Modul. Radicali – Metode de abordare a unor probleme de concurs

1. Se consideră numerele reale x, y, z și notăm $a = |x+2| + |y+2| + |z+2|$ și $b = |x| + |y| + |z|$.
   a) Să se arate că $a + b \geq 6$.
   b) Știind că $x, y, z \in [-3; 1]$ și $x + y + z = -3$, să se arate că $a + b \leq 10$.

   Soluție propusă:

   a) $a + b = |x+2| + |y+2| + |z+2| + |x| + |y| + |z|$.
   Arătăm că $|x+2| + |x| \geq 2$ pentru orice număr real x. Pentru aceasta vom considera cazurile i) $x \in (-\infty, -2]$ când vom avea $-x - 2 - x \geq 2$, adică $-2x \geq 4$ ceea ce înseamnă $x \leq -2$, evident adevărat.
   ii) $x \in (-2,0)$ când avem $x + 2 - x \geq 2$, adică $2 \geq 2$, adevărat.
   iii) $x \in [0, \infty)$ când avem $x + 2 + x \geq 2$, adică $2x \geq 0$, ceea ce înseamnă $x \geq 0$. Astfel și $|y+2| + |y| \geq 2$ și $|z+2| + |z| \geq 2$, deci prin însumarea relațiilor vom obține cerința.
   b) În primul rând observăm că avem următoarele posibilități pentru $|x+2| + |x|$ (și la fel pentru $|y+2| + |y|$ respectiv $|z+2| + |z|$)
   i)dacă $x \in [-3, -2)$ rezultă $|x+2| + |x| = -x - 2 - x = -2x - 2 \in (2,4]$
   ii) dacă $x \in [-2,0]$ rezultă $|x+2| + |x| = x + 2 - x = 2$
   iii) dacă $x \in (0,1]$ rezultă $|x+2| + |x| = x + 2 + x = 2x + 2 \in (2,4]$
   Dacă $x, y, z \in [-3; 1]$ rămâne să arătăm că relația $x + y + z = -3$ poate avea loc numai dacă cel puțin unul din numerele x, y , z este în intervalul $[-2,0]$. Presupunem că toate sunt în afara acestui interval, considerând că $x \leq y \leq z$.
   Putem avea următoarele situații
   i) $x, y, z \in [-3, -2)$ ceea ce conduce la $x + y + z \in [-9, -6)$ contradicție cu $x + y + z = -3$
   ii) $x, y \in [-3, -2)$ iar $z \in (0,1]$ ceea ce conduce la $x + y + z \in (-6, -3)$ contradicție cu $x + y + z = -3$
   iii) $x \in [-3, -2)$ iar $y, z \in (0,1]$ ceea ce conduce la $x + y + z \in (-3,0)$ contradicție cu $x + y + z = -3$
   iv) $x, y, z \in (0,1]$ ceea ce conduce la $x + y + z \in (0,3]$ contradicție cu $x + y + z = -3$

   Astfel rezultă că unul din numere este în intervalul $[-2,0]$ iar $a + b \leq 4 + 2 + 4 = 10$.

2. Numerele reale a,b,c,d,e au proprietatea
   $|a-b| = 2|b-c| = 3|c-d| = 4|d-e| = 5|e-a|$.
   Să se arate că a=b=c=d=e.

   Solutie propusă:

   Fie $|a-b| = 2|b-c| = 3|c-d| = 4|d-e| = 5|e-a| = k$. Astfel vom avea
   $|a-b| = k, |b-c| = \frac{k}{2}, |c-d| = \frac{k}{3}, |d-e| = \frac{k}{4}, |e-a| = \frac{k}{5}$ ceea ce înseamnă
   $a - b = \pm k, b - c = \pm\frac{k}{2}, c - d = \pm\frac{k}{3}, d - e = \pm 4, e - a = \pm\frac{k}{5}$.
   $Pentru\ k = 0$ obținem egalitatea cerută.
   $Pentru\ k \neq 0$ obținem $\pm k \pm \frac{k}{2} \pm \frac{k}{3} \pm \frac{k}{4} \pm \frac{k}{5} = 0$. Dacă împărțim prin $k \neq 0$ obținem

$\pm 1 \pm \frac{1}{2} \pm \frac{1}{3} \pm \frac{1}{4} \pm \frac{1}{5} = 0$ ceea ce ar conduce la $\pm \frac{1}{5} = \pm \frac{p}{12}$, cu $p \in Z$, evident imposibil.

3. Știind că m și n sunt numere naturale și $m + 2n = n^2 + \sqrt{m^2 + 2m + |2m + 1 - 2n|}$, arătați că $|m - n| \leq 1$.
   Soluție propusă:
   Avem $|2m + 1 - 2n| \geq 1$, deoarece $2m$ și $2n$ sunt pare, astfel că
   $\sqrt{m^2 + 2m + |2m + 1 - 2n|} \geq \sqrt{m^2 + 2m + 1} = m + 1$.
   Dar $m + 2n - n^2 = m + 1 - (1 - 2n + n^2) = m + 1 - (n - 1)^2 \leq m + 1$
   Cum relația se scrie $m + 2n - n^2 = \sqrt{m^2 + 2m + |2m + 1 - 2n|}$, rezultă că egalitatea are loc doar când ambii membri sunt egali cu $m + 1$.
   Obținem astfel $2n - n^2 = 1$, ceea ce implică n=1 și deci $|2m + 1 - 2n| = 1$, care conduce la $m \in \{0,1\}$.
   Vom avea astfel $|m - n| \in \{0,1\}$, deci $|m - n| \leq 1$.

Bibliografie:

Andronache, M., Gologan, R.,Schwarz, D., Șerbănescu, D.- Olimpiada de matematică 2008- 2012- Etapele Județeană și Națională- Editura SIGMA 2012.