

IDENTITĂȚI ALGEBRICE

Fie $a, b, c, d \in \mathbf{R}$. Atunci:

1. $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

2. $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

3. $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$, $\forall a, b \in \mathbf{R}$ și $n \in \mathbb{N}^*$

4. $a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots - ab^{n-2} + b^{n-1})$, $\forall a, b \in \mathbf{R}$ și $n \in \mathbb{N}$,

n impar

5. $(a + b)^n = M_a + b^n = a^n + M_b = a^n + M_a \cdot b + b^n$, $\forall a, b \in \mathbf{Z}$ și $n \in \mathbb{N}^*$

6. $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$

7. $(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(a + c)(b + c)$

8. $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$

9. Identitatea lui Lagrange: $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$

10. Identitatea Sophie Germain: $a^4 + 4b^4 = (a^2 + 2b^2 - 2ab)(a^2 + 2b^2 + 2ab)$

PROBLEME

1. Arătați că $10^{2n} - 1$ este divizibil cu 33 pentru orice număr natural impar.

2. Arătați că numărul $a = 2021^4 + 4^{2021}$ este compus.

3. Dacă numărul a este egal cu suma a două pătrate, arătați că numărul $41a$ este egal cu suma a două pătrate.

4. Determinați perechile de cifre nenule (a, b) , pentru care numărul $A = 1 + \underbrace{aa \dots a}_{2022} \underbrace{bb \dots b}_{2022}$ este pătrat perfect.

G.M.B.

5. Arătați că numărul $\sqrt{n(n^4 - 1)} + 2$ este irațional, pentru orice n număr natural.

Supliment G.M.B.

6. Determinați numerele naturale n pentru care există un număr natural prim p , $p \geq 3$, astfel încât numărul $\sqrt{n + p} - \sqrt{n}$ să fie rațional.

G.M.B.

7. Aflați numerele prime p și q care verifică relația $2(p^2 + q^2) = p + q + 4pq$.

G.M.B.

Bibliografie:

1. Artur Bălăucă – OLIMPIADE, CONCURSURI ȘI CENTRE DE EXCELENȚĂ – clasa a VII-a, Editura TAIDA, Iași, 2016

2. Laurențiu Panaitopol, Alexandru Gica – Probleme de aritmetică și teoria numerelor – Editura GIL, Zalău, 2006

3. Maranda Linț ș.a. – Matematică de excelență – clasa a VII- a, Editura PARALELA 45, Pitești, 2013

4. Mihaela Berindeanu ș.a. – Algebră excelență – clasa a VII-a, Editura GIL, Zalău, 2020

5. Colecția GAZETA MATEMATICĂ
6. Colecția R.M.T.
7. www.olimpiade.ro
8. www.mategl.com

Prof. Gheorghe Dârstaru