot\dfrac{2}{3}}{2}=8$.

10. În triunghiul oarecare ABC se cunosc $BC=12,\ \sin A=\dfrac{1}{3},\ m(\sphericalangle B)=45^0$**. Să se determine:**

a) AC; **b)** R**; c)** A_{ABC}**;**

Rezolvare:

a) Din $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=2R\Leftrightarrow\frac{12}{\frac{1}{3}}=\frac{AC}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\Rightarrow AC=36\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=18\sqrt{2}$;

b) Din 36 = 2R rezultă R = 18;

c) $\sin C=\sin\left[\pi-(A+B)\right]=\sin(A+B)=\sin A\cdot\cos B+\sin B\cdot\cos A$.

$\sin A=\frac{1}{3}\Rightarrow\cos A=\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Atunci, $\sin C=\frac{\sqrt{2}+4}{6}$. Aria triunghiului ABC este

$A=\frac{AC\cdot BC\cdot\sin C}{2}=18\sqrt{2}(\sqrt{2}+4)$.

11. În triunghiul oarecare ABC se cunosc $AB=12, AC=8,\ \sin B+\sin C=\frac{5}{6}$. **Să se determine:**

a) sinA; b) R; c) aria triunghiului ABC;

Rezolvare:

a) Din $\frac{8}{\sin A}=\frac{12}{\sin C}=\frac{8+12}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}=\frac{20}{\frac{5}{6}}=\frac{20\cdot6}{5}=24$. Rezultă $\frac{8}{\sin B}=24\Rightarrow\sin B=\frac{1}{3}$;

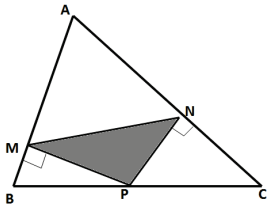
$\frac{12}{\sin C}=24\Rightarrow\sin C=\frac{12}{24}=\frac{1}{2}$.

$\sin A=\sin\left[\pi-(B+C)\right]=\sin(B+C)=\sin B\cdot\cos C+\sin C\cdot\cos B\ =\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{8}}{3}=\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{6}$.

b) $\frac{b}{\sin B}=2R\Rightarrow24=2R\Rightarrow R=12$; c) $A_{ABC}=\frac{AB\cdot AC\cdot\sin A}{2}=8(\sqrt{3}+2\sqrt{2})$.

APLICAȚII PRACTICE

Fie ABC un triunghi oarecare , P un punct pe latura (BC) **iar M , respectiv N, proiecțiile lui P pe laturile** (AB)**, respectiv** (AC)**. Să se determine poziția punctului P pe** (BC)**, astfel încât ABC să fie un triunghi de arie maximă**.



Rezolvare:

Cum triunghiurile PMB și PNC sunt dreptunghice, rezultă $PM=BP\sin B$ și $PN=PC\sin C$.

Patrulaterul AMPN este evident inscriptibil ($\sphericalangle M+\sphericalangle N=180^0$) , rezultă $m(\sphericalangle MPN)=180^0-m(\sphericalangle A)$. Așadar, $\sin(MPN)=\sin A$.

$A_{PMN}=\frac{PM\cdot PN\cdot\sin(MPN)}{2}=\frac{BP\cdot\sin B\cdot PC\cdot\sin C\cdot\sin A}{2}=\frac{BP\cdot PC\cdot\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C}{2}$.

Această arie este maximă dacă și numai dacă produsul $BP\cdot PC$ este maxim. Cum $BP+PC=BC$ și este constant, rezultă că $BP\cdot PC$ este maxim când BP=PC, adică P este mijlocul laturii $[BC]$.

Exercitii propuse

1. În triunghiul dreptunghic ABC, $m(\sphericalangle A)=90^0$ se cunosc $AC=12,\ BC=20$. Să se afle aria triunghiului ABC;

2. Să se afle aria unui triunghi echilateral de latură 6;

3. În triunghiul ABC se cunosc AB= 4, AC= 6 şi $m(\sphericalangle BAC)=60^0$ Să se calculeze lungimea laturii BC şi aria triunghiului ABC.

4. Să se calculeze catetele AB si AC ştiind că $m(\sphericalangle A)=90^0, m(\sphericalangle B)=30^0$ şi BC = 8 cm.

5. Se dă triunghiul ABC cu A(-3;4), B(2;5), C(6;-1). Să se calculeze lungimea medianei din A.

6. Să se calculeze aria dreptunghiului ABCD, ştiind că AC= 8 cm şi $m(\sphericalangle BAC)=30^0$.

7. Să se calculeze aria triunghiului echilateral de latură 4 cm.

8. În triunghiul ABC, AB=6, AC=10 şi $\cos A=\frac{1}{2}$. Să se calculeze aria triunghiului.

9. Să se determine aria triunghiului ABC cu AB=13, BC=14, CA=15.

10. Să se determine aria pătratului ABCD ştiind că A(1;3) şi B(2;6).

11. Triunghiul dreptunghic ABC, are lungimile catetelor AB=9 cm şi AC= 12 cm. Să se determine lungimea înălţimii dusă din vârful A.

12. Să se calculeze aria paralelogramului ABCD cu AB=12 cm, BC = $6\sqrt{3}$ şi $m(\sphericalangle ABC)=120^0$

13. Să se calculeze aria triunghiului ABC ştiind că :

a) AB= 4, AC=5, BC = 6; b) AB= 6, AC=8, BC = 10;

14. Să se calculeze aria triunghiului ABC ştiind că:

a) AB=12, AC= 10 şi $m(\sphericalangle A)=30^0$; b) AB=8, AC= 12 şi $\sin A=\frac{1}{4}$;

c) AB=9, AC= 16 şi $\cos A=\frac{\sqrt{6}}{4}$;

15. Să se demonstreze că $S=b\cdot c\cdot \sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$, $S=a\cdot c\cdot \sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}$, $S=a\cdot b\cdot \sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$, unde S este aria triunghiului ABC.

16. Să se arate că $S=\frac{a^2\sin B\cdot\sin C}{2\sin A}$, unde S este aria triunghiului ABC. Analog şi pentru celelalte.

17. Să se arate că $S=2R^2\sin A\sin B\sin C$, unde S este aria triunghiului ABC.

18. Să se arate că în orice triunghi există egalitatea $a^2+b^2+c^2=4S(ctgA+ctgB+ctgC)$.

19. Să se arate că în orice triunghi are loc relaţia $r=\frac{S}{p}$, unde r este raza cercului înscris în triunghiul ABC, S – aria, iar p – semiperimetru.

20. Să se arate că în orice triunghi are loc relaţia $S=p(p-a)tg\frac{A}{2}$.

Ştiaţi că ... ?



Heron din Alexandria (sec.1) matematician şi filozof grec, în cartea sa „ Metricka” , prezintă pentru prima dată aşa numita „**formula lui Heron**” , a calculului ariei unui triunghi în funcţie de laturi, formulă datorată lui **Arhimede**(sec. 3 î.e.n), precum şi procedeul de rezolvare a ecuaţiei de gradul 2.

Are foarte multe invenţii şi scrieri cu aplicaţii tehnice, face observaţii despre proprietăţile fizice ale corpurilor, inventează un termometru, prezintă principiul reflexiei luminii, precum şi o turbină cu aburi fiind considerat descoperitorul puterii aburului. De asemenea, a determinat volumul unor corpuri şi a dat o metodă de aproximare a rădăcinii cubice. În cartea sa “Mehanika” dă definiţia lucrului mecanic, regula paralelogramului de adunare a forţelor, expune mişcarea pe plan înclinat şi principiile opticii. Inventează clepsidra şi fântâna arteziană. ([6], p.13)

Ştiaţi că ... ?

Matematicianul grec **Pappos din Alexandria**(~290 - 350), a dat formula lungimii medianei unui triunghi în funcţie de laturi.

Prin cartea sa „Colecţii matematice”, realizează o colecţie de cunoştinţe din geometrie cărora le dă demonstraţii ingenioase, dar şi o prezentare a lucrărilor matematicienilor Euclid şi Apollonius.

El dă formularea teoremei celor trei perpendiculare, precum şi definiţia comună a conicelor, ca loc geometric al punctelor din plan pentru care raportul distanţelor la un punct fix şi la o dreaptă fixă este constantă. ([6], p.14)

PARTEA a III-a .

1. TESTE RECAPITULATIVE, CLASA a IX-a

Testul 1.

1. Se consideră progresia geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$ în care $b_1=3$ şi $b_2=12$. Să se calculeze al cincilea termen.

2. Să se arate că funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=(-m^2+m-3)x+4m+3$ este descrescătoare pe $\mathbb{R}$ pentru orice m real;

3. Fie $(a_n)_n$ o progresie aritmetică . Dacă se dau doi termeni ai progresiei, $a_3=8, a_5=14$ să se afle a_{15} .

4. Se consideră ecuaţia $x^2 - 2x + 3 = 0$ cu soluţiile $x_1, x_2 \notin \mathbb{R}$. Fără a determina soluţiile, să se calculeze: $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}$;

5. Se dă $\sin A=\frac{2}{3},\ A\in(0;\frac{\pi}{2})$. Să se calculeze sin 2A .

6. Să se calculeze sin A în triunghiul ABC ştiind că : AB = 2, BC= 6 şi $\sin C=\frac{1}{3}$;

Testul 2.

1. Fie $(a_n)_n$ o progresie aritmetică. Se dau : $a_1=-3, r=0,5$ se cere a_{12}.

2. Să se calculeze: $(1+\sqrt{3})^2-\sqrt{\left(2\sqrt{3}-3\right)^2}+(\sqrt{3}-2)^{-1}$;

3. Se consideră progresia geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$ în care $b_3=6$ şi $b_5= 24$. Să se determine b_9.

4. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=3x^2-(m+2)x+m$. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ ştiind că valoarea minimă a funcţiei f este egală cu $\frac{11}{12}$;

5. Să se calculeze raza cercului circumscris triunghiului ABC ştiind că : $AB=8$ şi $m(\hat{C})=30^0$;

6. Să se calculeze aria triunghiului ABC ştiind că: AB=12, AC= 10 şi $m(\hat{A})=30^0$;

Testul 3.

1. Să se calculeze suma: 3 + 8 + 13 + ...+158;

2. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $|x-8|=6$;

3. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-3x+1$. Să se calculeze $(f\circ f)(1)$.

4. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=(m+4)x-4m+3;$ Să se determine $m\in R$ astfel încât $(2;2-m)\in G_f$;

5. Să se calculeze norma vectorului $\vec{v}=-4\vec{i}+3\vec{j}$;

6. Dacă $a\in(0;\frac{\pi}{2})$ şi $\sin a=\frac{1}{3}$ să se calculeze sin2a.

Testul 4.

1. Să se calculeze $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{-3}+\frac{1}{\sqrt{3}-2}+\left|\sqrt{12}-4\right|$.

2. Să se determine mulțimea $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,(2x-1)^2-(x+1)\cdot x\le -1\right\}$.

3. Să se determine imaginea funcției $f:[-1;1]\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-5x+6$.

4. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=3x^2-(m+2)x+(m-1)$. Să se arate că soluțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, x_1,x_2 ale ecuației $f(x)=0$ verifică relația $3(x_1+x_2)-2x_1\cdot x_2=4-m$.

5. Să se calculeze $\sin 60^0+\sin 90^0+\sin 120^0$.

6. În triunghiul ABC se cunosc $AB=6, BC=10, AC=12$. Să se calculeze $\cos A$.

Testul 5.

1. Fie numărul $a=\frac{23}{15}=1,a_1a_2a_3.....a_n....$. Calculați $a_1+a_2+a_3+....+a_{2016}$.

2. Se consideră funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=4x-6,\ g(x)=-2x+6$. Să se determine coordonatele punctului de intersecție a graficelor două funcții.

3. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x^2-4x+3$. Să se determine punctele de pe graficul funcţiei care au abcisa egală cu ordonata.

4. Să se calculeze suma: 1 + 7 + 13 + ...+151;

5. Se consideră în plan punctele $A(-6;3),\ B(3;-2)$. Să se determine coordonatele vectorului $\overrightarrow{AB}$.

6. Se dau vectorii $\vec{v_1}(2m-1;3)$ şi $\vec{v_2}(m+2;2)$. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât cei doi vectori să fie coliniari.

Testul 6.

1. În progresia geometrică $(b_n)_{n\ge 1}$ se cunosc primul termen al progresiei, $b_1=5$ şi al cincilea termen al progresiei, $b_5=405$. Să se determine al optulea termen.

2. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-5x-6$. Să se calculeze $f(1)\cdot f(2)\cdot f(3)\cdot.....\cdot f(10)$.

3. Se consideră şirul 3, 10, 17, 24, ……. Să se determine al cincizecilea termen.

4. Să se determine coordonatele punctelor de intersecţie a graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-3x-10$ cu axa OX.

5. Să se calculeze $(\cos 40^0+\cos 140^0)^{2014}$;

6. Dacă $\cos x=\frac{1}{3},\ x\in\left(0^0,90^0\right)$, să se calculeze $\sin(180^0-x)$.

Testul 7.

1. Să se determine $a\in\mathbb{R}$ ştiind că $1+2+2^2+2^3+.....+2^a=1023$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x^2-5x-3$. Să se determine minimul funcţiei.

3. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=(m-6)x+7$. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât funcţia f să fie strict descrescătoare.

4. În progresia aritmetică $(b_n)_{n\geq 1}$ se cunosc $a_3 = 11$ și $a_7 = 27$. Să se determine primul termen al progresiei.

5. În triunghiul ABC se cunosc $AB = 4, AC = 8, m(A) = 60^0$. Să se calculeze lungimea laturii $[BC]$.

6. Calculaţi aria triunghiului ABC în care $AB = 5, AC = 12, BC = 13$.

Testul 8.

1. Determinați $m \in \mathbb{R}$ pentru care punctul $A(m+1,-5)$ să aparțină graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x) = x^2 - 5x + 1$.

2. În progresia geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$ cu $\frac{b_4}{b_1} = 27$ și $b_5 = 486$ se cere să se determine primul termen, b_1.

3. Să se calculeze suma primilor 5 termeni ai unei progresii aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ știind că $a_1 = -1$ și $a_3 = 5$.

4. Fie ecuația $x^2 - 5x + m + 2 = 0$.Să se determine parametrul real m știind că între rădăcinile ecuației există relația $2(x_1 + x_2) + x_1 \cdot x_2 = 12$.

5. Să se calculeze: $\sin 48^0 + \sin 56^0 + \sin 132^0 + \sin 124^0$.

6. Știind că $\sin a = \frac{3}{5},\ a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Să se calculeze $tg\ a$.

Testul 9.

1. Să se determine parametrul real m, știind că punctul A(2;-5) aparține graficului funției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, f(x) = mx+3.

2. Se dă funcția f:R→R , f(x)=2x+3, să se calculeze f(0)+f(1)+.....+f(6);

3. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x) = x^2 - 2mx + 4$, să se determine parametrul real m, știind că abscisa punctului de minim este egală cu 5.

4. Să se rezolve sistemul $\begin{cases} x + y = 4 - x \\ -2x + y = 1 + x - y \end{cases}$.

5. Fie $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ și $\sin x = \frac{3}{5}$ Să se calculeze cos x .

6. Fie triunghiul ABC oarecare în care se cunosc AB= 5,BC = 4 și $\cos B = \frac{4}{5}$. Să se calculeze perimetrul triunghiului.

Testul 10.

1. Să se calculeze $8 \cdot \frac{1}{2^4} - 125 \cdot \frac{1}{2 \cdot 5^3}$.

2. Să se determine rația unei progresii aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$,unde $a_1 = 8$ și $a_4 = -1$.

3. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x) = x^2 - 6x + 5$. Să se determine coordonatele vârfului parabolei.

4. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x) = x^3 - 27$. Calculați produsul $f(1)\cdot f(2)\cdot ....\cdot f(2016)$;

5. Să se arate ca expresia $(\sin x+\cos x)^2-2\sin x\cdot\cos x$, nu depinde de variabila x.

6. Fie punctele A(2;3) și B(-1;-5). Să se determine coordonatele vectorului $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$.

Testul 11.

1. Să se calculeze: $2^{100}:(2^{55}\cdot 2^{44})+2^{-2}$;

2. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, f(x)=2x+1; Să se calculeze $(f\circ f)(2)$;

3. Să se determine x, știind că numerele 4; x+1 și 9 sunt numere consecutive într-o progresie aritmetică.

4. Fie ecuația : $x^2-(m+1)x-10=0$; să se determine parametrul real m, pentru care are loc relația $x_1^2+x_2^2=29$.

5. Fie $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Știind că $\sin 48^0=a$, să se scrie $\cos 42^0$ în funcție de a.

6. Fie triunghiul isoscel ABC unde AB=AC=7 și $m\left(B\right)=30^0$. Să se determine raza cercului circumscris triunghiului.

Testul 12.

1. Să se determine numărul întreg x care verifică inegalitățile: $0\le\frac{4x-2}{3}\le 2$.

2. Fie funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, f(x)=x²+3 și $g(x)=\sqrt{x-3}$, să se calculeze f(g(3)) și g(f(2)).

3. Să se determine coordonatele vârfului parabolei : $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x^2-5x+1$.

4. Să se calculeze suma primilor 5 termeni ai unei progresii geometrice $(b_n)_{n\ge 1}$ știind că $b_1=2, q=-3$;

5. Fie $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Dacă $\sin x=\frac{1}{2}$, să se calculeze tgx.

6. Se dau punctele A(-2;0),B(3;1). Să se determine coordonatele vectorului $3\cdot\overrightarrow{OA}-5\cdot\overrightarrow{OB}$.

Testul 13.

1. Să se determine suma elementelor mulțimii $A=\{1,3,5,...,13\}$.

2. Să se determine coordonatele punctului de intersecție a dreptei de ecuație $y=-4$ cu graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-6x+5$.

3. Determinați numărul elementelor mulțimii $A\cup B$, unde $A=\{1,2,3,4,5\}$ și B este mulțimea divizorilor naturali ai lui 12.

4. Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația $(2x-3)(2x+3)\rangle 4x-9$.

5. În reperul cartezian $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ se consideră vectorii $\vec{u}=-3\vec{i}+2\vec{j}$ și $\vec{v}=5\vec{i}-\vec{j}$. Să se determine coordonatele vectorului $2\vec{u}+3\vec{v}$;

6. Fie triunghiul oarecare ABC în care AB=3, AC=6 și $m\left(BAC\right)=60^0$. Să se determine aria triunghiului.

Testul 14.

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=7-x.$Să se calculeze $f(1)\cdot f(2)\cdot....\cdot f(7).$

2. Să se determine valorile reale ale lui x ştiind că numerele 5- x, x+7 şi 3x+11 sunt termenii consecutivi ai unei progresii geometrice.

3. Determinaţi $a\in\mathbb{R}$ ştiind că numerele $a-1,a+3,2-3a$ sunt termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice.

4. Punctele $A(1;1)$ şi $B(4;3)$ aparţin graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax+b$. Determinaţi cel mai mare număr întreg n pentru care $f(n)\langle 0$.

5. Fie vectorii $\vec{v_1}=2\cdot\vec{i}-\vec{j}$ şi $\vec{v_2}=3\cdot\vec{i}+4\cdot\vec{j}$. Calculaţi modulul vectorului $3\cdot\vec{v_1}-2\cdot\vec{v_2}$.

6. Calculaţi $\sin 155^0-\sin(90^0-65^0)$.

Testul 15.

1. Calculaţi $23+21+19+...+11+9$.

2. Funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2+ax+4$ verifică relaţia $f(-2)=1$. Calculaţi $f(a).$

3. Să se determine valorile reale ale lui x ştiind că numerele x-1, 2x -2 şi x +3 sunt termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice.

4. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât soluţiile ecuaţiei $x^2-mx-1=0$ să fie numere reale opuse.

5. Calculaţi $\sin 30^0\cdot\cos 60^0+\sin 60^0\cdot\cos 30^0.$

6. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC cu $m(A)=90^0$ şi $\cos B=\frac{3}{5}$. Să se calculeze $\sin C.$

Testul 16.

1. Să se calculeze suma $1+2+2^2+...+2^6$.

2. Să se determine coordonatele punctelor de intersecţie a graficelor funcţiilor $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-3x-1$şi $g(x)=x+4$.

3. Să se determine o ecuaţie de gradul al doilea ale cărei soluţii x_1,x_2 verifică relaţiile $x_1+x_2=1$şi $x_1\cdot x_2=-2$.

4. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-3x+2.$Să se calculeze $f(f(0))-f(2).$

5. Fie triunghiul echilateral MNP înscris într-un cerc de centru O. Să se demonstreze că $\vec{OM}+\vec{ON}+\vec{OP}=\vec{0}.$

6. Să se calculeze aria paralelogramului ABCD în care $AB=6\sqrt{3}$, $AD=4$ şi $m\left(DAB\right)=150^0.$

Testul 17

1. Se determine multimea valorilor reale ale lui x pentru care $-4\langle\ 3x+2\ \langle 4$.

2. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale inecuaţia $(x^2-1)(x+1)\geq 0$.

3. Să se arate că produsul soluţiilor reale ale ecuaţiei $mx^2-2009x-m=0$ este constant, pentru orice $m\in\mathbb{R}^*$.

4. Să se determine cât la sută din a +b reprezintă numărul a . ştiind că este egal cu 25% din b.

5. Se consideră pătratul ABCD de centru O. Să se calculeze $\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}+\vec{OD}$.

6. Să se demonstreze că expresia $(\sin x+\cos x)^2-2\sin x\cdot\cos x$ este constantă, pentru orice număr real x.

Testul 18.

1. Arătați că numărul $0,3(3)+0,(6)$ este natural;

2. Să se determine numărul real x ştiind că numerele $x-1, x+1$ şi $2x+5$ sunt termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice.

3. Să se determine parametrul real m astfel încât soluţiile reale ale ecuaţiei $x^2-3x+m=0$ să fie inverse una alteia.

4. Să se determine $m\in\mathbb{R}$, ştiind că soluţiile reale $x_1, x_2\in\mathbb{R}$ ale ecuaţiei $x^2-mx-m-6=0$ verifică relaţia $4(x_1+x_2)+x_1\cdot x_2=0.$

5. Să se calculeze lungimile catetelor unui triunghi dreptunghic, ştiind că aria acestuia este 18, iar măsura unui unghi este egală cu 45^0.

6. Ştiind că triunghiul ABC are $BC=10, AC=5, AB=5\sqrt{3}$ să se calculeze cos A.

Testul 19.

1. Să se arate că numărul $A=\sqrt{(\sqrt{5}-3)^2}+\sqrt{(2-\sqrt{5})^2}\in\mathbb{N}.$

2. Să se rezolve inecuaţia $2f(x)+f(1)\geq 4\cdot f(2)$ unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=3x-1.$

3. Fie $f:(0;\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x+1}{x}$. Să se calculeze $f(1)\cdot f(2)\cdot....\cdot f(2016);$

4. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax^4+(1-a)x^2+7,\ a\in\mathbb{R}.$ Să se arate că punctele $A(-1;8)\in G_f,\ \forall a\in\mathbb{R}.$

5. Să se calculeze $\sin^2 120^0+\cos^2 60^0$.

6. Să se calculeze aria triunghiului ABC, ştiind că $AB=AC=\sqrt{2}$ şi $m(A)=30^0$

Testul 20.

1. Determinați toate valorile lui $x\in\mathbb{R}$, dacă $4\in(3x-5,\ 2x+6)$;

2. Fie $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z},\ f(x)=2^x+2^{-x}.$ Să se calculeze $f(-2)+f(-1)+f(1)+f(2);$

3. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x+5.$ Să se calculeze $f(3)+f(3^2)+f(3^3)+...+f(3^{10});$

4. Un produs se scumpește cu 15% ceea ce înseamnă 51 lei. Determinați prețul final al produsului.

5. Determinați coordonatele punctului de intersecție a dreptelor: a: $3x-4y-5=0,$ b: $x+2y+5=0.$

6. Se consideră vectorii $\vec{v_1}=2\cdot\vec{i}+5\cdot\vec{j}$, $\vec{v_2}=4\cdot\vec{i}-8\cdot\vec{j}$, $\vec{v_3}=-2\cdot\vec{i}+\vec{j}$. Să se arate că $\vec{v_1}+\vec{v_2}+3\cdot\vec{v_3}=\vec{0}.$

2. PROBLEME PROPUSE PENTRU CONCURSURI

1. Se consideră $x\in[-2;5]$ astfel încât $\sqrt{5-x}+\sqrt{2+x}=3$. Să se calculeze $\sqrt{5-x}\cdot\sqrt{2+x}$.

2. Dacă $a^2+b^2+2a+4b+5=0$. Să se calculeze $a^{2013}-(b-a)^{2013}$.

3. Să se arate că numărul $x=\dfrac{3^{2016}+9^{2016}+27^{2016}-3}{3^{2016}-1}\in\mathbb{N}$;

4. Fie $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât a+b = 7 și ab= 9. Să se calculeze $\dfrac{a^2+1}{a+1}+\dfrac{b^2+1}{b+1}$.

5. Se consideră numărul $A=\underbrace{999....9}_{n\ de\ 9}\underbrace{333...3}_{(n-1)\ de\ 3}4-\dfrac{5}{9}$. Să se arate că $\sqrt{A}\in\mathbb{Q}$.

6. Să se afle numărul real x din egalitatea: $\dfrac{3-\sqrt{3,24}}{0,1(3)}=\dfrac{\sqrt{\left(8\sqrt{2}-11\right)^2}+\left|1-\sqrt{2}\right|+12}{2:\sqrt{\dfrac{2}{2+\dfrac{x}{2}}}}$.

7. Să se arate că numărul $A=\sqrt{(x-\sqrt{12})^2}+\sqrt{(x-\sqrt{48})^2}+\sqrt{(\sqrt{108}-2x)^2}\in\mathbb{N}$, pentru orice $x\in(-\infty;2\sqrt{3}]\cup[4\sqrt{3};\infty)$.

8. Să se demonstreze că $\left(\sqrt{1+2013\bullet2015}-\sqrt{1+2012\bullet2014}\right)^{2014}=1$;

9. Să se calculeze media aritmetică și media geometrică a numerelor $a=(\sqrt{2}+1)^{-1}+\left|2\sqrt{2}-3\right|$ și $b=\sqrt{6+4\sqrt{2}}$.

10. Să se arate că numărul $A=(1-\sqrt{2})^{2014}\bullet\dfrac{1}{(3-2\sqrt{2})^{1007}}\in\mathbb{N}$.

11. Să se arate că numărul A=$\sqrt{\left(1+3+5+...+2017\right)^2-2018}$ este iraţional.

12. Fie $x_1,x_2,...,x_n\in\mathbb{R}$ astfel încât $\sqrt{\left(x_1-1\right)^2}+\sqrt{\left(x_2-2\right)^2}+...+\sqrt{\left(x_n-2016\right)^2}\le 0$.
Calculaţi $x_1+x_2+x_3+.....+x_n$.

13. Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât $\sqrt{3\sqrt{3}+\sqrt{19-8\sqrt{3}}}+\left(\sqrt{3}-1\right)^{-2}=a+b\sqrt{3}$;

14. Să se determine $a\in(-2;0)$ astfel încât $\sqrt{a^2}+\sqrt{(3-a)^2}-\sqrt{a^2+4a+4}=3$;

15. Arătaţi că numărul $x=\sqrt{5-4\sqrt{2}+2\sqrt{2}\cdot\sqrt{7-5\sqrt{2}+\sqrt{3-2\sqrt{2}}}}$ este natural.

16. Să se calculeze numărul $A=\sqrt{1+2010\cdot\sqrt{1+2011\cdot\sqrt{1+2012\cdot\sqrt{1+2013\cdot2015}}}}$.

17. Să se arate că expresia $E(x)=\dfrac{(2x+1)^3-(2x-1)^3}{(2x+1)^2+(2x+1)(2x-1)+(2x-1)^2}$ nu depinde de x;

18. a) Să se arate că $\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}}\ge\dfrac{x+y}{2},\ \forall x,y\in\mathbb{R}$;

b) Utilizând a) aflați $x,y\in\mathbb{R}$ dacă $\sqrt{\dfrac{x^2+6xy+9y^2+81}{2}}+\sqrt{\dfrac{x^2-4xy+4y^2+16}{2}}=\dfrac{2x+y+13}{2}$.

19. Demonstrând în prealabil inegalitatea $\sqrt{1+\frac{1}{n}} \rangle 1+\frac{2}{4n+1},\ \forall n \in \mathbb{N}^*$, să se arate că

$\sqrt{2015} \rangle \left(1+\frac{2}{5}\right)\cdot\left(1+\frac{2}{9}\right)\cdot....\cdot\left(1+\frac{2}{8057}\right)$.

20. Să se demonstreze că $\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\geq\left(1+\frac{2}{a+b}\right)^2, \forall a,b \in \mathbb{R}_+^*$

21. Fie $a,b,c,d \in \mathbb{R}_+$ astfel încât a+ b + c + d = 1. Să se arate că

$\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+2}+\sqrt{4c+3}+\sqrt{4d+4} \langle 9$;

22. Să se demonstreze inegalităţile:

a) $(a^2+a+1)(b^2+9b+1)(c^2+59c+1)\geq 2013abc,$ pentru orice $a,b,c \in (0;\infty)$;

b) Utilizând eventual formula $ab+bc+ca \leq \frac{(a+b+c)^2}{3}, \forall a,b,c \in (0;\infty)$, să se arate că

$(a-b)^2\cdot c+(b-c)^2\cdot a+(c-a)^2\cdot b+9abc \leq \frac{(a+b+c)^3}{3}$, pentru orice $a,b,c \in (0;\infty)$;

23. Un meteorit aflat la distanţa de 206550 de km se apropie de Pământ cu viteza de 10 km/s. Cu fiecare secundă care se apropie, parcurge cu 2 km mai mult faţă de precedenta distanţă. Să se afle după cât timp ajunge pe Pământ. (Se consideră că d_1=10, $d_n = d_{n-1}+2,\ \forall n \geq 2$)

24. Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$. Dacă $2a_2^{\ 2}+a_6^{\ 2}+8(2a_2-a_6+6)=0$, atunci, să se determine suma primilor 10 termeni ai progresiei.

25. Se consideră şirurile $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ definite prin $a_n = 8n-4,\ b_n = 2^{a_n},\ n \in \mathbb{N}^*$;

a) Determinaţi $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $a_1+a_2+.....+a_n = 2016^2$;

b) Calculaţi suma $S = b_1+b_2+....+b_{2016}$.

26. Într-o progresie geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$ cu termenii pozitivi se cunosc $b_5=(x^2+1)^3$ şi $b_9=(x^2+1)^5$.

a) Să se determine primul termen b_1 şi raţia q.

b) Să se calculeze suma $\sum_{k=2}^{n} b_{k-1}\cdot b_{k+1}$.

27. Fie $f: R \to R$, cu proprietatea că 3f(x) - f(-x) = $2x^4-6x^2$, $\forall x \in R$. Să se demonstreze că f este o funcţie pară

28. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x)=ax+b,\ a,b \in \mathbb{Q}$. Ştiind că $f(\sqrt{3})=\frac{1}{2-\sqrt{3}}$ să se rezolve în $\mathbb{N}^*$ ecuaţia: $f(1)+f(2)+....+f(n)=375$.

29. Să se determine $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ştiind că $\underbrace{f\circ f\circ.....\circ f}_{2011\ termeni} = x+4022$.

30. a) Să se determine monotonia funcţiei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care are proprietatea $f(x)+f(-x)=-4x+6,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\underbrace{(f\circ f\circ.....\circ f)}_{2015\ de\ f}(x)$ unde f este funcţia determinată la punctul a).

31. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}x^2-6x+m, & x<0\\ mx^2+2mx+m+2, & x\geq 0\end{cases}$.

a) Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(-1)+f(-2)+....+f(-10)=4350$.

b) Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(x)\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$.

32. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\setminus\{-3\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x-1}{x+3}$.

a) Să se determine o funcţie $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=ax+b,\ a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât $g(f(x))=\dfrac{9x-1}{x+3}$;

b) Să se calculeze $(\underbrace{g\circ g\circ....\circ g}_{2013\text{ de g}})(x)$.

c) Să se determine funcţia $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ h(x+2)=x^2+4x+g(1)$, unde g(x) este funcţia găsită la punctul a).

33. Fie $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ astfel încât $f(x)+2011f(\dfrac{1}{x})=x^2+\dfrac{2011}{x^2}+2012$.

a) Să se calculeze f(1) + f(2) + ...+ f(2011);

b) Să se calculeze $\sum\limits_{k=2}^{2011}\dfrac{2}{f(k)-2}$;

34. Fie $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, astfel încât $f(x+1)+3f(1+\frac{1}{x})=x^2+\dfrac{3}{x^2}+2(x+\dfrac{3}{x}),\ \forall x\in\mathbb{R}^*$.

Să se calculeze $\sum\limits_{k=2}^{2011}\dfrac{1}{f(k)}$.

35. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-2x+4$ cu soluţiile nereale ($x_1,x_2\notin\mathbb{R}$) ale ecuaţiei f(x)=0.

a) Să se scrie relaţiile lui Viete şi să se arate că $\dfrac{1}{x_1^2}+\dfrac{1}{x_2^2}=\dfrac{1}{x_1^2+x_2^2}$;

b) Utilizând eventual formula $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$, să se calculeze $x_1^3+x_2^3$, şi $x_1^{2013}+x_2^{2013}$.

c) Să se rezolve ecuaţia: $\dfrac{|f(x+3)-f(x-2)|}{|x+3|-|x-2|}=5$;

36. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}(m+2)x^2-(m-1)x+m-1, & x\leq 1\\ 2x-4, & x>1\end{cases}$;

a) Să se rezolve ecuaţia $(f\circ f\circ f)(x)=0$, pentru orice $x>1$;

b) Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(x)\leq 0,\ \forall x\leq 1$;

c) Pentru m = -1 să se calculeze suma $S=\dfrac{x_1^2+1}{x_2^2+1}+\dfrac{x_2^2+1}{x_1^2+1}$, unde x_1,x_2 sunt rădăcinile ecuaţiei f(x)=0, pentru orice $x\leq 1$.

37. Fie $a\in\mathbb{R}^*$. Dacă x_1,x_2 sunt rădăcinile ecuaţiei $x^2-\dfrac{1}{a}x-\dfrac{a+1}{a}=0$, să se arate că $x_1^4+x_2^4=(x_1+x_2+1)^4+1$.

38. Să se rezolve în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sistemul de ecuaţii $\begin{cases}xy+x+y=11\\ x^2y+xy^2=30\end{cases}$.

39. Dacă $\sin^2 x-\cos^2 x=-\frac{1}{3},\ \forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, să se calculeze $\sin 2x$;

40. Să se determine $x\in(0;\pi)$ știind că $\left(\sin\frac{\pi}{8}-\cos x\right)^2+\left(\cos\frac{\pi}{8}-\sin x\right)^2=2$;

41. Într-un triunghi oarecare ABC, se cunoaşte că $m(A)=30^0$. Să se calculeze $\sin(B+C)$.

42. Dacă $\cos 2A,\ \cos 2B,\ \cos 2C$ sunt în progresie aritmetică să se arate că a^2,b^2,c^2 sunt în progresie aritmetică, unde $a=BC,b=AC,c=AB$.

43. În reperul cartezian XOY se consideră punctele $A(\cos x;\sin x),\ B(\cos\frac{\pi}{7};\sin\frac{\pi}{7})$. Să se determine $x\in(0;\pi)$, știind că lungimea segmentului $[AB]$ este egală cu $\sqrt{2}$.

44. Să se arate că în orice triunghi ABC, există relația $(b^2+c^2-a^2)\cdot tgA=(a^2+c^2-b^2)\cdot tgB$, unde $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$. R raza cercului circumscris triunghiului,

45. Să se arate că în orice triunghi ABC are loc relația $2aR\sin(B-C)=b^2-c^2$, unde $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$. R este raza cercului circumscris triunghiului ABC.

46. În plan se consideră punctele $A(-1;2),\ B(3;4),\ O(0;0)$.

a) Să se determine mulțimea punctelor M din plan știind că $\overrightarrow{OM}=(2-m)\cdot\vec{i}+(m+3)\cdot\vec{j},\ m\in\mathbb{R}$.

b) Să se determine coordonatele unui punct M determinat la a) astfel încât triunghiul AMB să fie dreptunghic cu $m(M)=90^0$.

c) Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât vectorii $\overrightarrow{OM}$ și $\overrightarrow{AB}$ să fie ortogonali.

47. Dacă M, N, P sunt mijloacele laturilor $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ și O este un punct interior triunghiului ABC, atunci, să se arate că $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{ON}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AB}=0$.

48. Se consideră un punct S în interiorul triunghiului ABC și M, N, P, proiecțiile lui S pe laturile $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$. Să se arate că $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BN}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{AB}=0$.

Indicații și răspunsuri

1. Numere reale

1.1 Numere întregi și raționale

1). a) 156,48; b) 3,6; c) -17; d) 3; e) -8; f) 6; g) 25; h) -18; i) -6; j) -57; k) 3; l) -14; m) 2^{15}; n) -3^9; o) 5^{10}; p) 5^4; q) -27; r) 1; s) 3^{10}; t) 3^{15}; u) 1; v) $\frac{1}{3}$; x) $\frac{3}{8}$; **3)**. a) $\frac{19}{6}$; b) $-\frac{2}{3}$; c) $\frac{13}{20}$; d) $-\frac{1}{18}$; e) $-\frac{1}{4}$; f) $\frac{3}{5}$; g) $\frac{5}{4}$; h) 2; i) $-\frac{1}{2}$; j) $\frac{1}{25}$; k) $\frac{1}{64}$; l) $-\frac{3}{256}$; m) 1; n) $\frac{2}{3}$; o) $\frac{4}{9}$;

1.2. Operații cu numere reale

1). a) $8\sqrt{2}$; b) $-3\sqrt{3}$; c) 72; d) 4; e) $-6\sqrt{10}$; f) $40\sqrt{5}$; g) 324; h) $-24\sqrt{3}$; i) -13; j) 8; k) $8\sqrt{3}$; l) $16-9\sqrt{2}$; m) $21+13\sqrt{3}$; n) $7+\sqrt{15}$; o) $8-4\sqrt{3}$; p) $14+4\sqrt{6}$; q) -7;

4). a) $\frac{\sqrt{5}}{5}$; **b)** $\frac{2\sqrt{5}}{15}$; **c)** $\frac{5\sqrt{6}}{6}$; **d)** $\frac{5+4\sqrt{2}}{7}$; **e)** $2-\sqrt{2}$; **f)** $3-\sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

7). a) $m_a=\frac{17}{16}, m_g=\frac{1}{2}$; b) $m_a=\frac{15\sqrt{2}}{2}, m_g=6\sqrt{2}$ c) $m_a=\frac{21\sqrt{5}}{2}, m_g=10$; d) $m_a=2\sqrt{6}, m_g=2$; e) $m_a=6$; $m_g=4$. **10).** $u(5n+7)\in\{2;7\}$, ceea ce înseamnă că numărul de sub radical nu e pătrat perfect. **11).**

$$x=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+....+\frac{1}{\sqrt{142}}-\frac{1}{\sqrt{143}}+\frac{1}{\sqrt{143}}-\frac{1}{\sqrt{144}}=-\frac{11}{12}\in\mathbb{Q}.$$

12). $\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{33}}}\cdot\sqrt{3-\sqrt{3+\sqrt{33}}}=\sqrt{9-(3+\sqrt{33})}=\sqrt{6-\sqrt{33}}$,

$\sqrt{6+\sqrt{33}}\cdot\sqrt{6+\sqrt{33}}=\sqrt{36-33}=\sqrt{3}$, atunci, $E=\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=3\in\mathbb{Q}$.

13). $x=\sqrt{16-8\sqrt{3}}+\sqrt{16+8\sqrt{3}}=\sqrt{(2\sqrt{3}-2)^2}+\sqrt{(2\sqrt{3}+2)^2}=\left|2\sqrt{3}-2\right|+\left|2\sqrt{3}+2\right|=4\sqrt{3}$.

14). a) $E(a)=\sqrt{2a^4+\sqrt{a^8+\sqrt{9a^{16}}}}=\sqrt{2a^4+\sqrt{4a^8}}=\sqrt{4a^4}=2a^2$.

b) $\frac{\sqrt{\sqrt{9x^8}}}{\sqrt{4y^4}}=\frac{\sqrt{3x^4}}{2y^2}=\frac{x^2\sqrt{3}}{2y^2}$; c)

$$\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}}+\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}=\sqrt{\frac{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}{4-3}}+\sqrt{\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}{4-3}}=2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}=4;$$

d) $$\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{\left(2+\sqrt{3}\right)\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{3}}}}{2-\sqrt{2-\sqrt{3}}}=\left(2-\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\left(2+\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$$

15*). $\sqrt{(a-2)^2+9}\geq 3$, $\sqrt{(b-3)^2+16}\geq 4$, $\sqrt{(c-4)^2+25}\geq 5$.

$\sqrt{(a-2)^2+9}+\sqrt{(b-3)^2+16}+\sqrt{(c-4)^2+25}\geq 3+4+5=12$. Așadar, avem egalitate, ceea ce înseamnă că $(a-2)^2=0$, $(b-3)^2=0$, $(c-4)^2=0$, adică $a=2, b=3, c=4$.

$A_{ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{\frac{9}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{3\sqrt{15}}{4}$ unde $p=\frac{a+b+c}{2}=\frac{2+3+4}{2}=\frac{9}{2}$.

16). $\sqrt{a^4+\sqrt{5a^8+\sqrt{16a^{16}}}}=\sqrt{a^4+\sqrt{5a^8+4a^8}}=\sqrt{a^4+\sqrt{9a^8}}=\sqrt{a^4+3a^4}=\sqrt{4a^4}=2a^2$

17). $a^2-b^2=(a-b)(a+b)=(7,5-4,5)(7,5+4,5)=3\cdot 12=36\Rightarrow\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{36}=6$**;**

1.3 Calcul algebric

1). a) -6x; b) –x-14; c) $-3x^2+x$; d) $3x^3-7x^2$; e) $-2\sqrt{3}x-6\sqrt{2}x$; f) $-2x^2-12x$;

2). a) $2x^4-3x^2+4x$; b) $6x\sqrt{2}x^4+8x^3-10x^2-6x$; c) $2x^4-x^3+4x^2$; d) $8\sqrt{3}x^3-6\sqrt{6}x^2+6x$; e) $2x^2-9x+10$; f) $x^3-3x^2-2x^2+6x+3x-9=x^3-5x^2+9x-9$; g) $-4x^3+6x^2-3x+12$.

3). a) $3+2\sqrt{2}$; b) $28+16\sqrt{3}$; c) x^2+6x+9; d) x^2+4x+4; e) $9x^2+12x+4$; f) $25x^2+30x+9$;

4). a) $4-2\sqrt{3}$; b) $16-8\sqrt{3}$; c) x^2-6x+9; d) x^2-4x+4; e) $9x^2-12x+4$; f) $25x^2-30x+9$;

5). a) l; b) 10; c) x^2-16; d) x^2-3; e) $4x^2-25$; f) $9x^2-4$;

6). a) $x^2+2+9+2(x\sqrt{2}+3x+3\sqrt{2})$; b) $x^4+2x^3+3x^2+2x+1$; c) $4x^2+4+4x\sqrt{3}+4x+2\sqrt{3}$; d) $x^4+4x^3-2x^2-12x+9$. **7)**. a) $5\sqrt{2}+7$; b) x^3+3x^2+3x+1; c) $x^3+6x^2+12x+8$; d) $8x^3+36x^2+54x+27$; e) $27x^3+27x^2+9x+1$;

8). a) $15\sqrt{3}-26$; b) $x^3-6x^2+12x-8$; c) $8x^3-12x^2+6x-8$; d) $27x^3-54x^2+36x-8$;

9). a) -2x; b) $9x^2-3x$; c) $-12x^3+8x^2$; d) $3x^3-10x^2+26x-24$; e) $2x^3-4x^2-10x+20$; f) $x^2-10x+25$;

g) $x^2+12x+36$; h) x^2-16; i) $4x^2-3$; j) $x^2+x+\frac{1}{4}$; k) $9x^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{16}$; l) $x^4-6x^3+9x^2$;

m) $-18x^3+2\sqrt{3}x^2$; n) x^6; o) $\frac{x}{\sqrt{3}}$; p) **12).**a) $29-12\sqrt{5}$; b) $9x^2+30x+25$; c) $\frac{3\sqrt{2}+4}{34}$; d) $\frac{3\sqrt{2}}{8}$; e) $\sqrt{5}+3$; f) 2; g) $4x^2+(4+4\sqrt{3})x+4+2\sqrt{3}$; h) $25+22\sqrt{2}$; i) $15\sqrt{3}-26$;

13). a) $3xy(x+2y)$; b) $3x(3x^2+4x+2)$; c) $9x(4x^2-2x+1)$; d) $3\sqrt{2}x(x+3)$;

14). a) $(x+2)^2$; b) $(x+3)^2$; c) $(2x+1)^2$; d) $(3x+2)^2$; e) $(x-2)^2$; f) $(x-4)^2$; g) $(2x-2)^2$; h) $(5x-1)^2$; i) $(x-3)(x+3)$; j) $(x-5)(x+5)$; k) $(2x-3)(2x+3)$; l) $(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$; m) $(x-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2})$; n) $(x-1)(x^2+x+1)$; o) $(x-2)(x^2+2x+4)$; p) $(x-3)(x^2+3x+9)$;

15). a) $x^2+9x+8=(x+1)(x+8)$; b) $x^2-x-20=(x-5)(x+4)$; c) $x^2-6x-7=(x-7)(x+1)$; d) $x^2+3x-4=(x-1)(x+4)$;

1.4 Modulul numerelor reale

9*). Cum $x+3-4\sqrt{x-1}=\left(2-\sqrt{x-1}\right)^2\Rightarrow A=\sqrt{2+\sqrt{x-1}+2-\sqrt{x-1}}=2\in\mathbb{Z},\ \forall x\in[1;5]$.

10). a) $(8;-5)$; b) $(-3;2)$; c) $(-4;5)$, $(4;5)$; d) $(-2;3)$; e) $(5;-3)$; f) $(-2;3)$.

1.6 Aproximarea numerelor reale

6.) Solutie: $\frac{81}{11}=7,3636.....=7,(36)$. A 2014-a zecimală este 6. **7)** $\sqrt{41}\approx 6,403.....$

Rezultă $a_1\cdot a_2\cdot a_3=4\cdot 0\cdot 6=0$. **8).** a) 1,41; b) 4,41; c) 4,23; d) 1,73; e) 8,60; **9**). a) $\frac{176}{15}=11,73$; b) $\sqrt{21}=4,58$; c)

$$\frac{2}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{2(2\sqrt{3}+\sqrt{2})}{12-2}=\frac{4\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{10}=\frac{4\cdot 1,73-2\cdot 1,41}{10}=\frac{9,74}{10}=0,97.$$

10). Din proporția dată rezultă $x=\frac{(3\sqrt{2}-4)(3\sqrt{2}+4)}{2\sqrt{2}+3}=\frac{\left(3\sqrt{2}\right)^2-4^2}{2\sqrt{2}+3}=\frac{(18-16)\cdot(2\sqrt{2}-3)}{8-9}=$

$-2(2\cdot 1,41-3)=-2\cdot(-0,18)=0,36$.

12). $7^{2013}=7\cdot\left(7^4\right)^{503}=7\cdot\left(\overline{...1}\right)^{503}=\overline{...7}$; $8^{2013}=8\cdot\left(8^4\right)^{503}=8\cdot\left(\overline{...6}\right)^{503}=\overline{...8}$;

$9^{2013}=9\cdot\left(9^4\right)^{503}=9\cdot\left(\overline{...1}\right)^{503}=\overline{...9}$. Cum ultima cifră a numărătorului este

$u(7^{2013}+8^{2013}+9^{2013})=u(7+8+9)=4$, rezultă că partea fracţionară a numărului A este 0, 4.

1.7 Intervale şi inecuaţii în $\mathbb{R}$

1). a) $\{-1;0;1;2;3\}$; b) $\{0;1;2\}$; c) $\{-1;0;1\}$; d) $\{1;2;3;4\}$; e) $\varnothing$; f) $\{-2;-1;0;1;2;3\}$;

g) $\{-5;-4;-3;-2;-1;1;2\}$; h) $\{0;1;2\}$; i) $\{-3;-2;-1;0;1;2\}$; j) $\varnothing$.

2). a) $A=[-4;1)$; b) $B=\left[\frac{2}{3};\frac{8}{3}\right)$; c) $C=\left[-\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right]$; d) $D=\left(-3\sqrt{2};2\sqrt{2}\right)$; e) $E=(-4;4)$;

f) $F=[-5;5]$; g) $G=[-3;3]$; h) $H=(-4;4)$; i) $I=(-\infty;-2]\cup[2;\infty)$;

j) $J=(-\infty;-5]\cup[5;\infty)$.

3. a) $A=[1;7]$; **b)** $B=[-10;14]$; **c)** $C=[-2;6]$; **d)** $D=(-5;-1)$; **e)** $E=[-6;-2]$;

f) $F=[1;4]$; **g)** $G=(-\infty;-2]\cup[2;\infty)$; **h)** $H=(-\infty;2]\cup[4;\infty)$; **i)** $I=(-\infty;-5)\cup(1;\infty)$;

j) $J=\left(-\infty;-\frac{11}{3}\right]\cup\left[-\frac{1}{3};\infty\right)$. **4). a)** $x\in(-\infty;-1)$; **b)** $x\in(-\infty;8)$; **c)** $x\in\left(-\frac{5}{7};\infty\right)$; **d)**

$x\in(1;\infty)$; **e)** $x\in(2;\infty)$. **5)**. $6\in(5x-4;4x+8)\Leftrightarrow 5x-4\langle 6\langle 4x+8\Rightarrow x\in\left(-\frac{1}{2};2\right)$.

6). a) $A=[-3;2]$; $B=[-5;1]$; **b)**

$A\cup B=[-5;2]$; $A\cap B=[-3;1]$; $A\setminus B=(1;2]$; $B\setminus A=[-5;-3)\cup(1;2]$

7). $A=B=\{2;3;4\}$; **8). a)** $A=\{1;2;3\}$; $B=\{0;1;2;3;4\}$;

b) $A\cup B=\{0;1;2;3;4\}$; $A\cap B=\{1;2;3\}$; $A\setminus B=\varnothing$; $B\setminus A=\{0;4\}$;

9). a) $A=[2;4]$; $B=\{0;1;2;3;4;5\}$;

b) $A\cup B=[2;4]\cup\{0;1;5\}$; $A\cap B=\{2;3;4\}$; $A\setminus B=(2;3)\cup(3;4)$; $B\setminus A=\{0;1;5\}$;

12). a) $(-2;6)$; b) $\left[0;\sqrt{3}\right]$; c) $\left[\frac{4}{5};\frac{10}{3}\right]$; d) $\mathbb{R}$; e) $\mathbb{R}$; f) $(1;\infty)$; g) $[-2;3]$; h) $\mathbb{R}$;

13). a) $(-2;2)$; b) $(-3;1]$; c) $\varnothing$; d) $\left(-3;\sqrt{2}\right)$; e) $[2;3]$; f) $\left(-4\sqrt{3};-3\sqrt{3}\right)$; g) $\varnothing$; h)

$\left[\frac{3}{2};\frac{9}{4}\right]$;

14). Din formula $|x|\le a\Rightarrow -a\le x\le a$ rezultă $|x+3|\le 1\Rightarrow -1\le x+3\le 1\Rightarrow\ x\in[-4;-2]$.

Numărul elementelor mulţimi A este 3.

15). a) $\left(-\infty;\frac{7}{2}\right]\cap\left(\frac{5}{4};+\infty\right)=\left(\frac{5}{4};\frac{7}{2}\right]$; b) $(0;6)\setminus[4;7)=(0;4)$; c) $(-5;8)\cup[-2;10]=(-5;10]$.

16). Din formula $x^2\le a,\ (a\rangle 0)\Rightarrow -\sqrt{a}\le x\le\sqrt{a}$ rezultă $(1-4x)^2\le 9\Rightarrow -3\le 1-4x\le 3\Rightarrow$

$\Rightarrow -4\le -4x\le 2\,|:(-4)\Rightarrow -\frac{1}{2}\le x\le 1$. Aşadar, $A=\left[-\frac{1}{2};1\right]$.

17). Pentru ca să existe intervalul I trebuie pusă condiția $\frac{x+2}{3} \le \frac{2x+5}{4}$. De aici rezultă, $4x+8 \le 6x+5 \Rightarrow -2x \le 7 \Rightarrow x \ge -\frac{7}{2}$. Astfel, $x \in \left[-\frac{7}{2}; +\infty\right)$.

19). $\frac{6}{4x-1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow (4x-1) \mid 6 \Leftrightarrow 4x-1 \in D_6 = \{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6\}$. $A = \{0; 1\}$.

20). card (A)= 6; **21**). Din 2a-4=2 și 3b+3=6 rezultă a=3 și b=1. **22**). Din 4a-3 = 5 și 2b+6=7 rezultă a= 2 și $b = \frac{1}{2}$. **23).** $(A \setminus B) \cap \mathbb{Z} = \{-4; -3; -2\} \Rightarrow card(A) = 3$.

1.8 Inegalități în R

1. Să se arate că $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \ge 9abc, \ \forall a,b,c \in \mathbb{R}_+$.

Demonstrație:

Știm că $\begin{matrix} a^3+b^3+c^3-3abc \ge 0 \Leftrightarrow (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac) \ge 0 \\ (a+b+c)(ab+bc+ca) \ge 9abc \end{matrix}$. Prin adunarea celor două relații, dând factor comun pe a+b+c, se obține $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \ge 9abc$.

2. Să se arate că dacă $a,b,c \in \mathbb{R}_+$ cu $ab+bc+ca=1$, atunci $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \ge 3(a+b+c)$.

Demonstrație: Se notează $\frac{1}{a}=x, \ \frac{1}{b}=y, \ \frac{1}{c}=z.$ Atunci, inegalitatea dată este echivalentă cu $x+y+z \ge 3\left(\overset{yz)}{\frac{1}{x}} + \overset{xz)}{\frac{1}{y}} + \overset{xy)}{\frac{1}{z}}\right), \ x\rangle 0, y\rangle 0, z\rangle 0.$ După aducerea la același numitor, rezultă:

$xyz(x+y+z) \ge 3(xy+yz+zx) \Leftrightarrow (x+y+z)^2 \ge 3(xy+yz+zx) \Leftrightarrow \ x^2+y^2+z^2 \ge xy+yz+zx$, ceea ce este adevărat.

3. Să se arate că $\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2}{n}} \rangle \frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}, \ \forall a_i \in \mathbb{R}_+$.

Demonstrație:

Inegalitatea dată se ridică la pătrat, rezultând $\frac{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2}{n} \rangle \frac{(a_1+a_2+...+a_n)^2}{n^2} \Leftrightarrow$

$n(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2) \ \rangle (a_1+a_2+...+a_n)^2 \Leftrightarrow$

$n(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2) \ \rangle a_1^2+a_2^2+...+a_n^2+2(a_1a_2+a_1a_3+...+a_1a_n+a_2a_3+...a_{n-1}a_n) \Leftrightarrow$

$(n-1)(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2) \ \rangle \ 2(a_1a_2+a_1a_3+...+a_1a_n+a_2a_3+...a_{n-1}a_n)$, ceea ce este adevărat, conform relațiilor de mai jos care se adună:

$a_1^2+a_2^2 \rangle 2a_1a_2$, $a_1^2+a_3^2 \rangle 2a_1a_3$, ..., $a_{n-1}^2+a_n^2 \rangle 2a_{n-1}a_n$.

4. Să se arate că $a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \ge 6, \ \forall a,b,c \rangle 0$.

Demonstrație: Inegalitatea dată rezultă din inegalitățile cunoscute $a+\frac{1}{a} \ge 2, \ \forall a,b \ \rangle \ 0$. Există egalitate când a=b=c=1.

5. Să se arate că $\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b} \ge 6, \ \forall a,b,c \ \rangle \ 0$.

Demonstrație: Cum $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \ge 2, \ \forall a,b \ \rangle \ 0$, atunci,

$\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{b}=\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)\geq 2+2+2=6$, cu egalitate când a=b=c.

6. Să se arate că $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2},\ \forall a,b,c\ \rangle\ 0$.

Demonstrație: Notăm $b+c=x,\ c+a=y,\ a+b=z$. Prin adunare obținem:

$2(a+b+c)=x+y+z\Rightarrow a+b+c=\frac{x+y+z}{2}$. Cum $b+c=x$, rezultă $a=\frac{-x+y+z}{2}$. Analog,

$b=\frac{x-y+z}{2},\ c=\frac{x+y-z}{2}$. Atunci,

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\frac{-x+y+z}{2x}+\frac{x-y+z}{2y}+\frac{x+y-z}{2z}=\frac{1}{2}\left[-3+\frac{y}{x}+\frac{x}{y}+\frac{z}{x}+\frac{x}{z}+\frac{z}{y}+\frac{y}{z}\right]\geq\frac{3}{2}.$$

7. Să se arate că $\frac{a^2+b^2}{a+b}\geq\frac{a+b}{2},\ \forall a,b\in\mathbb{R}$.

Demonstrație: Inegalitatea dată este echivalentă cu

$2(a^2+b^2)\geq(a+b)^2\Leftrightarrow 2a^2+2b^2\geq a^2+2ab+b^2\Leftrightarrow(a-b)^2\geq 0$, ceea ce este adevărat.

8. Să se arate că $\frac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}}\geq 2,\ \forall a\in\mathbb{R}$. Demonstrație: Evident,

$\frac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}}=\frac{a^2+1}{\sqrt{a^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}=\sqrt{a^2+1}+\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\geq 2,\ \forall a\in\mathbb{R}$, cu egalitate când

$a^2+1=1\Leftrightarrow a=0$. S-a folosit inegalitatea $x+\frac{1}{x}\geq 2,\ \forall x\ \rangle\ 0$. 9. Să se arate că

$\frac{a^3+b^3}{2}\geq\left(\frac{a+b}{2}\right)^3,\ \forall a,b\in\mathbb{R}_+$.

Demonstrație:

$\frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{2}\geq\frac{(a+b)^3}{8}\Big|:(a+b)\ \Rightarrow(a^2-ab+b^2)\geq\frac{(a+b)^2}{4}\Leftrightarrow 3(a-b)^2\geq 0$.

10. Să se arate că $\left(1+\frac{a}{b}\right)^n+\left(1+\frac{b}{a}\right)^n\geq 2^{n-1},\ a,b\ \rangle\ 0,\ n\in\mathbb{N}$.

Demonstrație: Se aplică inegalitatea mediilor și faptul că $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2,\ \forall a,b\ \rangle\ 0$. Astfel,

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)^n+\left(1+\frac{b}{a}\right)^n\geq 2\sqrt{\left[\left(1+\frac{a}{b}\right)\cdot\left(1+\frac{b}{a}\right)\right]^n}=2\sqrt{\left(1+1+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^n}\geq 2\sqrt{(2+2)^2}=2\sqrt{4^n}=2\cdot 2^n=2^{n+1}$$

.

11. Să se arate că $\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}\ \rangle\ 2,\ \forall a,b,c\in\mathbb{R}_+^*$.

Demonstrație: Se folosește inegalitatea mediilor: $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leq\sqrt{ab},\ \forall a,b\in\mathbb{R}_+\Leftrightarrow\sqrt{ab}\geq\frac{2ab}{a+b}$.

Aşadar, $\sqrt{\frac{a}{b+c}\cdot 1}\geq\frac{2}{\frac{b+c}{a}+1}=\frac{2a}{a+b+c}$, $\sqrt{\frac{b}{c+a}\cdot 1}\geq\frac{2}{\frac{c+a}{b}+1}=\frac{2b}{a+b+c}$,

$\sqrt{\frac{c}{a+b}\cdot 1}\geq\frac{2}{\frac{a+b}{c}+1}=\frac{2c}{a+b+c}$. Prin adunarea relaţiilor, se obţine:

$\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}\geq\frac{2(a+b+c)}{a+b+c}=2$.

Dacă presupunem că avem egalitate în relaţie, atunci ar trebui c a a=b+c, b= c+a, c= a+b, şi s-ar obţine a= b= c= 0, ceea ce e imposibil. Aşadar, nu avem egalitate în enunţ.

12. Să se arate că $(a+b)(b+c)(c+a)\geq 8abc,\ \forall a,b,c\in\mathbb{R}_+^*$.

Demonstraţie: Se foloseşte inegalitatea mediilor: $a+b\geq 2\sqrt{ab}$,astfel $a+b\geq 2\sqrt{ab}$, $b+c\geq 2\sqrt{bc}$, $c+a\geq 2\sqrt{ac}$. Prin înmulţirea inegalităţilor, rezultă: $(a+b)(b+c)(c+a)\geq 8\sqrt{a^2b^2c^2}=8abc,\ \forall a,b,c\in\mathbb{R}_+^*$, cu egalitate cînd a=b=c.

13. Să se arate că $\sqrt{2}+\sqrt{6}+\sqrt{12}+...+\sqrt{n(n+1)}\ \langle\ \frac{n(n+2)}{2},\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

Demonstraţie: Se aplică inegalitatea mediilor, $\sqrt{xy}\leq\frac{x+y}{2}$.

$\sqrt{1\cdot 2}\leq\frac{1+2}{2},\sqrt{2\cdot 3}\leq\frac{2+3}{2},\sqrt{3\cdot 4}\leq\frac{3+4}{2},.....,\sqrt{n\cdot(n+1)}\leq\frac{n+n+1}{2}$. Adunând inegalităţile de mai sus se obţine $\sqrt{2}+\sqrt{6}+\sqrt{12}+...+\sqrt{n(n+1)}\ \leq\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{2}+...+\frac{n}{2}\right)+\left(\frac{2}{2}+\frac{3}{2}+...+\frac{n=1}{2}\right)=$

$\frac{n(n+1)}{4}+\frac{n(n+3)}{4}=\frac{n(n+2)}{2},\ \forall n\in\mathbb{N}^*$. Nu avem egalitate în enunţ, căci în cazul de faţă termenii de sub radical nu sunt egali.

14. Să se arate că $(a+b)^6+(b+c)^2+(c+a)^6\geq 192a^2b^2c^2,\forall a,b,c\in\mathbb{R}_+$.

Demonstraţie:

$$a+b\geq 2\sqrt{ab}\ |()^6\Rightarrow(a+b)^6\geq 2^6(ab)^3$$

Se foloseşte inegalitatea mediilor: $b+c\geq 2\sqrt{bc}\ |()^6\Rightarrow(b+c)^6\geq 2^6(bc)^3$, iar prin adunarea

$$c+a\geq 2\sqrt{ca}\ |()^6\Rightarrow(c+a)^6\geq 2^6(ca)^3$$

inegalităţilor rezultă

$(a+b)^6+(b+c)^6+(c+a)^6\geq 2^6\left[(ab)^3+(bc)^3+(ca)^3\right]\geq 2^6\cdot 3\cdot ab\cdot bc\cdot ca=192a^2b^2c^2$.

S-a folosit inegalitatea $a^3+b^3+c^3\geq 3abc,\ \forall a,b,c\in\mathbb{R}_+$.

15. Dacă $a,b,c\in\mathbb{R}^*$ atunci:

a) $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}\geq\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$; b) $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\geq\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}$; c) $\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\geq a+b+c$;

Demonstraţie:

a) $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}\geq\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\Leftrightarrow(a^4+b^4)\cdot ab\geq(a+b)\cdot a^2\cdot b^2$. Deoarece a şi b sunt nenule, putem împărţi cu ab. Rezultă, $a^4+b^4-a^3b-a^2b\geq 0\Leftrightarrow a^3(a-b)-b^3(a-b)\geq 0\Leftrightarrow\ (a-b)(a^3-b^3)\geq 0$, ceea ce este adevărat.

b) Se notează cu $x=\frac{a}{b},\ y=\frac{b}{c},\ z=\frac{c}{a}$. Atunci, inegalitatea din enunț devine,

$x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+xz$, ceea ce este adevărat.

c) Se aplică inegalitatea mediilor: $\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}\geq 2\sqrt{c^2}=2c$, $\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\geq 2\sqrt{a^2}=2a$,

$\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}\geq 2\sqrt{b^2}=2b$. Astfel, $2\left(\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\right)\geq 2(a+b+c)\Rightarrow \frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\geq a+b+c$.

16. Să se demonstreze că $\frac{a^{n+1}-1}{n+1}\rangle\ \frac{a^n-1}{n}$, $a\rangle 1, n\in\mathbb{N}^*$.

Demonstrație: Inegalitatea dată este echivalentă cu $n(a^{n+1}-1)\rangle\ (n+1)(a^n-1)\Leftrightarrow$

$n(a-1)(a^n+a^{n-1}+...+1)\rangle\ (n+1)(a-1)(a^{n-1}+...+1)$. Cum $a\rangle 1$, putem împărți cu a-1, rezultând

$n(a^n+a^{n-1}+...+1)\rangle\ (n+1)(a^{n-1}+...+1)\Leftrightarrow n\cdot a^n\rangle\ a^{n-1}+a^{n-2}+....+1$, adevărat, $\forall a\rangle 1$.

17. Fie $a_1,a_2,....,a_n$ numere reale pozitive astfel încât $a_1\cdot a_2\cdot....\cdot a_n=1$. Să se arate că

$(1+a_1)\cdot(1+a_2)\cdot....\cdot(1+a_n)\geq 2^n$.

Demonstrație: Cum $\frac{1+a_i}{2}\geq\sqrt{a_i},\ \forall i=\overline{1,n}\Rightarrow\ \frac{(1+a_1)\cdot(1+a_2)\cdot....\cdot(1+a_n)}{2^n}\geq\sqrt{a_1\cdot a_2\cdot....\cdot a_n}=1$.

18. Dacă $a\rangle 0,\ b\rangle 0$ atunci, $\sqrt{\frac{a^2}{b}}+\sqrt{\frac{b^2}{a}}\rangle\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

Demonstrație: Inegalitatea dată se ridică la pătrat, întrucât ambii membri sunt pozitivi:

$\frac{a^2}{b}+2\frac{a^2}{b}\cdot\frac{b^2}{a}+\frac{b^2}{a}\rangle a+2\sqrt{ab}+b\Leftrightarrow\ a^3+2a^2b^2+b^3\rangle a^2b+2ab\sqrt{ab}+ab^2\Rightarrow$

$a^3+2a^2b^2+b^3\rangle\ ab(a+b)+2ab\sqrt{ab}$, ceea ce este adevărat deoarece $a^3+b^3\rangle\ ab(a+b)$ și

$2a^2b^2\rangle 2ab\sqrt{ab}$.

19. Să se arate că $3(1+a^2+a^4)\ \rangle\ (1+a+a^2)^2$, $\forall a\in\mathbb{R}$.

Demonstrație: Se aplică inegalitatea Cauchy – Buniakovski – Schwarz:

$(1^2+1^2+1^2)(1^2+a^2+(a^2)^2)\ \rangle\ (1+a+a^2)^2$.

20. Să se arate că $\frac{a+b+c}{d}+\frac{b+c+d}{a}+\frac{c+d+a}{b}+\frac{d+a+b}{c}\geq 12,\ \forall a,b,c,d\in\mathbb{R}_+^*$.

Demonstrație: Se adună 4 în stânga și în dreapta de forma:

$\frac{a+b+c}{d}+1+\frac{b+c+d}{a}+1+\frac{c+d+a}{b}+1+\frac{d+a+b}{c}+1\geq 12+4$. Se obține,

$(a+b+c+d)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)\geq 16$, ceea ce este adevărat, conform inegalității Cauchy –

Buniakovski – Schwarz.

21. Dacă $a+b+c=1$ și $a,b,c\geq -1$, atunci $\sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}+\sqrt{c+1}\leq\sqrt{12}$.

Demonstrație: Se aplică inegalitatea Cauchy – Buniakovski – Schwarz:

$\left(\sqrt{a+1}^2+\sqrt{b+1}^2+\sqrt{c+1}^2\right)\cdot\left(1^2+1^2+1^2\right)\geq\left(\sqrt{a+1}\cdot 1+\sqrt{b+1}\cdot 1+\sqrt{c+1}\cdot 1\right)^2\Rightarrow$

$\left(\sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}+\sqrt{c+1}\right)^2\leq\left[(a+b+c)+3\right]\cdot 3=12$. De aici, rezultă relația din enunț.

22. Dacă $a+b+c=1$ și $a,b,c\geq -\frac{1}{3}$, atunci $\sqrt{3a+1}+\sqrt{3b+1}+\sqrt{3c+1}\leq\sqrt{18}$.

Demonstrație: Se aplică inegalitatea Cauchy – Buniakovski – Schwarz:

$\left(\sqrt{3a+1}^2+\sqrt{3b+1}^2+\sqrt{3c+1}^2\right)\cdot\left(1^2+1^2+1^2\right)\geq\left(\sqrt{3a+1}+\sqrt{3b+1}+\sqrt{3c+1}\right)^2\Rightarrow$

$\left(\sqrt{3a+1}+\sqrt{3b+1}+\sqrt{3c+1}\right)^2\leq\left[3\left(a+b+c\right)+3\right]\cdot 3=18$. De aici, rezultă relația din enunț.

23. Dacă $a+2b+4c\geq 21$, să se arate că $a^2+b^2+c^2\geq 21$. Demonstrație:
Se aplică inegalitatea Cauchy – Buniakovski – Schwarz:
$\left(1^2+2^2+4^2\right)\left(a^2+b^2+c^2\right)\geq\left(a+2b+4c\right)^2\Rightarrow 21\cdot\left(a^2+b^2+c^2\right)\geq 21^2\Rightarrow a^2+b^2+c^2\geq 21$.

24. Să se arate că dacă $a_1{}^2+a_2{}^2+....+a_{10}{}^2=1$ atunci, $a_1+a_2+....+a_{10}\leq\sqrt{10},\ \forall a_i\in\mathbb{R},\ i=\overline{1,10}$.
Demonstrație: Se aplică inegalitatea Cauchy – Buniakovski – Schwarz:
$\left(a_1{}^2+a_2{}^2+....+a_n{}^2\right)\cdot\left(1^2+1^2+....+1^2\right)\geq\left(a_1+a_2+....+a_{10}\right)^2\Rightarrow a_1+a_2+....+a_n\leq\sqrt{10},\ \forall a_i\in\mathbb{R}.$

25. Să se arate că $\sqrt{1-a^2}+\sqrt{1-b^2}\leq 2\sqrt{1-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}$.

Demonstrație: Se aplică inegalitatea Cauchy – Buniakovski – Schwarz:
$\left(\sqrt{1-a}^2+\sqrt{1-b}^2\right)\left(\sqrt{1+a}^2+\sqrt{1+b}^2\right)\geq\left(\sqrt{1-a^2}+\sqrt{1-b^2}\right)^2\Leftrightarrow$

$\left[2-(a+b)\right]\left[2+(a+b\right]\geq\left(\sqrt{1-a^2}+\sqrt{1-b^2}\right)^2\Rightarrow\sqrt{1-a^2}+\sqrt{1-b^2}\leq\sqrt{4-(a+b)^2}\leq$

$\leq\sqrt{4(1-\frac{(a+b)^2}{4})}=2\sqrt{1-\frac{(a+b)2}{2^2}}$

26. Dacă $a,b,c\in\mathbb{R}_+^*$, atunci , să se arate că $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geq\frac{a+b+c}{2}$.
Demonstrație: Se folosește inegalitatea Cauchy – Buniakovski – Schwarz:
$\left[\left(\frac{a}{\sqrt{b+c}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{c+a}}\right)^2+\left(\frac{c}{\sqrt{a+b}}\right)^2\right]\cdot\left(\sqrt{b+c}^2+\sqrt{c+a}^2+\sqrt{a+b}^2\right)\geq(a+b+c)^2\Leftrightarrow$

$\left(\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\right)\cdot\left(2a+2b+2c\right)\geq\left(a+b+c\right)^2\left|:(a+b+c)\right.$. De aici, se obține relația din enunț.

27. Dacă $a,b,c\in\mathbb{R}_+^*$, atunci , să se arate că $\frac{a^3+b^3+c^3}{a^2+b^2+c^2}\geq\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}$.
Demonstrație: Se aplică inegalitatea Cauchy – Buniakovski – Schwarz:
$\left[(a\sqrt{a})^2+(b\sqrt{b})^2+(c\sqrt{c})^2\right]\cdot\left(\sqrt{a}^2+\sqrt{b}^2+\sqrt{c}^2\right)\geq\left(a\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}+a\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}+a\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}\right)^2\Leftrightarrow$
$(a^3+b^3+c^3)(a+b+c)\geq(a^2+b^2+c^2)^2$.

28. Să se arate că $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot...\cdot\frac{2n-1}{2n}\ \langle\ \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$, $n\in\mathbb{N}^*$.
Demonstrație: Metoda I:
Notăm cu $a_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot....\cdot\frac{2n-1}{2n}$. Știind că $\frac{1}{k^2}\langle\frac{1}{k^2-1}$, atunci,
$a_n{}^2=\frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3^2}{4^2}\cdot\frac{5^2}{6^2}\cdot...\cdot\frac{(2n-1)^2}{(2n)^2}\ \langle\ \frac{1^2}{2^2-1}\cdot\frac{3^2}{4^2-1}\cdot\frac{5^2}{6^2-1}\cdot...\cdot\frac{(2n-1)^2}{(2n)^2-1}=$
$=\frac{1^2\cdot3^2\cdot5^2\cdot.....\cdot(2n-1)^2}{(2-1)(4-1)\cdot..\cdot(2n-1)\cdot(2+1)(4+1)...(2n+1)}=\frac{1}{2n+1}$. Așadar, $a_n{}^2\langle\frac{1}{2n+1}\Rightarrow a_n\langle\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

Metoda II.

Notăm $a_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}$ și $a_n^{\,I}=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n+1}$. Deoarece

$\frac{1}{2}\langle\frac{2}{3},\ \frac{3}{4}\langle\frac{4}{5},\ldots,\frac{5}{6}\langle\frac{6}{7}\ ,\ldots\ldots,\frac{2n-1}{2n}\langle\frac{2n}{2n+1}\Rightarrow$

$a_n\langle a_n^{\,I}\,\big|\cdot a_n\Rightarrow a_n^{\,2}\langle a_n^{\,I}\cdot a_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n+1}=\frac{1}{2n+1}\Rightarrow\ a_n^{\,2}\langle\frac{1}{2n+1}\ \Rightarrow a_n\langle\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

Metoda III.

Folosim inegalitatea $\sqrt{a\cdot b}\le\frac{a+b}{2},\ \forall a,b\in(0;\infty)$.

$\sqrt{(2n-1)(2n+1)}\langle\frac{2n-1+2n+1}{2}=2n\big|\cdot\sqrt{2n-1}\Rightarrow\ \frac{2n-1}{2n}\langle\frac{\sqrt{2n-1}}{\sqrt{2n+1}}$.

Se dau valori lui n de la 1 la n și se obține: $\frac{1}{2}\langle\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\frac{3}{4}\langle\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$;.....; $\frac{2n-1}{2n}\langle\frac{\sqrt{2n-1}}{\sqrt{2n+1}}$. Prin

înmulțirea lor se obține $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}\ \langle\frac{1}{\cancel{\sqrt{3}}}\cdot\frac{\cancel{\sqrt{3}}}{\cancel{\sqrt{5}}}\cdot\frac{\cancel{\sqrt{5}}}{\cancel{\sqrt{7}}}\cdot\ldots\cdot\frac{\cancel{\sqrt{2n-1}}}{\sqrt{2n+1}}=\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

2. Elemente de logică matematică

2.1 Enunt. Propoziție. Valoare de adevăr

1). a) A; b) A; c) F; d) A; e) F; f) A; g) F;
2). a) A; b) A; c) A; d) F; e) A, f) F; g) F; h) A.
3). a) A; b) F; c) A; d) A; e) A, f) F; g) A.
4). a) A; b) A; c) A; d) F; e) F; f) A; g) A; h) A; i) A; j) F; k) A; l) A; m) A;n) A; o) F;
5). $v(p)=F,\ v(q)=A,\ v(p\vee q)=A,\ v(p\wedge q)=F,\ v(p\to q)=A,\ v(p\leftrightarrow q)=F.$
6). $v(p)=F,\ v(q)=A,\ v(p\vee q)=A,\ v(p\wedge q)=F,\ v(p\to q)=A,\ v(p\leftrightarrow q)=F.$
7). a) A; b) F; c) A; d) A;

2. 2 Predicate. Cuantificatori

1). a) $v\big(p(22)\big)=A$; $v\big(p(187)\big)=F$; b) $v\big(p(17)\big)=A,\ v\big(p(23)\big)=F,\ \Rightarrow A\wedge F=F$;

$v\big(p(30)\big)=A,\ v\big(p(60)\big)=A,\ \Rightarrow A\to A=A$;

$v\big(p(25)\big)=A,\ v\big(p(48)\big)=A,\ \Rightarrow A\vee A=A$;

$v\big(p(45)\big)=A,\ v\big(p(83)\big)=F,\ \Rightarrow A\leftrightarrow F=F$.

2). $f(x)=f(y)\Rightarrow 4x+8=4y+8\Rightarrow 4x=4y\Rightarrow x=y,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$. Propoziția este adevărată.

3). $f(x)=f(y)\Rightarrow x^2=y^2\Rightarrow x=\pm y,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$. Propoziția este falsă. Se poate da și un contraexemplu: $(-2)^2=2^2\not\Rightarrow -2=2$. **4). Fie** $x\ge 2,\ y\ge 2\Rightarrow xy-2x-2y+4=(x-2)(y-2)\ge 0$**.**

5). $p(x,y)\to q(x,y)$**:**

$\sqrt{xy}=\frac{x+y}{2},\ \forall x,y\in\mathbb{R}_+.\Rightarrow 4xy=(x+y)^2\Rightarrow 4xy=x^2+2xy+y^2\Rightarrow(x-y)^2=0\Rightarrow x=y.$

$p(x,y)\leftarrow q(x,y)$**: Fie** $x,y\in\mathbb{R}_+$, cu $x=y\Rightarrow\sqrt{x\cdot x}=\frac{x+x}{2}\Rightarrow x=x$**.**

2.3 Tipuri de raţionament. Metoda inducţiei matematice

1). a) . Se pleacă de la termenul general $\frac{1}{n(n+2)}=\frac{n+2-n}{2n(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$. Dând valori lui n de la 1 la n se obţine: $S=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$.

b) . $S=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+3)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k+3-k}{3k(k+3)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+3}\right)=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)$.

c) . $S=\sum_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{k^2\cdot(k+1)^2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{(k+1)^2-k^2}{k^2\cdot(k+1)^2}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}\right)=1-\frac{1}{(n+1)^2}$

d) . $S=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{(2k-1)\cdot(2k+1)}=\frac{1}{8}\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)=\frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$. e) . $S=\sum_{k=1}^{n}\frac{k(k+1)}{2}$.

f).

$$S=\sum_{k=1}^{n}k\cdot(1+2+3+...+k)=\sum_{k=1}^{n}k\cdot\frac{k(k+1)}{2}=\frac{1}{2}\cdot\sum_{k=1}^{n}(k^3+k^2)=\frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

2).a) Etapa de verificare. Pentru n=1, S=1 iar $\frac{n(n+1)}{2}=\frac{1\cdot2}{2}=1$, aşadar propoziţia P(n) se verifică . Presupunem că P(n) este adevărată pentru n fixat şi să demonstrăm şi că P(n+1)este adevărată.

unde P(n+1) este $1+2+3+...+n+n+1=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

$P(n+1)$: $\underbrace{1+2+3+...+n}_{\frac{n(n+1)}{2}}+n+1=\frac{n(n+1)}{2}+n+1=\frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$, ceea ce este adevărat. Aşadar, P(n) este o propoziţie adevărată pentru orice număr natural nenul n.

b) . Etapa de verificare. Pentru n=1, S=1 iar $n^2=1^2=1$, aşadar propoziţia P(n) se verifică . Presupunem că P(n) este adevărată pentru n fixat şi să demonstrăm şi că P(n+1)este adevărată.

unde P(n+1) este $1+3+5+...+2n-1+2n+1=(n+1)^2$.

$P(n+1)$: $\underbrace{1+3+5+...+2n-1}_{n^2}+2n+1=n^2+2n+1=(n+1)^2$, ceea ce este adevărat. Aşadar, P(n) este o propoziţie adevărată pentru orice număr natural nenul n.

c) . Etapa de verificare. Pentru n=1, S=1 iar $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{1\cdot2\cdot3}{6}=1$, aşadar propoziţia P(n) se verifică .

Presupunem că P(n) este adevărată pentru n fixat şi să demonstrăm şi că P(n+1)este adevărată.

unde P(n+1) este $1^2+2^2+3^2+...+n^2+(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$.

$P(n+1)$: $\underbrace{1^2+2^2+3^2+...+n^2}_{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}+(n+1)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2=$

$=\frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6}=\frac{(n+1)(2n^2+n+6n+6)}{6}=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$, ceea ce este adevărat. Aşadar, P(n) este o propoziţie adevărată pentru orice număr natural nenul n.

3. Progresii

3.1 Şiruri de numere reale

7). Se observă că $a_n = \frac{2n-1}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$. **8**). Cum $a_n = 3n-5$, rezultă $a_4 = 3\cdot 4-5 = 7$, $a_5 = 3\cdot 5-5 = 10$, $a_{10} = 3\cdot 10-5 = 25$. **9**). Cum $a_n = n^2-2n+1 = (n-1)^2 \Rightarrow a_{2014} = (2014-1)^2 = 2013^2$.

10). Pentru n=1, $a_1 = 2$

Pentru n=2, $a_2 = a_1 + 10$

Pentru n=3, $a_3 = a_2 + 10$

.....

Pentru n=n, $a_n = a_{n-1} + 10$. Adunând toate aceste relaţii rezultă $a_n = 2 + 10\cdot(n-1) \Rightarrow$ $a_n = 10n-8$.

3.2 Progresii aritmetice

1). $a_2 = a_1 + r = -4+5 = 1$; $a_3 = a_2 + r = 1+5 = 6$; $a_4 = a_3 + r = 6+5 = 11$;

2). 28 – 14 = 14, ratia r = 14, atunci, $a_2 = a_3 - r = 14-14 = 0$; $a_1 = a_2 - r = 0-14 = 14$;

3). Conform formulei termenului general al unei progresii aritmetice, $a_n = a_1 + (n-1)\cdot r$ rezultă $a_{10} = 1+(10-1)\cdot 3 = 28$.

4). 55; **5)**. Conform formulei $a_n = a_1 + (n-1)r$ rezultă $a_{12} = a_1 + 11r = -3+11\cdot 0,5 = 2,5$.

6). 0; **7**). 18 ; **8**). 25; **9**). 110; **10**).43; **11**). 15; **12**). 3; **13**). 17; **14**). 6025; **15**). 2; **16**). 128; **17**). 59; **18**). r = 5 , $a_1 = 2$;

19). r = 3, $a_1 = -2$; 21). Se verifică conform formulei $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$ că

$5\cdot 3^x = \frac{3^x - 3 + 3^{x+2} + 3}{2} \Leftrightarrow 5\cdot 3^x = \frac{10\cdot 3^x}{2} \Leftrightarrow 5\cdot 3^x = 5\cdot 3^x$ ceea ce este adevărat, deci termenii sunt în progresie aritmetică.

22). Din $x+3 = \frac{x-4+6x}{2} \Rightarrow 2x+6 = 7x-4 \Rightarrow x = 2$. **23**). 4; **24**). 2; **25**). 2;

26). 3; **28)**. Pentru ca termenii şirului $(x_n)_n$ dat prin formula termenului general x_n = 4n-6 să formeze o progresie aritmetică trebuie să existe relaţia $x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n+1}}{2}$.

Astfel, $\frac{x_{n-1} + x_{n+1}}{2} = \frac{4n-10+4n-2}{2} = \frac{8n-12}{2} = 4n-6 = x_n$. Aşadar, şirul $(x_n)_n$ este o progresie aritmetică.

29). a) Din $\frac{x^2+2+4-2x+x^2}{2} = (3x)^2 \Rightarrow 8x^2 + x - 3 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{97}}{16}$;

b) Din $\frac{4x-3+10x+5}{2} = 6x+3 \Rightarrow x = 2$; c) Din

$\frac{x^2-6+4x+3}{2} = 3x \Rightarrow x^2-2x-3 = 0 \Rightarrow x \in \{-1;3\}$

30). $a_m - a_n = (m-n)\cdot r$ $\quad a_{26} - a_{18} = (26-18)\cdot r \Leftrightarrow 178-122 = 8r \Rightarrow r = 7$

$a_{18} - a_1 = (18-1)\cdot r \Leftrightarrow 122 - a_1 = 17\cdot 7 \Rightarrow a_1 = 3$.

$S_{26} = \dfrac{(a_1 + a_{26})\cdot n}{2} = \dfrac{(3+178)\cdot 26}{2} = 181\cdot 13 = 2353$.

31). Observăm că termenii sumei din ecuaţia dată sunt în progresie aritmetică de raţie 5 prin urmare, $x + 100 = x + (n-1)\cdot 5 \Rightarrow n = 21$. Din $\dfrac{(x + x + 100)\cdot 21}{2} = 2100 \Rightarrow x = 50.$

32). a) Din faptul că 5 – 1 = 9 – 5 = 4 rezultă că raţia progresiei aritmetice este 4. Urmează să determinăm numărul n de termeni ai progresiei : Astfel, din $\mathbf{101 = 1 + (n-1)\cdot 4 \Rightarrow}$ n=26.

Atunci, 1 + 5 + 9 + 13 + ….+ 101 = $\dfrac{(1+101)\cdot 26}{2} = 1326$;

b) Asemănător, se află raţia r = 10 şi numărul de termeni n = 12, atunci S= 672 .

33). Cum x = 1+ (n-1)3 cu n pozitiv, atunci

$\dfrac{[1+1+(n-1)\cdot 3]}{2} = 210 \Rightarrow 420 = (3n-1)n \Rightarrow 3n^2 - n - 420 = 0$. Se obţine $\Delta = 5041$ de unde

$n_{1,2} = \dfrac{1 \pm 71}{6}$, soluţia bună fiind n=12. **34**). r =7 $a_n = a_1 + (n-1)\cdot r \Rightarrow 192 = 3 + (n-1)\cdot 7$,

n=28. Rezultă 3 + 10 + 17 +….+ 192 = 2730 ; **35**). 295; **37**). $S_{20} = 1160$;

38). Din $a_1 + a_2 + ... + a_{19} + a_{20} = 590$ rezultă $\dfrac{(a_1 + a_{20})\cdot 20}{2} = 590 \Rightarrow a_1 + a_{20} = 59$. Utilizînd

formula termenului general pentru a_{20}, a_4, a_7 rezultă $a_1 + a_1 + 19r = 59$ şi $2(a_1 + 3r) - (a_1 + 6r) = 1$.

Din ultima ecuaţie rezultă $a_1 = 1$ şi din prima ecuaţie rezultă $19r = 59 - 2 \Rightarrow r = 3$.

Aşadar, primul termen este 1 iar raţia este 3.

40). Cum suma de sub radical este suma unei progresii aritmetice, rezultă

$A = \sqrt{1+3+5+...+99} = \sqrt{\dfrac{(1+99)\cdot 50}{2}} = 50 \in \mathbb{N}$.

3.3 Progresii geometrice

1). $b_6 = b_1 \cdot q^5 = 1\cdot 3^5 = 243$. **2**). Din formula $b_{n+1} = b_n \cdot q, \forall n \geq 1$ rezultă termenii 1, 5, 5^2, 5^3, 5^4.

3). Din formula $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ rezultă $b_5 = b_1 \cdot q^4 = 2\cdot 3^4 = 162$;

4). Din formula $b_{n+1} = b_n \cdot q, \forall n \geq 1$ se obţine $b_2 = b_1 \cdot q \Rightarrow q = 4$. Atunci, din

$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ rezultă $b_5 = b_1 \cdot q^4 = 3\cdot 4^4 = 3\cdot 256 = 768.$ **5**). Din formula

$b_m = b_n \cdot q^{m-n}$ rezultă $b_9 = b_5 4^4 = 6144$.

6) Cum $\dfrac{b_m}{b_n} = q^{m-n} \Rightarrow \dfrac{b_8}{b_4} = 2^{8-4} \Rightarrow \dfrac{384}{b_4} = 2^4 \Rightarrow b_4 = \dfrac{384}{16} = 24$;

7). - 8; **8**). 2; **9**). 2; **10**). 26; **11**). $\dfrac{3}{2}$; **12**). 27; **13**). 162; **14**). 1; **15**). 1296; **16**). 13122;

17). $q = 2,\ b_8 = 64$; **18**). $b_1 = 2,\ q = 3$; **19**). $b_1 = 2,\ q = 3$; **20**). Din $b_n = b_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow$

$b_1 \cdot q^2 - b_1 \cdot q = 12$ şi $b_1 \cdot q^3 - b_1 \cdot q = 48 \Rightarrow$ Din rezolvarea sistemului cu cele două ecuaţii rezultă $q = 3 \Rightarrow b_1 = 2$.

21). Din formula $\frac{b_m}{b_n}=q^{m-n}\Rightarrow\frac{b_5}{b_3}=q^2=25\Rightarrow q=5$. Din formula termenului general și din $b_1+b_2+b_3+b_4=780\Rightarrow b_1(1+q+q^2+q^3)=780\Rightarrow b_1\cdot 156=780\Rightarrow b_1=5$.

$b_5=b_1\cdot q^4=5\cdot 5^4=3125.$

23). Cum $f(0)=1, f(1)=4, f(5)=16\Rightarrow f(1)^2=f(0)\cdot f(5)$ ceea ce înseamnă că numerele respective sunt în progresie geometrică.

24). Din formula $b_n{}^2=b_{n-1}\cdot b_{n+1}\Rightarrow 6^2=4\cdot(x+6)\Rightarrow 36=4x+24\Rightarrow x=3.$

Altfel, cu ajutorul definiției progresiei geometrice, rezultă: $6=4\cdot q\Rightarrow q=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$, $x+6=6\cdot q\Rightarrow$ $x+6=9\Rightarrow x=3.$ **25**) Din $(x-2)^2=4\cdot 9\Rightarrow x-2=6\Rightarrow x=8$.

26). a) Dacă 27, x+5 şi 75 sunt termenii consecutivi ai unei progresii geometrice atunci conform formulei $b_n=\sqrt{b_{n-1}\cdot b_{n+1}}$ rezultă $(x+5)^2=27\cdot 75\Rightarrow x=40$;

b) Din $2x=\sqrt{(x-1)(5x+3)}$ cu condiţiile $2x\ge 0, x-1\ge 0, 5x+3\ge 0$ rezultă $x^2-2x-3=0\Rightarrow$ $x=3$.

27). 4; **28**). $\left\{-3;\frac{1}{2}\right\}$; **29**). $S=f(1)+f(2)+f(3)+...+f(2013)=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{3^{2013}}=$

$\frac{1}{3}\cdot\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{2013}-1}{\frac{1}{3}-1}=-\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{2013}-1}{2}$. **30**). $S=f(1)+f(2)+f(2^2)+...+f(2^{10})=$

$=2(1+2+2^2+2^3+...+2^{10})+11=2(\frac{2^{11}-1}{2-1})+11=2^{12}+9$.

31). $S=f(1)+f(4)+f(4^2)+...+f(4^{10})=$

$=3(1+4+4^2+4^3+...+4^{10})+11\cdot 2=3(\frac{4^{11}-1}{4-1})+22=4^{11}+21$.

32). $b_1+b_2+b_3+...+b_{10}=2\cdot 7+2\cdot 7^2+....+2\cdot 7^{10}=2\cdot 7\cdot\frac{7^{10}-1}{7-1}=\frac{7^{11}-1}{3}$;

33). a) $S_{20}=\frac{2^{20}-1}{2-1}=2^{20}-1$; b) $S_n=b_1\cdot\frac{q^n-1}{q-1}\Rightarrow S=\frac{3^{10}-1}{2\cdot 3^{10}}$;

34) $S_{10}=\frac{1}{2}(2^{10}-1)$; **35**). a) $S=2^{51}-1$; b) $S=\frac{3^{51}-3}{2}$ c) $S=1-\left(\frac{1}{2}\right)^{20}$; d) $\frac{121}{81}$;

38).

$S=3+33+333+...+\underbrace{333....3}_{n\ ori}=\frac{10-1}{3}+\frac{10^2-1}{3}+...+\frac{10^n-1}{3}=\frac{1}{3}(10+10^2+...+10^n-n)=\frac{1}{3}(\frac{10^{n+1}-10}{9}-n)$

39). Conform sumei termenilor unei progresii geometrice rezultă $\frac{3^{n+1}-1}{3-1}=1093$ de unde

$3^{n+1}=2187\Rightarrow 3^{n+1}=3^7\Rightarrow n=6;$

40)

$S=7(1+11+111+...+\underbrace{111...1}_{2013\ de\ 1})=7\left(\frac{10-1}{9}+\frac{10^2-1}{9}+...+\frac{10^{2013}-1}{9}\right)=\frac{7}{9}\left(10\cdot\frac{10^{2013}-1}{10-1}-2013\right).$

44). Un șir $(b_n)_{n\geq 1}$ este progresie geometrică dacă se verifică relația

$b_n=\sqrt{b_{n-1}\cdot b_{n+1}}$, $b_n\rangle 0$, $\forall n\geq 1$.

Pentru a afla termenul general al șirul se calculează

$S_{n+1}-S_n=2^{n+1}-1-(2^n-1)=2\cdot 2^n-2^n=2^n=b_n$.

Cum $\sqrt{2^{n-1}\cdot 2^{n+1}}=\sqrt{2^{2n}}=2^n\Rightarrow (b_n)_{n\geq 1}$ este progresie geometrică.

45). a) $S=1+x+x^2+x^3+....+x^n=1\cdot\dfrac{x^{n+1}-1}{x-1}$;

b) **(1)** $S=1+2x+3x^2+4x^3+....+nx^{n-1}\big|\cdot x\Rightarrow$

(2) $x\cdot S=x+2x^2+3x^3+4x^4+....+nx^n$**.** Din (1) – (2) rezultă

$S(1-x)=1+x+x^2+x^3+x^4+....+x^{n-1}-nx^n\Rightarrow S(1-x)=\dfrac{x^n-1}{x-1}-nx^n\Rightarrow$

$S=\dfrac{x^n-1}{(x-1)(1-x)}-\dfrac{nx^n}{(1-x)}\Rightarrow S=\dfrac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}$.

c) Din b) pentru x = 2 și n = 100 rezultă $S=\dfrac{100\cdot 2^{101}-101\cdot 2^{100}+1}{(2-1)^2}=99\cdot 2^{100}+1$;

d) Conform cu b) pentru $x=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\Rightarrow S=\dfrac{n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}-(n+1)\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n+1}{\left(\dfrac{1}{n}\right)^2}=n^2$;

e)

$S=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)^2+....+\left(x^n+\dfrac{1}{x^n}\right)^2=x^2+x^4+x^6+...+x^{2n}+2n+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}+....+\dfrac{1}{x^{2n}}=$

$=x^2\cdot\dfrac{x^{2n}-1}{x^2-1}+2n+\dfrac{1}{x^2}\cdot\dfrac{\dfrac{1}{x^{2n}}-1}{\dfrac{1}{x^2}-1}=\dfrac{x^{4n+2}+(2n-1)x^{2n+2}-(2n-1)x^{2n}-1}{x^{2n}(x^2-1)}$**.**

f) $S=\dfrac{x^1+y^1}{(x+y)^1}+\dfrac{x^2+y^2}{(x+y)^2}+.....+\dfrac{x^n+y^n}{(x+y)^n}=\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{x}{x+y}\right)^k+\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{y}{x+y}\right)^k=$

$=\dfrac{x}{x+y}\cdot\dfrac{(1-\dfrac{x}{x+y})^n}{1-\dfrac{x}{x+y}}+\dfrac{y}{x+y}\cdot\dfrac{(1-\dfrac{y}{x+y})^n}{1-\dfrac{y}{x+y}}=\dfrac{x}{y}\cdot\dfrac{(x+y)^n-x^n}{(x+y)^n}+\dfrac{y}{x}\cdot\dfrac{(x+y)^n-y^n}{(x+y)^n}$.

g) (1) $S=n+(n-1)\cdot x+(n-2)\cdot x^2+...+2\cdot x^{n-2}+x^{n-1}\big|\cdot x\Rightarrow$

(2) $x\cdot S=n\cdot x+(n-1)\cdot x^2+(n-2)\cdot x^3+...+2\cdot x^{n-1}+x^n$.

Din (2)-(1) rezultă $S(x-1)=-n+x+x^2+x^3...+x^{n-1}+x^n\Rightarrow$

$S(x-1)=x\cdot\dfrac{x^n-1}{x-1}-n\Rightarrow S=\dfrac{x^{n+1}-1}{x-1}-\dfrac{n}{x-1}$

46). a) $S=9+99+999+...+\underbrace{999...99}_{n\ de\ 9}=10-1+10^2-1+10^3-1+...+10^n-1=10\cdot\dfrac{10^n-1}{10-1}-n$;

b) $S=1+12+112+1112+....+\underbrace{11....11}_{n-1\ de\ 1}2=1+(11+1)+(111+1)+...+(\underbrace{11....11}_{n\ de\ 1}+1)=$

$$=\frac{1}{9}\left(9+99+999+...+\underbrace{999...99}_{n\ de\ 9}\right)=\frac{1}{9}\left(10-1+10^2-1+10^3-1+...+10^n-1\right)=$$

$$=\frac{1}{9}\left(10\cdot\frac{10^n-1}{9}-n\right)+n-1=\frac{10^{n+1}-10-9n}{81}+\frac{81(n-1)}{81}=\frac{10^{n+1}+72n-91}{81}$$

c) $S=2(1+11+111+....+\underbrace{111....11}_{n\ de\ 1}=2\left(\frac{9}{9}+\frac{99}{9}+\frac{999}{9}+....+\frac{999..999}{9}\right)=$

$$S=\frac{2}{9}\left(10-1+10^2-1+...+10^n-1\right)=\frac{2}{9}\left(10\cdot\frac{10^n-1}{10-1}-n\right).$$

47). Dacă $(b_n)_{n\geq 1}$ este o progresie geometrică atunci produsul primilor n termeni este egal cu

$P_n=\prod_{k=1}^{n}b_1\cdot q^{k-1}=b_1^{\,n}\cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}}$. $\quad P_{20}=P_{30}\Leftrightarrow b_1^{\,20}\cdot q^{\frac{20\cdot 19}{2}}=b_1^{\,30}\cdot q^{\frac{30\cdot 29}{2}}\Rightarrow b_1^{\,10}\cdot q^{245}=1$.

Atunci, $P_{50}=b_1^{\,50}\cdot q^{\frac{50\cdot 49}{2}}=b_1^{\,50}\cdot q^{1225}=\left(b_1^{\,10}\cdot q^{245}\right)^5=1.$

48). $S=b_1\cdot\frac{4^n-1}{4-1}=1365\Rightarrow b_1\cdot(4^n-1)=4095=3^2\cdot 5\cdot 111\Rightarrow b_1\in\{1;3;5;9;15\}$.

Pentru $b_1=1$ se obține $4^n-1=4095\Rightarrow 4^n=4096\Rightarrow 4^n=4^6\Rightarrow n=6.$

Pentru celelalte valori ale lui b_1 nu se obține n natural.

49). Din $\left(2\cdot 2^x-5\right)^2=\left(4\cdot 2^x+17\right)\cdot\left(2^x-7\right)\Rightarrow\ 4\cdot 2^{2x}-20\cdot 2^x+25=4\cdot 2^x-28\cdot 2^x=17\cdot 2^x-119$.

În final, rămâne $2^x=16\Rightarrow x=4.$

50). Pentru a determina termenul general al șirului se calculează

$S_n-S_{n-1}=n^2+5n+1-(n-1)^2-5(n-1)-1=2n+4$. Așadar, $a_n=2n+4$.

$(a_n)_{n\geq 1}$ este o progresie aritmetică dacă $a_{n+1}-a_n$ este egal cu o constantă.

$a_{n+1}-a_n=2(n+1)+4-2n-4=2$ care este o constantă.

51). a) $a_{n+1}-a_n=3(n+1)+2-3n-2=3$ care este o constantă, așadar, $(a_n)_{n\geq 1}$ este progresie aritmetică. $\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{2^{a_{n+1}}}{2^{a_n}}=\frac{2^{3n+5}}{2^{3n+2}}=2^3=8$ care este o constantă, așadar, $(b_n)_{n\geq 1}$ este progresie geometrică.

b) $\underbrace{b_1\cdot b_2\cdot b_3\cdot....\cdot b_n}_{n\ termeni}=4^{19}\Leftrightarrow\underbrace{2^5\cdot 2^8\cdot.....\cdot 2^{3n+2}}_{n\ termeni}=2^{38}\Leftrightarrow\underbrace{5+8+...+3n+2}_{n\ termeni}=38\Rightarrow$

$$\frac{(5+3n+2)\cdot n}{2}=38\Rightarrow$$

$3n^2+7n-76=0\Rightarrow\Delta=961\Rightarrow\sqrt{\Delta}=31\Rightarrow n=4.$

52). Fie cei patru termeni $b_1=a,\ b_2=a\cdot q,\ b_3=a\cdot q^2,\ b_4=a\cdot q^3$ unde q este rația progresiei geometrice. Atunci, din datele problemei, cum

$$b_1+b_4=3\cdot\frac{b_2+b_3}{2}\Rightarrow a(1+q^3)=3\cdot\frac{a(q+q^2)}{2}\Big|:a\Rightarrow$$

$2q^3-3q^2-3q+2=0$ cu soluțiile $q\in\left\{-1;\frac{1}{2},2\right\}\Rightarrow$ numerele sunt $(a;-a;a;-a)$, $(a;\frac{a}{2};\frac{a}{4};\frac{a}{8})$, $(a;2a;4a;8a)$.

4. Funcții

4.1 Funcții. Definiție. Proprietăți

1). a) f(-1)= $(-1)^2$-3(-1)+4=1+3+4=8 ; b) f(2)=2^2-6+4=2; c) f($\frac{1}{2}$)=$\frac{1}{4}$ - $\frac{3}{2}$ +4=$\frac{1-6+16}{4}=\frac{11}{4}$;

d) f($\sqrt{2}$)=$\left(\sqrt{2}\right)^2-3\cdot\sqrt{2}+4=2-3\sqrt{2}+4=6-3\sqrt{2}$.

2). $\text{Im}_f=\left\{f(-\sqrt{2});f(-1);f(0);f(3)\right\}=\left\{2\sqrt{2}+3;5;3;-3\right\}$.

3). f(-2)= 12 ; f(0)= 2 ; $f(\frac{1}{2})=-\frac{1}{4}$; $f(\sqrt{2})=4-3\sqrt{2}$; $f(\frac{1}{\sqrt{2}})=\frac{5-3\sqrt{2}}{2}$;

$\text{Im}_f=\left\{12;2;-\frac{1}{4};4-3\sqrt{2};\frac{5-3\sqrt{2}}{2}\right\}$; **4**. Deoarece f(10)=0 rezultă P=0 ; **5**). - 4 ;

6). a) Pentru a fi definită o funcţie raţională, obligatoriu trebuie ca numitorul să fie diferit de zero, iar în cazul nostru, x nu trebuie să fie -5 altfel s-ar anula numitorul. Aşadar, $D_{f_1}=R\setminus\{-5\}$;

b) Analog, numitorul nu trebuie să se anuleze, de aceea se rezolvă ecuaţia x^2 +3x - 4=0 şi se găsesc valorile care nu trebuie sa facă parte din domeniul de definiţie ; $D_{f_1}=R\setminus\{-4;1\}$;

La c) şi d) funcţiile sunt polinomiale de aceea domeniul lor de definiţie este R .

7). a) $D_f=\text{R}\setminus\{4\}$; b) $D_g=\text{R}\setminus\{\pm2\sqrt{2}\}$; c) R; d) R. **8). a)** $D_f=\mathbb{R}$; b) $D_f=\left[-4;\infty\right)$;

c) $D_f=\mathbb{R}\setminus\left\{5\right\}$. **10)**. a) $a\in\mathbb{R}\setminus\left\{-1\right\}$; b) 52; c) $a\in\left\{-2;0\right\}$. **11)**.

$f=g\Leftrightarrow A=\left\{-2;-1;0;1;2\right\}$ şi a-4=5, a=9 şi 2b=6 adică b=3. **12).**

$g(x)=\frac{x^2-6x+8}{x^2-4}=\frac{(x-2)(x-4)^{(x-2}}{(x-2)(x+2)}=\frac{x-4}{x+2}=f(x)$**.**

13). Intersecţia cu Ox: $f(x)=0\Rightarrow 2x+8=0\Rightarrow x=-4\Rightarrow A(-4;0)$**.** Intersecţia cu Oy: $x=0\Rightarrow y=f(0)=-2\Rightarrow B(0;-2)$**;** **15**). a=3; **16)**. f(-1)=6;

17). $d(O,AB)=\frac{OA\cdot OB}{AB}=\frac{8\cdot4}{4\sqrt{5}}=\frac{8\sqrt{5}}{5}$. **19)**. Pentru $a\geq4$ se obţine ecuaţia $a^2-4a+9=0$ care nu admite soluţii reale. Atunci, pentru

$a\langle4\Rightarrow2+a^2-4a+1=0\Rightarrow a^2-2a+3=0\Rightarrow a_1=1,a_2=3.$

22). Deoarece $f(-x)=-f(x),$ rezultă că suma este 0. **24)**. Evident. f(x) este funcție pară;

25). f este pară pe $\mathbb{R}\setminus\left\{0\right\}\Leftrightarrow f(-x)=f(x),\forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{0\right\}$.

Cum $f(-x)=\frac{2(-x)^{2013}-(-x)}{(-x)^3}=\frac{-(2x^{2013}+x)}{-x^3}=\frac{2x^{2013}+x}{x^3}=f(x)$ rezultă că f este pară.

4.2 Funcţii monotone

1). $x_1\leq x_2\Rightarrow4x_1\leq4x_2\Rightarrow4x_1+5\leq4x_2+5\Rightarrow f(x_1)\leq f(x_2)$;

3). a) Fie $x_1,x_2\in[2;+\infty)$. Din

$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{\sqrt{2x_1-4}-\sqrt{2x_2-4}}{x_1-x_2}=\frac{2(x_1-x_2)}{(x_1-x_2)(\sqrt{2x_1-4}+\sqrt{2x_2-4})}=\frac{2}{\sqrt{2x_1-4}+\sqrt{2x_2-4}}\rangle0\Rightarrow$

f este strict crescătoare ; b) Analog ca la a) ; **4).** Fie $0\langle x_1\langle x_2$. Atunci, $\Rightarrow x_1^3\langle x_2^3\Rightarrow\frac{1}{x_1^3}\rangle\frac{1}{x_2^3}\Rightarrow$ f este strict descrescătoare ; Analog şi pentru $x_1\langle x_2\langle0$ sau $x_1\langle0\langle x_2$.

Funcţia f este strict descrescătoare pe $R\setminus\{0\}$. **5**). **a)** Fie $1<x_1<x_2\Rightarrow\frac{1}{x_1+1}>\frac{1}{x_2+1}$, f este strict descrescătoare ;

b) $x_1<x_2\Rightarrow x_1^3<x_2^3\Rightarrow x_1^3+2x_1+4<x_2^3+2x_2+4\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)\Rightarrow$ f este strict crescătoare ;

c) Se arată că f este strict crescătoare pe $(-\infty;2]$ şi $(2;+\infty]$ deoarece restricţiile $f_1(x) = 2x+1$ şi $f_2(x)= x+4$ sunt funcţii de gradul întâi ; Pentru a arăta că f este strict crescătoare pe întreg domeniul de definiţie mai trebuie verificată şi relaţia: $x_1\le 2<x_2\Rightarrow f(x_1)\le f(2)<f(x_2)$.

Fie $x_1\le 2<x_2\Rightarrow f(x_1)\le f(2)=5<6<f(x_2)$ aşadar, f este strict crescătoare pe R.

d) Restricţiile funcţiei f sunt $f_1(x)= x - 4$ care este strict crescătoare pe $(-\infty;3]$şi $f_2 (x)= -2x + 4$ care este strict descrescătoare pe $(3;+\infty)$ prin urmare, **f** nu este monotonă pe **R**;

6). Fie $x_1,x_2\in\mathbb{R}\setminus\{-2\}$. Din $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{\frac{x_1-3}{2x_1+4}-\frac{x_2-3}{2x_2+4}}{x_1-x_2}=$

$=\frac{(x_1-3)(2x_2+4)-(x_2-3)(2x_1+4)}{(x_1-x_2)(2x_1+4)(2x_2+4)}=\ =\frac{10}{(2x_1+4)(2x_2+4)}>0$**.** Rezultă că f este strict crescătoare pe fiecare din intervalele $(-\infty;-2)$ şi $(-2;\infty)$**.** **8**). a) $f_{|(-\infty;1]}=x-3$ este strict crescătoare. Atunci, $f(1)\le m\cdot 1+4\Rightarrow -2\le m+4\Rightarrow m\ge -6$; b) $m\le\frac{1}{2}$.

4.3 Compunerea funcţiilor

1). $(f\circ g)(x)=f(g(x))=2g^2(x)-4g(x)+5=\ 2(x-3)^2-4(x-3)+5=$

$2(x^2-6x+9)-4x+12+5=\ 2x^2-12x+18-4x+12+5=\ =2x^2-16x+35.$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=f(x)-3=2x^2-4x+2$.

2). Cum $g(2)=2+2=4\Rightarrow(f\circ g)(2)=f(4)=11$, iar cum

$f(0)=-1\Rightarrow(g\circ f)(0)=g(-1)=-2\cdot(-1)+3=5$.

3). Cum $f(g(x))=4g(x)-2$, (1) şi $f(g(x))=8x-10$, (2), din (1)=(2) rezultă

$4g(x)-2=8x-10\Rightarrow\ 4g(x)=8x-8|:4\Rightarrow\ g(x)=2x-2$.

5). $(f\circ f)(x)=3f(x)+m+2=3(3x+m+2)+m+2=\ =9x+4m+8$. (1)

Cum $(f\circ f)(x)=9x+8$, (2), din egalarea celor două expresii (1)=(2) rezultă m=0.

8). a) $g(x)=\frac{1}{3}x+\frac{14}{3}$**;** **b)** $g(x)=\frac{1}{3}x^2+\frac{4}{3}x-\frac{20}{3}$**.** **12)**. a) Se demonstrează prin inducție că

$(\underbrace{f\circ f\circ f\circ....\circ f}_{n\ de\ f})(x)=x+2n$; **b)** $(\underbrace{f\circ f\circ f\circ.....\circ f}_{n\ de\ f})(x)=3^n x+\frac{3^n-1}{2}$.

13). Se ia $f(x)=ax+b\Rightarrow(\underbrace{f\circ f\circ f\circ.....\circ f}_{n\ de\ f})(x)=a^n x+a^{n-1}b+a^{n-2}b+....+ab+b=8x-14\Rightarrow$

$a=2,n=3,b=-2.$

5.1. Funcţia de gradul întâi

1). $\mathrm{Im}\,f=\{-1;1;3;5;7;9\}$; **2**). $\mathrm{Im}_f=\{8;5;2;-1;-4\}$; **3).** 0; **4**). 0; **5**). 0; **6)** 0 ; **8**). 3775;

9). $2^{31}+61$; **10).** Deoarece $f(-x)+f(x)=10, \forall x \in \{-5,-4,...,4,5\}\setminus\{0\}$ şi $f(0)=5$ rezultă că suma este egală cu 55. **11).** a) Cum $f(-3)=17,\ f(0)=2,\ f(3)=13$ rezultă $f(-3)+f(0)+f(3)=32.$

b) $f(1)+f(2)+f(3)+...+f(20)=3(1+2+3+...+20)+...+20\cdot 4=710$; **12)**. a) Cum $-\frac{1}{2}, \sqrt{3}-1\langle 0 \Rightarrow f(-\frac{1}{2})=-\left(-\frac{1}{2}\right)+3=\frac{1}{2}+3=\frac{7}{2},\ f(\sqrt{3}-1)=-(\sqrt{3}-1)+3=-\sqrt{3}+4,$

iar $f(\frac{3}{2})=2\cdot\frac{3}{2}+5=8$. Aşadar, $f(-\frac{1}{2})+f(\sqrt{3}-1)+f(\frac{3}{2})=\frac{7}{2}-\sqrt{3}+4+8=\frac{31}{2}-\sqrt{3}$. **13).** $\frac{\sqrt{2}}{2}$;

14). Din $f(1)=2\Rightarrow a+b=2$ şi din $f(-2)=-7\Rightarrow -2a+b=-7$. Rezultă a =3 şi b = -1. Aşadar, $f(x)=3x-1$. **16)**. a=1, b=2; **17)**. A(2;0), B(0; - 6); **18).** $A(m;3)\in G_f \Leftrightarrow f(m)=3\Rightarrow$ 5m-2=3, adică m=1. **19)**. m=9; **20)**. Din $f(m+4)=16\Rightarrow 4(m+4)+8=16\Rightarrow$ $4m=-8\Rightarrow m=-2.$

21) $m\in\{-2;1\}$; **22)**. m=3 ; **23)**. f(a)=a, M(-1;-1); **24)**. $a=7-\sqrt{2}$ **; 25).** Din condiţia $f(a)=a\Rightarrow 4a-6=a\Rightarrow 3a=6\Rightarrow a=2$. Punctul căutat este $A(2;2)$.

28. Graficul unei funcţii de gradul întâi f(x)=ax+b este paralel cu axa OX dacă a =0. În cazul nostru se ia 2m-4 =0 de unde rezultă m=2.

29). $f(x)=ax+b$. Din $f(1)=a$ şi $f(2)=a+3$ rezultă a =3 şi b= a-3. Atunci, $f(x)=3x+a-3$. Punând condiţia ca A să aparţină graficului lui f, rezultă: $f(a-3)=-4\Rightarrow a=2$;

5.2 Ecuaţii de gradul I

1). a) m=2; b) m=7; c) m=-3; d) m=2, m=-6; e) m=7; **2)**. a) x=5; b) x=2, x=4; c) x=-5; x=5;

5). Ecuaţia dată este echivalentă cu $8-4x-6x+9=16-2x\Rightarrow -8x=-1\Rightarrow x=\frac{1}{8}.\ S=\left\{\frac{1}{8}\right\}$**.**

10).Se pun condiţiile de existenţă ale rapoartelor. $x\in\mathbb{R}-\{-1;1\}$. După aducerea la acelaşi numitor se obţine $x^2-4x+3+2-x^2-x=0\Rightarrow x=1$. Dar ecuaţia nu este definită în 1.

5.3 Monotonia şi semnul funcţiei de gradul I

1). m=2; **2)**. $m\in(3;+\infty)$; **3)** $m\in(-2;+\infty)$; **4)** $m\in(-\infty;3)$;

5) . $m\in(-\infty;2)$; **6)**. $m\in(2;+\infty)$; **7)**. $m\in(-\infty;\frac{1}{2})$; **8)**. f crescătoare, $f(-3)\le f(x)\le f(3)$;

9). f descrescătoare, $f(4)\le f(x)\le f(-2)$; **10)**. Deoarece funcţia f este crescătoare ($\forall x_1\langle x_2 \Rightarrow f(x_1)\langle f(x_2)$), mulţimea valorilor funcţiei sau imaginea funcţiei este $\text{Im}\, f=f\left([-2;7]\right)=[f(-2);f(7)]=[-8;19]$**.** **11). a)** Utilizând definiţia, fie $x_1, x_2 \in R$ astfel încât $x_1\langle x_2$. Rezultă, $4x_1\langle 4x_2\Rightarrow 4x_1-2\langle 4x_2-2\Rightarrow$ f este strict crescătoare pe R; Se poate folosi semnul funcţiei de gradul întâi;

b) Analog, se observă că pentru x_1, x_2 fixaţi, astfel încât $x_1\langle x_2$ se obţine $-6x_1\rangle -6x_2\Rightarrow -6x_1+2\rangle -6x_2+2$. Rezultă că f este strict descrescătoare pe R.

c) Conform semnului funcţiei de gradul întâi, cum a^2+3 este pozitiv, rezultă că funcţia este strict crescătoare ; **12). a**) Dacă $m+2\rangle 0$ adică $m\rangle -2\Rightarrow$ f este strict crescătoare;

Dacă $m\langle -2\Rightarrow$ f este strict descrescătoare ;

b) Dacă $5-m\rangle 0$ adică $m\langle 5 \Rightarrow$ f este strict crescătoare; Dacă $m\rangle 5 \Rightarrow$ f este strict descrescătoare ; **c**) La fel ca la a) deoarece contează doar coeficientul lui x în studiul monotoniei funcţiei de gradul întâi ; **13)**. Pentru m=-8, rezultă $f(x)=-3x+3$, aşadar, f(x) este o funcție strict descrescătoare pe întreg domeniul de definiție.

x	$-\infty$				1							$+\infty$
f(x)= -3x+3	+	+	+	+	0	-	-	-	-	-	-	-

Se observă din tabelul semnului lui f că $f(x)\rangle 0, \forall x \in (-\infty;1)$ și $f(x) \le 0, \forall x \in [1;\infty)$.

14). a) $f(x)=ax+b$ este strict crescătoare $\Leftrightarrow a\rangle 0$. În cazul nostru, f este strict crescătoare $\Leftrightarrow m-3\rangle 0 \Rightarrow m\rangle 3$.

b) $f(x)=ax+b$ este strict descrescătoare $\Leftrightarrow a\langle 0$. În cazul nostru, f este strict descrescătoare $\Leftrightarrow m-3\langle 0 \Rightarrow m\langle 3$.

c) $f(x)=ax+b$ este strict constantă $\Leftrightarrow a=0$. În cazul nostru, f este strict constantă $\Leftrightarrow m-3=0 \Rightarrow m=3$. **15**). Se pune condiția ca $3-9m\rangle 0 \Rightarrow -9m\rangle -3 \Rightarrow m\langle \frac{3}{9} \Rightarrow m\langle \frac{1}{3}$.

16). Din tabelul semnelor se observă că $\frac{m+3}{4-2m}\rangle 0 \Leftrightarrow m \in (-3;2)$. **17**. Din tabelul semnelor se observă că $f(x) \ge 0, \forall x \in (-\infty;-1)\cup[2;\infty)$ și $f(x)\langle 0, \forall x \in (-1;2)$.

18). a) $S=\{(2;-3)\}$; b) $S=\{(2;3)\}$; c) $S=\{(2;4)\}$; d) $\varnothing$; **e)** $S=\{(-1;2)\}$; f) $S=\left\{\left(\sqrt{2};2\sqrt{2}\right)\right\}$;

19). a) $x \in (-\infty;2]$**; b)** $x \in [6;+\infty)$**; c)** $x \in (-\infty;-8)$**; d)** $x \in \left[-\frac{1}{4};2\right]$**; e)** $x \in (-\infty;-2)\cup[0;3)$**;**

5.4 Sisteme de ecuații

1). m = -3; 5) a=1, b=2; 6). a=2, b=5; **13)**. Se va înlocui x cu -2 și y cu 2. Se obține a = 1 și b = 3.

14). Sistemul de ecuații liniare are soluție unică dacă $\frac{m}{m+2} \ne \frac{-3}{-2} \Rightarrow m \ne -6$.

15) . Sistemul de ecuații liniare are soluție unică dacă $\frac{m-2}{3} \ne \frac{4}{m+2} \Rightarrow m^2-4 \ne 12$.

$\Rightarrow m^2 \ne 16$. $\Rightarrow m \ne \pm 4$. **16**). $S=\{(1;2),(1;-2),(-1;2),(-1;-2)\}$.

17). Din a doua ecuație se obține: $2x+4y+4=2x+y+1 \Rightarrow y=-1$. După înlocuirea lui x în prima ecuație, se obțin x = -1; Așadar, $S=\{(1;-1)\}$. **18**). $S=\{(2;1)\}$.

6. Funcția de gradul II

6.1 Funcția de gradul al doilea. Definiție. Graficul funcției

1). 0; **2)**. 0; **3)**. 0; **4**). 0; **5)**. 0; **7**). $f(2-\sqrt{3})=\left(2-\sqrt{3}\right)^2-4\left(2-\sqrt{3}\right)+1=4-4\sqrt{3}+3-8+4\sqrt{3}+1=0$;

8). $f(-1)=(-1)^2-3(-1)-10=-6$, $f\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)^2-3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-10=-\frac{33}{4}$

$f(-1)+f(-\frac{1}{2})=-6-\frac{33}{4}=-\frac{57}{4}$; **9)**. Întrucât f(1) = 4 rezultă

$(f\circ f)(1)-f(4)=f(f(1))-f(4)=f(4)-f(4)=0$; **10**). **a**) 0 ; **b**)

a)17; *b*)22; *c*)$\frac{11}{16}$; *d*)$10-2\sqrt{3}$. ; **11**). a) 10; b) $\frac{31}{4}$; c) $22-12\sqrt{2}$;

12). Imaginea funcţiei f este $Imf=\left\{3-3\sqrt{2},-1,1,13-6\sqrt{3},5\right\}$ deoarece

$f(-3)=(-3)^2-3\cdot(-3)+1=1$, $f(-1)=(-1)^2-3\cdot(-1)+1=5$,

$f(1)=-1$, $f(\sqrt{2})=3-3\sqrt{2}$, $f(2\sqrt{3})=13-6\sqrt{3}$.

13). a) Forma canonică a funcţiei de gradul al doilea este $f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}$.

După identificarea coeficienţilor $a=1,\ b=-6,\ c=8$ şi calculul discriminantului ecuaţiei de gradul al doilea asociate funcţiei, $\Delta=b^2-4ac=4$ se determină $\frac{b}{2a}=-3;-\frac{\Delta}{4a}=-1$ rezultând forma canonică $f\left(x\right)=\left(x-3\right)^2-1$;

b) Se identifică coeficienţii $a=-1,\ b=4,\ c=1$, $\Delta=b^2-4ac=20$, $\frac{b}{2a}=-2;\ -\frac{\Delta}{4a}=5\Rightarrow$

$f\left(x\right)=-\left(x-2\right)^2+5$;

c) $a=2,\ b=-1,\ c=1\ \Rightarrow\ \Delta=b^2-4ac=-7$, $\frac{b}{2a}=-\frac{1}{4};\ -\frac{\Delta}{4a}=\frac{7}{8}\ \Rightarrow\ f(x)=2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{8}$;

14) a) $f\left(x\right)=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{23}{4}$; b) $f\left(x\right)=2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{25}{8}$;

15).a) $2x^2-5x-3=0,\ a=2,\ b=-5,\ c=-3,\ \Delta=b^2-4ac=\left(-5\right)^2-4\cdot2\cdot\left(-3\right)=25+24=49$

$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{5\pm\sqrt{49}}{4}\Rightarrow x_1=\frac{12}{4}=3,\ x_2=\frac{-1}{2}\Rightarrow Gf\cap OX=\left\{A\left(3;0\right);B\left(\frac{-1}{2};0\right)\right\}$

$x=0\Rightarrow f\left(0\right)=-3\Rightarrow Gf\cap OY=\left\{C\left(0;-3\right)\right\}$

$V\left(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a}\right)=V\left(\frac{5}{4},-\frac{49}{8}\right)$- vârful parabolei;

b) $a=1,\ b=-3,\ c=-10,\ \Delta=b^2-4ac=\left(-3\right)^2-4\cdot1\cdot\left(-10\right)=49$.

$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{3\pm7}{2},\ x_1=\frac{10}{2}=5,\ x_2=\frac{-4}{2}=-2\Rightarrow Gf\cap OX=\left\{A\left(5;0\right),B\left(-2;0\right)\right\}$.

$x=0\Rightarrow f\left(0\right)=-10\Rightarrow Gf\cap OY=\left\{C\left(0;-10\right)\right\}$ $V\left(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a}\right)=V\left(\frac{3}{2},-\frac{49}{4}\right)$ - vârful parabolei.

c) $\cap Oy:\ x=0\Rightarrow f(0)=8\Rightarrow A(0;8)$.

$\cap Ox:\ y=0\Leftrightarrow f(x)=0\Rightarrow x^2-6x+8=0\Rightarrow x_1=2,\ x_2=4\Rightarrow\ B(2;0),\ C(4;0)$

$V\left(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a}\right)=V\left(3,-1\right)$- vârful parabolei.

d) $f(x)=2x^2-5x+1$; $\cap Oy:\ x=0\Rightarrow f(0)=1\Rightarrow A(0;1)$

$\cap Ox:\ y=0\Leftrightarrow f(x)=0\Rightarrow 2x^2-5x+1=0\Rightarrow x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{17}}{4},\ \Rightarrow$

$B(\frac{5-\sqrt{17}}{4};0),\ C(\frac{5+\sqrt{17}}{4};0)$

$V\left(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a}\right)=V\left(\frac{5}{4},\frac{-17}{8}\right)$- vârful parabolei.

16). a) $A(0;9)$, $B(3;0)$, $V(3,0)$; b) $A(0;3)$, $B(1;0)$, $C(3;0)$, $V(2,-1)$;

c) $A(0;25)$, $B(-5;0)$, $V(-5,0)$; d) $A(0;-12)$, $B(-2;0)$, $C(6;0)$, $V(2,-16)$;

e) $A(0;-7)$, $B(-7;0)$, $C(1;0)$, $V(-3,-16)$; f) $A(0;0)$, $B(4;0)$, $V(2,-4)$

g) $f(x)=-x^2+4x+22$, $A(0;22)$, $B(2-\sqrt{26};0)$, $C(2+\sqrt{26};0)$, $V(2,26)$

h) $f(x)=2x^2-4$, $A(0;-4)$, $B(-\sqrt{2};0)$, $C(\sqrt{2};0)$, $V(0,-4)$; i) $A(0;-1)$, $B(-1-\sqrt{2};0)$, $C(-1+\sqrt{2};0)$, $V(-1,-2)$; j) $A(-1;0)$; $B(3;0)$; $C(0;-6)$; $V(1,-8)$;

17). $f(x)=0\Leftrightarrow -x^2+7x-10=0,\ a=-1,b=7,c=-10,\Delta=b^2-4ac=9$

$x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-7\pm\sqrt{9}}{2\cdot(-1)}\Rightarrow x_1=\dfrac{-7+3}{-2}=2, x_2=\dfrac{-7-3}{-2}=5$. Aşadar, cele două puncte de intersecţie ale graficului funcţiei f cu axa Ox sunt $A(2;0)$, $B(5;0)$ iar distanţa dintre ele este 5-2 = 3;

$\Rightarrow f(x)=\dfrac{16}{9}x^2-\dfrac{8}{3}x+1$; **18).** $\dfrac{-b}{2a}=5=>\dfrac{m+3}{2m}=5=>9m=3;m=\dfrac{1}{3}$

19). a) a=1, rezultă $\text{Im}\, f(x)=[-\dfrac{\Delta}{4a};+\infty)=[-16;+\infty)$; $V\left(-\dfrac{b}{2a},-\dfrac{\Delta}{4a}\right)=V(2,-16)$;

b) a= -1, rezultă $\text{Im}\, f(x)=(-\infty;-\dfrac{\Delta}{4a}]=(-\infty;1]$; $V\left(-\dfrac{b}{2a},-\dfrac{\Delta}{4a}\right)=V(2,1)$;

20). f(-4)=2 ; f(0)=8 ; f(2)=16, unde $f(x)=\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{5}{2}x+8$; **21**) 5; **22**) 5; **23**) $m\in\{1;3\}$;

24). $m=-\dfrac{1}{4}$; **25**) m = 5; **26**) m =1; **27**). m=1; **28**). m = - 1;

29) a) $f(x)=x^2-2$ **; b)** $f(x)=x^2-5x$**; c)** $f(x)=2x^2-2x+1$**; d)** $f(x)=x^2-3x-10$ **; e)** $f(x)=-x^2-2x+3$ **; f)** $f(x)=x^2+6x+9$ **;**

g) $f(x)=x^2-8x+16$ **; h)** $f(x)=x^2-6x+8$ **; i)** $f(x)=-\dfrac{1}{5}x^2+x-4$;

30) a) $\text{Im}\, f(x)=[1;+\infty)$; $V(3,1)$; b) $\text{Im}\, f(x)=(-\infty;-\dfrac{7}{4}]$; $V\left(\dfrac{3}{2},-\dfrac{7}{4}\right)$; c)

$\text{Im}\, f(x)=[-9;+\infty)$; $V(2,-9)$; d) $\text{Im}\, f(x)=[-\dfrac{25}{12};+\infty)$; $V\left(-\dfrac{7}{6},-\dfrac{25}{12}\right)$; e)

$\text{Im}\, f(x)=[-\dfrac{1}{20};+\infty)$; $V\left(\dfrac{9}{10},-\dfrac{1}{20}\right)$;

f) $\text{Im}\, f(x)=(-\infty;-18]$; $V(-1,-18)$; g) $\text{Im}\, f(x)=[-\dfrac{9}{4};+\infty)$; $V\left(\dfrac{5}{2},-\dfrac{9}{4}\right)$; h)

$\text{Im}\, f(x)=[-\dfrac{1}{12};+\infty)$; $V\left(-\dfrac{5}{6},-\dfrac{1}{12}\right)$; i) $\text{Im}\, f(x)=[-9;+\infty)$; $V(0,-9)$.

31). Minimul funcţiei de gradul al doilea este dat de valoarea lui $-\dfrac{\Delta}{4a}=1$;

32). Maximul funcţiei de gradul al doilea este dat de valoarea lui $-\dfrac{\Delta}{4a}=10$;

33). Din $-\dfrac{\Delta}{4a}=5\Leftrightarrow-\dfrac{25-24m}{4m}=5\Rightarrow m=\dfrac{25}{4}$;

34). $-\frac{\Delta}{4a}=\frac{1}{8}\Leftrightarrow -\frac{m^2+2m+1+8m+16}{-8}=\frac{1}{8}\Rightarrow m\in\{-8;-2\}$. **39)** 1; **40)** $\frac{81}{4}$; **41).** $m\in\{-2;2\}$;

42). $m\in\{1;7\}$; **43).** Minimul unei funcţii de gradul al doilea se realizează în punctul $-\frac{b}{2a}=1\Rightarrow \frac{m-3}{6}=1\Rightarrow m=9$. **44).** Minimul funcţiei de gradul al doilea este egal cu $-\frac{\Delta}{4a}=4\Rightarrow$

$-\frac{m^2-8m-16}{4\cdot 2}=4\Rightarrow m^2-8m+16=0\Rightarrow (m-4)^2=0\Rightarrow m=4$. **45).** $m\in\{-6;2\}$;

6.2 Ecuaţia de gradul al doilea

1). Pentru x = 3 $\Rightarrow$ 9 - 3m + 6 = 0 $\Rightarrow$ m = 1.

2). Deoarece – 2 este soluţie a ecuaţiei date , se înlocuieşte x cu -2 şi rezultă: $4+2m^2+2+10m+2=0\Rightarrow m^2+5m+4=0\Rightarrow m\in\{-4;-1\}$.

3). Pentru ca ecuatia sa aiba solutii egale ($x_1=x_2$) trebuie ca $\Delta = 0$;

$\Delta = [2(m-1)]^2-4(m-1)=0 \Leftrightarrow 4(m^2-2m+1-m+1)=0 \Leftrightarrow m^2-3m+2=0 \Rightarrow m\in\{1;2\}$.

4). Ca o ecuaţie de gradul al doilea să aibă două rădăcini reale egale trebuie ca discriminantul ecuaţiei, $\Delta=b^2-4ac$, să fie egal cu 0. Prin urmare, din condiţia $\Delta=0$ rezultă $(m-3)^2-4(m-4)=0\Rightarrow (m-5)^2=0\Rightarrow m=5$.

5). Pentru ca graficul funcţiei să fie tangent cu axa OX trebuie pusă condiţia $\Delta=0$ de unde rezultă $m^2-4m-12=0\Rightarrow m_1=-2,\ m_2=6$. **6).** Punctele de intersectie se află rezolvând ecuaţia $f(x)=y$, $x^2-6x+8=0\Rightarrow x\in\{2;4\}$. Aşadar, punctele de intersecţie sunt $A(2;-5), B(4;-5)$.

7) a) $S=\left\{-\frac{5}{3},2\right\}$; b) $S=\{-1,4\}$; c) $S=\varnothing$; d) $S=\left\{\sqrt{2},2\sqrt{2}\right\}$; e) $S=\left\{-1,\frac{2}{3}\right\}$; f) $S=\{-3,3\}$;

g) $S=\{\pm 1;\pm 3\}$; h) $S=\left\{\pm 1;\pm 2\sqrt{2}\right\}$; i) $S=\{-2;2\}$; j) $S=\left\{\pm\frac{1}{2};\pm\sqrt{6}\right\}$; k) $S=\{-2;0;2\}$; l) $S=\{\pm 2;\pm 3\}$; **8)**. a) Ecuaţia dată este echivalentă cu $x(x+6)=0\Rightarrow x=0$ sau $x+6=0$. Aşadar, $S=\{-6;0\}$. c) Din $x^2=10\sqrt{1600}\Rightarrow x^2=10\cdot 40\Rightarrow x^2=400\Rightarrow x_{1,2}=\pm 20$. $S=\{-20;20\}$.

e) După aplicarea formulelor de calcul prescurtat ecuaţia dată devine $x^2+4x+4=0$ $\Leftrightarrow (x+2)^2=0\Rightarrow x=2$. Aşadar, $S=\{1\}$.

g) Din $(x-2)(x+3)=(2x+1)(x-3)\Rightarrow x^2-6x+3=0$ cu soluţiile $x_{1,2}=3\pm\sqrt{6}$.

i) Se observă că dacă notăm pe x^2 cu parametrul real t se obţine o ecuaţie de gradul a doilea în t şi anume $t^2-9t+20=0$ cu soluţiile $t_1=4\Rightarrow x^2=4\Rightarrow x_{1,2}=\pm 2$ şi $t_2=5\Rightarrow x^2=5\Rightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{5}$. Aşadar, $S=\left\{-\sqrt{5};-2;2;\sqrt{5}\right\}$. **9)**. $\Delta=(m-1)^2\rangle 0,\forall m\in\mathbb{R}$; **10)**. Δ=4 - 4(1- m^2) = $4m^2>0$ $\forall m\in\mathbb{R}$;

6.3 Monotonia şi semnul funcţiei de gradul al doilea

1). Întrucât funcţia f este de gradul întâi trebuie pusă condiţia $m^2+m-6\rangle 0$. Se asociază ecuaţia de gradul al doilea şi se rezolvă. $m^2+m-6=0\Rightarrow m_1=-3,\ m_2=2$. Cum m^2+m-6 este funcţie de gradul al doilea în m rezultă $m^2+m-6\rangle 0\Leftrightarrow m\in(-\infty;-3)\cup(2;+\infty)$.**2).** Deoarece discriminantul ecuaţiei de gradul al doilea $m^2-m+2=0$ este $\Delta=-7\langle 0$ rezultă că $m^2-m+2\rangle 0,\ \forall m\in\mathbb{R}$. Aceasta înseamnă că funcţia de gradul întâi f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.**3).** Deoarece discriminantul ecuaţiei de gradul al doilea $-m^2+3m-4=0$ este $\Delta=-7\langle 0$ rezultă că $-m^2+3m-4\langle 0,\ \forall m\in\mathbb{R}$. Aceasta înseamnă că funcţia de gradul întâi f este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$. **4).** $m\in(-\infty;-5)\cup(5;+\infty)$; **5)** $m^2-m+2=0$, $\Delta=-8\langle 0$, $2m^2-4m+3\rangle 0,\ \forall m\in\mathbb{R}$.;

6). $-m^2+m-3=0$, $\Delta=-11\langle 0$, $-m^2+m-3\langle 0,\ \forall m\in\mathbb{R}$. **;**

7). Cum $a=1\rangle 0$ iar $-\frac{b}{2a}=-\frac{3}{2}$ rezultă conform teoriei că f este descrescătoare pe $(-\infty;-\frac{3}{2})$ şi crescătoare pe $\left[-\frac{3}{2};+\infty\right)$. Din $x^2+3x-10=0\Rightarrow x_1=-5,\ x_2=2$. Aşadar, $f(x)\geq 0,\ \forall x\in(-\infty;-5]\cup[2;+\infty)$ **şi** $f(x)\langle 0,\ \forall x\in(-5;2)$**.**

8. a) Conform semnului funcţiei de gradul al doilea, f este strict descrescătoare pe $(-\infty;0]$ şi strict crescătoare în rest ; **b**) Conform semnului funcţiei de gradul al doilea, f este strict descrescătoare pe $(-\infty;\frac{3}{2}]$ şi strict crescătoare în rest ; **c**) Conform semnului funcţiei de gradul al doilea, f este strict descrescătoare pe $(-\infty;-\frac{1}{2}]$ şi strict crescătoare în rest ; **d**) Conform semnului funcţiei de gradul al doilea, f este strict crescătoare pe $(-\infty;1]$ şi strict descrescătoare în rest ;

9). a) Cum $-\frac{b}{2a}=-\frac{1}{m}\Rightarrow$ pentru $m\rangle 0$, f este strict descrescătoare pe $(-\infty;-\frac{1}{m}]$ şi strict crescătoare pe $[-\frac{1}{m};+\infty)$; Dacă $m\langle 0$, atunci f este strict crescătoare pe $(-\infty;-\frac{1}{m}]$ şi strict descrescătoare pe $[-\frac{1}{m};+\infty)$.

b) Cum m^2+1 este pozitiv, rezultă că f este strict descrescătoare pe $(-\infty;-\frac{m}{m^2+1}]$ şi strict crescătoare în rest ;

c) Dacă $m^2-1\rangle 0\Leftrightarrow m\in(-\infty;1)\cup(1;+\infty)\Rightarrow$ f este strict descrescătoare pe $(-\infty;-\frac{1}{2(m-1)}]$ şi strict crescătoare în rest ; dacă $m\in(-1;1)\Rightarrow$ f este strict crescătoare pe $(-\infty;-\frac{1}{2(m-1)}]$ şi strict descrescătoare în rest.

13). Funcţia de gradul întâi $f(x)=ax+b$ e crescătoare dacă şi numai dacă $a\rangle 0$. În cazul nostru, $a=2m^2-4m+3\rangle 0$ deoarece discriminantul ecuaţiei de gradul doi asociată funcţiei $f(m)=2m^2-4m+3$ este negativ. $\Delta=16-24=-8\langle 0$**.** Rezultă că f(x) este crescătoare.

14). Pentru ca o ecuaţie de gradul al doilea să aibă două soluţii reale se pune condiţia $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow m^2-4m-12 \geq 0 \Rightarrow m \in (-\infty;-2] \cup [6;\infty)$.

15). a) $x^2-7x+10=0,\ \Delta = b^2-4ac = (-7)^2-4\cdot 1\cdot 10 = 49-40 = 9$.

$x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{7 \pm \sqrt{9}}{2} = \dfrac{7 \pm 3}{2};\ x_1 = 2;\ x_2 = 5 \Rightarrow x \in (-\infty;2] \cup [5;+\infty)$

b) $x_1 = -1;\ x_2 = 5 \Rightarrow x \in (-\infty;-1) \cup (5;+\infty)$.

c) $4x^2+4x+1-x^2-x \leq x^2+10 \Rightarrow 4x^2+4x+1-x^2-x-x^2-10 \leq 0 \ \Rightarrow\ 2x^2+3x-9 \leq 0$

Din $2x^2+3x-9=0$, cu $x_{1,2} = \dfrac{-3 \pm 9}{4} \Rightarrow x \in \left(-3;\dfrac{3}{2}\right)$.

d) $\dfrac{x-3}{2x+8} \geq 0 \ \Rightarrow \dfrac{(x-3)(2x+8)}{(2x+8)^2} \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty;-4) \cup [3;+\infty)$;

16). a) $x \in (-\infty;2] \cup [6;+\infty)$; b) $x \in [-1;5]$; c) $x \in (-\infty;-3] \cup [-1;+\infty)$;

17). Inecuaţia dată este echivalentă cu $\dfrac{x^2-4x+9}{2x+1} - 1 \geq 0 \Rightarrow \ \dfrac{x^2-6x+8}{2x+1} \geq 0 \Rightarrow$

X	$-\infty$ $\quad -\frac{1}{2} \quad$ **2** $\quad$ **4** $\quad \infty$
$\mathbf{X^2-6X+8}$	+ + + + + + + **0** - - - - **0** + + + + + +
2x+1	- - - - - - - 0 + ++ + + + + + + + + + +
$\dfrac{x^2-6x+8}{2x+1}$	- - - - | + + + **0** **- - - -** **0** + + + + + +

Din tabelul semnelor se observă că fracţia este pozitivă pentru $x \in \left(-\dfrac{1}{2},2\right] \cup [4,\infty)$.

18). a) $x \in \mathbb{R}$; b) $x \in \varnothing$; c) $x \in \left(-\infty;-\dfrac{1}{3}\right) \cup (1;+\infty)$; d) $x \in \mathbb{R}$; e) $x \in \left[2;\dfrac{5}{2}\right]$; f) $x \in (-4;2)$; g) $x \in (-3;-1] \cup [1;3)$; h) $x \in (0;6]$; i) $x \in (-\infty;-3) \cup (2;+\infty)$; j) $x \in (-\infty;-4) \cup (-2;2) \cup (4;+\infty)$; k) $x \in (-\infty;-2) \cup (1;+\infty)$; l) $x \in (-\infty;-2) \cup (0;1) \cup (3;+\infty)$; m) $x \in (-2;1) \bigcup (2;+\infty)$;

19. Inecuaţia dată este echivalentă cu $x^2-5x+4 \leq 2x-2 \Rightarrow$
$x^2-7x+6 \leq 0 \Rightarrow x \in [1;6]$. **20).** Inecuaţia dată este echivalentă cu
$2x^2-9x-9\langle 0 \Rightarrow x \in \left(\dfrac{3}{2},3\right)$.

21). a) $x \in (-\infty;2] \cup [6;+\infty)$; b) $x \in [-1;5]$; c) $x \in (-\infty;-3] \cup [-1;+\infty)$;

6.4 Relaţiile lui Viete

1. $\begin{cases} x_1+x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2 = 7 \\ x_1 \cdot x_2 = 8 \end{cases}$. **2**). Se aplică relaţiile lui Viete: $\begin{cases} x_1+x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2 = 1 \\ x_1 \cdot x_2 = -3 \end{cases}$,

$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{x_1x_2}=-\frac{7}{3}$.

6). a) m=3; b) m = 4; c) Cum $x_1+x_2=4$ şi $x_1^2-x_2^2=(x_1-x_2)\cdot(x_1+x_2)\Rightarrow$

$x_1-x_2=2$. Din $\begin{cases}x_1+x_2=4\\x_1-x_2=2\end{cases}\Rightarrow 2x_1=6\Rightarrow x_1=3$. Dacă 3 este soluţie a ecuaţiei atunci rezultă că verifică ecuaţia dată: $3^2-4\cdot 3+m=0\Rightarrow m=3$. **7**). a) 7; b) 3; c) 7; d) 47; e) 334; f) -193; g) 111554; h) -1; **8**) a) - 2; b) $\frac{2}{3}$; c) $-\frac{2}{3}$; d) - 14; e) - 10; f) - 46; g) 46; h) 0;

9). Cum $x_1+x_2=6$ şi $x_1^2-x_2^2=(x_1-x_2)\cdot(x_1+x_2)\Rightarrow$

$x_1-x_2=2$. Din $\begin{cases}x_1+x_2=6\\x_1-x_2=2\end{cases}\Rightarrow 2x_1=8\Rightarrow x_1=4$. Dacă 4 este soluţie a ecuaţiei din enunţ, atunci rezultă că verifică ecuaţia dată: $4^2-6\cdot 4+m=0\Rightarrow m=8$.

10). Se aplică relaţiile lui Viete: $\begin{cases}x_1+x_2=-\frac{b}{a}\\x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+x_2=5\\x_1\cdot x_2=3\end{cases}$,

$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{x_1x_2}=\frac{19}{3}$.

11). Din formula $x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)$ şi aplicând relaţiile lui Viete de la exerciţiul 1) rezultă $x_1^3+x_2^3=7^3-3\cdot 8\cdot 7=175$.

12). Din relaţiile lui Viete se obţine $x_1+x_2=m,\quad x_1\cdot x_2=2$ iar din

$\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1}=3\Rightarrow\frac{x_1+x_2+2}{x_1\cdot x_2+x_1+x_2}=3,\Leftrightarrow\frac{m+2}{m+3}=3\Rightarrow m+2=9+3m\Rightarrow m=-\frac{7}{2}$

6.5 Sisteme de ecuaţii

1). a) $S=\{(-5;1),(1;-5)\}$; b) $S=\{(-2\sqrt{3};-\sqrt{3}),(-\sqrt{3};-2\sqrt{3})\}$; c) $S=\{(\frac{1}{2};2),(2;\frac{1}{2})\}$ d) $S=\{(\sqrt{2};\sqrt{2})\}$. **2**). a) $S=\{(1;3),(3;1)\}$; b) $S=\{(-4;1),(1;-4)\}$; c) $S=\{(-5;2),(2;-5)\}$; d) $S=\{(-1;2),(2;-1)\}$; e) $S=\{(1;1)\}$; f) $S=\{(-1;3),(3;-1)\}$; g) $S=\{(3;3)\}$; h) $S=\{(3;3)\}$; i) $S=\{(2\sqrt{2};\sqrt{2}),(\sqrt{2};2\sqrt{2})\}$ **3**). a) $S=\{(-1;8),(8;-1)\}$; b) $S=\{(2;\frac{1}{4}),(\frac{1}{4};2)\}$;

c) $S=\{(2\sqrt{3};\sqrt{3});(\sqrt{3};2\sqrt{3})\}$; d) $S=\{(-\frac{1}{3};\frac{2}{3}),(\frac{2}{3};-\frac{1}{3})\}$; e) $S=\{(1;5),(5;1)\}$;

4) a) $S=\{(1;2),(2;1)\}$; b) $S=\{(2;2),(-2;-2)\}$; c) $S=\{(-1;3),(3;1)\}$.

5. a) $S=\{(1;2),(2;1)\}$; b) $S=\{(-1;2),(2;-1)\}$; c) $S=\{(-1;2),(2;-1)\}$; d) $S=\{(-2;2);(2;-2)\}$;

e) $S=\{(-3;1);(1;-3)\}$

6). a) $S=\{(-1;3),(4;8)\}$; b) $S=\{(2;0)\}$; c) $S=\{(1;2),(3;2)\}$; d) $S=\{(1;1);(7;7)\}$;

e) $S=\{(-3;3);(3;-3)\}$; i) $S=\left\{\left(-\frac{1}{2};\frac{15}{2}\right),(4;12)\right\}$; j) $S=\left\{\left(\frac{2}{3};\frac{5}{3}\right),(1;2)\right\}$;

k) $S=\left\{\left(\frac{1}{2};0\right),(4;7)\right\}$; l) $S=\left\{(-1;0),\left(\frac{5}{3};\frac{2}{3}\right)\right\}$; **7)**. b) $S=\{(-1;1)\}$; c) $S=\{(-1;2)\}$;

11). a) $S=\left\{(-1;-6),\left(-\frac{1}{3};\frac{-16}{3}\right)\right\}$; b) $S=\{(-5;-2),(2;5)\}$.

1. Calcul vectorial

1.1 Vectori sub formă algebrică. Vectori egali

3). a) m= -2; n= 6; b) m= 9; n= -1; c) m= 2; n= -2;

1.2 Operaţii cu vectori

1). a) $6\vec{i}$; b) $-6\vec{i}-9\vec{j}$; c) $22\vec{i}+3\vec{j}$; d) $-16\vec{i}-27\vec{j}$; **2)**. a) $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)(0;7)$; b) $\left(2\vec{u}+3\vec{v}\right)(-2;17)$;

c) $\left(3\vec{u}-2\vec{v}\right)(10;6)$. **4)**. (-6; 24); **5)**. (10;-12);

1.3 Modulul unui vector

1. $\left|3\vec{u}-\vec{v}\right|=\sqrt{74}$; **2**. $2\vec{a}-3\vec{b}=(-5;-9)$, $\left|2\vec{a}-3\vec{b}\right|=\sqrt{(-5)^2+(-9)^2}=\sqrt{106}$; **5**. $a=\frac{-1}{3}$;

1.4 Vectori coliniari. Vectori necoliniari

1). a) $m\in\{-4;4\}$; b) m=0; **2)**. a) $m\in\{-3;5\}$; b) $m\in\left\{-3;\frac{5}{2}\right\}$.

3). Vectorii $\overrightarrow{OA}$ şi $\overrightarrow{OB}$ sunt coliniari $\Leftrightarrow\frac{a+2}{-2}=\frac{3}{1}\Rightarrow a=-8$. **4)**. $a=\frac{13}{2}$; **5)**. a=5;

6). $a=7$; **7)**. Vectorii $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ sunt ortogonali $\Leftrightarrow(3-m)\cdot4-(2+m)\cdot4=0\Rightarrow m=\frac{1}{2}$. **8)**. $a=\frac{3}{5}$;

2. Aplicaţii ale vectorilor în geometrie

1). Din ipoteză rezultă $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{CB}=\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{AB}=-2\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{BC}\Rightarrow\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{BC}}=2$.

2). Cum M şi P sunt mijloacele laturilor $[AB]$, $[AC]$ rezultă $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, atunci,

$\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(2\overrightarrow{AM}+2\overrightarrow{AP}\right)=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AP}.$

3) $m=\frac{3}{4}$. 4). a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\cdot\overrightarrow{AM}$. Cum AM este mediană în triunghiul dreptunghic, rezultă că $AM=\frac{BC}{2}=9$, iar $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=\left|2\overrightarrow{AM}\right|=18.$

b) Din $\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{MC}\Rightarrow\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0},$ şi AM =9, rezultă $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{AM}\right|=9.$

5). Cum $AC^2=AB^2+BC^2\Rightarrow AC=5\Rightarrow\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right|=5.$

6). Vectorii $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}$ sunt coliniari; 7). $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ coliniari implică $m=\frac{1}{2}$;

8). Fie $E\in[AB]$ astfel încât $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ şi $F\in[AC]$ astfel încât $\overrightarrow{AF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

Cum $\frac{\overrightarrow{AE}}{\overrightarrow{AB}}=\frac{\overrightarrow{CP}}{\overrightarrow{CB}}=\frac{1}{3}\Rightarrow EP\parallel AF$. (1) Din

$\overrightarrow{BP}=2\overrightarrow{PC}\Rightarrow\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}}=\frac{2}{1}\Leftrightarrow\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{PC}}=\frac{2}{2+1}\Leftrightarrow\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{BC}}=\frac{2}{3}\Rightarrow\Leftrightarrow\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{BC}}=\frac{\overrightarrow{AF}}{\overrightarrow{AC}}=\frac{2}{3}\Rightarrow EP\parallel AF$. (2).

Din (1) și (2) rezultă că ABCD este paralelogram. Conform cu regula paralelogramului, rezultă $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}$. Pe de altă parte, $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}=3\cdot\overrightarrow{AE}+2\cdot\frac{3}{2}\cdot\overrightarrow{AF}=3(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF})$.

Așadar, din ultimele două relații rezultă că $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AP}$.

9). a) Fie D mijlocul arcului BC. Atunci, $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}$. (1) (regula paralelogramului).

$m(BC)=120^0=m(BOC)$ deoarece $m(A)=60^0$. Cum $m(BAO)=30^0=m(BAD)$ deoarece $m(BD)=60^0$ rezultă că punctele A, O, D sunt coliniare, prin urmare, $\overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{OD}$. (2)

Din (1) și (2) rezultă că $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{OA}\Rightarrow\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$.

b) Fie M mijlocul laturii $[BC]\Rightarrow\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}$ (*). Cum în triunghiul echilateral, O = G, centrul de greutate, atunci, $\overrightarrow{AO}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}\Rightarrow2\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{AO}$. (**)

Din (*) și (**) rezultă $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AO}$.

11). a) $BD\perp AC\Leftrightarrow\overrightarrow{BD}\perp\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AC}=\vec{0}$.

12). $\overrightarrow{OM}\left(-\frac{1}{3};\frac{10}{3}\right)$; 13). $M(-4;7)$; 14). a) Se calculează mai întîi coordonatele vectorilor $\overrightarrow{AB}(1+2,5-3)=\overrightarrow{AB}(3;2)$, $\overrightarrow{BC}(-1-1,-4-5)=\overrightarrow{BC}(-2;-9)$. Rezultă, $2\cdot\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}=(6;4)-(-2;-9)=(8;13)$.

Lungimea vectorului $2\cdot\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}(8;13)$ este egală cu $\sqrt{8^2+13^2}=\sqrt{233}$.

b) $\overrightarrow{AC}(1;-7)$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=3\cdot1+2\cdot(-7)=3-14=-11$. c) $\overrightarrow{OG}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}\Rightarrow\overrightarrow{OG}(\frac{-2}{3},\frac{4}{3})$;

d) Se află mai întîi coordonatele mijlocului M, $M(0;\frac{1}{2})$ și apoi coordonatele vectorului mediană AM, $\overrightarrow{AM}(2;-\frac{5}{2})$.

e) Fie $D\in Ox\Rightarrow D(x;0)$. Atunci, $AB\parallel CD\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ sunt vectori coliniari.

Cum $\overrightarrow{AB}(3;2)$, $\overrightarrow{CD}(x+1;4)$ rezultă $\frac{3}{x+1}=\frac{2}{4}\Rightarrow x=5\Rightarrow D(5;0.)$

f) $D(x;0)$, $\overrightarrow{AC}(1;-7)$, $\overrightarrow{BD}(x-1,-5)$. Atunci, $AC\perp BD\Leftrightarrow\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}$ sunt ortogonali, adică $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0\Rightarrow1\cdot(x-1)+(-7)\cdot(-5)=0\Rightarrow x=-34$. Rezultă $D(-34;0)$.

15). a) Se determină mai întâi coordonatele vectorilor: $\overrightarrow{AB}(4;3)$, $\overrightarrow{BC}(3;-6)$, $\overrightarrow{AC}(7;-3)$. Atunci, $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{4^2+3^2}=5$, $\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{9+36}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$, $\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{49+9}=\sqrt{58}$.

b) $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}=4\cdot7+3\cdot(-3)=19$. c) $\cos A=\frac{\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\bullet\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\frac{19}{5\sqrt{58}}$.

16). a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}(7;-3)$; b) $\left|\overrightarrow{AB}\right|=2\sqrt{2}$; c) $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{BC}=0$; d) $a=-5$; e) $\overrightarrow{AM}(\frac{9}{2},-\frac{1}{2})$;

f) $\overrightarrow{OG}(4;\frac{11}{3})$. **17**). Dacă ABCD este paralelogram rezultă că vectorii $\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}$ au acelaşi mijloc adică $O\left(\frac{2+6}{2};\frac{1+3}{2}\right)=O(4;2)\Rightarrow a=4,b=-3$; **18)** Fie $D(a;b)$ Vectorii $\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}$ au acelaşi mijloc, rezultă $\left(\frac{a+1}{2};\frac{b+3}{2}\right)=\left(\frac{-4+6}{2};\frac{-2+4}{2}\right)\Rightarrow a=1,b=-1$;

19). $\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NP}=\vec{0};$ b) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC};$ c) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC};$

d) $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}+\frac{\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}}{2}+\frac{\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}}{2}=\vec{0}.$

20). a) $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{CO}=\vec{0};$ b) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\vec{0};$ c) $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{AD};$ d) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AC}$.

21). a) $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}$; b) $\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{AD}$; c) $\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}$;

d) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AB}+\vec{0}=\overrightarrow{AB}.$

22). a) $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BC}=\vec{0}$; b) $\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{OC}=\vec{0};$ c) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AC}$; d) $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}$.

23). $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BD}\Leftrightarrow\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DC}\Leftrightarrow\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DC};$

24). $\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{BA};$ şi $\overrightarrow{PD}-\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{CD};$ Cum $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$, rezultă ceea ce trebuia demonstrat.

25). a) Mijlocul unui vector $\overrightarrow{AB}$ determinat de punctele $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$ are coordonatele $M\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)$. În cazul nostru: $M\left(\frac{3+1}{2},\frac{4+6}{2}\right)=M(2;5)$; b) $M\left(\frac{-6-2}{2},\frac{0+4}{2}\right)=M(-4;2)$;

26). a) Coordonatele vectorului $\overrightarrow{AB}$ unde $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$, sunt date de formula $\overrightarrow{AB}\left(x_B-x_A,y_B-y_A\right)$. În cazul nostru, $\overrightarrow{AB}\left(1-3;6-4\right)=\overrightarrow{AB}\left(-2;2\right);$

b) $\overrightarrow{AB}\left(-2+6;4-0\right)=\overrightarrow{AB}\left(4;4\right);$

28). a) Modulul unui vector $\overrightarrow{AB}$ unde $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$, este egal cu

$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$ În cazul nostru,

$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(1-3)^2+(6-4)^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}=2\sqrt{2};$

$\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{(5-1)^2+(8-6)^2}=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}=2\sqrt{5};$

$\left|\overrightarrow{CA}\right|=\sqrt{(3-5)^2+(4-8)^2}=\sqrt{4+16}=2\sqrt{2};$ **30**). $\overrightarrow{r_A}=3\vec{i}+\vec{j};$ $\overrightarrow{r_B}=5\vec{i}+7\vec{j};$ $\overrightarrow{r_M}=4\vec{i}+4\vec{j};$

31). Fie M, N respectiv, P mijloacele segmentelor $[AB]$, $[BC]$, $[CA]$. Atunci,

$\overrightarrow{r_M}=\frac{\overrightarrow{r_A}+\overrightarrow{r_B}}{2}=\frac{2\vec{i}+4\vec{j}+(-3)\overrightarrow{i+j}}{2}=\frac{-\vec{i}+5\vec{j}}{2}\Rightarrow\overrightarrow{r_M}(-\frac{1}{2};\frac{5}{2})$; $\overrightarrow{r_N}=\frac{\overrightarrow{r_B}+\overrightarrow{r_C}}{2}=\frac{3\vec{i}+3\vec{j}}{2}\Rightarrow\overrightarrow{r_N}(\frac{3}{2};\frac{3}{2})$;

$\overrightarrow{r_P}=\frac{\overrightarrow{r_A}+\overrightarrow{r_C}}{2}=4\vec{i}+3\vec{j}\Rightarrow\overrightarrow{r_P}(4;3)$. 32. Cum $\overrightarrow{OG}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}$, rezultă

$G(\frac{-3+2+4}{3};\frac{4+6+2}{3})=G(1;4)$. 33). Vectorii corespunzători vîrfurilor triunghiului ABC sunt

$\overrightarrow{r_A}=3\vec{i}+2\vec{j};$ $\overrightarrow{r_B}=2\vec{i}+6\vec{j};$ $\overrightarrow{r_C}=-6\vec{i}+\vec{j};$ Atunci, $\overrightarrow{r_G}=\frac{\overrightarrow{r_A}+\overrightarrow{r_B}+\overrightarrow{r_C}}{3}=\frac{1}{3}\left(-\vec{i}+9\vec{j}\right).$

34). Fie $\overrightarrow{r_C}=m\vec{i}+n\vec{j}$. Cum $\overrightarrow{r_G}=\frac{\overrightarrow{r_A}+\overrightarrow{r_B}+\overrightarrow{r_C}}{3}\Rightarrow 3\cdot\left(5\vec{i}+4\vec{j}\right)=3\vec{i}+6\vec{j}+4\vec{i}-2\vec{j}+m\vec{i}+n\vec{j}\Rightarrow$

$15\vec{i}+12\vec{j}=(7+m)\vec{i}+(4+n)\vec{j}\Rightarrow\ m=8,n=8.$ 35). $\overrightarrow{r_G}=5\vec{i}-2\vec{j}.$ 36). $\overrightarrow{r_G}=\frac{\vec{i}}{4}$;

37). $\overrightarrow{r_G}=\vec{0}\Rightarrow\frac{\overrightarrow{r_A}+\overrightarrow{r_B}+\overrightarrow{r_C}}{3}=\vec{0}\Rightarrow\ (m+7+m-3)\cdot\vec{i}+(mj+2+2n+m+5)\cdot\vec{j}=\vec{0}\Rightarrow$

$m=-2,\text{n}=-\frac{3}{2}$;

38). ABCD e paralelogram dacă şi numai dacă diagonalele $[AC]$şi $[BD]$au acelaşi mijloc, adică $\overrightarrow{r_A}+\overrightarrow{r_C}=\overrightarrow{r_B}+\overrightarrow{r_D},$ (*). Fie D(m;n) atunci, din (*) rezultă $m=-9,n=2\Rightarrow\overrightarrow{r_D}=-9\vec{i}+2\vec{j}$.

40). Cum $\overrightarrow{r_G}=\frac{\overrightarrow{r_A}+2\cdot\overrightarrow{r_M}}{1+2}=\frac{16\vec{i}}{3}\Rightarrow\ G\left(\frac{16\vec{i}}{3};0\right).$ **42**). $\overrightarrow{r_A}+\overrightarrow{r_C}=\overrightarrow{r_B}+\overrightarrow{r_D}=2\overrightarrow{r_O}$.

3.3 Formule trigonometrice

3). 0; **5)**. a) $\sin 35^0\cdot\cos 55^0+\sin 55^0\cdot\cos 35^0=\sin(35^0+55^0)=\sin 90^0=1;$

b) $\sin 72^0\cdot\cos 27^0-\sin 27^0\cdot\cos 72^0=\sin(72^0-27^0)=\sin 45^0=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

c) $\cos 28^0\cdot\cos 32^0-\sin 28^0\cdot\cos 32^0=\cos(28^0+32^0)=\cos 60^0=\frac{1}{2}$;

d) $\cos 43^0\cdot\cos 13^0+\sin 43^0\cdot\sin 13^0=\cos(43^0-13^0)=\cos 30^0=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

6). $\sin x=\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $tgx=2\sqrt{2}$, $ctgx=\frac{\sqrt{2}}{4}$; **7).** $\cos x=\frac{\sqrt{21}}{5}$, $tgx=\frac{2\sqrt{21}}{21}$, $ctgx=\frac{\sqrt{21}}{2}$; **8).** $\sin A=\frac{\sqrt{15}}{4}$, $tgA=\sqrt{15}$; **9).** $\cos A=\frac{\sqrt{5}}{3}$, $\sin 2A=\frac{4\sqrt{5}}{9}$; **10).** $\sin(180^0-x)=\sin x=\frac{2\sqrt{2}}{3}$; **11).** $\cos a=\frac{2\sqrt{6}}{5}$, $\sin b=\frac{3}{5}$, $\sin(a+b)=\frac{4+6\sqrt{6}}{25}$, $\sin(a-b)=\frac{4-6\sqrt{6}}{25}$, $\cos(a+b)=\frac{8\sqrt{6}-3}{25}$, $\cos(a-b)=\frac{8\sqrt{6}+3}{25}$, $\sin 2a=\frac{4\sqrt{6}}{25}$, $\sin 2b=\frac{24}{25}$, $\cos 2a=\frac{23}{25}$, $\cos 2b=\frac{7}{25}$;

13). $\cos C=\sin B=\frac{2}{3}$; **14).** Se află mai întâi $\cos 2a=\sqrt{1-\sin^2 2a}=\sqrt{1-\frac{16}{25}}=\sqrt{\frac{9}{25}}=\frac{3}{5}$.

$\sin a=\sqrt{\frac{1-\cos 2a}{2}}\Rightarrow\sin a=\sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{2}}=\sqrt{\frac{1}{5}}$; **15)**. Cum

$\sin 3a=3\sin a-4\sin^3 a=3\cdot\frac{1}{3}-4\cdot\frac{1}{27}=1-\frac{4}{27}=\frac{23}{27}.$

16). $tg65^0=tg(90^0-25^0)=ctg25^0$. Cum $tg45^0=1$şi $tg25^0\cdot ctg25^0=tg25^0\cdot\frac{1}{tg25^0}=1.$, atunci produsul este egal cu 1. **17).** Se aplică faptul că $tg(90^0-x)=ctgx,\ \forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$şi $tgx\cdot ctgx=1$.

18). a) $1+\sin x$; b) $1-\cos x$; c) 1;

23). Se folosește faptul $A+B=\pi-C$ la care se aplică tangenta: $tg(A+B)=tg(\pi-C)$. Cum $tg(\pi-C)=-tgC\Rightarrow\frac{tgA+tgB}{1-tgA\cdot tgB}=-tgC\Rightarrow tgA+tgB=-tgC+tgA\cdot tgB\cdot tgC$, rezultând formula din enunț.

24). Se pleacă de la faptul că $\frac{A+B+C}{2}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\frac{A+B}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\Rightarrow tg\left(\frac{A+B}{2}\right)=tg\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)\Rightarrow$

$tg\left(\frac{A+B}{2}\right)=ctg\frac{C}{2}=\frac{1}{tg\frac{C}{2}}\Rightarrow c.c.t.d$.

25). Se aplică inegalitatea $x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx$, pentru $x=tg\frac{A}{2}$, $y=tg\frac{B}{2}$, $z=tg\frac{C}{2}$.

26). Metoda 1: $tg(3a-a)=\frac{tg3a-tga}{1+tg3a\cdot tga}\Rightarrow tg2a\cdot(1+tg3a\cdot tga)=tg3a-tga\Rightarrow c.c.t.d.$

Metoda 2: Se pleacă de la a+2a=3a și se trece la tangentă. $tg(a+2a)=tg3a$.

27). $tg(a+b+c)=\frac{tga+tg(b+c)}{1-tga\cdot tg(b+c)}$.

4.2 Teorema sinusurilor. Teorema cosinusului

1). Din $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}\Rightarrow\frac{6}{\sin A}=\frac{10}{\frac{1}{4}}\Rightarrow\sin A=\frac{3}{20}$; **2)**. Din

$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}\Rightarrow\frac{8}{\frac{2}{3}}=\frac{6}{\sin B}\Rightarrow\sin B=\frac{1}{2}$;

4). Într-un triunghi dreptunghic, raza cercului circumscris triunghiului este jumătate din ipotenuză; Cum BC = 10 rezultă R = 5;

5). $\sin A=\frac{2}{3}\Rightarrow\cos A=\frac{\sqrt{5}}{3}$**;** **6).** $\sin B=\frac{9}{10}\Rightarrow\cos B=\frac{\sqrt{11}}{10}$**;**

7). $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{9+36-49}{2\cdot3\cdot6}=-\frac{1}{9}\langle0\Rightarrow m(A)\rangle90^0$; **8**). Se află mai întâi coordonatele mijlocului lui [BC]. $M(3;2)$; Rezultă $AM=\sqrt{(3-1)^2+(2-6)^2}=\sqrt{4+16}=2\sqrt{5}$;

9). $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{81+64-144}{2\cdot9\cdot8}=\frac{1}{144}$;

10. Din $\sin B=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{AC}{BC}=\frac{1}{3}\Rightarrow BC=3AC$. Se aplică teorema lui Pitagora în triunghiul ABC rezultând $AC=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ și $BC=\frac{9\sqrt{2}}{2}$; **11).** $\cos(B+C)=\cos(\pi-A)=-\cos A\Rightarrow$

$\cos A=-(\cos B\cos C-\sin B\sin C)=-\frac{\sqrt{6}}{3}+\frac{1}{6}$**.**

12). $AM^2=\frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}=\frac{2(36+64)-36}{4}=41\Rightarrow AM=\sqrt{41}$;

4.3 Aria triunghiului

1). Se află mai întâi cu teorema lui Pitagora $AB=16\Rightarrow A_{ABC}=\frac{AB\cdot AC}{2}=\frac{16\cdot 12}{2}=96$; **2).** $R=12$; **27.** $BC=2\sqrt{7},\ A=6\sqrt{3}$; **4).** $AB=4\sqrt{3},\ AC=4$; **5).** $AM=\sqrt{53}$; **6).** $A=16\sqrt{3}$; **7).** $A=4\sqrt{3}$; **8).** $A=15\sqrt{3}$; **9).** $A=84$; **10).** $A=10$; **11).** $h=\frac{36}{5}$; **12).** $A=108$; **13).** a) $A=\frac{15\sqrt{7}}{4}$; b) $A=24$; **14).** a) A= 30; b) A= 12; c) $A=18\sqrt{6}$; **15).** Din formulele $S=\frac{b\cdot c\cdot \sin A}{2}=\frac{a\cdot c\cdot \sin B}{2}=\frac{a\cdot b\cdot \sin C}{2}$, cum $\sin A=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$, $\sin B=2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}$, etc., rezultă formulele din enunț.

16). Din Teorema sinusurilor, obținem $b=\frac{a\sin B}{\sin A}$ care se înlocuiește în relația $S=\frac{a\cdot b\cdot \sin C}{2}$ obținându-se $S=\frac{a\cdot\frac{a\sin B}{\sin A}\cdot\sin C}{2}=\frac{a^2\sin B\cdot\sin C}{2\sin A}$.

17). Cum $b=2r\sin B,\ c=2r\sin C$, acestea se înlocuiesc în formula $S=\frac{abc}{4R}$, rezultând formula din enunț. **18).** Metoda 1: Se aplică teorema cosinusului: $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$, $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$, $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$. Prin adunarea celor trei relații rezultă $a^2+b^2+c^2=2bc\cos A+2ac\cos B+2ab\cos C=$
$=2bc\sin A\cdot ctgA+2ac\sin B\cdot ctgB+2ab\sin C\cdot ctgC=\ 4S\cdot ctgA+4S\cdot ctgB+4S\cdot ctgC$.
Metoda 2:
Cum $2SctgA=bc\cancel{\sin A}\cdot\frac{\cos A}{\cancel{\sin A}}$; $2SctgB=ac\cancel{\sin B}\cdot\frac{\cos B}{\cancel{\sin B}}$; $2SctgC=ab\cancel{\sin C}\cdot\frac{\cos C}{\cancel{\sin C}}\Rightarrow$
$2SctgA+2SctgB+2SctgC=bc\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+ac\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}+ab\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\Rightarrow$
$4S(ctgA+ctgB+ctgC)=a^2+b^2+c^2$.

19). $S=\frac{AB\cdot r}{2}+\frac{BC\cdot r}{2}+\frac{AC\cdot r}{2}=r\cdot p$;

20). Cum $tg\frac{A}{2}=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}=\frac{\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}}{\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}}=\frac{\sqrt{(p-b)(p-c)}}{\sqrt{p(p-a)}}=\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p(p-a)}$, prin înlocuire în relația dată se obține că S=S.

Partea a III-a
TESTE RECAPITULATIVE, CLASA a IX-a

Testul 1. 1) $b_5=768$; 2) $-m^2+m-3\langle 0,\forall m\in\mathbb{R}$ deoarece discriminantul asociat ecuaţiei de gradul doi, $\Delta=-11\langle 0$; 3) $a_{15}=44$; 4) $-\frac{2}{3}$; 5) $\frac{4\sqrt{5}}{9}$; 6) $\sin A=1$

Testul 2. 1) $a_{12}=2,5$; 2) $-\sqrt{3}+5$; 3) b_9=6144; 4) $m\in\{3,5\}$; 5) $R=8$; 6) 30;

Testul 3. 1) $S_n=\frac{(3+158)\cdot 32}{2}=2576$; 2) 2;14; 3) 5; 4) $m=-9$ 5) 5;

6) $\cos a = \sqrt{1-\sin^2 a} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Aşadar, $\sin 2a = 2\frac{1}{3}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{9}$.

Testul 4. 1). 2; 2). $A = \left[\frac{2}{3},1\right]$; 3) $\text{Im}\, f = [f(1); f(-1)] = [2;12]$. ;

4). $3(x_1 + x_2) - 2x_1 \cdot x_2 = 3\cdot\frac{m+2}{3} - 2(m-1) = 4 - m$; 5). $\sqrt{3}+1$; 6) $\cos A = \frac{5}{9}$;

Testul 5. 2) A(2;2); 3) $A(1;1)$ şi $B(\frac{3}{2};\frac{3}{2})$.; 4) $S_n = \frac{(1+151)\cdot 26}{2} = 1976$; 5) $\overrightarrow{AB}(9;-5)$;

6) $\frac{2m-1}{m+2} = \frac{3}{2} \Rightarrow m = 8;$

Testul 6. 1). $b_8 = b_1 \cdot q^7 = 5\cdot 3^7 = 10935$. 2). Cum $f(6) = 0$ rezultă că produsul este zero. 3). $a_{50} = a_1 + (50-1)\cdot r = 3 + 49\cdot 7 = 346$. 4). Soluţiile ecuaţiei $f(x) = 0$ sunt $x_1 = -2, x_2 = 5$ rezultă punctele de intersecţie cu axa OX sunt $A(-2;0), B(5;0)$. 5). 0; 6). $\frac{2\sqrt{2}}{3}$;

Testul 7. 1). $a = 9.$; 2). $-\frac{\Delta}{4a} = -\frac{25+24}{8} = -\frac{49}{8}$. 3). $m - 6 \langle 0 \Rightarrow m \langle 6$. $m \in (-\infty, 6)$; 4). $a_1 = 3$;

5). $BC = 4\sqrt{3}$; 6). Cum triunghiul ABC este dreptunghic în A rezultă $A_{ABC} = \frac{AB\cdot AC}{2} = 30$;

Testul 8. 1). $m \in \{1;2\}$. 2). $b_1 = 6$; 3). 25; 4).m=0; 5). 0; 6). $tg\ a = \frac{3}{4}$.

Testul 9. 1). m= - 4; 2). 63; 3). 5; 4) x=1 şi y=2; 5). $\frac{4}{5}$; 6). P=12.

Testul 10. 1). 0; 2). -3; 3). V(3,-4); 4) 0; 5). E=1; 6). (1;-2).

Testul 11. 1). $\frac{9}{4}$; 2). 11; 3). x=5; 4). 2,-4; 5) a; 6) R=7.

Testul 12. 1). $x \in \left[\frac{1}{2};2\right] \cap \mathbb{Z} = \{1;2\}$; 2). 3 şi 2; 3). V($\frac{5}{4}$;- $\frac{17}{8}$); 4). $\frac{488}{7}$; 5). $\frac{\sqrt{3}}{3}$; 6). (-21;-5).

Testul 13. 1). 49; 2). $A(3;-4)$; 3). 7; 4). $x \in (-\infty;0) \cup (1;\infty)$; 5). (9;1); 6). $S = 9\sqrt{3}$;

Testul 14. 1). 0; 2). $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = -3$; 3). $a = -\frac{8}{5}$; 4). $n = -1$; 5). 11 ; 6). 0 ;

Testul 15. 1). 128 ; 2). 26; 3). x = 3; 4). p = -1 ; 5). 1 ; 6). $\sin C = \frac{3}{5}$;

Testul 16 1). 63 ; 2). 5 şi - 1 ; 3). $x^2 - x - 2 = 0$; 4). 0; 5). Se demonstrează ; 6). $12\sqrt{3}$;

Testul 17. 1). $x \in \left(-2;\frac{2}{3}\right)$; 2). $x \in (-1;\infty)$; 3). Produsul este - 1 ; 4). 20% ; 5). $\vec{0}$;

Testul 18 2). - 2 ; 3). m = - 1 ; 4) m=2; 5). $c = 3\sqrt{2}$; 6). 0 ;

2. Probleme propuse pentru concursuri

1). Se ridică la puterea a doua relaţia dată, $7+2\sqrt{5-x}\cdot\sqrt{2+x} = 9$. Rezultă $\sqrt{5-x}\cdot\sqrt{2+x} = 1$.

2). $(a+1)^2+(b+2)^2=0\Rightarrow a=-1,b=-2$. Atunci, $(-1)^{2013}-(-1)^{2013}=0$.

3). $x=\dfrac{\left(3^{2016}-1\right)+\left(9^{2016}-1\right)+\left(27^{2016}-1\right)}{3^{2016}-1}=\dfrac{\left(3^{2016}-1\right)+\left(3^{2016}-1\right)\left(3^{2016}+1\right)+\left(3^{2016}-1\right)\left((3^{2016})^2+3^{2016}+1\right)}{3^{2016}-1}=(5p)$

$=1+3^{2016}+1+(3^{2016})^2+3^{2016}+1\in\mathbb{N}$ $(3p)$

S-au folosit formulele $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$, (1p), $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$, (1p).

4). Se aduc rapoartele la acelaşi numitor rezultând:

$$\frac{a^2b+b+a^2+1+ab^2+b^2+a+1}{(a+1)(b+1)}=\frac{ab(a+b)+a+b+2+(a+b)^2-2ab}{ab+a+b+1}=\frac{103}{17}.$$

5). $\sqrt{A}\in\mathbb{Q}\Leftrightarrow A=k^2,\ k\in\mathbb{Q}$.

$A=\underbrace{99999...9}_{n\ de\ 9}\underbrace{333...3}_{n-1\ de\ 3}4-\dfrac{5}{9}=\underbrace{999...99}_{2n\ de\ 9}-\underbrace{6666...66}_{n\ de\ 6}+1-\dfrac{5}{9}=$ $(1p)$

$=9(10^{2n-1}+10^{2n-2}+...+10+1)-6(10^{n-1}+10^{n-2}+...+10+1)+1-\dfrac{5}{9}=$

$=9\cdot\dfrac{10^{2n}-1}{9}-6\cdot\dfrac{10^n-1}{9}+\dfrac{9}{9}-\dfrac{5}{9}=\dfrac{9\cdot10^{2n}-6\cdot10^n-9+6+9-5}{9}=\dfrac{(3\cdot10^n-1)^2}{3^2}.$

Aşadar, $A=\left(\dfrac{3\cdot10^n-1}{3}\right)^2$. 6). x= -2;

7). $A=\left|x-\sqrt{12}\right|+\left|x-\sqrt{48}\right|+\left|\sqrt{108}-2x\right|=0,\forall\ x\in(-\infty;2\sqrt{3}]\cup[4\sqrt{3};\infty)$.

8). $2013\bullet2015=(2014-1)\bullet(2014+1)=2014^2-1$, $2012\bullet2014=(2013-1)\bullet(2013+1)=2013^2-1$;

Expresia dată devine $\left(\sqrt{1+2014^2-1}-\sqrt{1+2013^2-1}\right)^{2014}=(2014-2013)^{2014}=1$.

9). $a=(\sqrt{2}+1)^{-1}+\left|2\sqrt{2}-3\right|=\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}-2\sqrt{2}+3=\sqrt{2}-1-2\sqrt{2}+3=2-\sqrt{2}$,

$b=\sqrt{6+4\sqrt{2}}=\sqrt{(2+\sqrt{2})^2}=2+\sqrt{2}$. $m_a(a,b)=\dfrac{a+b}{2}=2$. $m_g(a,b)=\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{2}$.

10). $A=(1-\sqrt{2})^{2014}\bullet\dfrac{1}{(3-2\sqrt{2})^{1007}}=\left[(1-\sqrt{2})^2\bullet\dfrac{1}{3-2\sqrt{2}}\right]^{1007}=\left[(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})\right]^{1007}=1$.

11). $1+3+5+...+2017=1009^2$;

ultima cifră a lui 1009^2 -2018 este 3. Rezultă că numărul dat sub radical nu este pătrat perfect

12) $x_1+x_2+x_3+.....+x_n$=1+2+3+...+2016=1008.2017

13). $\sqrt{19-8\sqrt{3}}=4-\sqrt{3}$, $\sqrt{3\sqrt{3}+\sqrt{19-8\sqrt{3}}}=\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\sqrt{3}+1$;

$\left(\sqrt{3}-1\right)^{-2}=\dfrac{1}{(\sqrt{3}-1)^2}=\dfrac{1}{4-2\sqrt{3}}=\dfrac{4+2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$

$\sqrt{3}+1+\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}=a+b\sqrt{3}\Leftrightarrow$ Rezultă a = 2; $b=\dfrac{3}{2}$;

14. Ecuaţia dată este echivalentă cu $|a|+|3-a|-|a+2|=3$

Explicitarea modulelor, $|a|=\begin{cases}a, & a\geq0\\ -a, a\langle0\end{cases}$, $|3-a|=\begin{cases}3-a, a\leq3\\ -3+a, a\rangle3\end{cases}$, $|a+2|=\begin{cases}a+2, & a\geq-2\\ -a-2, a\langle-2\end{cases}$

Pentru $a\in(-2;0)$ ecuaţia devine $-a+3-a-a-2=3\Rightarrow a=\dfrac{-2}{3}\in(-2;0)$.

15). $3-2\sqrt{2}=(\sqrt{2}-1)^2 \Rightarrow \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}=\sqrt{2}-1$; $7-5\sqrt{2}+\sqrt{2}-1=6-4\sqrt{2}=(2-\sqrt{2})^2 \Rightarrow$

$x=\sqrt{5-4\sqrt{2}+2\sqrt{2}\cdot(2-\sqrt{2})}=\sqrt{5-4\sqrt{2}+4\sqrt{2}-4}$.

Rezultă că x=1 ceea ce inseamnă că x este natural.

16). Se pleacă de la ultimul radical: $2013\bullet 2015=(2014-1)\bullet(2014+1)=2014^2-1$,

$\sqrt{1+2013\bullet 2015}=\sqrt{1+2014^2-1}=2014$; Analog şi pentru ceilalți radicali:

$\sqrt{1+2012\bullet 2014}=\sqrt{1+2013^2-1}=2013$, $\sqrt{1+2011\bullet 2013}=\sqrt{1+2012^2-1}=2012$,rezultă

$A=\sqrt{1+2010\bullet 2012}=\sqrt{1+2011^2-1}=2011$. 17) E(x)=2; 18). a) Se ridică la puterea a doua. $\frac{x^2+y^2}{2}\geq\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$ $4(x^2+y^2)\geq 2(x^2+2xy+y^2)$

$\Rightarrow 2(x^2+y^2)\geq x^2+2xy+y^2 \Leftrightarrow (x-y)^2\geq 0,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$.

b) $\sqrt{\frac{x^2+6xy+9y^2+81}{2}}\overset{a)}{=}\sqrt{\frac{(x+3y)^2+9^2}{2}}\geq\frac{x+3y+9}{2}$

$\sqrt{\frac{x^2-4xy+4y^2+16}{2}}\overset{a)}{=}\sqrt{\frac{(x-2y)^2+4^2}{2}}\geq\frac{x-2y+4}{2}$. Atunci, membrul stâng este mai mare sau egal decât $\frac{2x+y+13}{2}$. Pentru a avea egalitatea din enunțul problemei, trebuie să avem egalitate și în inegalitățile de mai sus. $\Rightarrow\begin{cases}x+3y=9\\x-2y=4\end{cases}\Rightarrow y=1,\ x=6.$

19). Prin ridicarea la pătrat a inegalității date se obține $(4n+1)^2\rangle 4(4n+1)\cdot n+4n \Rightarrow 1\rangle 0$ (A)

Se dau valorui lui n:

n=1 , $\sqrt{1+\frac{1}{1}}=\sqrt{2}\rangle 1+\frac{2}{5}$; n=2, $\sqrt{1+\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{3}{2}}\rangle 1+\frac{2}{9}$; .....

n=2014, $\sqrt{1+\frac{1}{2014}}=\sqrt{\frac{2015}{2014}}\ \rangle\ 1+\frac{2}{8057}$.

Prin inmulțirea relațiilor de mai sus rezultă

$\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}}\cdot.....\cdot\frac{\sqrt{2015}}{\sqrt{2014}}\ \rangle\ \left(1+\frac{2}{5}\right)\cdot\left(1+\frac{2}{9}\right)\cdot.....\cdot\left(1+\frac{2}{8057}\right)\Rightarrow$ ceea ce trebuia demonstrat.

20). Din inegalitatea $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leq\sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2},\ \forall a,b\in\mathbb{R}^*_+$ rezultă că $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq\frac{4}{a+b}$ şi din

$ab\leq\frac{(a+b)^2}{4}\Rightarrow\frac{1}{ab}\geq\frac{4}{(a+b)^2}$ Atunci,

$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)=1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{ab}\geq 1+\frac{4}{a+b}+\frac{4}{(a+b)^2}=\left(1+\frac{2}{a+b}\right)^2$

21). Se aplică inegalitatea $\sqrt{x\cdot y}\leq\frac{x+y}{2},\forall x,y\in\mathbb{R}$; $\sqrt{(4a+1)\cdot 1}\langle\frac{(4a+1)+1}{2}=\frac{4a+2}{2}$. Analog pentru celelalte relații. Prin însumarea relațiilor de mai sus rezultă,

$\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+2}+\sqrt{4c+3}+\sqrt{4d+4}\langle\frac{4(a+b+c+d)+2+3+4+5}{2}=\frac{4\cdot 1+14}{2}=\frac{18}{2}=9$;

22). Se utilizează formula $x+\frac{1}{x}\geq 2, \forall x\in \mathbb{R}_+^*$;

$\frac{a^2+a+1}{a}=a+1+\frac{1}{a}\geq 3$; $\frac{b^2+9b+1}{b}=b+9+\frac{1}{b}\geq 11$; $\frac{c^2+59c+1}{c}=c+59+\frac{1}{c}\geq 61$;

Din înmulţirea inegalităţilor, rezultă

$(a^2+a+1)(b^2+9b+1)(c^2+59c+1)\geq 3a\cdot 11b\cdot 61c=2013abc$.

b) $(a-b)^2\cdot c+(b-c)^2\cdot a+(c-a)^2\cdot b+9abc=$

$(a^2-2ab+b^2)\cdot c+(b^2-2bc+c^2)\cdot a+(c^2-2ac+a^2)\cdot b+9abc=$

$=a^2c-2abc+b^2c+b^2a-2abc+c^2a+c^2b-2abc+a^2b+9abc=$

$=(a+b+c)(ab+bc+ac)\leq \frac{(a+b+c)^3}{3}$, $\forall a,b,c\in(0;\infty)$.

23). După prima secundă, meteoritul parcurge distanţa $d_1 = 10$km,

după a doua secundă, parcurge distanţa $d_2=10+2$ km, după a treia secundă, $d_3=10+2\cdot 2$ km, şi aşa mai departe, după a n-a secundă, meteoritul parcurge o distanţă $d_n=10+(n-1)\cdot 2$ km. Suma tuturor acestor distanţe reprezentând termenii unei progresii aritmetice de raţie 2 este egală cu 206550.

Din 206550 = n·10 + 2(1+2+3+...+ n-1) rezultă $206550=10n+\cancel{2}\cdot\frac{(n-1)\cdot n}{\cancel{2}}\Rightarrow$

$206550=10n+n^2-n=0$.

$n^2+9n-206550=0\Rightarrow n_{1,2}=\frac{-9\pm\sqrt{81+4\cdot 206550}}{2}=\frac{-9\pm\sqrt{826281}}{2}=\frac{-9\pm 909}{2}$.

Se obţine n = 7’ 30’’ adică timpul pentru ca meteoritul să ajungă pe Pământ.

24). Din $2(a_2+4)^2+(a_6-4)^2=0\Rightarrow a_2=-4,\quad a_6=4$.

$a_6-a_2=(6-2)\cdot r\Rightarrow r=2.\qquad a_{10}-a_6=4r\Rightarrow a_{10}=12.\qquad a_1=a_2-r=-6$;

$$S_{10}=\frac{(a_1+a_{10})\cdot 10}{2}=30.$$

25). a) $a_{n+1}-a_n=8n+8-8n+4=4=ct$. Atunci, $(a_n)_{n\geq 1}$ este progresie aritmetică.

Aşadar, membrul stâng este suma unei progresii aritmetice, $\frac{(4+8n-4)\cdot n}{2}$:

$\frac{(4+8n-4)\cdot n}{2}=2016^2\Rightarrow 4n^2=2^2\cdot 1008^2\Rightarrow n=1008$.

b) $b_n=2^{8n-4}\Rightarrow\frac{b_{n+1}}{b_n}=2^8=q$. Atunci, $(b_n)_{n\geq 1}$ este progresie geometrică.

$b_1=2^4;\quad S=2^4+2^{8\cdot 2-4}+2^{8\cdot 3-4}+...+2^{8\cdot 2016-4}\qquad S=2^4\cdot\frac{(2^8)^{2016}-1}{2^8-1}=\frac{16}{255}(2^{16128}-1)$.

26). a) $\frac{b_9}{b_5}=q^4\Rightarrow\frac{(x^2+1)^5}{(x^2+1)^3}=q^4\Rightarrow(x^2+1)^2=q^4\Rightarrow q=\sqrt{x^2+1}$.

Din $b_5=b_1\cdot q^4\Rightarrow(x^2+1)^3=b_1\cdot\sqrt{x^2+1}^4\Rightarrow b_1=x^2+1$.

b) $\sum_{k=2}^{n}b_{k-1}\cdot b_{k+1}=\sum_{k=2}^{n}b_1\cdot q^{k-2}\cdot b_1\cdot q^k=\sum_{k=2}^{n}b_1^2\cdot q^{2k-2}=\sum_{k=2}^{n}(x^2+1)^{k+1}=$

$=(x^2+1)^3+(x^2+1)^4+...+(x^2+1)^{n+1}=\frac{(x^2+1)^{n+2}-(x^2+1)^3}{x^2}$.

27). Înlocuim în relaţia dată pe x cu –x şi se obţine relaţia $3f(-x)-f(x)=2x^4-6x^2$,

care împreună cu relaţia din enunţ formează un sistem de ecuaţii. De aici se obţine că f(-x)=f(x)=x^4-3x^2.

28). $f(\sqrt{3})=\dfrac{1}{2-\sqrt{3}} \Leftrightarrow a\sqrt{3}+b=\sqrt{3}+2$. Rezultă, a= 1 şi b = 2, şi f(x)=x+2.

$f(1)+f(2)+....+f(n)=375 \Leftrightarrow 375=\dfrac{n(n+1)}{2}+2n \Rightarrow \quad n(n+5)=750 \Rightarrow n=25$.

29). Cum compunerea lui f de mai multe ori este funcţie de gradul I rezultă f(x)=ax+b.
Atunci, $(f\circ f)(x)=a^2x+ab+b$, $(f\circ f\circ f)(x)=a^3x+a^2b+ab+b$
Prin inducţie rezultă $\underbrace{f\circ f\circ.....\circ f}_{2011 termeni}=a^{2011}x+a^{2010}b+....+ab+b=x+4022$
Rezultă a=1 şi b=2. f(x)=x+2
30). Facem transformarea $x\to -x$ de unde rezultă $f(-x)+f(x)=4x+6$. Rezolvând sistemul cu cele două relaţii se obţine $f(x)=4x+2$. Prin urmare f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.
b) $\underbrace{(f\circ f)}_{2\ de\ f}(x)=f(f(x)+2=4(4x+2)+2=4^2x+4\cdot 2+2$

$\underbrace{(f\circ f\circ f)}_{3\ de\ f}(x)=4\left(f\circ f\right)(x)+2=4\cdot\left(4^2x+4\cdot 2+2\right)+2=4^3x+4^2\cdot 2+4\cdot 2+2$.

Prin inducţie se arată că $\underbrace{(f\circ f\circ.....\circ f)}_{n\ de\ f}(x)=4^nx+(4^{n-1}+.....+4+1)\cdot 2$.

Aşadar, $\underbrace{(f\circ f\circ.....\circ f)}_{2015\ de\ f}(x)=4^{2015}\cdot x+\dfrac{4^{2015}-1}{3}\cdot 2$

31). a) $f(-1)+f(-2)+....+f(-10)=4350 \Leftrightarrow 1^2+2^2+..+10^2+6\cdot\dfrac{10\cdot 11}{2}+10m=4350 \Rightarrow$
m=1.
b) $x^2-6x+m=(x-3)^2+m-9\geq 0 \Leftrightarrow m\geq 9;$ (1)
$mx^2+2mx+m+2\geq 0 \Leftrightarrow \Delta\leq 0,\ m\rangle 0$. Din $m^2-16m\leq 0 \Rightarrow m\in[0;16]$, (2). Din (1) şi (2) rezultă
$m\in[9;16]$.

32). $g(f(x))=\dfrac{9x-1}{x+3} \Leftrightarrow af(x)+b=\dfrac{9x-1}{x+3} \Rightarrow a\cdot\dfrac{x-1}{x+3}+b=\dfrac{9x-1}{x+3}. \Rightarrow a=7,\ b=2,$
$\Rightarrow g(x)=7x+2;$

$(\underbrace{g\circ g\circ....\circ g}_{2013\ de\ g})(x)=7^{2013}x+2\cdot(7^{2012}+7^{2011}+...+7)=7^{2013}x+\dfrac{7^{2013}-7}{3}$;

g(1)= 9; Notăm x+2 = t, rezultă x= t-2, atunci, $h(t)=t^2-4t+4+4t-8+9=t^2+5$.
Se face schimbarea de variabilă t = x, rezultând, $h(x)=x^2+5$.

33). Notăm f(x) = a şi $f(\dfrac{1}{x})=b$. Rezultă, $a+2011b=x^2+\dfrac{2011}{x^2}+2012$.

Facem transformarea $x\to\dfrac{1}{x}\Rightarrow b+2011a=\dfrac{1}{x^2}+2011x^2+2012$.

Din rezolvarea sistemului rezultă a= f(x)=x^2 +1.

f(1) + f(2) + ...+ f(2011)= $1^2+2^2+...+2011^2+2011\cdot 1=\dfrac{2011\cdot 2012\cdot 4023}{6}+2011$

S-a utilizat formula $1^2+2^2+...+n^2=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$

b) $\sum_{k=2}^{2011}\frac{2}{f(k)-2}=\sum_{k=2}^{2011}\frac{2}{k^2-1}=\sum_{k=2}^{2011}\frac{k+1-(k-1)}{(k-1)(k+1)}=\sum_{k=2}^{2011}(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1})=$

$=\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+...+\frac{1}{2009}-\frac{1}{2011}+\frac{1}{2010}-\frac{1}{2012}==\frac{3}{2}-\frac{1}{2011}-\frac{1}{2012}.$

34). $x\to\frac{1}{x}$ rezultă $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}\ f(1+\frac{1}{x})+3f(1+x)=\frac{1}{x^2}+3x^2+2(\frac{1}{x}+3x).$

$f(x+1)=a,\ f(1+\frac{1}{x})=b$ rezultă $f(x+1)=x^2+2x$.

Din x+1 = t, t real, obţinem f(t)= t^2 -1 adică f(x)= x^2 -1, pentru orice x număr real nenul.

Atunci, $\sum_{k=2}^{2011}\frac{1}{f(k)}=\sum_{k=2}^{2011}\frac{1}{k^2-1}=\sum_{k=2}^{2011}\frac{k+1-(k-1)}{2(k-1)(k+1)}=\sum_{k=2}^{2011}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}\right).$

Dând valori lui k de la 2 la 2011 se obţine: $\sum_{k=2}^{2011}\frac{1}{f(k)}=\sum_{k=2}^{2011}\frac{1}{k^2-1}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2011}-\frac{1}{2012}\right).$

35). Se scriu relaţiile lui Viete: $x_1+x_2=2,\ x_1\cdot x_2=4$.

$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1\cdot x_2=4-8=-4;$

$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1^2\cdot x_2^2}=\frac{-4}{16}=-\frac{1}{4}$ iar $\frac{1}{x_1^2+x_2^2}=\frac{1}{-4};$

$x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)(x_1^2-x_1x_2+x_2^2)=-16;$

Cum $x^3+2^3=(x+2)(x^2-2x+2^2)$ şi x_1,x_2 verifică ecuaţia f(x)=0 , rezultă $x_1^3=-8,\ x_2^3=-8$

Atunci, $x_1^{2013}+x_2^{2013}=\left(x_1^3\right)^{671}+\left(x_2^3\right)^{671}=(-8)^{671}+(-8)^{671}=-2\cdot8^{671}=-2^{2014};$

Ecuaţia dată este echivalentă cu $|2x-1|-|x+3|+|x-2|=0;$

Singurele soluţii bune sunt 0 şi 3. $S=\{0;3\}$. Explicitare tabel.

36). a) $(f\circ f)(x)=4x-12;\quad (f\circ f\circ f)(x)=8x-28;\qquad 8x-28=0\Rightarrow x=\frac{7}{2};$

b) Cazul I. $f(x)\le0\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta\le0\Rightarrow-3m^2-6m+9\le0\Rightarrow m\in(-\infty,-3]\cup[1,\infty)\\ m+2\langle0\Rightarrow m\langle-2\end{cases}\Rightarrow m\in(-\infty,-3]$

Pentru m = -2, $\Rightarrow3x-3\le0\Rightarrow x\le1$. Rezultă, $m\in(-\infty;-3]\cup\{-2\}$.

Cazul II nu conduce la nicio soluție:

$$f(x)\le0\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta\ge0\Rightarrow-3m^2-6m+9\ge0\Rightarrow m\in[-3;1]\\ m+2\langle0\Rightarrow m\langle-2\\ f(1)\le0\Rightarrow m\le-2\\ 1\le-\frac{b}{2a}\Rightarrow m\in(2;3]\end{cases}\Rightarrow m\in\varnothing$$

c) Pentru m = -1 $\Rightarrow x^2+2x-2=0\ \Rightarrow\begin{cases}x_1+x_2=-2\\ x_1\cdot x_2=-2\end{cases}\Rightarrow x_1^2+x_2^2=8$.

$S=\frac{\left(x_1^2+1\right)^2+\left(x_2^2+1\right)^2}{\left(x_1^2+1\right)\left(x_2^2+1\right)}=\frac{\left(x_1^2+1+x_2^2+1\right)^2-2\left(x_1^2+1\right)\cdot\left(x_1^2+1\right)}{x_1^2\cdot x_2^2+x_1^2+x_2^2+1}=\frac{74}{13}.$

37). Se scriu relațiile lui Viete: $\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{1}{a} \\ x_1 \bullet x_2=-\dfrac{a+1}{a} \end{cases}$. Din

$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=\dfrac{1}{a^2}+2\cdot\dfrac{a+1}{a}=\left(\dfrac{1}{a}+1\right)^2+1$,

$x_1^4+x_2^4=(x_1^2+x_2^2)^2-2x_1^2\cdot x_2^2=\left(\dfrac{1}{a}+1\right)^4+2\left(\dfrac{1}{a}+1\right)^2+1-2\left(\dfrac{1}{a}+1\right)^2=\left(\dfrac{1}{a}+1\right)^4+1=\left(x_1+x_2+1\right)^4+1$.

38). Notăm $x+y=a$ și $x\cdot y=b$, atunci, sistemul dat devine: $\begin{cases} a+b=11 \\ a\cdot b=30 \end{cases}\Rightarrow$

$t^2-11t+30=0\Rightarrow t_1=5,\ t_2=6$. $(a,b)\in\{(5;6),(6;5)\}\Rightarrow\ (x,y)\in\{(1;5),(5;1),(2;3),(3;2)\}$.

39). Se foloseşte formula fundamentală a trigonometriei: $\sin^2 x+\cos^2 x=1,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Rezultă, $\sin^2 x=\dfrac{1}{3},\ x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)\Rightarrow \sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$; $\Rightarrow \cos x=\sqrt{1-\sin^2 x}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$;

$\sin 2x=2\sin x\cdot\cos x=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

40). $\left(\sin\dfrac{\pi}{8}-\cos x\right)^2=\sin^2\dfrac{\pi}{8}-2\sin\dfrac{\pi}{8}\cdot\cos x+\cos^2 x$.

$\left(\cos\dfrac{\pi}{8}-\sin x\right)^2=\cos^2\dfrac{\pi}{8}-2\cos\dfrac{\pi}{8}\cdot\sin x+\sin^2 x$.

Atunci, relația din ipoteză devine: $1-2\left(\sin\dfrac{\pi}{8}\cdot\cos x+\sin x\cdot\cos\dfrac{\pi}{8}\right)+1=2$.

$\Rightarrow \sin\left(\dfrac{\pi}{8}+x\right)=0$. $\Rightarrow \dfrac{\pi}{8}+x=\pi\Rightarrow x=\dfrac{7\pi}{8}$. $S=\left\{\dfrac{7\pi}{8}\right\}$.

41). $\sin(B+C)=\sin(180-A)=\sin A=\sin 30^0=\dfrac{1}{2}$ sau

$\sin(B+C)=\sin(180-30)=\sin 150=\sin 30^0=\dfrac{1}{2}$.

42). Din $\cos 2A+\cos 2C=2\cos 2B\Rightarrow$, de aici rezultă $1-2\sin^2 A+1-2\sin^2 C=2(1-2\sin^2 B)$

$\sin^2 A+\sin^2 C=2\sin^2 B\Rightarrow\ \left(\dfrac{a}{2R}\right)^2+\left(\dfrac{c}{2R}\right)^2=2\left(\dfrac{b}{2R}\right)^2\Big|\cdot 4R^2\Rightarrow\ a^2+c^2=2b^2\Rightarrow c.c.t.d.$

43). $AB=\sqrt{(\sin\dfrac{\pi}{7}-\sin x)^2+(\cos\dfrac{\pi}{7}-\cos x)^2}=\sqrt{2}$.

$(\sin\dfrac{\pi}{7})^2-2\sin\dfrac{\pi}{7}\cdot\sin x+(\sin x)^2+(\cos\dfrac{\pi}{7})^2-2\cos\dfrac{\pi}{7}\cdot\cos x+(\cos x)^2=2$.

$\Rightarrow 1-2(\cos x\cdot\cos\dfrac{\pi}{7}+\sin x\cdot\sin\dfrac{\pi}{7})+1=2$. $\Rightarrow -2\cdot\cos(x-\dfrac{\pi}{7})=0\Rightarrow x-\dfrac{\pi}{7}=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow x=\dfrac{9\pi}{14}\in(0;\pi)$.

44). Se foloseşte teorema cosinusului.

$(b^2+c^2-a^2)\cdot tgA=2bc\cdot\cos A\cdot tgA$, ; $(a^2+c^2-b^2)\cdot tgB=2ac\cdot\cos B\cdot tgB$,

$(b^2+c^2-a^2)\cdot tgA=(a^2+c^2-b^2)\cdot tgB\Leftrightarrow 2bc\cdot\cos A\cdot tgA=2ac\cdot\cos B\cdot tgB\Rightarrow b\sin A=a\sin B$

$\Rightarrow \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$,(teorema sinusurilor). Adevărat.

45). Se foloseşte teorema cosinusului şi teorema sinusului:

$2aR\cdot\sin(B-C)=2aR(\sin B\cdot\cos C-\sin C\cdot\cos B=)$

$=2aR(\frac{b}{2R}\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}-\frac{c}{2R}\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac})= =\frac{1}{2}\left(a^2+b^2-c^2-a^2-c^2+b^2\right)=b^2-c^2.$

46). a) Din $x=2-m$ şi $y=m+3$ rezultă $m=y-3$ de unde $x=2-y+3\Rightarrow$ mulţimea punctelor din plan e reprezentată de dreapta $x+y=5$. b) Coordonatele punctului M sunt $M(2-m;m+3)$.

Din triunghiul AMB dreptunghic rezultă $AM^2+BM^2=AB^2$. (*)

$AM^2=(m-3)^2+(-m-1)^2=2m^2-4m+10$; $BM^2=(m+1)^2+(1-m)^2=2m^2+2$,

$AB^2=(3+1)^2+(4-2)^2=20$. Din (*) rezultă $m^2-m-2=0\Rightarrow m\in\{-1;2\}$. Rezultă $M(3;2)$ sau $M(0;5)$. c) $\overrightarrow{OM}(2-m,m+3)$, $\overrightarrow{AB}(4,2)$, Vectorii $\overrightarrow{OM}$ şi $\overrightarrow{AB}$ sunt ortogonali, atunci $(2-m)\cdot4+(m+3)\cdot2=0$, Rezultă m=7.

47). $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{2}\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})=\frac{1}{2}\left(OC^2-OB^2\right)$,

$\overrightarrow{ON}\cdot\overrightarrow{CA}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}}{2}\cdot(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC})=\frac{1}{2}\left(OA^2-OC^2\right)$, $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=\frac{1}{2}\left(OB^2-OA^2\right)$.

Prin adunarea celor trei relaţii se obţine concluzia.

48). $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BN}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{SM}\right)\cdot\overrightarrow{BC}+\left(\overrightarrow{BS}+\overrightarrow{SN}\right)\cdot\overrightarrow{CA}+\left(\overrightarrow{CS}+\overrightarrow{SP}\right)\cdot\overrightarrow{AB}=$

$=\overrightarrow{AS}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BS}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CS}\cdot\overrightarrow{AB}+(\underbrace{\overrightarrow{SM}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{SN}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{SP}\cdot\overrightarrow{AB}}_{=0})=$

s-a folosit faptul că dacă doi vectori sunt ortogonali atunci , produsul lor scalar este 0.

$=\overrightarrow{AS}\cdot\overrightarrow{BC}+(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AS})\cdot\overrightarrow{CA}+(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AS})\cdot\overrightarrow{AB}= =\overrightarrow{AS}\cdot(\underbrace{\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}}_{=0})+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}=$

$=\overrightarrow{AS}\cdot\vec{0}+\cancel{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}}-\cancel{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BA}}=0.$

Bibliografie

1. Adrian Stan. Sinteze matematice. Editura Rafet. Rm. Sărat. 2007.
2. Adrian Stan, colab. Matematică. Ghid de pregătire M2. Bacalaureat 2010. Editura Campion. Bucureşti. 2010.
3. Adrian Stan. Memorator la matematică cu exemple. Editura Editgraph. Buzău. 2012.
4. Adrian Stan şi colab. Teste la matematică Clasele IX – X. Editura Editgraph. Buzău. 2013.
5. Adrian Stan şi colab. Matematică. Bacalaureat 2015. Editura Campion. Bucureşti. 2014.
6. Adrian Stan şi colab. O scurtă istorie a matematicii. Editura Editgraph. Buzău.2015.
7. Adrian Stan. Matematică. Clasele IX- XII. Editura Editgraph. Buzău. 2015.
8. Anne Rooney. The Story of Mathematics. Arcturus Publishing Limited. London.2013
9. Becheanu M., Grigore Gh.,Ianuş S.,Ichim I. Probleme de algebră, analiză matematică şi geometrie. Editura Cartea Românească. 1991.
10. Bordieanu Nicolae, Bordieanu Mona. Culegere de exerciţii şi probleme de algebră, clasele IX- XII. Editura Conexiuni. Bacău. 2001.
11. Burtea Marius, Burtea Georgeta. Manual de matematică clasa a IX-a. Editura Carminis. Piteşti. 2004.
12. Burtea Marius, Burtea Georgeta. Culegere de exerciţii şi probleme Matematică M2. Editura Campion. Bucureşti. 2009.
13. Coşniţă C., Turtoiu F. Probleme de algebră. Editura Tehnică . Bucureşti. 1989.
14. Dan Brânzei. Matematică. Manual pentru clasa a IX-a. Editura Sigma. Bucureşti. 1999.
15. Lupaş Luciana, Lupaş Alexandru. Probleme de algebră. Editura Gil. Zalău. 2002.
16. Marian Andronache. Matematică pentru clasa IX-a. Editura Art.Bucureşti. 2005.
17. Marin Chirciu, Inegalități trigonometrice. Editura paralela 45. Pitești. 2016.
18. Mirică Ştefan şi colaboratori, Matematică, manual pentru clasa a XI-a. Editura Aramis. Bucureşti. 2009.
19. Năstăsescu C., Niţă. C, Brandiburu M., Joiţa D. Exerciţii şi probleme de algebră. Editura Didactică şi Pedagogică. Bucureşti. 1983.
20. Fără autor. Ghid metodic. Bacalaureat 2009. M2. Editura Gil . Zalău. 2009.

Au mai apărut de același autor

- **Probleme alese de matematică pentru clasele V-VIII.** Editura Rafet. Rm. Sărat.2007
- **Sinteze matematice, clasele IX-XII,** Editura Rafet. Rm. Sărat. 2007
- **Metode şi tehnici în asigurarea calităţii evaluării la matematică în gimnaziu şi liceu.** Editura Rafet. Rm. Sărat. 2009.
- **Matematică. Ghid pentru pregătire M2. Bacalaureat 2010**. (coautor). Editura Campion. Bucureşti. 2010.
- **Polinoame. Proprietăţi aritmetice.** Editura EditGraph. Buzău. 2010.
- **Algebra, clasa a XI-a**. Editura Editgraph, Buzău. 2010.
- **Matematică- Olimpiadele scolare, clasa a V-a. 2010**.(coautor). Editura Carminis, Pitesti. 2010.
- **Matematică- Olimpiadele scolare, clasa a VI-a**, **2010** (coautor). Editura Carminis, Pitesti. 2010.
- **Matematică- Olimpiadele scolare, clasa a VII-a,2010.** (coautor). Editura Carminis, Pitesti. 2010
- **Matematică- Olimpiadele scolare, clasa a VIII-a, 2010** (coautor). Editura Carminis, Pitesti. 2010.
- **Experienţe utile în predarea matematicii.** (coautor). Editura Teocora. Buzău. 2010.
- **Ghid de pregătire online Bacalaureat 2011 Matematică M1**. (coautor). pe **www.mateinfo.ro**
- **Memorator la matematică cu exemple.** Editura EditGraph. Buzău. 2012.
- **Teste la matematică. Clasele IX-X.** (coautor). Editura EditGraph. Buzău. 2013.
- **Culegere Online la Matematică M1 pentru Bacalaureat**, pe **www.mateinfo.ro**, (coautor). 2014;
- **Matematică M2. Clasa a XI-a**. (coautor). Editura Campion. Bucureşti. 2014.
- **Matematică. Bacalaureat 2015**. (coautor). Editura Campion. Bucureşti. 2014.
- **O scurtă istorie a matematicii**. (coautor). Editura EditGraph. Buzău. 2015.
- **Matematică. Clasele IX-XII.** Editura EditGraph. Buzău. 2015.
- **Repere educaţionale în şcoala românească.** (coautor). Editura EditGraph. Buzău. 2016.

9 786066 634397
ISBN: 978-606-663-439-7